

Homogenization Results for Reflecting Diffusions on a Continuum Percolation

February 2024

Yutaka Takeuchi

報告番号	甲 乙 第	号	氏 名	竹内裕隆
主 論 文 題 名 :				
Homogenization Results for Reflecting Diffusions on a Continuum Percolation (連続パーコレーション上の反射壁を持つ拡散過程に関する均一化)				
(内容の要旨)				
熱拡散や電流の流れは、媒質内の不純物により複雑な挙動をする。ランダム媒質の研究では不純物が乱雑に混ざっていると解釈し、これらの現象を調べる。巨視的・粗視的にはランダム性は失われ、熱拡散や電流の流れ等の挙動が単純に見える事があり、拡散係数や電気抵抗を求める事ができる。これを均一化と言う。ランダム媒質における均一化として、annealed な結果と quenched な結果がある。直感的には、annealed result は媒質の平均に対する均一化であり、quenched result は媒質を固定する毎に均一化が成り立つというものである。quenched result が成り立てば annealed result が成り立つため、quenched result のほうが強い性質である。 本論文では、連続パーコレーション上の反射壁を持つ拡散過程に対する均一化の研究を行なった。連続パーコレーションはサイト・パーコレーションを連続モデルに拡張したものであり、1990年代に Tanemura により annealed invariance principle が証明され、Osada と Saitoh によっても研究がなされたが、quenched invariance principle に関してはこの30年ほど未解決のままであった。しかし、近年 quenched result に関する研究が発展しており、その手法を用いる事によって著者は quenched invariance principle と局所中心極限定理の証明に成功した。 quenched invariance principle はランダム媒質上を動くマルコフ過程に関する極限定理である。証明には、harmonic embedding と呼ばれる当分野では基本的な手法を用いる。この方法の鍵となるものは corrector である。corrector は Poisson 型方程式の解であり、これにより拡散過程をマルチンゲール項と誤差項に分解する。マルチンゲールに関する収束は基本的な議論から容易に示すことができる。そのため、誤差項が0に収束する事を示せば十分であるが、これは corrector の増大度が線形より劣る事から従う。この性質は sublinearity と呼ばれる。 局所中心極限定理は quenched invariance principle をより精密化した結果であり、拡散過程の推移密度に対する時空間に関して局所一様な収束を示す物である。証明の鍵となるのは放物型 Harnack 不等式である。quenched invariance principle の証明において corrector の sublinearity は楕円型 Harnack 不等式を考える事によって導かれる。局所中心極限定理においては、時間を含めての評価をする為に放物型 Harnack 不等式を用いる必要がある。放物型 Harnack 不等式からは推移密度のヘルダー連続性が従い、これと quenched invariance principle から局所中心極限定理を示す事ができる。 主定理の証明は主に Chiarini と Deuschel による 2015年と2016 年の論文で用いられた方法を採用する。彼らは当該論文において定常エルゴード的だが退化した媒質上の拡散過程に関する quenched invariance principle と局所中心極限定理を解析的な手法を用いて示した。本論文と彼らの論文における相違点は、本論文では反射を持つ確率過程を扱うため、境界の影響を考慮しなければならない点である。著者は幾何的な条件を課す事で Sobolev 不等式と Poincare 不等式を導く事により、Chiarini と Deuschel が用いた手法を適用する事に成功した。				

Thesis Abstract

No. _____

Registration Number	☒ “KOU” ☐ “OTSU” No. _____ *Office use only	Name	Yutaka Takeuchi
Thesis Title			
Homogenization Results for Reflecting Diffusions on a Continuum Percolation			
Thesis Summary			
Impurities in media cause complex behavior of heat diffusion and electrical flow. In the study of random media, one considers that impurities are mixed at randomly and studies such behavior. At the macroscopic scale or coarse aspect, one may see that the behavior becomes simple. This phenomenon is called a homogenization. There are two types of results for homogenization in random media: an annealed result and a quenched result. Roughly speaking, the former is a homogenization for an averaged media. On the other hand, the latter is a homogenization for each fixed media. The latter is stronger than the former since a quenched result implies an annealed result. In this thesis, we study a homogenization for reflecting diffusions in a continuum percolation cluster. Continuum percolation is an analogy of site percolation. In the 1990s, Tanemura showed the annealed invariance principle and Osada-Saitoh also studied an invariance principle. However, the quenched invariance principle is open for 30 years. Recently, the study of a quenched homogenization is developed and the author proved the quenched invariance principle and the local central limit theorem. A quenched invariance principle is a limit theorem for a Markov process in random media. To obtain the quenched invariance principle, we use a harmonic embedding. This is a basic tool to show the invariance principle. A key ingredient of this approach is the corrector, which is the solution of a Poisson-type equation. Using the corrector, the Markov process is decomposed into a martingale term and an error term. An invariance principle for the martingale part can be easily shown by standard arguments. Thus, to obtain the quenched invariance principle for the process, it suffices to show that the error part converges to zero. This follows from the sublinearity of the corrector. A local central limit theorem is a limit theorem for the transition density of the process, which shows the convergence of the density uniformly and locally in time-space. A key tool of the proof is the parabolic Harnack inequality. Thanks to this inequality, one can show the Holder continuity of the density. It follows from this and the quenched invariance principle, we can prove the local central limit theorem. Throughout the proof, we mainly follow the argument that appeared in Chiarini and Deuschel (2015, 2016). They showed the quenched invariance principle and the local central limit theorem for diffusion processes in degenerate and unbounded stationary and ergodic media. In their paper, they used an analytical approach. Different from their papers, we need to consider the boundary effect. Assuming geometric conditions, we deduced a Sobolev and a Poincare inequality and proved the results as in Chiarini and Deuschel (2015, 2016).			