

学位論文 博士（理学）

無限個のコヒーレント状態の識別について

2018年4月

慶應義塾大学大学院理工学研究科

川久保 龍一郎

## 目次

1	導入	1
2	主題と構成	8
3	補論：量子力学の確率的性格について	10
第 1 章 量子測定理論		13
1	記号と用語	15
2	物理系, 操作, 測定	18
3	測度論的な記述	27
第 2 章 識別性		35
1	定義	37
2	ベクトル族の諸性質	42
3	定理	45
4	証明	46
5	補論：定理の前提について	58
第 3 章 最適性		65
1	識別確率の最大値	66
2	最適識別の擾乱	69
第 4 章 コヒーレント状態の識別性		75
1	正準コヒーレント状態	76
2	候補状態の個数と識別性	81
3	von Neumann 格子	84

4	von Neumann 格子の識別	87
5	補論：幾つかの例	91
	結論	101
	謝辞	104
	付録	105
A	コヒーレント光の識別実験	106
B	一次独立性, 極小性, Riesz-Fischer 性, 正規直交性	111
C	Stinespring 拡張	113
D	端点性	123
E	識別再構成測定	131
	参考文献	137
	記号表	143

# 序論

## 1 導入

現代の物理学研究者にとって量子力学は常識である。日々目にする日常的な出来事から極限的な環境での出来事まで、量子力学で説明されることはあまりに多い。そのため量子力学の妥当性を根本から疑う研究者や学生はいないと言ってよいだろう。著者もそうである。とはいっても、量子力学の諸概念の中には日常感覚からすると奇異に感じられるものが少なからずある。とりわけ量子状態の不確定性は、量子論建設の黎明期から注目を集め、測定論の言葉で度々言及されてきた。そして今では不確定性に関する研究が、量子測定理論における主要な研究の系譜の一つをなすに至っている。本研究も大きく見ればこの系譜に属するものと思う。不確定性とは何か。これが本研究の背後にある問題意識である。そして本論文の最後にはこの疑問に対する一つのささやかな解答が与えられることになる。

\*

量子状態の不確定性と聞いて、多くの研究者が想起するのは W. K. Heisenberg にはじまる不等式の議論であろう。そこでまずこの議論を概観することからはじめる。そのあとでこの種の議論と比較しつつ本研究の立場を明らかにしてゆく。

ある種の不等式によって不確定性を捉えようとする議論は、Heisenberg の 1927 年の論文『量子論的な運動学および力学の直観的内容について』[Hei27] に起源を有する。1927 年がどのような年であったかを確認しておくことは無意味ではない。量子力学の端緒は M. K. E. L. Planck がエネルギー量子を用いて黒体輻射のスペクトルを説明したことに帰される。1900 年のことである。その後、古典力学に量子化条件を接ぎ木して諸現象を説明する前期量子論の時代が四半世紀ほど続く。前期量子論を経て、1925 年には Heisenberg が中心となり行列力学として量子力学の基本的枠組を整備し、1926 年には E. R. J. A. Schrödinger が波動力学を発見して行列力学との同等性を示している。ここで取り上げる Heisenberg の 1927 年の論文は、したがって量子力学の基本的枠組の整備が一段落した時点で書かれたものである。題名が示唆する通り、この論文は量子力学が孕んでいる奇妙な性質について反省的に考察したものである。ここで彼は不確定性に関する二つの重要な議論を行っている。

一つ目は、ガンマ線顕微鏡についての思考実験である。ガンマ線を電子に衝突させ、反射されたガンマ線を顕微鏡のレンズで受けて電子の位置を測定する。その過程を Compton 効果に基づいて考察することで次が得られる。

$$\varepsilon(Q)\eta(P) \sim h. \quad (0.1.1)$$

ここで  $\varepsilon(Q)$  は測定により得られる座標の精度、 $\eta(P)$  はガンマ線の衝突を受けた電子の運動量の擾乱の程度であり、 $h$  は Planck 定数である。この議論によれば、電子の座標だけならこれを幾らでも正確に測定することができる。しかしその場合には、上記の近似等式が示すとおり、測定の効果によって電子の運動量は激しく擾乱され不定となる。このようにして、測定に基づく選別を通じて

座標と運動量がともに確定した電子を準備できないことが結論される。この考察の一般化を不確定性原理と呼んでいる。結論は妥当であっても、この議論には問題点もある。Compton 効果を援用する以上、この思考実験が古典力学的な粒子描像に立脚している点である。近似等式 (0.1.1) は当時既に整備されていた量子力学の一般論によるものではない。Heisenberg はこの問題点を克服するため、古典的な粒子描像を援用せず量子力学だけに立脚して上式を証明しようとした。それが二つ目の議論である。

量子力学の一般論によれば、純粋状態と呼ばれる種類の量子状態は波動函数により記述される。二つ目の議論の出発点は、次の形の波動函数  $\psi$  である。

$$\psi(q) = \exp \left[ -\frac{(q - q')^2}{2q_1^2} - \frac{2\pi i}{h} p'(q - q') \right]. \quad (0.1.2)$$

ただし、座標変数  $q$  に依存しない規格化定数は略した。この波動函数の座標についての密度函数  $|\psi(q)|^2$  の標準偏差は  $\sigma(Q) = q_1/\sqrt{2}$  である。  $q_1$  が水素の原子半径のような小さな値であれば、上記波動函数は座標の値がおおよそ定まっている系を表す。彼はこの波動函数を Fourier 変換し運動量の密度函数を求め、その標準偏差  $\sigma(P)$  が次式で与えられることを示した。

$$\sigma(Q)\sigma(P) = \frac{h}{4\pi}. \quad (0.1.3)$$

彼は不等式を書き下していない。しかし、今日から見ればこの等式は Gauß 函数型の波束 (0.1.2) がいわゆる Heisenberg の不等式の等号を成立させることを示している。

Heisenberg 自身、第二の議論が第一の議論を正当化すると述べているし、今日でもそのように理解されることが少なからずある。しかし、これら二つの議論は峻別されるべきものである。第一の議論は、電子の座標を測定するための物理的な過程を明らかにし、そのような測定過程の不可避な帰結として電子の運動量が擾乱を受けることを示そうとしている。測定過程が系に擾乱を与えることが問題なのである。これに対して第二の議論は測定とは関係ない。単にある瞬間の座標密度函数と運動量密度函数の標準偏差の間に一定の関係があることを述べているに過ぎない。第一の測定論的な議論はすぐには一般化されなかったが、第二の数学的な議論は直ちに一般化された。次にこれらの議論をごく簡単に説明する。

第二の数学的議論については、任意の状態  $\rho$  と物理量  $A, B$  に関して不等式

$$\sigma_\rho(A)\sigma_\rho(B) \geq \frac{|\langle AB - BA \rangle_\rho|}{2} \quad (0.1.4)$$

が成り立つことが証明された [Rob29, Sch30, Rob34]。ここで  $\langle X \rangle_\rho$  は状態  $\rho$  における物理量  $X$  の期待値を表し、 $\sigma_\rho(X)$  は標準偏差を表す。この不等式が非自明な結論をもたらすのは右辺の交換子  $AB - BA$  が 0 でない場合、つまり  $A$  と  $B$  が非可換な場合である。こうして不確定性が作用素の非可換性の帰結であることが認識されるようになった。

一方、第一の測定論的な議論が十分な一般性をもって数理的になされるまでには時間を要した。量子測定理論に基づいてこの種の不等式が導出されたのは、先に引いた Heisenberg の論文から 70 年以上も経ったあとである。<sup>\*1</sup> 小澤の不等式 [Oza03, Oza04] や渡辺・沙川・上田 [WSU11]

<sup>\*1</sup> それ以前にも波束の収縮といった現象の解釈について議論や、座標と運動量の同時測定に関して具体

の不等式がその例である。今日ではこれらの他にも誤差や擾乱にまつわる不等式が膨大に提案されている。

結局、Heisenberg の議論は測定論的な議論と（必ずしも測定論との関係は明らかでない）数学的な議論からなる。Heisenberg 自身は不等式を書き下してはいないが、不確定性を不等式によって捉える議論としてこれら二つの議論は発展した。数学的な議論は直ちに一般化され、不確定性が物理量の非可換性に根ざすことが明らかにされた。また、測定論的な議論も量子測定理論に基づいて今日では十分な一般性をもって研究されるに至っている。

\*

上に見た不等式の議論は量子状態の不確定性を論じる議論としてよく知られている。この議論では Heisenberg 型の不等式の右辺に Planck 定数などの不確定性を特徴づける量が現れる。しかし、不確定性は不等式の右辺ばかりに現れるものでもない。不等式の議論と対照しえるものに識別性の議論がある。各々の状態が不確定性を帯びた曖昧なものであれば、これらを互いに識別しようとしても上手くいかなくなる。つまり、不確定性は状態の識別にも影響する。本研究はこのような識別性の観点から不確定性を捉えようとするものである。

不等式の議論と識別性の議論は、どちらも不確定性の理解に資する点では共通しているが、アプローチの仕方には違いがある。不等式の議論では、単一の量子状態の性質をどれだけ詳しく知り得るかを問う。これに対して識別性の議論では複数の量子状態を想定し、これらの相互関係に不確定性がどう影響するかを問う。不等式の議論では単一の量子状態に内在した形で不確定性を理解しようとするが、識別性の議論では複数の量子状態間の相互関係の内に不確定性を見出す。これが不等式の議論と、これから行う識別性の議論の立場の違いである。

状態識別の枠組についてもう少し踏み込んで説明する。物理系の状態の候補が幾つかに絞られている場合に、測定により真の状態を決定するのが状態識別の問題である。与えられた候補状態たちがいつでも確実に識別できるならば何も問題はない。しかし、こと量子状態に関しては、それらが非直交であるかぎり必ず識別に誤りが伴う。そしてこの誤りをどのように取り扱うかに応じて、状態識別の手法は自然二つに分かれる。さしあたりこれらを第一種識別、第二種識別と呼んで区別する。状態識別を論じる上に述べたが、この二つの手法がどのようなもので、本研究で取り扱われるのはどちらであるのかを明らかにするべきであろう。そこで次に第一種識別と第二種を対照しつつ説明する。追って明らかになるが本研究の主題は後者である。

第一種識別は、minimum error discrimination や error-prone discrimination と呼ばれる。識別問題を考察するにあたり、ここでは真の状態にある標本が膨大に用意されているものと想定する。実際には、一つ一つの標本に対して順次測定を行ってゆくことになる。第一種識別では、一つの標本に対して測定を行う度、必ず真の状態がどれであるか決定を下さなければならない。つまり、決定の放棄は許されない。既に述べたとおり、このような条件下では誤りが避けられない。すなわち、真の状態とは異なる状態を真の状態と名指してしまう取り違えが必ず生じる。もっと

---

的に論じた研究はあった。例えば [AK65, AG88] は非可換物理量の同時測定についての草分け的研究として無視できない。

も、識別されるべき候補状態が互いに直交している場合はこの限りではない。しかし、そのような場合は極めて例外的であるので以降度外視する。第一種識別では取り違えを避けられない。そこで取り違えを完全に無くすことは諦め、その確率をどれだけ小さくできるかを問題にする。これは定量的な問題である。

第一種識別についてのよく知られた結果は C. W. Helstrom によって見出された Helstrom 限界である [Hel76, p. 113, p. 161]。量子状態を送付することで情報通信を行う場合、受信者は送られてきた量子状態が何であるかを識別する必要に迫られる。このような場合を念頭に置いて Helstrom は量子状態識別問題を論じた。彼は、識別されるべき候補状態に事前確率を割り振った上で、識別に伴う平均誤り確率の最小値を求めた。この最小値が Helstrom 限界である。これで第一種識別についての説明は終えることにする。

第二種識別は、unambiguous discrimination と呼ばれたり、または初期研究者の名前をとって Ivanovic-Dieks-Peres measurement と呼ばれることもある。第一種識別と異なり、この識別では決定の放棄が許される。すなわち、測定後の判断に「真の状態はこれである」というものの他に「真の状態は分からなかった」という判断が付け加えられる。このように決定の放棄が許される代わりに、第二種識別では取り違えは許されない。また、いつまでも「真の状態は分からなかった」と決定を放棄し続けることも禁じられる。残念なことに、決定の放棄を許しても取り違えが避けられなかったり、「真の状態は分からなかった」と言い続けざるを得ない事態に陥ることがある。つまり、候補状態の性質によっては、第二種識別は不可能な場合がある。そこでこの種の識別においては、まず与えられた候補状態が識別できるか否かが問われる。これは定性的な問題である。そのうえで識別できるとわかった場合にのみ、決定を放棄する確率の最小化といった定量的問題に移行する。

第二種識別の初期研究としては [Iva87, Die88, Prs88] および [JS95] を挙げることができる。<sup>\*2</sup> 彼らが議論したのは二状態の識別である。そののち有限個の状態に議論を一般化したのは A. Chefles である [Che98]。彼は、有限個の純粋状態が識別可能であるための条件が一次独立性であることを見出した。また近年、Y. Feng ら [FDY04] が純粋とは限らない有限個の状態（混合状態）が識別可能であるための条件を明らかにした。先に、第二種識別では問題が定性的なものと同定量的なもの二段構えになっていると述べた。Chefles や Feng らの結果は、定性的な問題、すなわち識別可能性の問題を候補状態が有限個の場合に解決している。

ここまで量子状態識別について述べてきたことを要約する。量子力学では状態の不確定性のために状態識別において誤りが生じる。この誤りの取り扱いに応じて識別手法は二つに分かれる。第一種識別では、決定の放棄を許さない。この識別では真の状態とは異なる状態を真の状態であると名指してしまう取り違えが避けられない。そこで取り違え自体をなくすことは諦めて、その確率の最

---

<sup>\*2</sup> かなり早い段階で第二種識別を利用した量子鍵配送が提案されていたことも付言すべきであろう。よく知られているのは、C. H. Bennett が 1992 年に提案した量子鍵配送手法である [Ben92]。この量子鍵配送では、非直交な二つの量子状態に“0”と“1”を対応させ、これを送ることで通信を秘匿するための情報（鍵）を共有する。この際、送られてきた非直交な二状態を識別するために受信者が第二種識別を利用する。光子の偏向やコヒーレント光の第二種識別の実験についても報告がある。コヒーレント状態の第二種識別については巻末の付録 A で述べる。

小化という定量的問題に取り組む。他方、第二種識別では決定の放棄が許される代わりに取り違えは許されない。換言すれば、決定の放棄に誤りを齎寄せして取り違えを排除したのが第二種識別である。この識別においては、そもそもそのような識別が可能かどうかという定性的問題がまず問われる。そして識別が可能な場合にのみ、決定の放棄を行う確率の最小化が問題となる。第二種識別では、問題が定性的なもの定量的なもの二段構えになっている。

先に予告したとおり、本研究では第二種識別 (unambiguous discrimination) に着目し、これを用いて状態の組の識別性を定義する。すなわち、与えられた状態の組に対する第二種識別が少なくとも一つ存在するとき、この状態の組は識別可能であると定義する。第二種識別に基づく識別性の定義は定性的なもので、恣意性の少なさが長所である。もちろん、第一種識別に基づいて識別性を定義することも出来なくはない。例えば、ある事前確率を前提して平均誤り確率を 3% 以下とする第一種識別が存在すれば識別可能とする、といった定義である。しかし、このような定義では事前確率の選択や 3% といった値の選択に恣意性が残る。第二種識別を用いた定義にはこのような恣意性はない。

既に触れたとおり Chefles や Feng らの研究 [Che98, FDY04] は、いずれも候補状態の個数が有限個の場合しか取り扱っておらず、無限個の場合は議論されていない。そこで本研究では彼らの議論を一步進めて、新たに無限個の候補状態を考える。ところで、無限個の候補状態の第二種識別を論じる意義はどこにあるのだろうか。無限個への議論の一般化はひどく抽象的で、有限個についての議論が既にあることを思えば、一般化のための一般化に感じられるかもしれない。一体何のためにこのようなことを考えるのか。この疑問は本論文冒頭に述べたことと関係している。本研究の目的は、量子状態の不確定性をより良く理解することである。そしてこの理解に資する無限個の候補状態の第二種識別問題がある。それが次に述べるコヒーレント状態の識別問題である。

\*

ここまで量子状態の具体例について殆ど何も述べてこなかった。量子状態にもいろいろあるが、なかでもコヒーレント状態は古典状態と緊密な関係を有する量子状態であり、本研究でもこのコヒーレント状態の集まりである von Neumann 格子の識別問題を主題的に取り上げる。そこで次にコヒーレント状態と von Neumann 格子について概観する。

古典力学では、状態は相空間の一点で代表された。以下、単に古典状態と言えばこのような状態を指すものとする。古典状態は座標と運動量の確定した状態である。コヒーレント状態はこの古典状態に対応する量子状態である。コヒーレント状態は座標と運動量のおおよそ定まった状態であるといって差し支えない。そればかりでなく、この状態は運動においても、エネルギー期待値においても古典状態に類似した性質を示す。

相空間の一点  $(q, p) \in \mathbb{R}^2$  で指定されるコヒーレント状態は、次の波動関数で定義される。

$$\psi_{q,p}(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}} \exp\left[-\frac{(x-q)^2}{2} + i xp - \frac{i}{2} qp\right]. \quad (0.1.5)$$

この関数の座標および運動量の密度関数は、 $q$  または  $p$  を中心とする Gauß 関数である。さらにこの波動関数は Heisenberg の考察した波動関数 (0.1.2) の一種であって、数学的な意味におけ



る Heisenberg の不等式の等号を達成する。換言すれば、座標と運動量についての分散の積が最も小さい。これはコヒーレント状態が相空間の一点  $(q, p)$  に局在しているという直感的理解を支持する根拠の一つである。

コヒーレント状態が古典状態に対応することを指摘したのは、Schrödinger の 1926 年の論文『微視的力学から巨視的力学への連続的移行』である [Sch26]。\*3 彼は本質的にコヒーレント状態と同じ状態を導入し、調和振動子の Hamiltonian の下でこの運動を論じた。その結果、この状態の座標についての密度関数が分散を一定に保ったまま左右に振動することを見出した。つまり、コヒーレント状態の運動は古典粒子のそれに対応する。彼はさらに、この振動子の振幅から古典論的に計算されるエネルギーの値と、量子論的に計算されるエネルギーがおおよそ一致することを示し、その上で「この点においても〈対応〉は完璧である」と述べている。

Schrödinger の後にコヒーレント状態の重要な性質を発見したのは J. K. Klauder である [Kla60]。その発見とはコヒーレント状態による単位の分解である。すなわち

$$1 = \int_{\mathbb{R}^2} |\psi_{q,p}\rangle \langle \psi_{q,p}| \frac{dq dp}{2\pi}. \quad (0.1.6)$$

ここで左辺の 1 は恒等作用素を表す。この性質を足がかりに、R. J. Glauber や E. C. G. Sudarshan が電磁波の記述にコヒーレント状態を用いた [Gla63b, Gla63a, Sud63]。彼らの成果は量子光学分野で広く知られるようになり、今日では理論と実験の両分野においてコヒーレント状態は日常的に用いられている。\*4

次に、von Neumann 格子について述べる。古典力学の相空間の一点に局在する量子状態がコヒーレント状態であった。von Neumann 格子とは、相空間中の格子の格子点全体に対応するコヒーレント状態の組である。もとをたどると、von Neumann 格子は座標と運動量の同時測定に関連して、J. von Neumann が彼の教科書 [vN32] で導入したものである。彼はこの格子を利用した座標と運動量の同時測定手法を議論している。しかし、この議論は極めて粗く、彼の提案した測定に基づいてどのように座標と運動量を推定したら良いかすら明らかにされなかった。

ところで、von Neumann 格子の出自に関して一点興味深いことがある。格子の基本領域の面積がおおよそ Planck 定数  $h$  となることを境にして、この格子の性質が変わると von Neumann 自身が証明なしに指摘している点である。この性質は決して自明ではなく、彼の教科書の公刊からおおよそ 40 年経ってはじめて証明が与えられた [Plm71, BBG71]。これらの研究が von Neumann 格子の興味深い数学的性質を明らかにしたことは確かである。しかし、その性質の測定論的な意義は著者の知る限り未だ明らかにされていない。

結局、von Neumann 格子を取り巻く状況はおおよそ次のように要約できる。すなわち、von Neumann 格子は測定論の文脈で導入されたにも関わらず、十分な議論を経ぬまま元の文脈から切断され、測定論とは無関係に研究されてきた。

\*

\*3 この論文は先の Heisenberg の論文に先行する。

\*4 コヒーレント状態の性質やその膨大な応用については論文集 [KS85] を参照されたい。

ここまで大きく分けて三つの話題を概観してきた。Heisenberg に始まる不等式の議論と、識別性についての議論と、コヒーレント状態である。はじめの二つは、量子状態の不確定性に関する研究の系譜である。そして三つ目は古典状態に対応する量子状態である。本研究の主題は、後の二つの話題、すなわち識別性の議論とコヒーレント状態の交わるところにある。この論文の題目は『無限個のコヒーレント状態の識別について』であった。

これから論じるコヒーレント状態の識別問題は、古典力学における状態識別問題を量子力学に移植したものとみられる。この問題に取り組むことで量子状態の不確定性について知見が得られるのは、このような古典論との関係のためでもある。最後にこうした問題の位置づけについて述べる。

まずは古典力学を想起する必要がある。古典力学においては、状態は相空間の一点で代表される。そしてこのような古典状態は互いに誤りなく確実に識別され得ると前提されている。実際この前提がなければ、座標と運動量の組を初期値として与えて正準方程式を解くという古典力学の問題構制自体が不可能であろう。もとより古典状態は座標と運動量が確定した状態であり、不確定性とは無縁である。それゆえ識別が完璧にできる、と考えても良い。いずれにしても、古典力学では相空間の一点で代表される古典状態たちは互いに識別可能である。この意味で古典力学における状態識別問題は自明である。

今述べた古典状態の識別問題を量子力学に移植するにはどうすればよいか。相空間の一点で表される古典状態をコヒーレント状態で置き換え、また識別性を先に述べたように第二種識別を用いて定義すればよい。こうして得られた状態識別問題が本研究の主題であるコヒーレント状態の識別問題である。このような問題の立て方から、コヒーレント状態の識別問題は古典状態の識別問題の量子力学的対応物とみなされる。

古典力学ではどのような状態も互いに識別可能であった。それでは量子力学でもコヒーレント状態は常に識別可能か。識別可能なものとそうでないものがあるならどこに識別性の限界があるか。これらが本研究で取り扱う問題である。古典力学で前提されていた完璧な識別性が、量子力学でどのような綻びを見せるかを仔細に検討する。そしてこの綻びから古典力学と量子力学の差異として量子状態の不確定性を理解する。これが本研究の狙いである。

この狙いは無限個のコヒーレント状態からなる von Neumann 格子によりもっともよく達せられる。上に述べたとおり、この格子は相空間の格子点の対応する無限個のコヒーレント状態からなる。本論文の終盤で示す結果によれば、この格子は疎なときには識別可能であるが、密にしてゆくと識別不能となる。そして、ちょうど格子の基本領域の面積が Planck 定数であるところを境にして識別可能であったものが識別不能に転じる。古典力学の場合には、相空間の一点で代表される古典状態はどんなに密に分布していても互いに識別可能であった。これに対して、コヒーレント状態という量子状態は Planck 定数より密に分布しているときには識別不能となる。この結果は次のような解釈を許すものである。すなわち、量子状態、特にコヒーレントの不確定性は識別性を不完全にするものであり、その程度はちょうど Planck 定数により特徴づけられる。

本論文では古典論を主題化して研究することはしない。しかし今述べたように議論の背景には古典論が意識されている。そして不確定性や量子論の性質を、古典論との偏差として理解しようと考えている。

## 2 主題と構成

これまでに述べてきたことを総括しつつ主題と構成を確認する。本研究は量子状態の不確定性の理解に資することを目的としている。そのような研究としては、Heisenberg に起源を有する不等式の議論がある。本研究ではこれとは異なり、識別性の観点から量子状態の不確定性に接近する。不等式の議論は、単一の量子状態に内在する不確定性の程度を不等式で捉えようとするものであった。これに対して識別性の議論では、複数の量子状態の相互関係の内に不確定性がどのように反映されるかを考察する。

さて、相空間の一点で代表される古典状態はどれも互いに確実に識別可能であると仮定されていた。古典状態をコヒーレント状態で置き換え、識別性を先述の通り第二種識別によって定性的に定義する。こうしてコヒーレント状態の識別問題に達する。コヒーレント状態は古典状態と同じく常に識別可能か。識別可能な場合と不可能な場合があるとすれば、その境界はどこにあるのか。これが本研究で主題となる問題である。

本研究では、無限個のコヒーレント状態の識別問題を論じる。そのために、まず無限個の量子状態の識別に関する一般論を構築し、次に一般論をコヒーレント状態に適用するという手続きを取る。その結果、古典状態とは異なり無限個のコヒーレント状態には識別不能なものがあると分かる。特に無限個のコヒーレント状態の例として von Neumann 格子を取り上げ、その識別性の境界がちょうど Planck 定数上にあることを示す。以上が議論のおおまかな流れである。

\*

次に、本論文の構成を章立てにそって説明する。本論文は5つの章からなる。これらは一般から特殊へと直線的に配列されている。

第1章は、本研究の依って立つところである量子測定理論の説明に充てられる。この章は既存研究の概説であるが、量子測定の導入や理論構成にはいくらか特色があるかもしれない。

第2章と第3章では状態識別の一般論を展開する。第二種識別では、まずそれが可能であるかという定性的な問題が問われ、次に識別が可能である場合に限って最適性といった定量的な問題が問われると述べた。第2章と第3章はこのような問題の二段構えの構造に対応している。

第2章では、まず第二種識別を量子測定の種類として定義する。特に識別されるべき候補状態が無限個ある場合を想定して、単なる識別と一様識別を区別して定義する。その上で状態の組に対してこのような識別が少なくとも一つ存在するという条件で状態の組の識別性および一様識別性を定義する。次に、可算個のベクトル状態に対して識別性の基準を示す。一方には識別性というベクトル状態の組の測定論的な性質があり、他方にはベクトルの組の一次独立性に類似した数学的な性質がある。識別性の基準はこれらの間に対応を与えるものである。さらに、非可算無限個の状態の識別や混合状態の識別についても触れる。状態が有限個しかない場合に限れば、この章で得られる結果は既に [Che98] や [FDY04] で得られている。本研究の新規性は、これらの議論を無限個の状態にまで一般化したところにある。

第3章では、最適な識別について議論する。まず、候補状態が一様識別可能である場合の識別確

率の最大値を与える公式と、それを達成する測定を求める。そしてその次に、最適性の定義を一般化した上で、そのような測定が被測定系に与える擾乱について議論する。

第4章では、これまでに得られた一般論を利用してコヒーレント状態の識別問題を論じる。少数のコヒーレント状態は識別しやすく、多数のコヒーレント状態は識別しにくいと予想される。実際、有限個のコヒーレント状態が必ず識別可能であることは先行研究により直ぐ分かる。また、非可算無限個なら必ず識別不能であることも第2章の結果から直ちに分かる。それゆえ可算無限個の場合こそが詳しく論じられるべきである。そこで例を挙げて可算無限個のコヒーレント状態の識別性を調べる。その際、基礎となるのは第2章で得られた識別性の基準である。単なる識別性と一様識別性の差異を明らかにする簡単な例に加えて、とりわけ興味深い例として von Neumann 格子を取り上げる。この格子の数学的性質は測定論とは離れたところで既によく調べられていたのであった。それら既知の性質と第2章で得られた識別性の基準を総合することにより、Planck 定数を識別性の観点から特徴づける。この議論はまた、測定論の文脈とは切断され研究されてきた von Neumann 格子を測定論の文脈に再度導入する試みでもある。

以上が本論文の構成である。まず量子測定理論を概説し、その枠組の中で識別性を定義する。そののち識別性の基準や識別の最適性を一般的に論じる。そして最後に識別性の基準を用いてコヒーレント状態の識別を論じる。特に、このような観点から von Neumann 格子を再検討し、Planck 定数を識別性により特徴づける。von Neumann 格子の識別性を含め、無限個の状態識別についての知見は本研究で新たに得られたものである。

### 3 補論：量子力学の確率的性格について

量子力学、特にこれから取り扱う量子測定理論の予言は、確率的な性格を有する。量子測定理論を取り扱うにあたっては、量子状態は統計集団に対して定義されていると理解するのが自然だと思われる。この理解についての簡単な説明と注意を与えることがこの節の目的である。これはいわゆる解釈の問題に踏み込んでいる。しかし、解釈について述べると云っても、解釈の形成を論じたり、複数の立場を対比しつつ哲学的議論を展開することはしない。そもそも著者にはそのような議論を十分に行う能力がない。今から述べるのは量子力学の解釈についての一つの注意または確認と言った程度のことである。そしてそれを述べるのは後で測定理論を説明するにあたり生じ得る無用の混乱を避けるためである。

\*

先ず統計集団を説明し、次に量子状態について述べる。

確率的な言明ないし予測は、その対象となる標本が膨大に用意できる場合にのみ意味を持つものとする。膨大とは極限的には無限という意味である。膨大な標本は、それを生成する一連の実験手続きのことと理解したほうが良いかもしれない。また、これらの標本は後に述べるような収束性に関する望ましい性質を持つものと仮定する。このような膨大な標本の集まりを統計集団と呼ぶことにする。確率的な言明は統計集団に対してのみなされる。これが確認したい第一のことである。

統計集団が膨大な標本からなると仮定するのは、確率の頻度解釈を取ろうとするからである。統計集団を構成するそれぞれの標本に対して、一定の手続きで指定される測定を行う。すると個々の標本はそれぞればらばらの測定値を返す。それでも、測定された全標本数を  $N$  とし、これに占める特定の測定値  $a$  を返した標本の数を  $N_a$  とすると、 $N$  を大きくしてゆくに連れて頻度  $N_a/N$  は一定値に収束してゆく。理論の予測する確率とは、この収束値のことと理解する。統計集団に対してはどのような実験ないし測定を行っても、こうした頻度が収束すると仮定する。この仮定はもちろん無根拠である。むしろこの仮定を満たす標本の集まりがあるとして、それを統計集団を定義すると言うほうが適切かもしれない。<sup>\*5</sup> いま頻度解釈という用語を持ち出したが、ここでは頻度によって確率が定義されると主張したいのではない。それはコンパスで作図された図形として円を定義するのと同じことと同じである。円があくまで「一点から等距離にある点の集合」として定義されるのと同様に、確率も数学的・測度論的に定義される概念であるとする。

---

<sup>\*5</sup> 頻度が収束するかどうかは統計集団の性質ばかりでなく、標本をどの順番で測定してゆくかにも依存する。この問題は統計集団の確率的混合に際して問題になる。例えば、ある物理量に対して二つの統計集団  $X, Y$  の標本がそれぞれ異なった振る舞いをする場合、 $X; Y; XXXXX; YYYYYYYYYYYYYYYYYY; (これまでの測定総数の倍のX); \dots$  の順番で測定すると測定値のヒストグラムも平均値も収束しない。しかし、通常はこのような順番による測定は例外的で追試等により回避できると考える。そして統計集団の混合もまた一つの統計集団をなすと仮定する。もっとも、混合された標本集団の各標本が  $X, Y$  のどちら由来であるかを事前に知っているなら、標本を混合せずに分けておくほうが良い。というのは、そうすることにより例えば層化抽出 (stratified sampling) を用いてより速やかに物理量の期待値を推定できるからである。

次に状態について考えたい。ここで状態と言っているのは物理系の状態であって、量子状態を念頭においている。状態とは、任意の実験ないし測定に対する物理系の振る舞いの一切を指定するものである。この点については定義上疑いないものと思われる。ところで、物理学、特に量子力学においては、いかなる手続きに従って物理系を準備しても、この系はある実験ないし測定に対して確率的な振る舞いを示すのが普通である。つまり物理学の研究対象の記述には確率的な言明が必要である。そして確率的言明の対象となるのは統計集団である。したがって、ある状態が物理系を記述するものであるなら、これはある統計集団を記述しなくてはならない。逆にある統計集団の性質が知られているなら、その集団の実験ないし測定に対する確率的振る舞いは定まる。したがって、状態の定義により、統計集団を指定すると物理系の状態が指定される。このようにして、統計集団と状態を同一視できることが分かる。これが確認したかった第二の点である。

以上を要約する。確率的言明は頻度解釈によって理解されるものであり、このような言明の対象を統計集団と呼ぶ。そして量子状態とは統計集団のことに他ならない。注意したかったことは、量子状態は統計集団、すなわち膨大な標本であるという点である。換言すれば、単一の標本に対しては量子状態は定義されない。量子状態を考えるときには、常に膨大な標本が準備され得るものと想定する。

\*

ここに述べたことは量子状態や確率についての一つの素朴な見方にすぎない。<sup>\*6</sup> このような解釈を過度に強調したり、これと相容れない解釈を排除するような意図は著者にはない。量子状態や確率については多様な解釈があり得る。いわゆる宇宙の波動関数を構想するときには、単一の標本(宇宙)に対しても量子状態が定義されると考える必要がある。これは量子状態に対する上で述べた解釈とは整合しないかもしれない。また確率についても素朴な頻度解釈とは異なる理解もありえるだろう。例えば、Bose 統計や Fermi 統計では同種粒子を区別せずに、それらのとり得る配位に等しい確率を割り振る。この等しく割り振られた確率は、頻度解釈に馴染むものであろうか。ここではむしろ論理的な命題に等確率を割り振る確率の論理説に近い解釈が取られているのではないかと思う。これは確率が頻度的に解釈されていないと思われる例である。

いずれにしても量子状態や確率についての理解は一通りではない。ここでそのなかの一つを述べたのは、それが以下で展開される測定論の理解に役立つと思ったからにすぎない。<sup>\*7</sup>

---

<sup>\*6</sup> 上述の説明は統計的解釈と呼ばれる立場に近いように見える。量子力学の解釈についての成書は多数あるが、統計的解釈の記述がある古典的成書としては [Jam74] が著名である。また、量子力学とは一応別個の議論として確率それ自体の定義や解釈についての議論にも目を向けるべきであるように思われる。確率の“発生学的”理解については [IH13] が役立つ。確率の解釈の諸説を整理して論じたものとしては [DG04] が、さらに、科学的実践を念頭に置いて頻度主義やベイズ主義を比較検討したものとしては [ES12] が挙げられる。なお、以上はいずれも著者のささやかな読書範囲に基づくことを断っておく。

<sup>\*7</sup> ここで述べた解釈は、例えば測定事後状態の理解に役立つのではないかと考えている。



## 第 1 章

# 量子測定理論

## 序

量子測定理論が物理学分野で広く知られているとはいえない状況に鑑みて、本章ではこの理論を概説する。本章は既存研究の紹介である。量子力学の発展とともに、その性質を調べ活用するための手段としての量子測定の理論が整備されてきた。量子測定をはじめて数的に取り扱ったのは J. von Neumann である [vN32]。そのうち E. B. Davis および J. T. Louis [DL70, Dav76] によって量子測定理論の枠組のかなりの部分が整備され、小澤正直 [Oza84] によって完成されたというのが教科書的説明になると思う。<sup>\*8</sup> 量子物理学の諸分野に比べると基礎が確立されたのが比較的最近であること、数学者の貢献の大きいことが量子測定理論の特色である。近年では、量子技術分野の勃興を背景として、基礎理論である量子測定理論も物理学や量子工学の分野に急速に浸透しつつある。

ところで、量子測定理論の特徴はどこにあるのだろうか。まず明らかなことは、扱う対象が量子系だということである。量子測定は量子系の性質を調べあるいは活用するために行うものである。この意味で量子測定理論の関心は量子系に向いている。しかし、量子力学が常識化し、あらゆるものが本来的には量子的であると考えがちな我々にとって、量子測定理論の特徴はむしろその古典系の取り扱いにこそあるというべきである。量子測定理論は、古典系の存在を前提として量子系と古典系との交渉を記述する。なぜなら、測定対象が量子系であっても測定値として得られるのは単なる数、つまり古典量だからである。これは現代の人間や古典計算機が直接十分自由に取り扱える対象が古典量であることに原因する制約である。このため、今日の人間や古典計算機にとっての量子測定理論は、量子系ばかりでなく古典系も記述するものでなければならない。

古典系と量子系は、それぞれ独立した理論的枠組として別個に取り扱われることが多い。しかし、今述べたとおり量子測定理論は本性上これら二つにまたがって定式化されるものである。それゆえ、古典系と量子系という二つの立脚点に記述上の統一がないまま量子測定を定式化しようとすると、その定式化が不格好で煩瑣にならざるをえない。幸いなことに古典系と量子系を統一的に理解するための観点がある。いわゆる代数的観点である。古典系でも量子系でも、系の物理量の総体を適切な代数に対応付けることができる。このような代数に着目して物理系ないし力学を定式化する立場が代数的観点である。このときには古典と量子の違いは代数が可換か非可換かというだけの違いになる。こうして古典系と量子系を同じ枠組の中で統一的に取り扱う準備さえ整えておけば、量子測定の基本的概念を導入するのは容易である。実際、代数によって物理系を記述するときには、量子測定を一般的な物理過程の一種として理解できる。こうして、量子測定理論に固有の概

---

<sup>\*8</sup> 完全正写像の測定理論への導入については K. Kraus らの寄与 [HK69, Kra71, Kra83] も無視できないものがある。また、測定理論は情報理論や非可換確率論との接触のもとで発展してきた。前者については例えば例えば [Hel67, Kho82] を、後者については今引いた [DL70] の導入を参照されたい。



念が実はそれほど多くはなく、その基本的概念の殆どが既に物理系の記述に現れていたことが分かる。また逆に、量子測定理論をこのように定式化することにより測定理論に固有の性質を明らかにできる。

今述べたような観点から量子測定理論の骨子をできるだけ簡明に説明しようという企てが本章で実行される。既に述べたとおり、本章の議論は基本的には先行研究の要約であるが、種々の基本的概念の導入の仕方や順序などに特色があるかもしれない。本章は三つの節からなる。まず、1節でこのあと使うことになる数学的な用語や記号を整理する。次に、2節では von Neumann 代数と完全正写像を用いた力学の定式化の要点を述べ、その枠組の中で測定を定義する。最後に3節では測度論的な測定の定式化について説明し、このような定式化と前節における測定の定式化の関係について述べる。

議論のよって立つところを不明瞭にしないため、本章では骨子だけではあるが測定理論の枠組を包括的に記述する。しかし、このような記述は以後の議論を理解するために必要とまでは云えない項目も含んでいる。識別性の議論だけに関心を寄せる場合には、前半の議論の多くの部分を飛ばして読むことも可能である。その場合には正作用素値測度 (positive-operator valued measure, POVM) の定義だけを確認して次章に進んでもらえれば良い。逆に、量子測定のさらに詳細な記述法については付録 C 節を参照されたい。

# 1 記号と用語

ここで von Neumann 代数と完全正写像にまつわる記号と用語を整理しておく．あとの物理的議論が数学的な定義によって中断されることを防ぐためである．物理的な議論は次節から始まる．したがって，差し当たり本節は読み飛ばし次節に進み，必要に応じて記号や用語の意味を確認するために本節に戻ってくることも可能である．その場合は必要に応じてこの節の定義を確認するか，巻末の記号表を活用していただければ幸いである．以下で導入される概念のより詳しい説明については教科書 [UHO03, Dix11, Ped12, KR97a, KR97b, Sak12] 等を参照されたい．

\*

■ von Neumann 代数 von Neumann 代数の定義には抽象的なものと具体的なものがある．抽象的な定義の仕方では，単位的な  $C^*$ 代数であって，かつ何らかの Banach 空間の (Banach 空間としての) 双対空間に一致するものを von Neumann 代数と云う．<sup>\*9</sup> ある von Neumann 代数に対して，このような Banach 空間は同型を除いてただ一つだけしか存在しない．そこで，この Banach 空間を問題の von Neumann 代数  $\mathfrak{A}$  の前双対と呼んで  $\mathfrak{A}_*$  と記す．定義により  $(\mathfrak{A}_*)^* = \mathfrak{A}$  が成り立ち，また Hahn-Banach の定理により  $\mathfrak{A}_* \subset \mathfrak{A}^*$  とみなすことができる．ここで  $(\dots)^*$  は Banach 空間  $(\dots)$  の (位相的) 双対空間を表す． $\mathfrak{A}_* \subset \mathfrak{A}^*$  と  $\mathfrak{A}$  の対を角括弧  $\langle \ , \ \rangle$  で表す．以上が抽象的 von Neumann 代数の定義である．

具体的な定義では，Hilbert 空間  $\mathfrak{H}$  上の有界作用素の全体がなす代数  $B(\mathfrak{H})$  の部分代数  $\mathfrak{A}$  であって  $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}$  を満たすものを von Neumann 代数と呼ぶ．ここで  $S \subset B(\mathfrak{H})$  に対して  $S' = \{X \in B(\mathfrak{H}) \mid \forall Y \in S, XY - YX = 0\}$ ，また  $S'' = (S')'$  と記している． $S'$  は  $S$  の交換団， $S''$  は  $S$  の二重交換団と呼ばれる．特に  $\mathfrak{H}$  を明示する必要のあるときは，このような具体的 von Neumann 代数  $\mathfrak{A}$  を  $\mathfrak{H}$  上の von Neumann 代数と呼ぶ．

一般に，抽象的 von Neumann 代数は具体的 von Neumann 代数に同型であり，<sup>\*10</sup> 具体的 von Neumann 代数は前双対を有する．すなわち，von Neumann 代数の抽象的定義と具体的定義は一致する．以降，この節では  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  は von Neumann 代数を表し，これらの間の写像は全て線形であるとする．

---

<sup>\*9</sup> 名称についての補足．von Neumann (1903-1957) 自身は今日 von Neumann 代数と呼ばれている代数を Rings of operators と呼んでいる．von Neumann 代数という用語は，Jean Dieudonné (1906-1992) の提案に従って，Jacques Dixmier (1924-) が彼のテキストで用いたことに端を発するようである．インタビュー記事 [Rau09] において，“Is it true that you coined the notion von Neumann algebra?” という質問に対して Dixmier は次のように答えている．“No, that was an idea of Dieudonné; he proposed this name during a discussion at Bourbaki. I thought that this was self-evident; I should have thought of it myself!”  $C^*$ 代数という用語に調子を合わせて von Neumann 代数を  $W^*$ 代数と呼ぶこともある． $C^*$ 代数の  $C$  は，Closed の頭文字であり， $W^*$ 代数の  $W$  は Weakly closed の頭文字だそうである [Kad90]．抽象的 von Neumann 代数を  $W^*$ 代数，具体的 von Neumann 代数を von Neumann 代数と呼び分ける場合もある．

<sup>\*10</sup> 同型の定義は後出．

■ 位相 von Neumann 代数は二つの内制的位相を有する。一つ目はノルム位相である。von Neumann 代数は  $C^*$ 代数であるからノルムを有する。このノルムが定める位相がノルム位相である。von Neumann 代数間の写像のノルム位相に関する連続性を有界性と呼ぶ。二つ目は超弱作用素位相 (ultraweak topology,  $\sigma$ -weak topology) である。これは  $\mathfrak{A}_* \subset \mathfrak{A}^*$  の元が全て  $\mathfrak{A}$  上の汎函数として連続となる  $\mathfrak{A}$  の最も粗い位相である。

■ 準同型 von Neumann 代数間の準同型は、それらの構造を保つものとして定義される。まず、von Neumann 代数間の準同型は  $C^*$ 代数の準同型でなければならない。すなわち、代数構造と対合 “\*” を保つ必要がある。これらの条件を満たす写像は自動的に有界となるから有界性をあからさまに課す必要はない。von Neumann 代数間の準同型は、 $C^*$ 代数の準同型であって、さらに von Neumann 代数に特徴的な構造、すなわち単位元と超弱位相を保つものとして定義される。同型の定義も同様である。

■ テンソル積 有限個の von Neumann 代数に対してそれらのテンソル積が一意的に定義される。具体的定義に基づいて説明すれば次の通りである。 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  をそれぞれ Hilbert 空間  $\mathfrak{H}, \mathfrak{K}$  上の von Neumann 代数とする。 $a \in \mathfrak{A}, b \in \mathfrak{B}$  は自然な仕方 Hilbert 空間のテンソル積  $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K}$  上の有界作用素  $a \otimes b \in B(\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K})$  を定義する。そこで、代数的テンソル積  $\mathfrak{A} \otimes_{\text{alg}} \mathfrak{B}$  を  $B(\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K})$  の部分  $*$ -代数とみなすことができる。これが  $B(\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K})$  内に生成する von Neumann 代数を  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  のテンソル積と定義する。

■ 正・完全正 次に正作用素並びに正写像及び完全正写像について述べる。 $\mathfrak{A}_+ = \{b^*b \mid b \in \mathfrak{A}\} \subset \mathfrak{A}$  と記し、この集合の元を正作用素であると呼ぶ。 $a - b \in \mathfrak{A}_+$  であるとき  $a \geq b$  と書くことにすると、“ $\geq$ ” は  $\mathfrak{A}$  上の半順序となる。この半順序から  $\mathfrak{A}^*$  およびその部分集合  $\mathfrak{A}_*$  にも半順序が導入される。

写像  $\phi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  は  $\phi\mathfrak{A}_+ \subset \mathfrak{B}_+$  を満たすとき正写像であると云われ、その自明な拡張  $\phi \otimes 1 : \mathfrak{A} \otimes C^{n \times n} \rightarrow \mathfrak{B} \otimes C^{n \times n}$  が全ての  $n \in N = \{1, 2, \dots\}$  に対して正写像であるとき完全正写像と呼ばれる (ここでは  $1 : C^{n \times n} \rightarrow C^{n \times n}$  は恒等写像を表す)。完全正写像は正写像であるが、逆は一般には正しくない。<sup>\*11</sup> ただし、 $\mathfrak{A}$  または  $\mathfrak{B}$  が可換な場合には、 $\phi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  が完全正写像であるためには正写像であれば足る。

■ 正規な単位的完全正写像 次の記号を導入する。

$$\text{nCP}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \left\{ \phi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} \left| \begin{array}{l} \phi \text{ は完全正写像であり,} \\ \phi \text{ はノルム位相を保ち,} \\ \phi \text{ は超弱作用素位相を保つ.} \end{array} \right. \right\} \quad (1.1.1)$$

$$\text{nCP}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}; b) = \left\{ \phi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} \left| \begin{array}{l} \phi \in \text{nCP}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \\ \phi 1 = b. \end{array} \right. \right\} \quad (1.1.2)$$

$\text{nCP}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  の元を正規な完全正写像、 $\text{nCP}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}; 1)$  を正規な単位的正写像と呼ぶ。特に  $\text{nCP}(\mathfrak{A}, C; 1)$  の元を  $\mathfrak{A}$  上の正規状態と呼ぶ。これは  $\mathfrak{A}_*$  の元であって、正かつ単位的であるもの

<sup>\*11</sup> 反例については [Cho72] を、ここに述べた完全正写像の性質全般については [Pau02] を見よ。

に他ならない (C は可換 von Neumann 代数であることを注意). 本来であれば有界かつ超弱連続と呼ぶべきところを正規と呼ぶことで済ませているのは以下の理由による. まず, 完全正写像は正写像であり, 正写像は自動的に有界となることが知られている. したがって有界の語は不要である. 超弱連続を正規と呼ぶのは習慣上の理由による. 正規性は超弱連続性とはまた別に定義されるものであるが, 正写像に関しては正規性と超弱連続性は同値になるからこう言い換えても良いのである.

\*

最後に, von Neumann 代数の例を二つ挙げる.

■  $B(\mathfrak{H})$  一つ目の例は, Hilbert 空間  $\mathfrak{H}$  上の有界作用素の成す代数  $B(\mathfrak{H})$  である. どんな部分集合  $S \subset B(\mathfrak{H})$  に対しても  $S \subset S''$  が成り立つことに注意すれば,  $B(\mathfrak{H})$  が von Neumann 代数であることは具体的定義から分かる. 抽象的定義から  $B(\mathfrak{H})$  が von Neumann 代数であることを検証するには,  $\mathfrak{H}$  上の跡類作用素の全体  $B^1(\mathfrak{H}) \subset B(\mathfrak{H})$  が  $B(\mathfrak{H})$  の前双対であることを示せば良い. このとき前双対  $B^1(\mathfrak{H})$  と von Neumann 代数  $B(\mathfrak{H})$  の対は  $\langle \rho, X \rangle = \text{tr}(\rho X)$ ,  $\rho \in B^1(\mathfrak{H})$ ,  $X \in B(\mathfrak{H})$  で与えられる. ただし,  $\text{tr} : B^1(\mathfrak{H}) \rightarrow \mathbb{C}$  は跡を表す. なお, 一般に具体的 von Neumann 代数  $\mathfrak{A} \subset B(\mathfrak{H})$  の前双対は  $B^1(\mathfrak{H})$  の商空間として実現できる.  $B(\mathfrak{H})$  は Hilbert 空間  $\mathfrak{H}$  の次元が 2 以上であれば非可換である.

■  $L^\infty(\Omega)$ ,  $\ell^\infty(\Omega)$  次に可換な von Neumann 代数の例を与える.  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  を局所化可能測度空間とする. ただし, 局所化可能測度空間とは (一つの定義では) 有限測度空間の直和空間である. したがって特に  $\sigma$ -有限測度や任意の集合上の数え上げ測度は局所化可能測度である. 以降, 単に測度空間と云えば常に局所化可能測度空間を指すものと了解する. さて, 測度空間  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  上の本質的に有界な (C 値) 可測函数の全体  $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$  は可換な von Neumann 代数をなす. ただし, 殆ど至る所で一致する函数たちは同一視する. それゆえ von Neumann 代数  $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$  の元は函数の同値類であるが, 以下では慣習にならない同値類とその代表元をしばしば混同する. 具体的な定義に基づいて  $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$  が von Neumann 代数であることを示すには, まず  $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$  の各元が自乗可積分函数 (の同値類) のなす Hilbert 空間  $L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$  に乗算として作用することに注意する. この作用により  $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu) \subset B(L^2(\Omega, \Sigma, \mu))$  とみなし,  $(L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu))' = L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$  を示せば良い. このようにして具体的定義に基づいて  $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$  が von Neumann 代数であることが示される. 抽象的な定義に基づいて同じことを示すには, 可積分函数 (の同値類) のなす Banach 空間  $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$  が  $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$  の前双対になることに注意すれば良い. このとき対  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は, それぞれの函数の積の積分で与えられる. このようにして  $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$  が可換 von Neumann 代数であることを検証できる. 実は, この逆も成り立つ. すなわち, 勝手な可換 von Neumann 代数は, 適当な測度空間  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  上の本質的に有界な函数のなす von Neumann 代数  $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$  に同型である.

以降, 混乱のおそれのないときには  $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$  を  $L^\infty(\Omega, \mu)$ ,  $L^\infty(\Omega)$ ,  $L^\infty(\mu)$ ,  $L^\infty$  などと略記する.  $L^1, L^2$  についても同様である. また特に  $\ell^\infty(\Omega) = L^\infty(\Omega, 2^\Omega, \text{数え上げ測度})$  と略記する.

## 2 物理系, 操作, 測定

本節では物理系, 操作, 測定といった諸概念を A1 から A3 の公理 (及びその細目) に整理して述べる. 結論を先取りして述べると, 物理系は von Neumann 代数として定義され, 全ての物理過程は適切な完全正写像として定義される. この意味の物理過程を操作と呼ぶことになる. その上で, 測定を特別な形の操作, つまり単一の線形写像として定義する. このような定義には, 抽象的で諸概念の関係を理解しやすいという利点がある. 後で測定の端点性を議論するときにも, このような測定の定義が議論を見通し良くする. なお, よくある測度論的な測定の定義については 3 節で取り扱う.

量子測定論の標準的な参考文献として [DL70, Dav76] を, 特に完全正写像を用いた量子測定の定式化について [Oza84] を挙げる.

### a 物理系

物理系の定義からはじめることにする. ここでは Hilbert 空間より, むしろその上の作用素のなす von Neumann 代数に着目して物理系を定義する [Ara93, BR87].

A1 物理系とは, von Neumann 代数のことである. 特に, 可換 von Neumann 代数を古典系と呼び, そうでないものを量子系と呼ぶ. 物理量は物理系  $\mathfrak{A}$  の自己共役な元, 正規状態は前双対  $\mathfrak{A}_*$  の正かつ単位的な元とする. また, 有限個の物理系の合成系は, それら von Neumann 代数のテンソル積とする.

量子系を Hilbert 空間  $\mathfrak{H}$  で代表する量子力学の定式化は,  $\mathfrak{A} = B(\mathfrak{H})$  と定めることにより上述の定式化に包摂される.<sup>\*12</sup>  $\mathfrak{H}$  上の有界作用素のなす代数  $B(\mathfrak{H})$  は確かに von Neumann 代数であり, その前双対  $\mathfrak{A}_*$  は跡類作用素のなす Banach 空間  $B^1(\mathfrak{H})$  に同型である. そしてこれらの対は跡  $\text{tr}: B^1(\mathfrak{H}) \rightarrow \mathbb{C}$  を用いて  $\langle \dots, \dots \rangle = \text{tr}(\dots\dots)$  と与えられる. このとき物理量は有界な自己共役作用素に, 正規状態は非負かつ跡が 1 となる跡類作用素, つまり密度作用素に対応する.

上記の定式化では非有界作用素, 特に座標や運動量といった非有界な物理量は度外視している. しかし, 非有界な物理量それ自体が有界でなかったとしても, その測定によって確率を記述する作用素のスペクトル射影は全て有界である. したがって, 対象とする作用素を有界に限ることは測定論においては本質的な制約ではない. この事情は, 確率変数の期待値が発散する場合でも確率測度が有限であることと同じことである.

上述の定式化の利点の一つは, 古典系と量子系をどちらも代数として統一的に扱えるところにある. このように代数に着目して物理系を取り扱う立場は代数的観点と呼ばれることもある. この代数的観点に立たなければ古典系と量子系の合成系を自然に定義できないことに注意しておきたい.

---

<sup>\*12</sup> もっとも簡単な例はスピン 1/2 粒子のスピンを記述する物理系である. この場合, 対応する Hilbert 空間は  $\mathfrak{R} = \mathbb{C}^2$  であり,  $B(\mathfrak{R}) = \mathbb{C}^{2 \times 2}$  はこの Hilbert 空間に作用する行列の全体である. この代数  $\mathbb{C}^{2 \times 2}$  は Pauli 作用素  $\sigma_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$  で生成される.

実際、量子系は Hilbert 空間、古典系は測度空間と別々に定義されるときには、これらの合成系が何であるかはっきりしない。

ところで、von Neumann 代数は定義上  $C^*$ 代数であり、 $C^*$ 代数を物理系と定義する立場もある。von Neumann 代数を用いた定式化を本論文で採用する理由は、古典系の取り扱いにある。いずれの代数を用いるにしても、古典系は可換代数として定式化するのが自然である。そこで可換  $C^*$ 代数と可換 von Neumann 代数の一般形が何であるかが問題になる。結果だけ述べれば、前者は適当な位相空間上の連続関数のなす代数に同型であり、後者は適当な測度空間上の本質的有界関数のなす代数に同型である。これらのどちらが測定論を展開するにあたって相応しいであろうか。すぐ後で見るように、測定論においては測定値が確率的に得られ、それを記録する物理系として古典系が登場する。そこで古典系は確率や測度論になじむことが望ましい。可換 von Neumann 代数はこの要望を満たす。このような事情で本論文では von Neumann 代数を用いた物理系の定式化を採用している。

## b 古典系

前節で述べた通り、本論文では古典系といえば可換 von Neumann 代数を指す。可換 von Neumann 代数についての一般論が教えるところによれば、測度空間  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  上の本質的有界関数の全体  $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$  は可換 von Neumann 代数を成し、また逆に勝手な可換 von Neumann 代数はこの形に書くことができる。<sup>\*13</sup> ここでは今述べた事実注意到しつつ、前節で定義された古典系の物理量、正規状態といった概念をもう少し詳しく見ておくことにしたい。

はじめに古典系の例として一次元空間中の一粒子について少し考えておく。この系の相空間は  $\mathbb{R}^2$  であり、これが  $\Omega$  にあたる。この相空間の測度としては Liouville の定理を考慮して Lebesgue 測度  $\mu$  を取る。そして、その測度の定義域である  $\sigma$ -代数を  $\Sigma \subset 2^\Omega$  と記す。結局、一次元空間中の一粒子には測度空間  $(\mathbb{C}, \Sigma, \mu = \text{Lebesgue 測度})$  を対応させれば良い。<sup>\*14</sup> この先、今述べた場合を念頭において測度空間の要素  $\Omega$  を相空間と呼ぶことがある。

一般論に戻る。von Neumann 代数  $\mathfrak{C} = L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$  の前双対  $\mathfrak{C}_*$  は可積分関数の全体  $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$  である。前者に物理量が属し、後者に正規状態が属する。そして、これらの対は次のように与えられるのであった。

$$\langle p, f \rangle = \int_{\Omega} p f d\mu, \quad p \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu), \quad f \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu). \quad (1.2.1)$$

第一に、この古典系の正規状態  $p \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$  は確率密度関数である。これは正規状態の定義から直ちに分かる。第二に、古典系における射影は可測集合の指示関数である。一般に射影とは  $E^* = E = E^2$  を満たす von Neumann 代数の元であって、物理量である。この定義から、古典系における射影が何らかの可測集合  $\Delta \in \Sigma$  の指示関数  $1_\Delta$  でなければならないことが確かめられる。第三に、古典系の射影は確率を与えるものと見られる。実際、正規状態  $p \in \mathfrak{C}_*$  と射影

<sup>\*13</sup> 測度空間は常に局所化可能であると仮定する。

<sup>\*14</sup> これは  $\sigma$ -有限測度空間であって確かに局所化可能である。

$E = 1_\Delta \in \mathfrak{C}$ ,  $\Delta \in \Sigma$  の対を計算すると

$$\langle p, E \rangle = \langle p, 1_\Delta \rangle = \int_\Delta p \, d\mu. \quad (1.2.2)$$

を得る.  $p$  は確率密度,  $\Delta$  は可測集合であったから, 上式は事象  $\Delta$  の生じる確率を表している. この場合,  $\Delta$  の生じない確率は  $\Delta$  の  $\Omega$  における補集合  $\Delta^c$  によって与えられ, これに対応する射影は  $1 - E = 1_{\Delta^c}$  である.

以上見てきたとおり, 古典系の正規状態とは確率密度関数であり, 古典系の射影とは指示関数であって確率を与える物理量である. 古典系においてはこのような解釈を阻むような制約は一切ないものと仮定する.

A1.1 古典系  $\mathfrak{C}$  の射影  $E \in \mathfrak{C}$  を確率的な事象と解す. そして任意の正規状態  $\rho \in \mathfrak{C}_*$  の下で任意の確率的な事象  $E$  が生じる確率  $\langle \rho, E \rangle$  を知ることができる.

このような古典系での正規状態と射影の解釈は, 量子系におけるそれらの理解を助ける. すなわち, 一般の物理系の正規状態  $\rho \in \mathfrak{A}_*$  は確率密度の一般化であり, 射影  $E \in \mathfrak{A}$  は確率的事象の一般化であると考えることができる. そして対  $\langle \rho, E \rangle$  は正規状態  $\rho$  の元で事象  $E$  が生じる確率を与える.

## C 操作

ここまでで物理系の定式化は済んだので, 次に系の力学, つまり物理系の時間発展や変化の記述に移る. 物理系の変化には自然な時間発展や実験者の意図的な介入によるものなど色々あるが, 本論文ではこれらを一括して操作と呼ぶことにする.<sup>\*15</sup>

A2 Heisenberg 描像における物理系  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  間の操作とは, 正規な単位的完全正写像  $\phi : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}$  である. この操作は条件  $\langle \phi_* \rho, b \rangle = \langle \rho, \phi b \rangle$ ,  $\rho \in \mathfrak{A}_*$ ,  $b \in \mathfrak{B}$  により写像  $\phi_* : \mathfrak{A}_* \rightarrow \mathfrak{B}_*$  を一義的に定義する.  $\phi_*$  を  $\phi$  に対応する Schrödinger 描像における操作と呼ぶ. 特に断らない限り操作と言えは Heisenberg 描像におけるそれを意味するものとし, その全体を  $n\text{CP}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}; 1)$  と記す. 特に,  $\mathfrak{B}$  が古典系のとき  $n\text{CP}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}; 1)$  の元を古典化操作と呼ぶ.

このような完全正写像による操作の定式化は量子測定理論や量子情報の数理的な取り扱いでは標準的である.<sup>\*16</sup> 正規性, 単位性, 完全正性はそれぞれに物理的な意味がある.

まず, 単位性と正性は  $\phi_*$  が正規状態の規格化と正性を保ち, 状態を状態に移すために必要な条件である. 正性以上に完全正性を要請しているのは次のような考えに依る. いま, 操作  $\phi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  が物理的に実現可能であったとする. そして, 操作の対象となっている系と十分に隔たったところにある勝手な有限次元系  $B(C^n) = C^{n \times n}$  を想像し, これを記述上  $\mathfrak{A}$  と  $\mathfrak{B}$  に合成して考える. このとき,

<sup>\*15</sup> 術語の使い分けとしては, 必ずしも単位的ではないものまで含めて操作 (operation) と呼び, 単位的であるものを channel と呼ぶのが普通であるかも知れない.

<sup>\*16</sup> 例えば, [Dav76, Section 9.1] や [NC10, Section 8.2.4] を参照されたい.

もとの操作が実行可能であるとすれば、合成系に対する自明な拡張  $\phi \otimes 1 : \mathfrak{A} \otimes \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathfrak{B} \otimes \mathbb{C}^{n \times n}$  もやはり操作として実行可能であると考えるのが自然である。そうであるとする、 $\phi$  が操作であれば  $\phi \otimes 1$  も操作である必要がある、つまり、 $\phi \otimes 1$  も単位的かつ正でなければならない。数学的には  $\phi$  が単位的なら  $\phi \otimes 1$  も自動的に単位的となる。しかし、 $\phi$  が正だからといって  $\phi \otimes 1$  が正になるとは限らない。そこで  $\phi \otimes 1$  も確かに操作となるための条件として  $\phi$  に完全正性を課しておいたのである。

正規性は位相的条件な条件であって、物理的には Heisenberg 描像から Schrödinger への移行可能性を保証するものである。実際、 $\phi$  に正規性がなければ正規状態を正規状態に移す写像  $\phi_*$  の存在は保証されない。もっとも、本論文では物理系の定式化に von Neumann 代数を用いているからその位相を尊重して状態にも操作にも正規性を要求するのであって、物理系を  $C^*$ 代数として定式化する場合には正規性を課すべき理由はない。

ここで操作を定義するにあたって要請した性質は、本質的にたった二つしかない。一つは状態を状態に移すことである。そしてもう一つは、ある操作が可能であれば、その自明な拡張もやはり可能であることである。これらに加えて正規性を要求することで Heisenberg 描像と Schrödinger 描像の同等性を担保したのである。これらの自然な要請だけで操作が定義されていることを強調しておきたい。

以上の説明から実現可能な物理過程が操作でなければならないことは理解されたと思う。本論文は、逆に任意の操作は物理的に実現可能であると仮定する。もちろんこれは理論を円滑にすすめるための仮定であって、ある種の操作が原理的に実行不可能であるという現実的な制約を退けるものではない。なお、任意の操作が実現可能であるという仮定と、任意のユニタリ操作が可能であるという仮定の間にはそれほどの開きはない。この点については次章で説明する。

操作の結合とテンソル積について述べ、さらに操作の例を挙げてこの節を閉じることにする。

A2.1 二つの操作  $\phi \in \text{nCP}(\mathfrak{B}, \mathfrak{A}; 1)$ ,  $\psi \in \text{nCP}(\mathfrak{B}, \mathfrak{C}; 1)$  を立て続けに実行することにより得られる一連の過程は二つの操作の写像としての結合  $\phi\psi \in \text{nCP}(\mathfrak{B}, \mathfrak{C}; 1)$  で記述される。この操作を二つの操作の結合と呼ぶ。

$$\mathfrak{A} \xleftarrow{\phi} \mathfrak{B} \xleftarrow{\psi} \mathfrak{C}$$

A2.2 二つの操作  $\phi_1 \in \text{nCP}(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{A}_1; 1)$ ,  $\phi_2 \in \text{nCP}(\mathfrak{B}_2, \mathfrak{A}_2; 1)$  を並行して行うことに得られる全過程は二つの操作のテンソル積  $\phi_1 \otimes \phi_2 \in \text{nCP}(\mathfrak{B}_1 \otimes \mathfrak{B}_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2; 1)$  で記述される。これは次の性質を満たすという条件で定義される。

$$\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \xleftarrow{\phi_1 \otimes \phi_2} \mathfrak{B}_1 \otimes \mathfrak{B}_2$$

$$(\phi_1 X_1) \otimes (\phi_2 X_2) \xleftarrow{\quad} X_1 \otimes X_2$$

すなわち、写像  $\phi_1 \otimes \phi_2 : \mathfrak{B}_1 \otimes \mathfrak{B}_2 \rightarrow \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$  は  $(\phi_1 \otimes \phi_2)(X_1 \otimes X_2) = (\phi_1 X_1) \otimes (\phi_2 X_2)$ ,  $X_1 \in \mathfrak{B}_1, X_2 \in \mathfrak{B}_2$  を満たすという条件で一意に定義される。

完全正写像の結合がやはり完全正写像になることは完全正写像の定義から直ぐに分かる。これに対



してテンソル積が存在して完全正写像になることの証明はそれほど自明ではない。しかし、このことは次章で述べる Stinespring の定理から証明できるのでここでは証明を略す。<sup>\*17</sup>

最後に操作の例を三つ挙げる。これらはどれも見慣れたものであると思う。以下、 $\mathfrak{K}, \mathfrak{H}$  は Hilbert 空間、 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  は物理系を表す。

ユニタリ操作 ユニタリ作用素  $U \in \mathfrak{H}$  が定める操作は Heisenberg 描像と Schrödinger 描像でそれぞれ次のように記述される。

$$\begin{array}{ccc} B(\mathfrak{K}) & \longleftarrow & B(\mathfrak{K}) & & (B(\mathfrak{K}))_* & \longrightarrow & (B(\mathfrak{K}))_* \\ U^* X U & \longleftarrow & X & & \rho & \longmapsto & U \rho U^* \end{array}$$

部分系への着目 全体系  $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$  から部分系  $\mathfrak{A}$  への着目を表す操作は Heisenberg 描像と Schrödinger 描像でそれぞれ次のように記述される。

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} & \longleftarrow & \mathfrak{A} & & (\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B})_* & \xrightarrow{\text{tr}_{\mathfrak{B}}} & \mathfrak{A}_* \\ X \otimes 1 & \longleftarrow & X & & \rho \otimes \sigma & \longmapsto & \rho \langle \sigma, 1 \rangle \end{array}$$

この操作は Heisenberg 描像では増幅と呼ばれ、Schrödinger 描像では部分跡と呼ばれ  $\text{tr}_{\mathfrak{B}}$  と書かれる。特に  $\mathfrak{B} = B(\mathfrak{K})$  の場合には、 $\text{tr}_{\mathfrak{B}} = \text{tr}_{\mathfrak{K}}$  と記す。

系の合成 物理系  $\mathfrak{B}$  の状態  $\sigma \in \mathfrak{B}_*$  を一つ固定する。このとき、物理系  $\mathfrak{A}$  を合成系  $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$  の部分系とみなすことを表す操作を Heisenberg 描像と Schrödinger 描像でそれぞれ次のように書く。

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{A} & \xleftarrow{\mathbb{E}_{\sigma}} & \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} & & \mathfrak{A}_* & \longrightarrow & (\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B})_* \\ \mathbb{E}_{\sigma} Z & \xleftarrow{\mathbb{E}_{\sigma}} & Z & & \rho & \longmapsto & \rho \otimes \sigma \end{array}$$

ここで Heisenberg 描像における操作  $\mathbb{E}_{\sigma}$  は、Schrödinger 描像におけるその双対として定義される。ただし、合成系の状態が一意的に定まるためには、 $\sigma$  がベクトル状態であることを要する [vN32, VI.2].

## d 測定

測定を定義する段階にきた。まず測定を構成要素と性質について考察し、それらを踏まえて測定を定義する。

第一に、測定を定義するためには測定される系、すなわち被測定系がなければならない。量子測定では被測定系は量子系であるのが、必ずしもそうでなければならないという訳ではない。被測定系は一般の物理系でよい。

<sup>\*17</sup> Stinespring の定理により、問題を正規な準同型のテンソル積の一意的存在に帰着させればよい。

第二に、測定を定義するためには、測定値が記録される測定器系がなければならない。そして測定値は古典量、測定器系は古典系でなければならない。例えば測定値は電圧計の針の位置でも良いし液晶画面に表示された数字でも良いが、 $1\text{\AA}$  の箱に閉じ込められた電子の状態のようなものであってはならない。そういったものは普通測定結果とは見做されないからである。電子の状態は人が直接に読み出せない。古典系であればそういった困難はなく系の状態の読み出しが自明化する(公理 A1.1)。したがって被測定系には古典系が相応しい。

第三に、測定においては被測定系と測定器系が相互作用する。実際、もしこれら二つの物理系が全く独立に存在するときには、被測定系の状態に測定値が依存しようがない。このような状況ばかりを考えても無意味である。そこで被測定系と測定器系の両者にまたがる非自明な物理過程、すなわち操作が主たる考察の対象となる。

第四に、測定器系の相互作用前の状態は考察しなくて良い。これは測定理論に特有の理想化である。古典系は原理的には任意の精度で制御可能と考え得るものである。したがって測定の開始時にはそれを勝手な、しかし都合の良い状態に初期化できると仮定してもよい。具体的には、実験開始時に電圧計の針を左端に合わせておくとか、液晶画面の表示を 0 にしておくとか、そういった類のことを想像してもらえば良い。

以上を踏まえて測定を次のように定義する。

A3 物理系  $\mathfrak{B}$  を被測定系、古典系  $\mathfrak{A}$  を測定器系とする測定とは、操作  $\phi \in \text{nCP}(\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{C}, \mathfrak{B}; 1)$  のことである。測定の際測定器系へ着目することにより得られる操作  $\mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{B}$  を、この測定に付随す古典化操作と呼ぶ。測定の際被測定系へ着目することにより得られる操作  $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$  を測定に付随する遷移写像 (transition map) と呼ぶ。

この定義は、上に述べた測定に関する考察の言い換えである。

\*

私たちは通常、測定という言葉によって測定値を何らかの確率で得、それと同時に系に擾乱を与える過程を意味している。上述のように定義された測定が、どのようにしてこのような確率や擾乱を定めるかを次に説明する。そのために古典系の射影についての解釈 A1.1 を想起しておく。古典系は一般性を失うことなく適当な測度空間  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  上の有界函数のなす von Neumann 代数  $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$  であると仮定して良い。その射影  $E$  は何らかの可測集合  $\Delta \in \Sigma \subset 2^\Omega$  の指示函数  $1_\Delta$  であり、これを  $\Delta$  を混同して、射影を確率的な事象と解釈していた。測定の文脈では、射影  $E = 1_\Delta$  は「測定値が  $\Delta \subset \Omega$  に得られる」という事象を表す。A1.1 ではこのような事象の確率を原理的に知り得ると仮定したのであった。以上を踏まえて A3 で定義された測定  $\phi$  が測定値の得られる確率と測定のもたらす擾乱を次のように理解することとする。記号は A3 に倣う。

A3.1 正規状態  $\rho \in \mathfrak{B}_*$  にある被測定系に対して測定  $\phi \in \text{nCP}(\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{C}, \mathfrak{B})$  を実行したとする。

A3.11 測定器系の射影  $E \in \mathfrak{C}$  の表す確率的な事象が生起する確率は次の

非負作用素で与えられる.

$$\phi(1 \otimes E) \quad (1.2.3)$$

すなわち, 正規状態  $\rho \in \mathfrak{B}_*$  において測定を行い, 確率的な事象  $E \in \mathfrak{C}$  を得る確率は

$$\langle \rho, \phi(1 \otimes E) \rangle. \quad (1.2.4)$$

これらは測定に付随する古典化操作だけで記述される.

A3.12 測定により物理量  $X \in \mathfrak{B}$  は次に変化するものとする.

$$\phi(X \otimes 1) \quad (1.2.5)$$

この変化  $X \mapsto \phi(X \otimes 1)$  を非選択的变化と呼ぶ. これは測定に付随する遷移写像の別名である.

A3.13 正規状態  $\rho \in \mathfrak{B}_*$  で代表される膨大な試料に対して測定を行い, そのあとで確率的な事象  $E \in \mathfrak{C}$  をもたらした試料ばかりに着目する. このとき測定前の系の物理量  $X \in \mathfrak{B}$  は, 今述べたような測定と選別により次に変化する.

$$\frac{\phi(X \otimes E)}{\langle \rho, \phi(X \otimes E) \rangle}. \quad (1.2.6)$$

この変化  $X \mapsto \phi(X \otimes E) / \langle \rho, \phi(X \otimes E) \rangle$  を選択的变化と呼ぶ.

なお, 非選択的变化は次に述べる意味で選択的变化の平均である. すなわち,  $(E_j)_{j \in J}$  が超弱作用素位相の意味で  $\sum E_j = 1$  を満たす確率的な事象の族であるとき

$$\phi(X \otimes 1) = \sum_{j \in J} \langle \rho, \phi(X \otimes E_j) \rangle \frac{\phi(X \otimes E_j)}{\langle \rho, \phi(X \otimes E_j) \rangle}. \quad (1.2.7)$$

右辺は事象  $E_j$  に対応する選択的变化を, それが生じる確率で平均したものである.

A3.11 で確率を知り得るとしてるところで, 古典系に対する確率の読み出し可能性を保証した公理 A1.1 を使っている. このことを理解するには  $\phi(1 \otimes E)$  を次のように分解して考えると良い. <sup>\*18</sup>

$$\phi(1 \otimes E) \xleftarrow{\text{測定 } \phi \text{ の実行}} 1 \otimes E \xleftarrow{\text{測定器系への着目}} E$$

したがって, 確率  $\langle \rho, \phi(1 \otimes E) \rangle$  を得る過程は次の三つの段階からなっている.

1. 測定  $\phi$  の実行.

<sup>\*18</sup> Heisenberg 描像で考えている点に注意. 時間順序に従うなら写像の向きに逆らって図を左から右に読まなければならない.

2. 測定器系への着目.
3. 測定器系における確率の読み出し.

最後の読み出しが公理 A1.1 に負っている. また, この第一段階と第二段階をまとめて測定に付随する古典化操作と呼んでいたのがあった. なお, 古典化操作と非選択的变化はいずれも操作であるが選択的变化は操作ではない. 選択的变化は事後的な選別を伴い, 線形性を失っているからである. 標語的にいえば, 試料の選別は操作ではない.

\*

次に Schrödinger 描像における測定の記述について述べる. 一般に  $\phi_{\text{nCP}}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  に対して条件  $\langle \sigma, \phi X \rangle = \langle \phi_* \sigma, X \rangle$ ,  $\sigma \in \mathfrak{B}_*$ ,  $X \in \mathfrak{A}$  により写像  $\phi_* : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}$  が定義される. この対応  $\phi \mapsto \phi_*$  により Heisenberg 描像から Schrödinger 描像に移行できる. 公理 A3.1 をこのように書き換えて次を得る.

A3.2 正規状態  $\rho \in \mathfrak{B}_*$  にある被測定系に対して測定  $\phi \in \text{nCP}(\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{C}, \mathfrak{B})$  を実行したとする. そして射影  $E \in \mathfrak{C}$  に対して  $\Phi_E = (\phi((-) \otimes E))_* : \mathfrak{B}_* \rightarrow \mathfrak{B}_*$  と定める,

A3.21 正規状態  $\rho \in \mathfrak{B}_*$  において測定を行い, 確率的な事象  $E \in \mathfrak{C}$  を得る確率は

$$\langle \Phi_E \rho, 1 \rangle. \quad (1.2.8)$$

A3.22 測定により正規状態  $\rho \in \mathfrak{B}_*$  は次に変化するものとする.

$$\Phi_1 \rho. \quad (1.2.9)$$

この変化  $\rho \mapsto \Phi_1 \rho$  を (Schrödinger 描像における) 非選択的变化と呼ぶ.

A3.23 正規状態  $\rho \in \mathfrak{B}_*$  で代表される膨大な試料に対して測定を行い, そのあとで確率的な事象  $E \in \mathfrak{C}$  をもたらした試料ばかりに着目する. このとき測定前の系の状態  $\rho \in \mathfrak{B}_*$  は, 今述べたような測定と選別により次に変化する.

$$\frac{\Phi_E \rho}{\langle \Phi_E \rho, 1 \rangle} \quad (1.2.10)$$

この変化  $\rho \mapsto \Phi_E \rho / \langle \Phi_E \rho, 1 \rangle$  を (Schrödinger 描像における) 選択的变化と呼ぶ.

## e 簡単な例

ここで一つだけ非常に簡単な測定の例を与える. スピン 1/2 粒子のスピン測定である. この系は Hilbert 空間  $\mathfrak{R} = \mathbb{C}^2$  で記述される. 代数的観点では代数  $\mathfrak{B} = B(\mathfrak{R}) \simeq \mathbb{C}^{2 \times 2}$  に着目する. これは四次正方行列の全体と同一視される. 周知のように, この代数  $\mathfrak{B}$  は Pauli 作用素

$\sigma_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$  で生成される.  $\sigma_3$  の固有値  $+1, -1$  に属する固有ベクトルを  $e_{+1}, e_{-1} \in \mathfrak{R}$ , これらの定める射影を  $E_{+1} = |e_{+1}\rangle\langle e_{+1}|, E_{-1} = |e_{-1}\rangle\langle e_{-1}| \in \mathfrak{A}$  と記す. すると

$$\sigma_3 = E_+ - E_{-1}.$$

これから定義する測定は次の性質を有するものを考える. すなわち, スピンの状態が  $\rho = E_\omega$ ,  $\omega \in \{+1, -1\}$  なら測定値  $\omega$  が確実に得られ, その測定後の系の状態は  $E_\omega$  のままとなる. どのような測定が完全正写像によりどのように記述されるかを以下で見る.

測定値の集合を  $\Omega = \{+1, -1\}$  とすれば, 測定器系は  $\mathfrak{C} = \ell^\infty(\Omega) \simeq \mathbb{C}^2$  である. これは測定値の集合  $\Omega = \{+1, -1\}$  上の関数, すなわち  $\Omega$  で添字付けられた二数の組  $f = (f_\omega)_{\omega \in \Omega}$  からなる. 次の条件で測定  $\phi \in \text{nCP}(\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{C}, \mathfrak{B}; 1)$  を定めることができる.

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{C} &\xrightarrow{\phi} \mathfrak{B} \\ X \otimes f &\longmapsto \sum_{\omega} f_\omega E_\omega X E_\omega \end{aligned}$$

物理系  $\mathfrak{B}$  の初期状態を密度作用素  $\rho \in \mathfrak{B}_*$  とする. この下で測定  $\phi$  を行う. 測定値  $\omega \in \Omega$  が得られる確率は, A3.11 により

$$\langle \rho, \phi(1 \otimes 1_{\{\omega\}}) \rangle = \langle \rho, E_\omega \rangle = \langle e_\omega, \rho e_\omega \rangle. \quad (1.2.11)$$

ただし,  $1_{\{\omega\}}$  は一点集合  $\{\omega\} \subset \Omega$  の指示関数である. 左辺と中辺の  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $\mathfrak{B}$  と  $\mathfrak{B}_*$  の対 (すなわち跡  $\text{tr}$ ) を表し, 右辺のそれは  $\mathfrak{R} = \mathbb{C}^2$  における標準的内積を表す. 上式からスピンの状態が  $\rho = E_\omega$  なら測定値  $\omega$  が得られ得る確率は 1 である. すなわち  $\rho = E_\omega$  なら確実に測定値  $\omega$  が得られる. なお, 測定値の期待値は

$$\sum_{\omega \in \{+1, -1\}} \omega \langle \rho, \phi(1 \otimes 1_{\{\omega\}}) \rangle = \langle \rho, \sigma_3 \rangle. \quad (1.2.12)$$

すなわち, 物理量  $\sigma_3$  から構成されたこの測定の期待値は,  $\langle \rho, \sigma_3 \rangle$  を与える.

Schrödinger 描像に移行するには A3.2 に述べた写像  $\Phi_E$  を求めればよい. 射影  $F = 1_{\{\omega\}}$ ,  $\omega \in \Omega$  に対して  $\Phi_F = \Phi_\omega$  と略記する. すると  $\Phi_F$  の定義から

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_* &\xrightarrow{\Phi_\omega} \mathfrak{B}_* \\ \rho &\longmapsto E_\omega \rho E_\omega = E_\omega \langle e_\omega, \rho e_\omega \rangle \end{aligned}$$

したがって, 測定値  $\omega$  に対する選択的变化は A3.23 により

$$\rho \mapsto E_\omega \quad (1.2.13)$$

このよう初期状態  $\rho$  は測定値  $\omega$  が得られた後には  $E_\omega$  の指定する固有空間に射影される.

ここで定義した測定は物理量の射影測定と呼ばれる測定の最も簡単な場合である [vN32, Lüd51]. 今の場合には, 射影測定は物理量  $\sigma_3$  から構成され, その測定値の期待値が  $\langle \rho, \sigma_3 \rangle$  を与える. そして, 測定後には測定値  $\omega$  に対応する固有空間に状態が射影される.

以上で測定の定義については一通り述べた. 次節では測定のまた別の記述法について補足することにする.

### 3 測度論的な記述

von Neumann 代数を基調としない議論では, 古典系を可換 von Neumann 代数  $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$  と定義することはできない. この場合には  $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$  の代わりに可測空間  $(\Omega, \Sigma)$  を古典系と考える. この立場では, 測定や古典化操作は作用素代数や操作に値を取る測度として定義されることになる.

#### a 古典化操作

古典化操作の方が測定よりも事情が簡単であるから, こちらを先に論じることにする. 始域 (定義域, domain) が古典系である操作を古典化操作と呼ぶのであった.<sup>\*19</sup> それを次のように書く.

$$\phi \in \text{nCP}(L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu), \mathfrak{A}; 1). \quad (1.3.1)$$

$\phi$  の引数に可測集合  $\Delta \in \Sigma$  の指示函数  $1_\Delta \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$  を代入することで, 可測集合  $\Delta \in \Sigma$  に正作用素  $\phi 1_\Delta \in \mathfrak{A}_+$  を割り当てることができる. このようにして得られる写像を  $\Pi$  と書くことにする.

$$\begin{aligned} \Sigma &\xrightarrow{\quad \Pi \quad} \mathfrak{A}_+ \\ \Delta &\longmapsto \Pi(\Delta) = \phi 1_\Delta \end{aligned}$$

この写像は次の定義を満たす.

定義 1.3.1 (正作用素値測度).  $(\Omega, \Sigma)$  を可測空間,  $\mathfrak{A}$  を von Neumann 代数とする. 写像  $\Pi: \Sigma \rightarrow \mathfrak{A}$  であって, 下記の条件を満たすものを正作用素値測度 (positive-operator valued measure, POVM) と呼ぶ.

- (i)  $\Pi$  は正值である. すなわち  $\Pi\Delta \geq 0$  が全ての  $\Delta \in \Sigma$  に対して成り立つ.
- (ii)  $\Pi$  は規格化されている. すなわち  $\Pi\Omega = 1$ .
- (iii)  $\Pi$  は可算加法的である. すなわち互いに交わらない可算個の可測集合の組  $(\Delta_j)_{j \in J} \in \Sigma^J$  に対して, 超弱作用素位相 (あるいは弱作用素位相) の意味で  $\Pi \bigcup_j \Delta_j = \sum_j \Pi\Delta_j$  が成り立つ.

$\Pi(\Delta)$  がいずれも射影 ( $E^2 = E = E^*$  を満たす  $E \in \mathfrak{A}$ ) であるとき, 正作用素値測度は射影作用素値測度 (projection-valued measure, PVM) と呼ばれる.

この正作用素値測度が古典化操作の測度論における対応物である. 正作用素値測度という名称は長いので, 現在では POVM と呼ばれることが多い. 一昔前には POM (probability-operator measure) と呼ばれることが多かったようである. POM の方が規格化を含意している点において

<sup>\*19</sup> 操作を Heisenberg 描像で定義していることに注意せよ.

優れているように思われるが、どういうわけか今日では POVM が標準的である。なお、測定論では正作用素値測度を準観測量 (semi-observables), 射影作用素値測度を観測量 (observables) と呼ぶこともある。

さて、初めに述べたとおり古典化操作は正作用素値測度を定める。次の命題はこの逆に相当する。

命題 1.3.2.  $(\Omega, \Sigma)$  を可測空間,  $\mathfrak{A}$  を物理系とする。さらに次を所与とする。

- 正作用素値測度  $\Pi: \Sigma \rightarrow \mathfrak{A}$ .
- $(\Omega, \Sigma)$  上の測度  $\mu$  で次の二条件を満たすもの。
  - $\mu$  は  $\sigma$ -有限。すなわち  $\Omega$  は有限測度の可測集合の可算和で書かれる。
  - 可測集合  $\Delta \in \Sigma$  に対して  $\mu\Delta = 0$  ならば  $\Pi\Delta = 0$ .

このとき古典化操作  $\phi \in \text{nCP}(L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu), \mathfrak{A}; 1)$  であって

$$\Pi\Delta = \phi 1_\Delta \tag{1.3.2}$$

を満たすものがただ一つ存在する。ただし,  $1_\Delta$  は可測集合  $\Delta \in \Sigma$  の指示関数である。

例えば物理系  $\mathfrak{A}$  が忠実な正規状態  $\rho \in \mathfrak{A}_*$  を受容する場合には,  $\nu_\Delta = \langle \rho, \Pi\Delta \rangle$  と定めることにより命題にいう  $\mu$  が得られる。ただし, 状態が忠実であるとは  $X \in \mathfrak{A}$  に対して  $\langle \rho, X^*X \rangle$  なら  $X^*X = 0$  となることを指す。なお, 一般に忠実な正規状態を受容する von Neumann 代数を  $\sigma$ -有限と呼ぶことがある ([UHO03, 定理 4.46, p. 113])。上の命題は, このような条件下で正作用素値測度と古典化操作を対応付けられることを示している。この命題自身は良く知られているものと思うが記述の一貫性のため以下に証明を与える。

命題 1.3.2 の証明. 正規状態  $\rho \in \mathfrak{A}_*$  ごとに確率測度  $\nu_\rho: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  を次のように定義する。

$$\nu_\rho(\Delta) = \langle \rho, \Pi\Delta \rangle. \tag{1.3.3}$$

$\mu$  の満たすべき第二の条件により,  $\nu_\rho$  は  $\mu$  に対して絶対連続である (すなわち  $\Delta \in \Sigma$  に対して  $\mu\Delta = 0$  なら  $\nu_\rho\Delta = 0$ )。

第一に,  $f \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$  に対して次の条件で  $\phi f \in \mathfrak{A}$  を定義できることを示す。

$$\forall \rho \in \mathfrak{A}_*, \quad \langle \rho, \phi f \rangle = \int f d\nu_\rho. \tag{1.3.4}$$

勝手な  $\mathfrak{A}_*$  の元は四つの正規状態の線形結合で書かれるから, この定義式における  $\rho$  としては正規状態  $\rho \in \mathfrak{A}_*$  だけを考えれば十分である。またこのような  $\rho$  に対して  $\nu_\rho$  は  $\mu$  に対して絶対連続であったから上式右辺は  $f \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$  の代表元の取り方に依存せずに一意に定まる。  $\phi f$  は条件式 (1.3.4) により存在すれば一意に定まる。以下で  $\phi f$  の存在を何段かに分けて示す。

1.  $f \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$  が非負の単函数の場合。

単函数  $f$  とは交わらない可測集合の有限列  $\Delta_j \in \Sigma$  と, 正数  $f_j$  を用いて次のように書く

ことができるものである.

$$f = \sum_j f_j 1_{\Delta_j}. \quad (1.3.5)$$

このように書かれる  $f$  に対して  $\phi f$  を次のように定義する.

$$\phi f = \sum_j f_j \Pi \Delta_j \quad (1.3.6)$$

この定義は (1.3.4) を満たし, それゆえ単函数  $f$  の指示函数を用いた表示の多意性にもかかわらず  $\phi f$  は一意に定まる.

上述の単函数  $f$  と正規状態  $\rho \in \mathfrak{A}_*$  に対して次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \langle \rho, \phi f \rangle &= \sum_j f_j \langle \rho, \Pi \Delta_j \rangle \\ &\leq (\max f_j) \sum \langle \rho, \Pi \Delta_j \rangle \leq \|f\| \langle \rho, \Pi \bigcup \Delta_j \rangle \leq \|f\| \langle \rho, 1 \rangle \leq \|f\|. \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

したがって, 非負の単函数  $f$  に対して

$$\|\phi f\| \leq \|f\|. \quad (1.3.8)$$

次の段階でこの不等式を用いる.

2.  $f \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$  が非負の場合.

非負函数  $f \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$  を任意の一つとり固定する. このとき単調に増大する非負単函数列  $s_m$ ,  $m \in \mathbb{N}$  であって, いたるところで  $f$  に収束するものがある.  $s_m$  の増大性ゆえ  $m \leq n$  なら  $0 \leq s_n - s_m$ . したがって先の不等式 (1.3.8) から

$$\|\phi s_n - \phi s_m\| \leq \|s_n - s_m\|. \quad (1.3.9)$$

$s_m$  は  $f$  に収束するゆえ Cauchy 列. それゆえ上式から列  $\phi s_m$  も Cauchy 列である. したがって  $\mathfrak{A}$  の完備性から  $\phi s_m$  は収束列である. その収束先を  $\phi f$  と定義する. この収束はノルム位相に関するものである. 一般にノルム位相は作用素超弱位相よりも密であるから, この収束  $\phi s_m \rightarrow \phi f$  は作用素超弱位相の意味での収束でもある. したがって, 任意の状態  $\rho \in \mathfrak{A}_*$  に対して,

$$\begin{aligned} \langle \rho, \phi f \rangle &= \langle \rho, \lim \phi s_m \rangle \\ &= \lim \langle \rho, \phi s_m \rangle && \text{超弱作用素位相の定義} \\ &= \lim \int s_m d\nu_\rho && \text{単函数に対する } \phi s \text{ の定義} \\ &= \int f d\nu_\rho && \text{Lebesgue の単調収束定理} \end{aligned}$$

つまり, ここで定義された  $\phi f$  は所望の性質 (1.3.4) を満たす. これからまた  $\phi f$  の定義は  $f$  を近似する単函数列  $s_m$  の取り方に依らずに一意に定まることも分かる.

3.  $f \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \nu)$  が任意の場合.  $f$  をまず実部と虚部分に分け, さらにそれを正部分と負部分に分ける:  $f = \sum_{k=0,1,2,3} i^k f_k$ ,  $f_k \geq 0$ . これに対して,  $\phi f = \sum_k i^k \phi f_k$  と定めれば良い.



第二に、 $\phi : f \mapsto \phi f$  が単位的完全正写像であることを示す。単位性は  $\phi f$  の定義と  $\Pi\Omega = 1$  から分かる ( $1 = 1_\Omega$  は単函数であることに注意)。そして  $\phi$  が正写像であることも定義より明白である。一般に、始域が可換な場合、正写像は完全正写像である [Sti55, Theorem 4] ([?, Theorem 3.11] も参照)。したがって  $\phi$  は完全正写像である。

最後に超弱連続性 (正規性) を示す。  $\phi$  は正写像であったから、完全加法性を検証すれば良い [KR97b, Theorem 7.1.12]。すなわち、 $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$  の互いに交わらない射影の族  $(E_j)_{j \in J}$  に対して、

$$\left\langle \rho, \phi \sum_{j \in J} E_j \right\rangle = \sum_{j \in J} \langle \rho, \phi E_j \rangle \quad (*)$$

を検証すれば良い。再び段階を踏んでこれ検証する。

1. 互いに交わらない  $\Delta_j \in \Sigma$  があって  $E_j = 1_{\Delta_j} = (\Delta_j$  の指示函数) と書くことができる。それゆえまた示すべき等式も次のように書かれる。

$$\left\langle \rho, \Pi \bigcup_{j \in J} \Delta_j \right\rangle = \sum_{j \in J} \langle \rho, \Pi \Delta_j \rangle \quad (**)$$

これは  $(L^\infty)^*$  の射影が可測集合の指示函数であることから従う。

2.  $J$  は可算に限って良い。実際、 $\mu$  は有限測度であるから  $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$  の交わらない射影は高々可算個しかない。

$\sigma$ -有限の定義により  $\mu$  が確率測度の場合に主張を示せば良い。まず、 $\mu\Delta_j = 0$  ならば  $L^\infty$  において  $1_{\Delta_j} = 0$  であるから、このような  $j \in J$  は初めから取り除いて考える。この前提の下では、どの  $j \in J$  に対しても  $\mu\Delta_j > 0$ 。各  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $I_n = \{j \in J \mid \mu\Delta_j > 1/n\}$  と定めると  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = J$ 。いま、勝手に  $n \in \mathbb{N}$  を一つ取り、仮に  $I_n$  が  $n$  より多くの元からなるとして見る。そして  $I_n$  を  $I_n = \{1, 2, \dots, n, n+1, \dots\}$  と書く。すると  $\Omega \supset \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_n$ 。  $\mu$  が確率測度で可算加法性 (特に有限加法性) を持つから

$$1 \geq (\mu\Delta_1) + \dots + (\mu\Delta_n) > \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = 1. \quad (1.3.10)$$

これは矛盾である。よって、 $I_n$  はそれぞれ  $n$  以下の要素からなり、 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = J$  も高々可算である。

3. 前項により (\*\*) は  $J$  が可算の場合に示せば十分である。この場合、(\*\*) は正作用素値測度の可算加法性と同値であり、これは確かに満たされる。

これで  $\phi$  の超弱連続性も示された。  $\phi$  の構成から  $\phi 1_\Delta = \Pi\Delta$  が成り立つ。 q.e.d.

測定値の集合  $\Omega$  が可算である場合には、しばしば測度空間  $(\Omega, 2^\Omega, \text{数え上げ測度})$  が考察の対象となり、多くの測度論的な考察が自明化する。

命題 1.3.3 (測定値が可算の場合の正作用素値測度).  $\Omega$  を可算集合とし, 可測空間  $(\Omega, 2^\Omega)$  を考える. さらに  $\mathfrak{A}$  を ( $\sigma$ -有限とは限らない) 物理系とする. そして下記の三項を考える.

- (a) 古典化操作  $\phi \in \text{nCP}(\ell^\infty(\Omega), \mathfrak{A}; 1)$ .
- (b) 正作用素値測度  $\Pi: 2^\Omega \rightarrow \mathfrak{A}$ .
- (c) 次の二条件を満たす作用素の組  $(A_\omega)_{\omega \in \Omega} \in \mathfrak{A}^\Omega$ .
  - 正值性  $A_\omega$  が全ての  $\omega \in \Omega$  に対して成り立つ.
  - 規格化  $\sum_{\omega \in \Omega} A_\omega = 1$  が超弱作用素位相 (または弱作用素位相) における収束の意味で成り立つ.

これらは次の条件で一対一に対応する. 任意の  $\omega \in \Omega$  に対して

$$\phi 1_{\{\omega\}} = \Pi\{\omega\} = A_\omega. \quad (1.3.11)$$

このような対応に基づいて, 以降 (b) の正作用素値測度と (c) に述べた作用素の組を同一視する.

証明. (a)  $\implies$  (b)  $\implies$  (c) は明白である.  $\Omega$  上の数え上げ測度を  $\mu$  とし命題 1.3.2 を適用して (a)  $\longleftarrow$  (b) を得る. そこで (b)  $\longleftarrow$  (c) を示せば良い.  $(A_\omega)_{\omega \in \Omega}$  の満たすべき二条件により,  $\Delta \subset \Omega$  に対して, 和  $\sum_{\omega \in \Delta} A_\omega$  は超弱作用素位相において収束する (例えば [UHO03, 定理 4.3]). そこで  $\Pi\Delta = \sum_{\omega \in \Delta} A_\omega$  により  $\Pi$  を定義する.  $\Pi$  が正作用素値測度になることを示す. 正值性と規格化は  $(A_\omega)_{\omega \in \Omega}$  の満たすべき二条件から直ちに従う. そこで可算加法性を示せば良い. 正規状態  $\rho \in \mathfrak{A}_*$ , 正数  $\varepsilon > 0$ , 交わらない  $\Omega$  の部分集合の可算列  $\Delta_j, j \in \mathbb{N}$  を取る.  $\Delta = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Delta_j$  と書く.  $\Pi\Delta$  を定める和は収束するから, ある有限集合  $\Gamma \subset \Delta$  があって, これを含む任意の有限集合  $\Gamma' \subset \Delta$  に対して

$$\left| \left\langle \rho, \Pi\Delta - \sum_{\omega \in \Gamma'} A_\omega \right\rangle \right| \leq \varepsilon/3. \quad (1.3.12)$$

$\Gamma \cap \Delta_j$  が空でない  $j$  は有限個しかない. 一般性を失うことなくそれらを  $j = 1, 2, \dots, n$  とする.  $\Pi\Delta_j$  を定める和は収束するから,  $\Gamma \cap \Delta_j \subset \Gamma_j \subset \Delta_j$  を満たす有限集合  $\Gamma_j$  であって

$$\left| \left\langle \rho, \Pi\Delta_j - \sum_{\omega \in \Gamma_j} A_\omega \right\rangle \right| \leq 2^{-j} \varepsilon/3. \quad (1.3.13)$$

これら二式から

$$\left| \left\langle \rho, \Pi\Delta - \sum_{j \leq n} \Pi\Delta_j \right\rangle \right| \leq \varepsilon/3. \quad (1.3.14)$$

もとより  $0 \leq \Pi\Delta - \sum_{j \leq n} \Pi\Delta_j$  であったことと, 上式から完全加法性が従う. q.e.d.

## b 測定

古典化操作と同様，測定にもその測度論的対応物がある．これについては要点だけ述べる．次のように書かれる測定を考える．

$$\phi \in \mathfrak{nCP}(L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu) \otimes \mathfrak{A}, \mathfrak{A}; 1). \quad (1.3.15)$$

$\phi$  の一方の引数に可測集合  $\Delta \in \Sigma$  の指示函数  $1_\Delta \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$  を代入することで， $\Delta \in \Sigma$  に完全正写像  $\phi(1_\Delta \otimes (-)) \in \mathfrak{nCP}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$  を対応させることができる．このようにして得られる写像を差し当たり  $\Phi$  と書くことにする．

$$\begin{aligned} \Sigma &\xrightarrow{\Phi} \mathfrak{nCP}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) \\ \Delta &\longmapsto \Phi\Delta = \phi(1_\Delta \otimes (-)) \end{aligned}$$

この写像  $\Phi$  は次を満たす．

定義 1.3.4 (CP インストルメント).  $(\Omega, \Sigma)$  を可測空間,  $\mathfrak{A}$  を von Neumann 代数とする. 写像  $\Phi: \Sigma \rightarrow \mathfrak{nCP}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$  であって, 下記の条件を満たすものを CP インストルメント (completely positive instrument) と呼ぶ.

- (i)  $\Phi$  は完全正写像に値を取る．これは写像の終域が  $\mathfrak{nCP}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$  であることに含まれている．
- (ii)  $\Phi$  は規格化されている．すなわち  $\Phi\Omega = 1$ .
- (iii)  $\Phi$  は可算加法的である．すなわち互いに交わらない可算個の可測集合の組  $(\Delta_j)_{j \in J} \in \Sigma^J$  と  $X \in \mathfrak{A}$  に対して，超弱作用素位相（あるいは弱作用素位相）の意味で  $(\Phi \bigcup_j \Delta_j) X = \sum_j (\Phi \Delta_j) X$  が成り立つ．

本論文における測定は単一の線形写像であり，CP インストルメントは測度の一種である．今しがた述べた通り線形写像としての測定は測度としての測定を定義する．それでは逆に，測度としての測定を勝手に一つ与えたとき，これは線形写像としての測定を定義するだろうか．この問題は [OO16] によって議論された．彼らの用語法では本論文の測定は正規拡張性を有する CP インストルメント (CP instrument with normal extension property) と呼ばれている．彼らの議論によれば， $\mathfrak{A}$  が  $B(\mathfrak{H})$  の形をとる場合には本論文にいう測定と CP インストルメントを同一視できる．\*20

一般には線形写像としての測定は測度としての測定よりも小さい類をなしている．これはしかし，本論文にいう線形写像としての測定が不当に小さな類をなしているということではない．むしろ，線形写像としての測定の方が物理的に実現可能な測定を記述しており，測度としての測定は一般には物理的意義が必ずしも明確ではないものまで含んでしまっていることを意味している．詳しい内容は [OO16] を参照されたい．

\*20 [OO16, Theorem 3.1, Theorem 3.4 Theorem 4.1] 参照.

## 結

本章では、von Neumann 代数や完全正写像といった用語を導入し、それらを用いて物理系、操作、測定といった概念を定義した。そして最後に測定の測度論的な記述法について見た。

1 節は、数学的な用語と記号の導入に充てた。

2 節では、物理系、操作、測定といった概念を定義した。物理系は von Neumann 代数、古典系は可換 von Neumann 代数と定義した。古典系においては系の状態の読み出しが自由にできることを仮定したが、これが量子測定理論における古典系の役割を表している。次に、物理系の時間発展や変化を正規な単位的完全正写像として定式化し、これらを操作と呼ぶこととした。操作は (Schrödinger 描像で) 状態を状態に移さなければならないから単位的かつ正でなければならない。さらに、ある操作が可能であればその自明な拡張も可能であるべきであるというもっともな要請から完全正性も従う。正規な単位的完全正写像は、これらの物理的に妥当な要請に基づいて導入されたものである。特に (Schrödinger 描像で) 古典系に値をとる操作を古典化操作と呼ぶことにした。最後に、特別な形の操作として測定を定義した。測定は被測定系と測定器系の合成系上の操作であって、測定器系の初期状態を考慮しなくて済むものとして定義された。ここで測定器系は測定値の書き込まれる系であって、古典系であると仮定されている。

3 節では、測定や古典化操作の測度論的な記述について述べた。古典系を可換 von Neumann 代数ではなく可測空間と定義するときには、測定や古典化操作も測度論的に定義せざるをえない。被測定系が可分 Hilbert 空間  $\mathfrak{K}$  上の有界作用素すべてのなす von Neumann 代数  $B(\mathfrak{K})$  の場合には、古典化操作や測定を一つの完全正写像と定義しても、測度論的に定義しても同じである。しかし一般の von Neumann 代数を取り扱う場合には、これらに微妙な違いが生じる可能性があることに注意した。



## 第2章

# 識別性

### 序

よく分からないことや不確実なことに遭遇することがある。というよりも、ほとんどの物事はよく分からない不確実なものである。こういった物事や状況に対して、どのような態度をとるべきか。大きく別けて二つの選択肢がある。ひとつは、分からぬままに何か発言してみたり、憶測にもとづいて行動してみるという態度である。そしてもうひとつは、分からないことを白状したり、黙って事態を静観するという態度である。前者は積極的だが当てずっぽう、後者は不熱心の嫌いがあるが慎重とも言える。どちらか一方の態度が他方に優越することはなく、どちらにも利点と欠点がある。本論文では後者の慎重な態度に感心を寄せる。本章以下で論じられるのは、このような慎重な態度をとる人が行うであろう状態識別である。

状態識別とは、物理系の状態の候補が幾つかに絞られているという前提の下、測定に基づいて真の状態を同定するための手続である。もうすこしこの意味を噛み砕いて理解するためには、候補状態のうちのどれか一つの状態が実現されている膨大な試料を想像してみるのがよい。これらの試料に対して順次測定を行ってゆき、これらの膨大な試料に共通の真の状態を同定しようとする。ただし、どの試料に対しても同一の手続きを実行するものとする。この場合、一つの試料に対して測定を行い、その試料の状態を判断するという一連の手続きが状態識別である。最終的に下し得る判断を測定値とみなせば、状態識別は一種の測定であると理解できる。本章でも量子測定の一つとして状態識別を定義する。

さて、任意の状態が互いに誤りなく識別できるなら、状態識別は主題化するに値しない。しかし、量子力学では状態が互いに直交する場合を例外として、誤りなく識別することは出来ない。この誤りをどのように取り扱うかに応じて量子状態識別の手法は二つに分かれる。その一方である第一種識別は *minimum error discrimination* と呼ばれ積極的な態度に対応する。もう一方の第二種識別は *unambiguous discrimination* や *Ivanovic-Dieks-Peres measurement* と呼ばれ、慎重な態度に対応する。本論文で取り上げるのは後者である。

これらの二種の識別の区別については既に序論で述べたので、ここでは手短かにこれらの違いを述べるに留める（図1参照）。第一種識別では一つの試料に対する測定を行う度に真の状態がどれであるか決定を下す。非直交な量子状態の第一種識別では、真の状態とは異なる状態を真の状態と名指してしまう取り違えが避けられない。そこで第一種識別ではこの取り違え確率の最小化が問題になる。これは定量的な問題である。一方、第二種識別では決定の放棄を許す代わりに取り違えを回避しようとする。この場合には、決定の放棄により取り違えを回避できるかどうか、すなわち第二種識別が可能かどうかはまず問われる。これは定性的な問題である。そして識別が可能であるときに限って、次に最適性にまつわる定量的な問題を俎上に載せる。このように問題が定性的な段階と定量的な段階の二段構えになるのが第二種識別の特徴である。

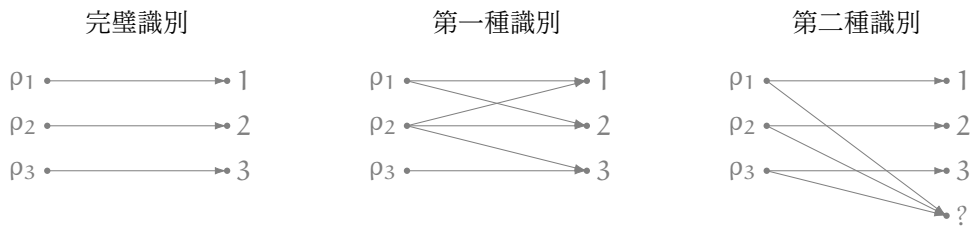


図1 識別の種類. 三状態 ( $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ ) の識別を模式的に図示してある. 左図: 完璧な識別. 各状態が直交しているという極めて特殊な場合にのみ可能である. この図は, 例えば真の状態が  $\rho_1$  であれば必ず測定値 1 が得られることを示している.  $\rho_2, \rho_2$  についても同様. 中図: 第一種識別. 真の状態が  $\rho_1$  であるときには, 測定値 1 と 2 が出る可能性がある. 真の状態が  $\rho_2$  であれば全ての測定値が出る可能性があり,  $\rho_3$  であれば測定値 3 が確実に得られる. 右図: 第二種識別. 真の状態がどれであっても, 対応する測定値または“?” が得られる. 測定値 1, 2, 3 が得られた場合には真の状態を正しく同定できる.

第二種識別についてももう少し詳しく述べる. 正確な定義は次節で述べるが, 直感的には次の三つの規則に従う状態識別が第二種識別である.

- 各試料に対して特定を行った結果, 「真の状態はこれである」という種類の判断を下し得ることはもちろんのこと, 「確かなことは云えない」と述べることも許される. そして, 下し得る判断はこれらの外にはない.
- 誤った判断を下してはならない. すなわち, 「真の状態はこれである」と云って真の状態と異なる候補状態を名指してはいけない. ただし, 「確かなことは云えない」と述べることは誤りには含めない.
- 真の状態がどれであったとしても, いずれはその状態を正しく同定しなくてはならない. すなわち, どの候補状態が実現していたとしても, 正しく「真の状態はこれである」と答える確率が  $> 0$  でなくてはならない.

「確かなことは云えない」という判断が第一種識別にはなかった第二種識別の特徴である. このような判断を許す代わりに, 二つ目の規則にあるように第二種識別では取り違えは禁じられている. 最後の条件はいつまでも「確かなことは云えない」と言い続け, 決定的な判断を一度も下さないという逃げ道を封じるためにある.

本章では第二種識別の定性的問題, すなわち識別可能性についての一般論を展開する. A. Chefles [Che98] や Y. Feng ら [FDY04] の研究の一步先に進んで候補状態が無数ある場合を取り扱う. なお第二種識別の定量的な側面ないし最適性については第 3 章で, また無限個の状態識別の例については第 4 章で取り扱う. 以下, 本論文では第二種識別 (unambiguous discrimination) しか取り扱わない. そこで特に断らない限り, 単に識別と言えばこの種の識別を指すものとする.

# 1 定義

本節では識別 (unambiguous discrimination) を一般的に定義する。定義から直ぐ分かる性質について注意を行ったのち、古典系における識別について簡単に議論する。古典系についての議論は後で必要になるものではないから、先を急ぐ場合には読み飛ばしても差し支えない。

## a 一般的定義

識別の定義を述べる。差し当たり測定値の個数は可算と限ってよく、測定が系にもたらす擾乱については関心がない。このような場合には正作用素値測度を用いた測定の記述が便利である。そこで識別の定義する前に正作用素値測度 (positive-operator valued measure, POVM) について要点を想起しておくことにする。<sup>\*21</sup>

被測定系は von Neumann 代数  $\mathfrak{A}$  で記述されているものとする。被測定系  $\mathfrak{A}$  としては、差し当たり Hilbert 空間  $\mathfrak{K}$  上の全ての有界作用素がなす代数  $B(\mathfrak{K})$  を念頭においてもらえば良い。そして測定値の集合  $\Omega$  は可算であるとする。この場合、正作用素値測度とは次の二条件を満たす作用素の組  $(\Pi_\omega)_{\omega \in \Omega} \in \mathfrak{A}^\Omega$  を指す。

- 正値性:  $\Pi_\omega \geq 0$  が全ての  $\omega \in \Omega$  に対して成り立つ。
- 規格化:  $\sum_{\omega \in \Omega} \Pi_\omega = 1$  が超弱作用素位相 (または弱作用素位相) における収束の意味で成り立つ。

この正作用素値測度  $(\Pi_\omega)_{\omega \in \Omega}$  は次のような測定を記述している。すなわち、正規状態  $\rho \in \mathfrak{A}_*$  において測定値  $\omega \in \Omega$  を得る確率が

$$\langle \rho, \Pi_\omega \rangle \tag{2.1.1}$$

で与えられる測定である。上式が確かに確率を定めることは正作用素値測度の正値性と規格化の帰結である。

定義 2.1.1 (識別). 可算集合  $J$  で添字付けられた物理系  $\mathfrak{A}$  上の正規状態  $\rho_j \in \mathfrak{A}_*$  の組  $(\rho_j)_{j \in J}$  を所与とする。さらに、集合  $J$  は、記号 “?” を含まないと仮定して、正作用素値測度  $\Pi = (\Pi_\omega)_{\omega \in J \cup \{?\}}$ ,  $\Pi_\omega \in \mathfrak{A}$  を考える。

(I) 任意の  $j, k \in J, j \neq k$  に対して条件

$$\langle \rho_j, \Pi_k \rangle = 0, \quad \langle \rho_j, \Pi_j \rangle > 0 \tag{2.1.2}$$

<sup>\*21</sup> 大雑把にいて、測定は測定値の得られる確率と被測定系に対する擾乱の二つを記述する。前者は測定に付随する古典化操作により記述され、この古典化操作の測度論的対応物が正作用素値測度であった。測定がどのように測定値の確率を与えるかについての一般論は公理 A3 (23 頁) および A3.1 (23 頁) を参照されたい。またここに述べる二条件を満たす作用素の組として定義された正作用素値測度については命題 1.3.3 (31 頁) を、正作用素値測度ないし古典化操作と測定の関係については付録の命題 5.3.2 (115 頁) を参照されたい。



が成り立つとき、正作用素値測度  $\Pi$  は状態の組  $(\rho_j)_{j \in J}$  を識別するという。この場合、 $\Pi$  を  $(\rho_j)_{j \in J}$  の識別と呼ぶ。さらに、 $q_j = \langle \rho_j, \Pi_j \rangle, j \in J$  を識別確率、 $q = \inf\{q_j \mid j \in J\}$  を最低識別確率と呼ぶ。

- (II) (I) という識別が一樣であるとは、最低識別確率が正 ( $> 0$ ) であることを意味する。
- (III) (I) という識別が完璧であるとは、最低識別確率が 1 であることを意味する。全ての識別確率が 1 であると言っても同じことである。

状態の組  $(\rho_j)_{j \in J}$  が識別可能であるとは、この状態の組を識別する正作用素値測度が少なくとも一つ存在することを意味する。一樣識別可能と完璧識別可能についても同様である。

また、ある測定が識別であるとは、この測定に付随する正作用素値測度が識別であることを意味する。一樣識別と完璧識別についても同様である。

はじめに、識別の定義条件が先に序で述べた識別の満たすべき三つの規則にどう対応しているのかを確認する。正作用素値測度の添字は測定の測定値を表し、今の場合これは  $j \in J$  と“?” からなる。測定値  $j \in J$  は「真の状態は  $\rho_j$  である」という判断に対応し、測定値“?” は「確かなことは云えない」という判断に対応する。測定値がこれらからなるということが識別の満たすべき一つの規則に対応している。そして  $\langle \rho_j, \Pi_k \rangle$  は、真の状態が  $j$  であるときに「真の状態は  $k$  である」と判断する確率である。 $j \neq k$  のときこの確率が 0 であれというのは、真の状態とは異なる状態を真の状態と名指してしまう取り違えを禁ずる二つ目の規則に対応する。最後に  $\langle \rho_j, \Pi_j \rangle > 0$  は、いずれは真の状態を同定できなくてはならないという三つ目の規則に対応する。

ところで、真の状態を同定するためには、何回測定を行う必要があるだろうか。この必要測定回数は一般には真の状態が何であるかに依存する。 $\rho_j, j \in J$  が真の状態であれば、必要測定回数はおおよそ  $1/q_j = 1/\langle \rho_j, \Pi_j \rangle$  回である。そして (I) に述べた識別性だけを仮定するときには、この回数が  $j \in J$  に応じて幾らでも大きくなることを禁止できない。状態識別を実行するまで真の状態が何であるかは不明である。したがって、単なる識別性しか保証されていない場合、前もって真の状態の同定に何回程度の測定が必要であるかは一般には分からない。この困った状況を取り除くのが (II) の一樣識別性である。一樣識別可能な状態の組に対しては、最低識別確率の逆数程度の測定回数で足ることが前もって知れている。

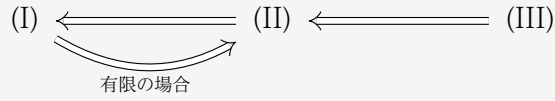
識別可能性は、いつかは真の状態を同定できることを保証する。これに対して一樣識別可能性は、事前に何回程度測定を繰り返せば系の状態を同定できるかまで教えてくれる。以上が単なる識別可能性と一樣識別可能性の違いである。

次の註で定義から容易に分かる識別性の性質を幾つか挙げる。

註 2.1.2. 可算個の正規状態の組について下記が成り立つ。

- 完璧識別可能なら一樣識別可能であり、一樣識別可能なら識別可能である：

これは定義から明白である.



- 状態族の識別性はユニタリ操作によって変わらない:

物理系  $\mathfrak{A} = B(\mathfrak{R})$  を考えときには, 前双対は跡類作用素の全体  $\mathfrak{A}_* = B^1(\mathfrak{R})$  と同一視される. そして正規状態の組  $(\rho_j)_{j \in J}$  が識別可能であれば,  $(U\rho_j U^*)_{j \in J}$  もまた識別可能である. ただし  $U \in B(\mathfrak{R})$  は任意のユニタリ作用素である. 一様識別性, 完璧識別性についても同じである.

## b 古典系における識別

量子状態の識別を論じるに先立って, 古典状態の識別を議論しておく.\*<sup>22</sup> 簡単のため, まずは古典系として  $L^\infty(\mathbb{R})$  を取り, 二つの正規状態の識別性を論じる.\*<sup>23</sup> はじめに識別可能な例と識別不能な例を上げ, そのあとで古典状態たちが識別可能であるための基準を一般的に示す.

\*

図 2 に示されるような二つの正規状態  $p_+$  および  $p_-$  の識別を考える.

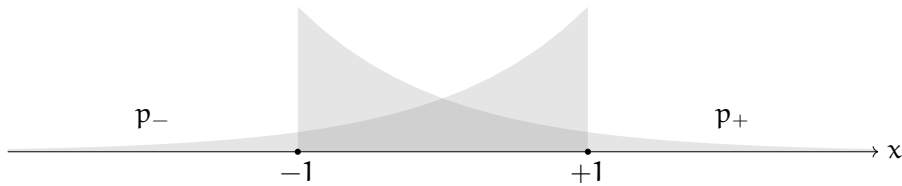


図 2 二つの状態  $p_\pm$  のグラフ.  $p_-$  は  $(-\infty, +1)$  でのみ 0 と異なり,  $[1, +\infty)$  では 0 であると仮定する.  $p_+$  は  $p_+(x) = p_-(-x)$  で定義する.

一回一回の測定では, 特定の測定値  $x$  が得られる. そのたびに「真の状態は  $p_+$  と  $p_-$  のどちらですか」と訊かれる. 測定値  $x$  にもとづいてこの質問に対して何らかの態度表明をしなくてはならない. どのように対応するのが良いだろうか. 測定値がどの区間に得られたかに応じて場合を別

\*<sup>22</sup> 本論文では, 主に相空間の一点で与えられる状態を古典状態と呼んでいる. この小節では例外的に, 確率分布で与えられる古典状態を考察する.

\*<sup>23</sup> ここで古典系  $\mathfrak{A} = L^\infty(\mathbb{R})$  は  $\mathbb{R}$  上の (Lebesgue 測度に対する) 本質的有界函数のなす von Neumann 代数であり, その前双対  $(L^\infty(\mathbb{R}))_* = L^1(\mathbb{R})$  は可積分函数からなる. この場合, 正規状態は  $\mathbb{R}$  上の確率密度函数に他ならない. そして  $L^\infty(\mathbb{R})$  と  $(L^\infty(\mathbb{R}))_* = L^1(\mathbb{R})$  の対は積分で与えられるのであった.

$$\langle p, f \rangle = \int_{\mathbb{R}} p(x) f(x) dx, \quad p \in L^1(\mathbb{R}), \quad f \in L^\infty(\mathbb{R}). \quad (2.1.3)$$

けて考えることにする.

- (a) 測定値が区間  $(-\infty, -1)$  に得られた場合. このときには真の状態は  $p_-$  であると返答すれば良い. なぜなら真の状態が  $p_+$  であれば, このようなことは生じ得ないからである.
- (b) 測定値が区間  $(+1, +\infty)$  に得られた場合. このときには真の状態は  $p_-$  であると返答すれば良い. 理由は (a) と同様である.
- (c) 測定値が区間  $[-1, +1]$  に得られた場合. この場合にははっきりしたことはいえない.

(a)(b) については何の問題もない. (c) の場合についてのみ, 考え方によって判断が分かれる余地がある. 本論文で取り上げている (第二種) 識別では, この場合には単に「確かなことは云えない」と述べれば良い. 黙秘するとか棄権すると云ってもよい. いずれにしても, 確実なことが言えない場合には何も決定しないのがこの識別の特徴である. 上の例の場合には, そのような非決定的な判断を下すにしても (a)(b) のような区間があるために, いつまでも非決定的な判断しか下さないことにはならない. 真の状態がどちらにせよ (a)(b) に相当する場合がいつかは生じて正しく真の状態を同定できる.

以上のような判断の下し方は次の正作用素値測度  $(\Pi_+, \Pi_-, \Pi_?) \in (L^\infty(\mathbb{R}))^{\{+, -, ?\}}$  で記述される.

$$\Pi_- = 1_{(-\infty, -1)}, \quad \Pi_+ = 1_{(+1, +\infty)}, \quad \Pi_? = 1_{[-1, -1]}. \quad (2.1.4)$$

実際にこの正作用素値測度  $(\Pi_+, \Pi_-, \Pi_?) \in (L^\infty(\mathbb{R}))^{\{+, -, ?\}}$  が正規状態の組  $(p_-, p_+)$  に対する識別になっていることは定義に照らして確認できる.

\*

上の例は識別可能な例であった. 識別不能な古典状態の例としては次の図 3 で与えられる二つの状態  $p_\pm$  が典型的である.

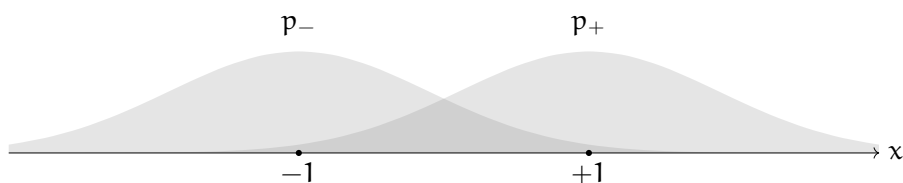


図 3 二つの状態  $p_\pm$  のグラフ.  $p_-$  は平均が  $x = -1$  の正規分布.  $p_+$  は  $p_+(x) = p_-(-x)$  で定義する.

これらの確率密度はどちらも  $\mathbb{R}$  上で常に  $> 0$  である. したがって, どの測定値  $x \in \mathbb{R}$  が得られても, 真の状態が  $p_\pm$  のどちらであるかについて確かなことは云えない. 先の例の (a) および (b) に相当する場合がそもそも無いのである. したがって, 誤った判断を避けようとするときに「確かなことは云えない」と述べざるを得ない. しかし, そうするといずれは正しく真の状態を同定しなくてはならないという識別の規則に反してしまう. このようにして二状態  $p_\pm$  に対する識別が不可能であることが分かる.

\*

上の二つの例から分かる通り、古典状態の識別が可能か否かを決めるのは「ある一つの密度函数だけが0でない区間」の有無である。このことにさえ注意すれば次を示すことは難しくない。

命題 2.1.3.  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  を局所化可能測度空間とし、古典系  $\mathfrak{A} = L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$  を考える。そして  $\mathfrak{A}_* = L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$  とみなし、正規状態もこの元とみる。可算個の正規状態の組を  $(\rho_j)_{j \in J}$  とし、 $\Delta_j = p_j^{-1}(0, \infty)$  と書くとき、次の二条件は同値である。

- $(\rho_j)_{j \in J}$  は識別可能.
- 任意の  $j \in J$  に対して

$$\mu \left( \Delta_j \setminus \bigcup_{k \in J \setminus \{j\}} \Delta_k \right) > 0. \quad (2.1.5)$$

ただし、“ $\setminus$ ” は差集合を表す。二つの集合  $A, B \subset X$  に対して  $A \setminus B = \{x \in X \mid x \in A, x \notin B\}$

証明. 必要性.  $(\rho_j)_{j \in J}$  が  $(\Pi_\nu)_{\nu \in J \cup \{?\}}$  によって識別可能とする。すると  $\langle \rho_j, \Pi_j \rangle > 0$ 。そこで  $\Pi_j, j \in J$  を単函数で下から近似して、ノルム距離が  $\langle \rho_j, \Pi_j \rangle / 2$  以下となるようにする。こうして次のような  $\Gamma_j \in \Sigma, c_j \in \mathbb{R}$  を見出すことができる。

$$0 \leq c_j 1_{\Gamma_j} \leq \Pi_j, \quad c_j, \mu(\Gamma_j \cap \Delta_j) > 0. \quad (2.1.6)$$

再び識別可能であるとの仮定から、 $k \neq j$  に対しては  $c_j \langle \rho_k, 1_{\Gamma_j} \rangle \leq \langle \rho_k, \Pi_j \rangle = 0$ 。よって  $\mu(\Gamma_j \cap \Delta_k) = 0$ 。これと次式から所望の結論を得る。

$$\Delta_j \setminus \bigcup_{k \in J \setminus \{j\}} \Delta_k \supset (\Gamma_j \cap \Delta_j) \setminus \bigcup_{k \in J \setminus \{j\}} \Delta_k = (\Gamma_j \cap \Delta_j) \setminus \bigcup_{k \in J \setminus \{j\}} (\Gamma_j \cap \Delta_k). \quad (2.1.7)$$

十分性.  $\Gamma'_j = \Delta_j \setminus \bigcup_k \Delta_k$  の測度が  $> 0$  であるとする。このとき  $\Gamma'_j$  たちと  $\Omega \setminus (\bigcup_j \Gamma'_j)$  は  $\Omega$  の分割を与える。そこでこれらの指示函数を  $\Pi_j, \Pi_?$  と定めることにより所望の正作用素値測度を得る。 q.e.d.

以上をまとめると次の通りである。古典状態は密度函数で与えられる。そしてそれらが識別可能かどうかは、「ある一つの密度函数だけが0でない区間がある」かどうかによって決まる。次節以降では量子状態、特にベクトル状態の識別性を論じる。今度は「一つの密度函数だけが0でない区間がある」という性質の代わりに「一つのベクトルだけが向いている方向がある」という性質が重要になる、と直感的には理解することができる。そして、この性質を記述するのが一次独立性とその一般化である。

## 2 ベクトル族の諸性質

次節ではベクトル状態の組が識別可能であるための条件を明らかにする。この節ではそれに先立って後で必要になるベクトルの組の性質をいくつか紹介しておく。これらは一次独立性に類する性質である。特に無限個のベクトルのたちに対しては、多くの場合一次独立性という性質だけでは何も言えない。以下に紹介する性質は、そのような一次独立性の瑕瑾を補修した拡張である。

定義 2.2.1 ([You80, p. 28] および [Chr03, Definition 3.1.2, p. 135] 参照).  $\mathfrak{H}$  を Hilbert 空間とし,  $(\xi_j)_{j \in J}$  をこの Hilbert 空間のベクトルの組とする.

- (0) ベクトルの組  $(\xi_j)_{j \in J}$  が一次独立 (linearly independent) であるとは, 任意の  $j \in J$  に対して

$$\xi_j \notin \text{span}\{\xi_k \mid k \in J \setminus \{j\}\} \quad (2.2.1)$$

が成り立つことを指す。ただし,  $\text{span } S$  は  $S \subset \mathfrak{H}$  を含む最小の線型部分空間を表す。

- (i) ベクトルの組  $(\xi_j)_{j \in J}$  が極小 (minimal) であるとは, 任意の  $j \in J$  に対して

$$\xi_j \notin \overline{\text{span}}\{\xi_k \mid k \in J \setminus \{j\}\} \quad (2.2.2)$$

が成り立つことを指す。ただし,  $\overline{\text{span}} S$  は  $S \subset \mathfrak{H}$  を含む最小の (ノルム位相に対する) 閉線型部分空間を表す。

- (ii) ベクトルの組  $(\xi_j)_{j \in J}$  が Riesz-Fischer であるとは, ある正数  $A \in (0, \infty)$  があって, 有限個のみが 0 と異なる勝手な複素数の組  $(\alpha_j)_{j \in J}$  に対して次が成り立つことである。

$$A \sum_{j \in J} |\alpha_j|^2 \leq \left\| \sum_{j \in J} \alpha_j \xi_j \right\|^2. \quad (2.2.3)$$

この  $A$  を Riesz-Fischer 下界と呼ぶ。

- (iii) ベクトルの組  $(\xi_j)_{j \in J}$  が正規直交であるとは, 任意の  $j, k \in J$  に対して次が成り立つことである。

$$\langle \xi_j, \xi_k \rangle = \delta_{j,k}. \quad (2.2.4)$$

ただし,  $\delta_{j,k}$  は  $j = k$  のときだけ 1, それ以外の場合は 0 を表す記号である。

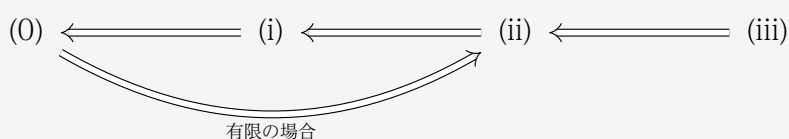
なお,  $\text{span } S$  は  $S$  の有限個の元たちの線形結合の全体であり, そのノルム位相についての閉包が  $\overline{\text{span}} S$  である。<sup>\*24</sup> 一次独立性と正規直交性についての説明は不要であろう。また, 一次独立性

<sup>\*24</sup> 一般に, 任意の線型部分空間たちの交わりはやはり線型部分空間であり, 任意の閉線形部分空間たちの交わりも閉線形部分空間である。  $S \subset \mathfrak{H}$  に対して, これを含む任意の線型部分空間の交わり

に位相的条件を加味したものが極小性であることも納得されると思う。Riesz-Fischer 性は見られない性質であるかもしれない。この条件は線形結合のノルムが係数で評価できることを述べている。この性質の更なる特徴づけについては後でまた触れる (補題 2.4.4)。ここではまず、これら四性質の関係を整理する。次の補題は註 2.1.2 の第一項と対比されるべきものである。

補題 2.2.2.  $\mathfrak{H}$  を Hilbert 空間とし,  $(\xi_j)_{j \in J}$  をこの Hilbert 空間のベクトルの組とする。

- $(\xi_j)_{j \in J}$  は正規直交なら Riesz-Fischer であり, Riesz-Fischer なら極小であり, 極小なら線形独立である。
- 添字集合  $J$  が有限であれば,  $(\xi_j)_{j \in J}$  について Riesz-Fischer 性, 極小性, 線形独立性の三性質は同値である。



証明. 主張を順に示してゆく。

(ii)  $\iff$  (iii)  $(\xi_j)_{j \in J}$  が正規直交であれば, 有限個のみが 0 と異なる勝手な複素数の組  $(\alpha_j)_{j \in J}$  に対して

$$\left\| \sum \alpha_j \xi_j \right\|^2 = \sum |\alpha_j|^2. \tag{2.2.5}$$

よって Riesz-Fischer 下界を 1 として,  $(\xi_j)_{j \in J}$  は Riesz-Fischer である。

(i)  $\iff$  (ii) 対偶を示す。  $(\xi_j)_{j \in J}$  が極小でないと仮定する。すると, ある  $j \in J$  があって, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して有限個のみが 0 と異なる複素数の組  $(c_k)_{k \in J \setminus \{j\}}$  があり次が成り立つ。

$$\left\| \xi_j - \sum_{k \in J \setminus \{j\}} c_k \xi_k \right\|^2 \leq \varepsilon. \quad \text{したがって} \quad \frac{\left\| \xi_j - \sum_{k \in J \setminus \{j\}} c_k \xi_k \right\|^2}{|1|^2 + \sum_{k \in J \setminus \{j\}} |c_k|^2} \leq \varepsilon. \tag{2.2.6}$$

あとの式は  $(\xi_j)_{j \in J}$  に対して Riesz-Fischer 下界  $A > 0$  が存在しないことを示している。

(0)  $\iff$  (i) 任意の  $S \subset \mathfrak{H}$  に対して  $\text{span } S \subset \overline{\text{span } S}$  だからである。

有限の場合  $J$  は有限として一次独立性から Riesz-Fischer 性を導く。そのために  $(\xi_j)_{j \in J}$  は一次独立であると仮定する。  $J$  は有限だから  $\mathbb{C}^J$  の単位球面  $S^{J-1}$  はコンパクト

---

が  $\text{span } S$  である。  $\overline{\text{span } S}$  も同様。したがって特に  $\text{span } S, \overline{\text{span } S}$  は任意の  $S \subset \mathfrak{H}$  に対して存在し,  $\text{span } S \subset \overline{\text{span } S}$  が成り立つ。

である。したがって、 $(\alpha_j)_{j \in J} \in S^{J-1}$  の連続関数

$$\left\| \sum_{j \in J} \alpha_j \xi_j \right\|^2 \tag{2.2.7}$$

は最小値  $A \geq 0$  を有し、これを達する点が  $S^{J-1}$  内にある。もしも  $A = 0$  なら  $(\xi_j)_{j \in J}$  は一次独立ではありえない。よって  $A > 0$ 。この  $A$  を下界として  $(\xi_j)_{j \in J}$  は Riesz-Fischer である。 q.e.d.

これらの性質は無限個のベクトルを考える際には確かに異なる。それを示す例は付録に与えた (B 節)。例は必要であれば参照してもらおうことにして、いまは次節の定理に急ぐことにする。

### 3 定理

前節までの議論を踏まえ、この節では論文後半の核になる定理を述べる。前々節では、状態の組の識別性を測定論的に定義した。そして前節ではベクトルの一次独立性に類する数学的性質を幾つか見た。これらの測定論的な性質と数学的な性質の間に対応を与えるのが次の定理である。

定理 2.3.1 (識別性の基準). Hilbert 空間  $\mathfrak{R}$  上の物理系  $B(\mathfrak{R})$  と、その上の可算個のベクトル状態の組  $(|\xi_j\rangle\langle\xi_j|)_{j\in J} \in (B^1(\mathfrak{R}))^J$  を考える。この状態の組について次が成り立つ。

- (1) 状態の組  $(|\xi_j\rangle\langle\xi_j|)_{j\in J}$  が識別可能であるための必要十分条件は、ベクトルの組  $(\xi_j)_{j\in J}$  が極小であることである。
- (2) 状態の組  $(|\xi_j\rangle\langle\xi_j|)_{j\in J}$  が一様識別可能であるための必要十分条件は、ベクトルの組  $(\xi_j)_{j\in J}$  が Riesz-Fischer であることである。
- (3) 状態の組  $(|\xi_j\rangle\langle\xi_j|)_{j\in J}$  が完璧識別可能であるための必要十分条件は、ベクトルの組  $(\xi_j)_{j\in J}$  が正規直交であることである。

さらに (2) の一様識別可能性について次が成り立つ。状態の組が最低識別確率  $q$  で一様に識別可能であるなら  $q$  は  $(\xi_j)_{j\in J}$  の Riesz-Fischer 下界であり、逆に  $q$  が  $(\xi_j)_{j\in J}$  の Riesz-Fischer 下界であれば、この状態の組は最低識別確率  $q$  で一様に識別可能である。

この定理の証明は次節で行う。

状態が有限個の場合には、上記定理が次の古典的な結果を再現することに注意しておく。このときには単なる識別性と一様識別性を区別する必要はない。

系 2.3.2 ([Che98]). 任意の Hilbert 空間  $\mathfrak{R}$  上の物理系  $B(\mathfrak{R})$  と、その上の有限個のベクトル状態の組  $(|\xi_j\rangle\langle\xi_j|)_{j\in J} \in (B^1(\mathfrak{R}))^J$  を考える。この状態の組について下記は同値である。

- 状態の組  $(|\xi_j\rangle\langle\xi_j|)_{j\in J}$  は識別可能である。
- 状態の組  $(|\xi_j\rangle\langle\xi_j|)_{j\in J}$  は一様に識別可能である。
- ベクトルの組  $(\xi_j)_{j\in J}$  は一次独立である。

証明. 定理 2.3.1 および補題 2.2.2 による。

q.e.d.

有限個の状態については識別性の概念は一つで足るが、無限個の状態に議論が移ると識別性は二つに分かれる。単なる識別性と一様識別性である。識別性の定義の直後に述べたことであるが、識別可能性がいつかは真の状態を同定できることを保証するものであるのに対し、一様識別可能性は何回程度測定を繰り返せば良いかまで事前に教えてくれる。そして、一様識別可能性が保証する必要測定回数は最低識別確率で評価される。この文脈において Riesz-Fischer 下界は一様識別確率と理解される。上記定理は Riesz-Fischer 下界にこのような測定論的な意味を付与しているとも言える。



## 4 証明

定理 2.3.1 の証明に移ることにする。以下ではまず極小性と Riesz-Fischer 性を双直交系により特徴づける既知の結果を紹介する。叙述の自己完結性を保つためにこれらの結果については証明も付す。そのうちこれらの特徴付けを用いて定理の証明を行う。

双直交系を考える理由は、おおよそ次のように理解できる。以下では、与えられた状態の組に対して適切な正作用素値測度を構成したり、条件を満たす正作用素値測度が存在するとき状態の組について何が言えるかを検討する。ここで正規状態と正作用素値測度（ないし物理量）はそれぞれ  $\mathfrak{A}_*$  と  $\mathfrak{A}$  の元であり互いに双対的な関係にある。特に  $\mathfrak{A} = B(\mathfrak{R})$  でベクトル状態を考える場合には、この双対性は  $\mathfrak{R}$  と  $\mathfrak{R}^* \simeq \mathfrak{R}$  の間の双対性に帰着される。そしてこの  $\mathfrak{R}$  における双対性が双直交系によって捉えられるのである。

### a 極小性の特徴づけ

まず、極小性は双直交系の存在で特徴付けられることを示す。

定義 2.4.1 (双直交系). Hilbert 空間  $\mathfrak{R}$  の二つのベクトルの組  $(\xi_j)_{j \in J}$ ,  $(\eta_j)_{j \in J}$  は次を満たすとき一方を他方の双直交系であると言う。すなわち、任意の  $j, k \in J$  に対して

$$\langle \eta_k, \xi_j \rangle = \delta_{k,j}. \quad (2.4.1)$$

あるベクトルの組  $(\xi_j)_{j \in J}$  に対してその双直交系が存在するとき、 $(\xi_j)_{j \in J}$  は双直交系を受容すると言う。

補題 2.4.2 (例えば [Chr03, Lemma 3.3.1 (i)] 参照). Hilbert 空間  $\mathfrak{R}$  のベクトルの組  $(\xi_j)_{j \in J}$  に関する下記の二条件は同値である。

- (a)  $(\xi_j)_{j \in J}$  は極小である。
- (b)  $(\xi_j)_{j \in J}$  は双直交系を受容する。

また、これらの条件が満たされるとき、(b) における双直交系でその全ての要素が  $\overline{\text{span}}\{\xi_j \mid j \in J\}$  に属するものが唯一つ存在する、

証明. 記号の簡単のため  $\mathfrak{H} = \overline{\text{span}}\{\xi_k \mid k \in J\}$ ,  $\mathfrak{H}_j = \overline{\text{span}}\{\xi_k \mid k \in J, k \neq j\}$ ,  $j \in J$  と書く。

(a)  $\implies$  (b)  $(\xi_j)_{j \in J}$  は極小であると仮定する。任意に  $j \in J$  をとり固定する。直和分解

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{H}_j + \mathfrak{H}_j^\perp \quad (2.4.2)$$

に従って、 $\xi_j$  を次のように分解する。

$$\xi_j = \xi_{j,\parallel} + \xi_{j,\perp}. \quad (2.4.3)$$

次の三点に注意する。

- $\xi_{j,\perp} \neq 0$ .  
もしも  $\xi_{j,\perp} = 0$  なら  $\xi_j = \xi_{j,\parallel} \in \mathfrak{R}_j$  となり  $(\xi_j)_{j \in J}$  の極小性に反するからである.
- $\langle \xi_k, \xi_{j,\perp} \rangle = 0$  が  $k \neq j$  に対して成り立つ.  
 $\xi_k \in \mathfrak{H}_j$ ,  $\xi_{j,\perp} \in \mathfrak{H}_j^\perp$  だからである.
- $\langle \xi_j, \xi_{j,\perp} \rangle = \|\xi_{j,\perp}\|^2$ .  
これも  $\xi_{j,\perp}$  の定義から出る.

以上から次のように定義される  $(\eta_j)_{j \in J}$  が  $(\xi_j)_{j \in J}$  の双直交系であることが分かる.

$$\eta_j = \frac{\xi_{j,\perp}}{\|\xi_{j,\perp}\|^2}. \quad (2.4.4)$$

(b)  $\implies$  (a)  $(\eta_j)_{j \in J}$  の双直交系  $(\xi_j)_{j \in J}$  が存在すると仮定する. 背理法を用いるため, ある  $k \in J$  に対して次が成り立つと仮定する.

$$\xi_k \in \mathfrak{R}_k \quad (2.4.5)$$

ところで, 双直交系の定義と内積の (ノルム) 連続性から

$$\langle \eta_k, \mathfrak{R}_k \rangle = 0. \quad (2.4.6)$$

上記二式から  $\langle \xi_k, \eta_k \rangle = 0$ . これは双直交系の定義に矛盾する.

命題の最後に述べた主張を示す. まず,  $(\xi_j)_{j \in J}$  が双直交系  $(\eta_j)_{j \in J}$  を受容すると仮定する.  $\mathfrak{H}$  への射影を  $P \in B(\mathfrak{H})$  とすれば,  $(P\eta_j)_{j \in J}$  も  $(\xi_j)_{j \in J}$  の双直交系である. よって,  $\mathfrak{H}$  に属する双直交系は確かに存在する. 次に,  $(\eta_j)_{j \in J}$ ,  $(\eta'_j)_{j \in J}$  を  $\mathfrak{H}$  に属する二つの双直交系とする. すると双直交系の定義から任意の  $j, k \in J$  に対して

$$\langle \eta_j - \eta'_j, \xi_k \rangle = \delta_{j,k} - \delta_{j,k} = 0. \quad (2.4.7)$$

よって内積の連続性から  $\langle \eta_j - \eta'_j, \mathfrak{H} \rangle = 0$ . つまり  $\eta_j - \eta'_j \in \mathfrak{H}^\perp$ . もともと  $\eta_j - \eta'_j \in \mathfrak{H}$  であったことを考え合わせれば  $\eta_j - \eta'_j = 0$ . したがって  $\mathfrak{H}$  における双直交系は一意である. q.e.d.

## b Riesz-Fischer 性の特徴づけ

次に Riesz-Fischer 性をその双対的な概念である Bessel 性により特徴付ける.

定義 2.4.3 (Bessel 性. 例えば [You80, Chapter 4, Section 2, Theorem 3] 参照). Hilbert 空間  $\mathfrak{H}$  のベクトルの組  $(\eta_j)_{j \in J}$  に対して次の二条件は同値である.

- ある正数  $B \in (0, \infty)$  があって, 有限個だけが 0 と異なる勝手な数の組  $(\beta_j)_{j \in J} \in \mathbb{C}^J$  に

対して次が成り立つ.

$$\left\| \sum_{j \in J} \beta_j \eta_j \right\|^2 \leq B \sum_{j \in J} |\beta_j|^2. \quad (2.4.8)$$

- ある正数  $B' \in (0, \infty)$  があって, 任意の  $\xi \in \mathfrak{R}$  に対して, Bessel の不等式が成り立つ. すなわち

$$\sum_{j \in J} |\langle \xi, \eta_j \rangle|^2 \leq B \|\xi\|^2. \quad (2.4.9)$$

特に, 任意の  $\xi \in \mathfrak{R}$  に対して左辺の和は収束する.

なお, 一方が成り立てば他方が  $B = B'$  に対して成り立つ. これらの同値な条件のいずれか (したがって両方) を満たす  $(\eta_j)_{j \in J}$  を Bessel であると呼ぶ. そして  $B$  または  $B'$  を Bessel 上界と呼ぶ.

証明. 条件の同値性を確認する.

- ( $\implies$ ) 第一の条件を仮定する. このとき, 任意の  $\eta \in \mathfrak{R}$  と有限個だけが 0 と異なる勝手な数の組  $(\beta_j)_{j \in J} \in \mathbb{C}^J$  に対して次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \left| \sum \langle \xi, \eta_j \rangle \beta_j \right|^2 &= \left| \left\langle \xi, \sum \beta_j \eta_j \right\rangle \right|^2 \\ &\leq \|\eta\|^2 \cdot \left\| \sum \beta_j \eta_j \right\|^2 && \text{Schwartz の不等式} \\ &\leq \|\eta\|^2 \cdot B \sum |\beta_j|^2 && \text{第一の条件.} \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

任意に有限集合  $K \subset J$  をとり,  $\beta_j$  として特に次のように定義される数の組を考える.

$$\beta_j = \begin{cases} \langle \eta_j, \xi \rangle & j \in K \\ 0 & j \notin K. \end{cases} \quad (2.4.11)$$

すると

$$\left| \sum_{j \in K} |\langle \xi, \eta_j \rangle|^2 \right|^2 \leq \|\eta\|^2 \cdot B \sum_{j \in K} |\langle \xi, \eta_j \rangle|^2. \quad (2.4.12)$$

両辺に共通の因子を約して次を得る.

$$\sum_{j \in K} |\langle \xi, \eta_j \rangle|^2 \leq B \|\eta\|^2. \quad (2.4.13)$$

したがって,  $\{\sum_{j \in K} |\langle \xi, \eta_j \rangle|^2 \mid K \subset J \text{ は有限}\}$  は  $\mathbb{R}$  の有界集合であり上限を  $\mathbb{R}$  に有する. 和はこの上限に収束し, 所望の不等式を満たす.

( $\Leftarrow$ ) 第二の条件を仮定する. そして, 有限個だけが 0 と異なる勝手な数の組  $(\beta_j)_{j \in J} \in \mathbb{C}^J$  をとる. このとき

$$\begin{aligned}
 \left\| \sum_j \beta_j \eta_j \right\|^4 &= \left| \left\langle \sum_j \beta_j \eta_j, \sum_k \beta_k \eta_k \right\rangle \right|^2 \\
 &= \left| \sum_k \left\langle \sum_j \beta_j \eta_j, \eta_k \right\rangle \beta_k \right|^2 \\
 &\leq \sum_k \left| \left\langle \sum_j \beta_j \eta_j, \eta_k \right\rangle \right|^2 \cdot \sum_k |\beta_k|^2 \quad \text{Schwartz の不等式} \\
 &\leq B \left\| \sum_j \beta_j \eta_j \right\|^2 \cdot \sum_k |\beta_k|^2 \quad \text{第二の条件.}
 \end{aligned}$$

(2.4.14)

両辺に共通の因子を約して第一の条件を得る. q.e.d.

補題 2.4.4 ([You80, Chapter 4]). Hilbert 空間  $\mathfrak{H}$  のベクトルの組  $(\xi_j)_{j \in J}$  に関する下記の三条件は同値である.

- (a)  $(\xi_j)_{j \in J}$  は Riesz-Fischer である.
- (b)  $(\xi_j)_{j \in J}$  は Bessel な双直交系を受容する.
- (c)  $(\xi_j)_{j \in J}$  に関する  $\ell^2$  積率問題は  $\overline{\text{span}}\{\xi_j \mid j \in J\}$  に一意的な解を有する. すなわち, ある正数  $C \in (0, \infty)$  があって, 任意の  $\gamma = (\gamma_j)_{j \in J} \in \ell^2(J)$  に対して  $\langle \eta, \xi_j \rangle = \gamma_j$  および  $\|\eta\|^2 \leq C \|\gamma\|^2$  を満たす  $\eta \in \overline{\text{span}}\{\xi_j \mid j \in J\}$  が唯一つ存在する.

(a)(b)(c) はそれぞれ三つの定数の存在を保証するものである. すなわち (a) には Riesz-Fischer 下界  $A$ , (b) には双直交系の Bessel 上界  $B$ , (c) には条件中の  $C$  が付随する. これらの定数について次のことが言える. (a)(b)(c) の何れか一つが成り立つとき他の条件も成り立ち, このとき他の条件における定数を  $A^{-1} = B = C$  を満たすように取ることができる.

証明. 循環的に三つの含意を示す.

(c)  $\implies$  (b) 記号の簡単のため  $\mathfrak{H} = \overline{\text{span}}\{\xi_j \mid j \in J\}$  と記し, (c) を仮定する. すると  $\gamma \in \ell^2$  に対して,  $\langle S\gamma, \xi_j \rangle = \gamma_j^*$  を満たす  $S\gamma \in \mathfrak{H}$  が唯一つ存在する. この規則により写像  $S$  を定義することができる.

$$\ell^2 \xrightarrow{S} \mathfrak{H}$$

この写像を考察することで (b) を導く.  $S$  が有界な線形写像であることは次のよ

うにして確認される.

- 線形性:  $S$  が線形写像であることはその定義による.
- 有界性:  $S$  の定義と (c) に述べてある  $\ell^2$  積率問題の解の性質から  $\|S\gamma\|^2 \leq C\|\gamma\|^2$ . したがって,  $\|S\|^2 \leq C$ .

各  $i \in J$  に対して  $\eta_i = S(\delta_{i,j})_{j \in J} \in \mathfrak{H}$  と定義する. すると  $S$  の定義により

$$\langle \eta_i, \xi_j \rangle = \delta_{i,j}^*. \quad (2.4.15)$$

したがって  $(\eta_j)_{j \in J}$  は  $(\xi_j)_{j \in J}$  の双直交系をなす. (b) を示すために有限個だけが 0 と異なる勝手な数の組  $\beta = (\beta_j)_{j \in J} \in \mathbb{C}^J$  をとる. これはもちろん  $\ell^2$  に属する. それゆえ (c) に述べてある  $\ell^2$  積率問題の解の性質から

$$\begin{aligned} \left\| \sum_j \beta_j \eta_j \right\|^2 &= \left\| \sum_j \beta_j S(\delta_{j,i})_{i \in J} \right\|^2 = \|S\beta\|^2 \leq \|S\|^2 \|\beta\|^2 \\ &\leq C\|\beta\|^2 = C \sum_j |\beta_j|^2. \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

こうして  $(\eta_j)_{j \in J}$  は  $(\xi_j)_{j \in J}$  の双直交系であるばかりでなく,  $C \in (0, \infty)$  を上界として Bessel でもあることが分かった.

(b)  $\implies$  (a)  $(\xi_j)_{j \in J}$  の双直交系  $(\eta_j)_{j \in J}$  があって,  $(\eta_j)_{j \in J}$  は  $B$  を上界として Bessel であると仮定する. このとき有限個のみが 0 と異なる勝手な複素数の組  $(\alpha_j)_{j \in J}$  に対して

$$\begin{aligned} \left| \sum_j |\alpha_j|^2 \right|^2 &= \left| \left\langle \sum_k \alpha_k \eta_k, \sum_j \alpha_j \xi_j \right\rangle \right|^2 \quad \langle \eta_k, \xi_j \rangle = \delta_{j,k} \\ &\leq \left\| \sum_k \alpha_k \eta_k \right\|^2 \cdot \left\| \sum_j \alpha_j \xi_j \right\|^2 \quad \text{Schwartz の不等式} \\ &\leq B \sum_k |\alpha_k|^2 \cdot \left\| \sum_j \alpha_j \xi_j \right\|^2 \quad (\eta_j)_{j \in J} \text{ は Bessel} \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

両辺に共通の因子を約して次を得る.

$$B^{-1} \sum_j |\alpha_j|^2 \leq \left\| \sum_j \alpha_j \xi_j \right\|^2. \quad (2.4.18)$$

すなわち,  $(\xi_j)_{j \in J}$  は  $B^{-1}$  を下界として Riesz-Fischer である.

(a)  $\implies$  (c)  $(\xi_j)_{j \in J}$  は  $A$  を下界として Riesz-Fischer であるとする. そして証明のために  $\gamma = (\gamma_j)_{j \in J} \in \ell^2$  を勝手に一つとり固定する. (c) に述べた性質を持つ  $\eta \in \overline{\text{span}}\{\xi_j \mid j \in J\}$  は存在するならば一意である. そこで存在だけを証明すれば良い.

まず,  $(\xi_j)_{j \in J}$  は Riesz-Fischer だから特に線形独立である (補題 2.2.2). よって次の線形汎関数  $T_0$  が無矛盾に定義される.

$$\text{span}\{\xi_j \mid j \in J\} \xrightarrow{T_0} C$$

$$\sum_j \alpha_j \xi_j \longmapsto \sum_j \alpha_j \gamma_j$$

ここでは和は有限和を表すものと了解する (span の定義に注意せよ).

次に,  $T_0$  が  $\text{span}\{\xi_j \mid j \in J\}$  上で有界であることを確認する. 任意の  $\sum_j \alpha_j \xi_j \in \text{span}\{\xi_j \mid j \in J\}$  に対して

$$\begin{aligned} \left| T_0 \sum_j \alpha_j \xi_j \right|^2 &= \left| \sum_j \alpha_j \gamma_j \right|^2 && T_0 \text{ の定義} \\ &\leq \sum_j |\alpha_j|^2 \cdot \sum_k |\gamma_k|^2 && \text{Schwartz の不等式} \\ &\leq A^{-1} \left\| \sum_j \alpha_j \xi_j \right\|^2 \cdot \|\gamma\|^2 && (\xi_j)_{j \in J} \text{ は Riesz-Fischer.} \end{aligned} \tag{2.4.19}$$

したがって

$$\|T_0\|^2 \leq A^{-1} \|\gamma\|^2. \tag{2.4.20}$$

$T_0$  はこのとおり  $\text{span}\{\xi_j \mid j \in J\}$  上で有界であるから, Hahn-Banach の定理により同じノルムを保ったまま  $\mathfrak{K}$  上にまで拡張される. そのような拡張の一つを  $T$  と記す. 定義により  $T|_{\text{span}\{\xi_j \mid j \in J\}} = T_0$ .

$$\mathfrak{K} \xrightarrow{T} C.$$

さて,  $\mathfrak{K}$  は Hilbert 空間である. したがって Riesz の定理により  $\mathfrak{K}$  上の任意の連続汎関数は, 同じノルムを有するベクトル  $\eta \in \mathfrak{K}$  によって  $\langle \eta, (-) \rangle$  の形に書かれる. 上で構成した連続汎関数  $T$  に対応するベクトルを  $\eta' \in \mathfrak{K}$  と書くことにする.

$$T = \langle \eta', (-) \rangle, \quad \|\eta'\|^2 = \|T\|^2 \leq A^{-1} \|\gamma\|^2. \tag{2.4.21}$$

$P \in B(\mathfrak{K})$  を閉部分空間  $\overline{\text{span}\{\xi_j \mid j \in J\}}$  への射影とし,  $\eta = P\eta'$  と定める. この  $\eta$  が所望を有することを示す.

第一に,  $\eta$  の定義から

$$\eta \in P\mathfrak{K} = \overline{\text{span}\{\xi_j \mid j \in J\}}. \tag{2.4.22}$$

第二に,  $\eta, \eta', T, T_0$  の定義から

$$\langle \eta, \xi_j \rangle = \langle P\eta', \xi_j \rangle = \langle \eta', P\xi_j \rangle = \langle \eta', \xi_j \rangle = T_0 \xi_j = \gamma_j. \tag{2.4.23}$$

第三に、射影に関して  $\|P\| \leq 1$  が成り立つから

$$\|\eta\|^2 = \|P\eta'\|^2 \leq \|\eta'\|^2 \leq A^{-1}\|\gamma\|^2. \quad (2.4.24)$$

したがって  $\eta$  は確かに所望のベクトルである。また、最後の不等式より条件 (c) における正数として  $C = A^{-1}$  を取られることが分かる。 q.e.d.

## C 定理の証明

次に証明すべき定理 2.3.1 (及びその系 2.3.2) を若干補充して再度述べる。

定理 2.4.5 (識別性の基準. [KK16, Theorem 1]). Hilbert 空間  $\mathfrak{R}$  上の物理系  $B(\mathfrak{R})$  と、その上の可算個のベクトル状態の組  $(|\xi_j\rangle\langle\xi_j|)_{j \in J} \in (B^1(\mathfrak{R}))^J$  を考える。この組と正数  $q > 0$  についての下記の条件を考察する。

- (I) 状態の組  $(|\xi_j\rangle\langle\xi_j|)_{j \in J}$  は識別可能である。
- (II) 状態の組  $(|\xi_j\rangle\langle\xi_j|)_{j \in J}$  は最低識別確率  $q$  で一様識別可能である。
- (III) 状態の組  $(|\xi_j\rangle\langle\xi_j|)_{j \in J}$  は完璧識別可能である。

これらの条件はそれぞれ下記に同値である。

- (i) ベクトルの組  $(\xi_j)_{j \in J}$  が極小であることである。
- (ii) ベクトルの組  $(\xi_j)_{j \in J}$  は Riesz-Fischer である。しかも  $q$  はこの Riesz-Fischer 下界である。
- (iii) ベクトルの組  $(\xi_j)_{j \in J}$  が正規直交である。

これらの条件はさらにそれぞれ下記の条件に同値である。

- (i)' ベクトルの組  $(\xi_j)_{j \in J}$  は双直交系を受容する。
- (ii)' ベクトルの組  $(\xi_j)_{j \in J}$  は Bessel な双直交系を受容する。しかも  $q^{-1}$  はこの Bessel 上界である。
- (iii)' ベクトルの組  $(\xi_j)_{j \in J}$  は正規直交な双直交系を受容する。

さらに、 $J$  が有限の場合には、(I),(II),(i),(ii),(i)',(ii)' は全て同値となる。

先の定理 2.3.1 は (I),(II),(III) と (i),(ii),(iii) の同値性のみ述べた。ここでは双直交系についての条件 (i)',(ii)',(iii)' を加えた。

■ (i)  $\iff$  (i)' これは既存の初等的補題 2.4.2 の内容に他ならない。

■ (ii)  $\iff$  (ii)' これは既存の結果 2.4.4 の内容に他ならない。

■ (iii)  $\iff$  (iii)' これは容易にわかる。もしも  $(\xi_j)_{j \in J}$  が正規直交であるなら、 $(\xi_j)_{j \in J}$  自身が  $(\xi_j)_{j \in J}$  の正規直交な双直交系である。逆に、 $(\xi_j)_{j \in J}$  が正規直交な双直交系  $(\eta_j)_{j \in J}$  を受容した仮定する。このとき正規直交系  $(\eta_j)_{j \in J}$  を含む正規直交基底  $(\eta_k)_{k \in K}$ ,  $J \subset K$  が存在する。すると

$i, j \in J$  に対して

$$\langle \xi_i, \xi_j \rangle = \sum_{k \in K} \langle \xi_i, \eta_k \rangle \langle \eta_k, \xi_j \rangle = \sum_{k \in K} \delta_{i,k} \delta_{k,j} = \delta_{i,j}. \quad (2.4.25)$$

よって  $(\xi_j)_{j \in J}$  は正規直交である.

以下で, 識別性に関する条件とベクトルについての条件の同値性を示す. まず, 識別性からベクトルについての条件が出ることを示す.

■ (I)  $\implies$  (i)' 正作用素値測度  $\Pi = (\Pi_\omega)_{\omega \in J \cup \{?\}}$  がベクトル状態の組  $(|\xi_j\rangle\langle\xi_j|)_{j \in J}$  を識別すると仮定する. このとき次が成り立つ.

主張. 次が成り立つ,

$$\langle \xi_j, \Pi_k \xi_\ell \rangle = \delta_{j,k} q_k \delta_{k,\ell}, \quad (2.4.26)$$

$$q_j = 1 \implies \Pi_? \xi_k = 0. \quad (2.4.27)$$

ただし

$$q_j = \langle |\xi_j\rangle\langle\xi_j|, \Pi_j \rangle = \langle \xi_j, \Pi_j \xi_j \rangle \quad (2.4.28)$$

は  $\Pi$  の識別確率を表す (以下, 記号  $q_j$  をこの意味で用いる).

主張の証明. 正作用素値測度要素  $\Pi_j$  は非負であり,  $\Pi$  は  $(|\xi_j\rangle\langle\xi_j|)_{j \in J}$  を識別する. これら二点から  $j \neq k$  に対して  $0 = \langle \xi_k, \Pi_j \xi_k \rangle = \|\Pi_j^{1/2} \xi_k\|^2$ . ゆえに  $\Pi_j^{1/2} \xi_k = 0$ . これから第一式が従う.

次に, 識別の定義から  $1 = \langle \xi_j, \Pi_j \xi_j \rangle + \langle \xi_j, \Pi_? \xi_j \rangle = q_j + \langle \xi_j, \Pi_? \xi_j \rangle$  であることに注意する. よって  $q_j = 1$  なら  $\langle \xi_j, \Pi_? \xi_j \rangle = 0$ . これから第一式の証明と同じようにして第二式も得られる. q.e.d.

次の条件でベクトルの組  $(\eta_j)_{j \in J}$  を定義する.

$$\eta_j = \frac{\Pi_j \xi_j}{\langle \xi_j, \Pi_j \xi_j \rangle}. \quad (2.4.29)$$

識別の定義により識別確率  $q_j = \langle \xi_j, \Pi_j \xi_j \rangle$  は 0 ではない. これが  $\eta_j$  の定義の無矛盾性を保証している. さらに上記主張の (2.4.26) より  $(\eta_j)_{j \in J}$  は  $(\xi_j)_{j \in J}$  の双直交系である.

■ (II)  $\implies$  (ii) 正作用素値測度  $\Pi = (\Pi_\omega)_{\omega \in J \cup \{?\}}$  がベクトル状態の組  $(|\xi_j\rangle\langle\xi_j|)_{j \in J}$  を最低識別確率  $q > 0$  で一様に識別すると仮定する. 一様識別は識別であるから, いまの場合にも上記主張の (2.4.26) が成り立つことに注意しておく. 証明のため, 有限個のみが 0 と異なる勝手な複素数の組  $(\alpha_j)_{j \in J}$  をとる.  $\alpha_j$  は有限集合  $K \subset J$  上でのみ 0 と異なるとする. そして, 計算を見やすくするために

$$\Xi = \sum_{j \in J} \alpha_j \xi_j = \sum_{k \in K} \alpha_k \xi_k \quad (2.4.30)$$



と書く. すると

$$\begin{aligned}
\|\Xi\|^2 &= \langle \Xi, \Xi \rangle \\
&\geq \sum_{k \in K} \langle \Xi, \Pi_k \Xi \rangle && \text{正作用素値測度の性質: } 1 = \sum_{\omega \in J \cup \{?\}} \Pi_\omega \geq \sum_{k \in K} \Pi_k \\
&= \sum_{j, k, \ell \in K} \alpha_j \langle \xi_j, \Pi_k \xi_\ell \rangle \alpha_\ell \\
&\geq \sum_{j, k, \ell \in K} \alpha_j^* \delta_{j, k} q_k \delta_{k, \ell} \alpha_\ell && (2.4.26) \text{ による} \\
&\geq q \sum_{j \in J} |\alpha_j|^2. && (2.4.31)
\end{aligned}$$

あるいは

$$\left\| \sum_{j \in J} \alpha_j \xi_j \right\|^2 \geq q \sum_{j \in J} |\alpha_j|^2. \quad (2.4.32)$$

すなわち,  $(\xi_j)_{j \in J}$  は最低識別確率  $q$  を下界として Riesz-Fischer である.

■ (III)  $\implies$  (iii) 正作用素値測度  $\Pi = (\Pi_\omega)_{\omega \in J \cup \{?\}}$  がベクトル状態の組  $(|\xi_j\rangle\langle\xi_j|)_{j \in J}$  を完璧に識別すると仮定する. 今度も (2.4.26) が成り立つ. さらに完璧識別性により全ての  $j \in J$  に対して  $q_j = 1$  だから (2.4.27) も成り立つ. これから任意の  $j, \ell \in J$  に対して

$$\begin{aligned}
\langle \xi_j, \xi_\ell \rangle &= \sum_{k \in J} \langle \xi_j, \Pi_k \xi_\ell \rangle + \langle \xi_j, \Pi_? \xi_\ell \rangle && \text{正作用素値測度の性質 } \sum \Pi_\omega = 1 \\
&= \sum_{k \in J} \langle \xi_j, \Pi_k \xi_\ell \rangle + 0 && (2.4.27) \text{ による} \\
&= \sum_{k \in J} \delta_{j, k} q_k \delta_{k, \ell} && (2.4.26) \text{ による} \\
&= \sum_{k \in J} \delta_{j, k} 1 \delta_{k, \ell} = \delta_{j, \ell} && \text{完璧識別性 } q = 1 \quad (2.4.33)
\end{aligned}$$

よって  $(\xi_j)_{j \in J}$  は確かに直交系である.

今度は逆にベクトルについての条件から識別性が出ることを示す.

■ (I)  $\iff$  (i)' ベクトルの組  $(\xi_j)_{j \in J}$  が双直交系  $(\eta_j)_{j \in J}$  を受容するとする. このとき  $J$  は可算との定理の仮定により, 次を満たす数の組  $(p_j)_{j \in J}$  が存在する.

$$p_j > 0, \quad \sum_{j \in J} p_j = 1. \quad (2.4.34)$$

このような  $(p_j)_{j \in J}$  を一つ選んで固定する. そして, 双直交系  $(\eta_j)_{j \in J}$  と数の組  $(p_j)_{j \in J}$  を使って各  $j \in J$  に対して

$$\Pi_j = p_j \frac{|\eta_j\rangle\langle\eta_j|}{\| |\eta_j\rangle\langle\eta_j| \|} \quad (2.4.35)$$

と定める. まず次を示す. \*25

主張. 作用素の和  $\sum_{j \in J} \Pi_j$  はノルムについて収束し, 1 以下の作用素を定める.

証明.  $J$  は可算であったから, 有限集合の増大列  $J_n \subset J, n \in \mathbb{N}$  であって  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n = J$  を満たすものがある.  $S_n$  を

$$S_n = \sum_{j \in J_n} \Pi_j = \sum_{j \in J_n} p_j \frac{|\eta_j\rangle\langle\eta_j|}{\| |\eta_j\rangle\langle\eta_j| \|}. \quad (2.4.36)$$

と定めると,  $n \leq m$  に対して

$$\|S_m - S_n\| \leq \sum_{j \in J_m \setminus J_n} p_j. \quad (2.4.37)$$

これと  $\sum_{j \in J} p_j = 1$  を考え合わせれば,  $S_n$  が作用素ノルムの定める距離についての Cauchy 列であることが分かる. よって,  $S_n$  は作用素ノルムの意味で収束する. その収束先を  $S$  と記す.

どの  $n$  に対しても

$$\|S_n\| \leq \sum_{j \in J_n} p_j \leq 1 \quad (2.4.38)$$

だから  $\|S\| \leq 1$ . また  $S$  は非負であるから  $0 \leq S \leq \|S\| \leq 1$  を得る. q.e.d.

この主張により

$$\Pi_\? = 1 - \sum_{j \in J} \Pi_j \quad (2.4.39)$$

も無矛盾に定義され, さらに  $\Pi_\? \geq 0$  が満たされることが分かる. このとき  $\sum_{j \in J} \Pi_j + \Pi_\? = 1$ . したがって以上のようにして構成された  $\Pi = (\Pi_\omega)_{\omega \in J \cup \{\?\}}$  は正作用素値測度を成す.

さらに,  $(\eta_j)_{j \in J}$  が  $(\xi_j)_{j \in J}$  の双直交系であることと  $p_j > 0$  より,  $j \neq k$  なら  $\langle \xi_j, \Pi_k \xi_j \rangle = 0$ ,  $j = k$  なら  $\langle \xi_j, \Pi_k \xi_j \rangle > 0$  が成り立つ. ただし,  $j, k \in J$ . よって, 正作用素値測度  $\Pi$  はベクトル状態  $(|\xi_j\rangle\langle\xi_j|)_{j \in J}$  を識別する.

■ (II)  $\iff$  (ii)'  $(\xi_j)_{j \in J}$  の双直交系  $(\eta_j)_{j \in J}$  であって Bessel であるものが存在すると仮定する. またその Bessel 上界は  $q^{-1}$  とする. このとき次が成り立つ.

主張. 作用素の和  $\sum_{j \in J} |\eta_j\rangle\langle\eta_j|$  は強作用素位相について収束し,  $q^{-1}$  以下の作用素を定める.

証明. 和の収束先を定義する必要がある. 任意に  $\xi \in \mathfrak{H}$  を一つとり, 暫くの間これを固定して考える. 次の和が収束することを示す.

$$\sum_{j \in J} \eta_j \langle \eta_j, \xi \rangle \quad (*)$$

\*25 以下の二つの主張は収束性を超弱作用素位相 (したがって弱作用素位相) の意味に変えれば [UHO03, 定理 4.3] を用いて示す事もできる. ここではより直接的な証明を行った.

$(\eta_j)_{j \in J}$  は Bessel であるから Bessel の不等式を満たす (定義 2.4.3 の第二条件).

$$\sum_{j \in J} |\langle \eta_j, \xi \rangle|^2 \leq q^{-1} \|\xi\|^2. \quad (2.4.40)$$

特に左辺の和は収束する. したがって

$$K = \{j \in J \mid |\langle \eta_j, \xi \rangle|^2 > 0\} \quad (2.4.41)$$

は高々可算である. ゆえに有限集合の増大列  $K_n \subset K$ ,  $n \in \mathbb{N}$  で  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = K$  を満たすものが存在する.

このとき,  $n \leq m$  に対して,  $(\eta_j)_{j \in J}$  の Bessel 性 (定義 2.4.3 の第一条件) より

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j \in K_m} \eta_j \langle \eta_j, \xi \rangle - \sum_{j \in K_n} \eta_j \langle \eta_j, \xi \rangle \right\|^2 &= \left\| \sum_{j \in K_m \setminus K_n} \eta_j \langle \eta_j, \xi \rangle \right\|^2 \\ &\leq q^{-1} \sum_{j \in K_m \setminus K_n} |\langle \eta_j, \xi \rangle|^2. \end{aligned} \quad (2.4.42)$$

これと先に述べた Bessel の不等式により  $n \in \mathbb{N}$  で添字付けられたベクトルの列  $\sum_{j \in K_n} \eta_j \langle \eta_j, \xi \rangle$  は Cauchy 列であることが分かる. それは収束するから, 収束先を  $\xi'$  と記す. 和 (\*) もこの  $\xi'$  に収束することはすぐに分かる. さらに, 上と同様に評価して

$$\|\xi'\|^2 \leq q^{-1} \sum |\langle \eta_j, \xi \rangle|^2 \leq q^{-2} \|\xi\|^2. \quad (2.4.43)$$

上記の構成に基づいて  $S : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  を  $S\xi = \xi'$  と定める. これが線形写像であることは明白, さらに  $\xi'$  のノルム評価式 (2.4.43) から  $\|S\| \leq q^{-1}$ . また, 構成から強作用素位相に関して  $\sum_{j \in J} |\eta_j \langle \eta_j, \cdot \rangle| = S$  が成り立つ. q.e.d.

この主張により

$$\Pi_j = \frac{|\eta_j \langle \eta_j, \cdot \rangle|}{\left\| \sum_{j \in J} |\eta_j \langle \eta_j, \cdot \rangle| \right\|}, \quad \Pi_{\omega} = 1 - \sum_{j \in J} \Pi_j = 1 - \frac{\sum_{j \in J} |\eta_j \langle \eta_j, \cdot \rangle|}{\left\| \sum_{j \in J} |\eta_j \langle \eta_j, \cdot \rangle| \right\|}, \quad (2.4.44)$$

はいずれも無矛盾に正作用素として定義される. ただし  $j \in J$  である. 強作用素位相における収束は弱作用素位相における収束を含意する. それゆえ  $\Pi = (\Pi_\omega)_{\omega \in J \cup \{\omega\}}$  は確かに正作用素値測度を成す.

さらに,  $(\eta_j)_{j \in J}$  が  $(\xi_j)_{j \in J}$  の双直交系であることから  $j, k \in J$ ,  $j \neq k$  なら  $\langle \xi_j, \Pi_k \xi_j \rangle = 0$ . また,  $j = k$  に対しては

$$\langle \xi_j, \Pi_j \xi_j \rangle = \frac{1}{\left\| \sum_{j \in J} |\eta_j \langle \eta_j, \cdot \rangle| \right\|} \geq \frac{1}{q^{-1}} = q. \quad (2.4.45)$$

この値は  $j \in J$  によらないことに注意せよ. よって, 正作用素値測度  $\Pi$  はベクトル状態  $(|\xi_j \rangle \langle \xi_j|)_{j \in J}$  を最低識別確率  $\geq q$  で識別する.

■ (III)  $\Leftarrow$  (iii) ベクトルの組  $(\xi_j)_{j \in J}$  が正規直交であるとする. この場合には

$$\Pi_j = |\xi_j \rangle \langle \xi_j|, \quad \Pi_{\omega} = 0 \quad (2.4.46)$$

と定めると  $(\Pi_\omega)_{\omega \in J \cup \{?\}}$  は正作用素値測度を成し、この正作用素値測度が状態の組  $(|\xi_j\rangle\langle\xi_j|)_{j \in J}$  を完璧に識別することが分かる。

以上で定理に含まれる全ての内容の証明が終わった。

## 5 補論：定理の前提について

前節で証明された定理は，識別性という測定論的性質を対応するベクトルの数学的性質に言い換えるものであった．ところで，定理では状態について二つの前提を設けていた．一つは状態の組の可算性，もう一つは状態の純粋性（ベクトル状態を考えているということ）である．これら二つの前提について検討を加えるのがこの節の目的である．

### a 純粋性

有限個の純粋状態（ベクトル状態）が識別可能であるための条件は [Che98] によって明らかにされた．これは古典的な結果であって，本論文では定理 2.3.2 の系として示した．有限個の正規状態（密度行列）が識別可能であるための条件は Y. Feng らの論文 [FDY04] で求められた．一般の正規状態についての結果はベクトル状態についての議論を少し変形するだけで示すことができる．次に，Feng らの結果を可算無限個の状態の組にまで拡張して述べる．<sup>\*26</sup>

系 2.5.1 ([KK16, Proposition 3]). Hilbert 空間  $\mathfrak{K}$  上の可算個の密度作用素の組  $(\rho_j)_{j \in J} \in (B^1(\mathfrak{K}))^J$  について，下記の条件は同値である．

- (a)  $(\rho_j)_{j \in J}$  は識別可能である．
- (b) どの  $j \in J$  に対しても次が成り立つ．

$$\left( \bigcap_{k \in J \setminus \{j\}} \ker \rho_k \right) \setminus \ker \rho_j \neq \emptyset. \quad (2.5.1)$$

- (c) どの  $j \in J$  に対しても次が成り立つ．

$$\bigcap_{k \in J} \ker \rho_k \subsetneq \bigcap_{k \in J \setminus \{j\}} \ker \rho_k. \quad (2.5.2)$$

- (d) どの  $j \in J$  に対しても次が成り立つ．

$$\overline{\text{span}} \left( \bigcup_{k \in J \setminus \{j\}} \overline{\text{im}} \rho_k \right) \subsetneq \overline{\text{span}} \left( \bigcup_{k \in J} \overline{\text{im}} \rho_k \right). \quad (2.5.3)$$

ただし， $S \subset \mathfrak{K}$  のノルム位相についての閉包を  $\overline{S}$  と記した．

証明．順次条件が同値であることを示す．以下，特に断らない限り  $j, k \in J$  と仮定する．

(a)  $\implies$  (b) 状態の組  $(\rho_j)_{j \in J}$  を識別する正作用素値測度  $(\Pi_\omega)_{\omega \in J \cup \{?\}}$  が存在すると仮定す

<sup>\*26</sup> 次の述べるのは単なる識別性についての結果である．一様識別性に関する類似の結果を見やすい形で述べることができるかどうかについては分かっていない．

る. はじめに

$$\langle \Pi_k, \rho_j \rangle = \text{tr} \left[ \Pi_k^{1/2} \rho_j \Pi_k^{1/2} \right]. \quad (2.5.4)$$

が成り立つこと, そして非負な跡類作用素はその跡の値が 0 なら作用素として 0 であることに注意する. いま述べた注意と識別性の定義から,  $j \neq k$  のとき  $\rho_j \Pi_k^{1/2} = 0$  であり,  $j = k$  のとき  $\rho_j \Pi_j^{1/2} \neq 0$  であることが分かる. したがって  $k \in J$  ごとに次を満たす  $\xi \in \mathfrak{K}$  が存在する.  $j \neq k$  に対して

$$\rho_k \Pi_k^{1/2} \xi \neq 0, \quad \rho_j \Pi_k^{1/2} \xi = 0 \xi = 0. \quad (2.5.5)$$

これは  $\Pi_k^{1/2} \xi$  が  $\left( \bigcap_{k \in J \setminus \{j\}} \ker \rho_k \right) \setminus \ker \rho_j$  の元であることを示している.

(a)  $\iff$  (b) (b) の条件が成立していると仮定する.  $j \in J$  ごとに (b) の等式の左辺に属するベクトル  $\eta_j \in \mathfrak{K}$  を取ることができる. 特に,  $0 \in \ker \rho_j$  より  $\eta_j \neq 0$ . こうして得られるベクトルの組  $(\eta_j)_{j \in J}$  から可算性の仮定に基づいて, 定理 2.3.1 の証明 [(I)  $\iff$  (i)'] と同じようにして状態の組  $(\rho_j)_{j \in J}$  を識別する正作用素値測度を構成することができる.

(b)  $\iff$  (c) これは集合論における等式  $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$  より従う.

(c)  $\iff$  (d)  $\mathfrak{K}$  は  $C$  上の Hilbert 空間であり,  $\rho_k$  はこの空間上の正作用素だから自己共役. さらに,  $\rho_k$  は定義により有界作用素ゆえ  $\ker \rho_k$  は閉線型部分空間である. (c)  $\iff$  (d) の証明は, これらの注意と次の初等的な主張から直ちに従う.

主張. 任意の閉線型部分空間  $\mathfrak{H}_\alpha, \mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2 \subset \mathfrak{K}$  と作用素  $S \in B(\mathfrak{K})$  について次が成り立つ.

- (1)  $\mathfrak{L}_1 \subsetneq \mathfrak{L}_2 \iff \mathfrak{L}_2^\perp \subsetneq \mathfrak{L}_1^\perp.$
- (2)  $\left( \bigcap_\alpha \mathfrak{H}_\alpha \right)^\perp = \overline{\text{span}} \bigcup_\alpha \mathfrak{H}_\alpha^\perp.$
- (3)  $(\ker S)^\perp = \overline{\text{im } S}.$

証明. (1) は閉部分空間  $\mathfrak{L}$  に対して  $\mathfrak{L}^{\perp\perp} = \mathfrak{L}$  が成り立つことと  $\mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{L}_2 \implies \mathfrak{L}_2^\perp \subset \mathfrak{L}_1^\perp$  から従う. (2) の等式の含む二つの包含関係の証明は次の通り.

“ $\supset$ ” 次のように形式的に計算する.

$$\begin{aligned} \langle \bigcap \mathfrak{H}_\alpha, \text{span} \bigcup \mathfrak{H}_\alpha^\perp \rangle &= \sum_{\beta \text{ 有限和}} \langle \bigcap \mathfrak{H}_\alpha, \mathfrak{H}_\beta^\perp \rangle \\ &\subset \sum_{\beta \text{ 有限和}} \langle \mathfrak{H}_\beta, \mathfrak{H}_\beta^\perp \rangle = 0. \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

ゆえに

$$\left( \bigcap \mathfrak{H}_\alpha \right)^\perp \supset \text{span} \bigcup \mathfrak{H}_\alpha^\perp. \quad (2.5.7)$$

左辺はもとより閉であるから, この等式で閉包をとって所望の包含関係を得る.

“ $\subset$ ” 次は明白である.

$$\mathfrak{H}_\alpha^\perp \subset \bigcup_\alpha \mathfrak{H}_\alpha^\perp \subset \overline{\text{span} \bigcup_\alpha \mathfrak{H}_\alpha^\perp} \quad (2.5.8)$$

$\mathfrak{K}$  は閉線型部分空間であることを用いて直交補空間に移り次を得る.

$$\mathfrak{H}_\alpha \supset \left( \overline{\text{span} \bigcup_\alpha \mathfrak{H}_\alpha^\perp} \right)^\perp. \quad (2.5.9)$$

右辺は  $\alpha$  に依らないことに注意せよ. これから

$$\bigcap_\alpha \mathfrak{H}_\alpha \supset \left( \overline{\text{span} \bigcup_\alpha \mathfrak{H}_\alpha^\perp} \right)^\perp. \quad (2.5.10)$$

もう一度直交補空間に移って所望の包含関係を得る.

最後に (3) は次のように示される:  $\xi \in (\text{im } S^*)^\perp \iff 0 = \langle \text{im } S^*, \xi \rangle = \langle S^* \mathfrak{K}, \xi \rangle = \langle \mathfrak{K}, S\xi \rangle \iff S\xi = 0 \iff \xi \in \ker S.$  q.e.d.

以上で全ての証明が終わった. q.e.d.

## b 可算性

次に可算について考える. 通常, 量子力学で考察対象となる Hilbert 空間は可分と前提されている [vN32, II-1]. \*27 この前提の下では定理における可算性の仮定は一般性を失うものでない. 以

\*27 前にも述べたが, Hilbert 空間が可分であるための必要十分条件は, その次元が可算であることである. 一般に稠密な可算部分集合を有する位相空間を可分であるという. Hilbert 空間においてはノルム位相によって可分性が定義される.

下でこのことを説明する.

初めに測定値が可算でない場合を考慮して, 識別の定義をいくらか一般化しておく.

定義 2.5.2 (候補状態を可算に限らない場合の識別). 次を所与とする.

- 物理系  $\mathfrak{A}$  上の正規状態  $\rho_j \in \mathfrak{A}_*$  の組  $(\rho_j)_{j \in J}$ .
- 測度空間  $(\Omega = J \cup \{?\}, \Sigma, \mu)$ . ただし,  $\Omega$  の任意の一点からなる部分集合は可測 (すなわち  $\{\{\omega\} \mid \omega \in \Omega\} \subset \Sigma$ ) と仮定する.
- 古典化操作  $\phi \in \text{nCP}(L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu), \mathfrak{A}; 1)$ .

そして  $\Pi_\omega = \phi 1_{\{\omega\}}$ ,  $\omega \in \Omega$  と記す. このとき識別を次のように定義する. すなわち

(I) 任意の  $j, k \in J, j \neq k$  に対して条件

$$\langle \rho_j, \Pi_k \rangle = 0, \quad \langle \rho_j, \Pi_j \rangle > 0 \quad (2.5.11)$$

が成り立つとき, 古典化操作  $\phi$  は状態の組  $(\rho_j)_{j \in J}$  を識別するという. この場合,  $\phi$  を  $(\rho_j)_{j \in J}$  の識別と呼び,  $\langle \rho_j, \Pi_j \rangle$  を識別確率と呼ぶ.

一様識別と完璧識別の定義は略した. また, この定義は  $\Omega$  が可算である場合には以前の定義を再現する. 測定値の個数が非可算になることを考慮して, 古典系を  $l^\infty(\Omega)$  にかぎらずやや一般化し, 正作用素値測度を使っていたところを古典化操作に代えたが, これらはいわば定義の前提条件についての軽微な修正である. それよりも重要なのは (I) の中にある変更されていない定義条件の方である.  $(\rho_j)_{j \in J}$  が識別可能であるときには, 任意の  $j, k \in J, j \neq k$  に対して条件  $\langle \rho_j, \Pi_k \rangle = 0, \langle \rho_j, \Pi_j \rangle > 0$  を満たす作用素の組  $(\Pi_\omega)_{\omega \in \Omega}$  が存在しさえすれば, 上記定義をいくらか別の形にするにしても以下の議論はそのまま妥当する.

さて, この小節の目的は次を示すことである.

命題 2.5.3. 識別可能な状態の個数は Hilbert 空間の次元を越えない. すなわち,  $\mathfrak{A}$  を Hilbert 空間  $\mathfrak{H}$  上の物理系とし,  $(\rho_j)_{j \in J}$  をこの物理系上の正規状態の組とする. このとき定義 2.5.2 の意味で  $(\rho_j)_{j \in J}$  が識別可能であるなら

$$|J| \leq \dim \mathfrak{H}. \quad (2.5.12)$$

ただし,  $\dim \mathfrak{H}$  は Hilbert 空間  $\mathfrak{H}$  の次元,  $|J|$  は集合  $J$  の濃度を表す.

通常の量子力学では Hilbert 空間は可分, すなわち可算次元と前提されると先に述べた. この前提と上記命題を勘案して, 先の識別の定義ではベクトル状態の個数を可算に限ったのである.

証明. 系 2.5.1 の証明 [(a)  $\implies$  (b)] では可算性の仮定を用いていない. これを今の場合にも繰り返して次を得る. どの  $j \in J$  に対しても

$$\left( \bigcap_{k \in J \setminus \{j\}} \ker \rho_k \right) \setminus \ker \rho_j \neq \emptyset. \quad (2.5.13)$$



そこで  $\eta_j$  を上の集合から一つずつ選びベクトルの組  $(\eta_j)_{j \in J}$  を得る. ベクトル  $\eta_j$  の取り方から  $(\eta_j)_{j \in J}$  は極小である. それゆえ命題の証明は次の主張に帰される. この主張は Gram-Schmidt の直交化法の単純な一般化であるが念のため証明を与える.

主張. 一般に, Hilbert 空間の極小なベクトルの組  $(\xi_j)_{j \in J}$  に対して, 同じ添字集合  $J$  で添字づけられた正規直交系  $(e_j)_{j \in J}$  が存在する.

主張の証明.  $J$  に整列順序 “ $\leq$ ” を入れ, (超限) 帰納的に正規直交系を構成する. 任意の  $k \in J$  に対して次の二条件を満たすベクトルの組  $(e_j)_{j < k}$  があったと仮定する.

- $(e_j)_{j < k}$  は正規直交.
- $\overline{\text{span}}\{e_j \mid j < k\} = \overline{\text{span}}\{\xi_j \mid j < k\}$

このとき直交直和分解

$$\overline{\text{span}}\{e_j \mid j \leq k\} = \overline{\text{span}}\{e_j \mid j < k\} + (\overline{\text{span}}\{e_j \mid j < k\})^\perp \cap \overline{\text{span}}\{e_j \mid j \leq k\} \quad (2.5.14)$$

に従って  $\xi_k$  を次のように分解する.

$$\xi_k = \xi'_k + \xi''_k. \quad (2.5.15)$$

もしも  $\xi''_k = 0$  であれば,  $\xi_k = \xi'_k \in \overline{\text{span}}\{e_j \mid j < k\}$  となり  $(\xi_j)_{j \in J}$  の極小性に反する. ゆえに  $\xi''_k \neq 0$ . そこで  $e_k \in \mathfrak{R}$  を次のように定めることができる.

$$e_k = \frac{\xi''_k}{\|\xi''_k\|}. \quad (2.5.16)$$

新たにここで定義した  $e_k$  を  $(e_j)_{j < k}$  加えてできる組  $(e_j)_{j \leq k}$  は次を満たす.

- $(e_j)_{j \leq k}$  は正規直交.
- $\overline{\text{span}}\{e_j \mid j \leq k\} = \overline{\text{span}}\{\xi_j \mid j \leq k\}$

以上のようにして帰納的に正規直交系  $(e_j)_{j \in J}$  が構成される. q.e.d.

証明のはじめに述べたことと今示した主張を合わせて結論を得る. q.e.d.

## 結

本章では、識別の定義（定義 2.1.1）を述べ、可算無限個のベクトル状態の組がいつ識別可能になるかを明らかにする識別性の基準（定理 2.3.1 または定理 2.4.5）を示した。

本論文で考察する（第二種）識別とは状態識別の一種であり、unambiguous discrimination とも呼ばれる。この識別では各試料に対する測定の結果「確かなことは云えない」と述べることを許す。その代わりに真の状態ではない候補状態を真の状態と取り違えることは許さない。本章では、単なる識別性と一様識別性を区別して定義した。単なる識別可能性は、いつかは真の状態を同定できることを保証する。これに対して一様識別性は、事前に何回程度測定を繰り返せば系の状態を同定できるかまで教えてくれる。この二つの識別性の違いは、無限個の候補状態を取り扱うにあたってはじめて現れる。

以上のように識別を定義したのち、量子系  $B(\mathfrak{R})$  上の可算個のベクトル状態の組に対して識別性の基準を示した。一方には、識別性というベクトル状態の組の測定論的性質があり、他方には、ベクトルの組の一次独立性に類似した数学的性質がある。この定理は、これらの間の対応関係を確立するものである。識別性には一次独立性、一様識別性には Riesz-Fischer 性、完璧識別性には正規直交性が対応する。特に、Riesz-Fischer 性の定義に現れる Riesz-Fischer 下界には、一様識別の最低識別確率という測定論的な意味があることが分かった。

最後に定理の二つの前提条件、すなわち純粋性と可算性について考察した。まず、定理はベクトル状態（純粋状態）を取り扱っているが、この場合の議論の単純な一般化として正規状態（混合状態を含む）の識別性についての結果が導出できることを述べた。次に、通常量子力学の定式化では可分 Hilbert 空間が用いられること、そしてそのときには識別されるベクトル状態の個数は高々可算であることを示した。



## 第3章

# 最適性

前章の定義によれば、状態の組が識別可能であるとは、その組が少なくともひとつの識別を許容することを指すのであった。したがって、識別可能な状態の組は一般には複数の識別を許容する。そのような複数の識別の中で最も優れた識別はどのようなもので、どのような性質を持つだろうか。本章ではこの種の最適な識別にまつわる議論を行う。

1節では、最低識別確率の大小によって識別の優劣ないし最適性が定義されると考える。このときには最低識別確率の最大値を求めることが課題となる。そこでこの節では問題の最大値を与え、それを達成する識別を構成する。

最低識別確率による最適性の定義は有用ではあるが、常にそのような定義を採用しなければならないわけでもない。目的や状況、或いは人の趣向によっても最適性の定義も多種多様になり得る。このような事情に鑑みて、2節では最適性の定義を一般化する。その上でどのような定義を採用したとしても言えることは何かを論じる。特に次が成り立つことが示される。すなわち、最適な識別を行い測定値“?”を得たとすると、そのあとに残される事後状態はもはや識別可能ではなくなる。これは最適な識別が被測定系に大きな擾乱をもたらすことを意味している。

## 1 識別確率の最大値

状態の組  $(\rho_j)_{j \in J}$  が正作用素値測度  $\Pi = (\Pi_\omega)_{\omega \in J \cup \{?\}}$  で識別可能であるとは次が成り立つことであった。

$$\langle \rho_j, \Pi_k \rangle = \delta_{j,k} q_j, \quad q_j > 0. \quad (3.1.1)$$

$q_j$  は識別確率と呼ばれ、真の状態が  $\rho_j$  であった場合にこれを正しく同定できる確率を表すのであった。  $\Pi$  が  $(\rho_j)_{j \in J}$  の識別なら  $q_j > 0$ 、一様識別なら最低識別確率  $q = \inf\{q_j \mid j \in J\}$  が  $> 0$  を満たす。次の定理は最低識別確率の最大値を与える。特に、この定理により最大値の存在も示されている点に注意されたい。

定理 3.1.1 ([KK16, Theorem 2]). 可算個のベクトル状態の組  $(|\xi_j\rangle\langle\xi_j|)_{j \in J} \in (B^1(\mathfrak{R}))^J$  が一様に識別できるとする。この組の最低識別確率の最大値は次で与えられる。

$$q = \frac{1}{\left\| \sum_{j \in J} |\eta_j\rangle\langle\eta_j| \right\|}. \quad (3.1.2)$$

ただし、 $(\eta_j)_{j \in J}$  は  $\text{span}\{\xi_j \mid j \in J\}$  に属する  $(\xi_j)_{j \in J}$  の双直交系である。この最低識別確率の最大値は次の正作用素値測度  $\Pi = (\Pi_\omega)_{\omega \in J \cup \{?\}}$  により達せられる。

$$\Pi_j = q |\eta_j\rangle\langle\eta_j|, \quad \Pi_? = 1 - \sum_{j \in J} \Pi_j. \quad (3.1.3)$$

ただし、 $j \in J$ .

証明. 一様識別可能であるという仮定により、定理に云うように双直交系  $(\eta_j)_{j \in J}$  が一意に定まる (補題 2.4.2)。また、これが定理に述べた正作用素値測度  $\Pi$  を定めることも定理 2.3.1 の証明 ((II)  $\iff$  (ii)) で述べたから繰り返さない。ここでは定理に与えた  $q$  が最大の最低識別確率であることのみを示す。

証明のため  $\Pi$  とは別に正作用素値測度  $\Pi' = (\Pi'_\omega)_{\omega \in J \cup \{?\}}$  も状態の組  $(|\xi_j\rangle\langle\xi_j|)_{j \in J}$  を一様に識別すると仮定する。そしてこの識別の識別確率を  $q'_j = \langle |\xi_j\rangle\langle\xi_j|, \Pi'_j \rangle$ 、最低識別確率を  $q' = \inf_{j \in J} q'_j$  と記す。さらに閉線型部分空間  $\text{span}\{\xi_j \mid j \in J\}$  への射影を  $P \in B(\mathfrak{R})$  とする。定理は次の主張から導くことができる。この主張は、Hilbert 空間を  $P\mathfrak{R}$  に限定すると識別の正作用素値測度が一意に定まることを述べている。

主張.  $P\Pi'_k P = q'_k |\eta_k\rangle\langle\eta_k|$ ,  $k \in J$ .

証明.  $\Pi'$  は  $(|\xi_j\rangle\langle\xi_j|)_{j \in J}$  を識別するから, 53 頁に述べた主張により次が成り立つ. 任意の  $j, \ell \in J$  に対して

$$\begin{aligned} \langle \xi_j, P\Pi'_k P\xi_\ell \rangle &= \langle \xi_j, \Pi'_k \xi_\ell \rangle & \xi_j, \xi_k \in P\mathfrak{R} \\ &= \delta_{j,k} q'_k \delta_{k,\ell}. & \text{53 頁の主張 (2.4.26)} \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

他方,  $(\eta_j)_{j \in J}$  は  $(\xi_j)_{j \in J}$  の双直交系であるから

$$\begin{aligned} \langle \xi_j, P|\eta_k\rangle\langle\eta_k|P\xi_\ell \rangle &= \langle \xi_j, \eta_k \rangle \langle \eta_k, \xi_\ell \rangle & \xi_j, \xi_k \in P\mathfrak{R} \\ &= \delta_{j,k} \delta_{k,\ell}. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

(3.1.4) と (3.1.5) を見比べて次を得る.

$$0 = \langle \xi_j, P(\Pi'_k - q'_k |\eta_k\rangle\langle\eta_k|)P\xi_\ell \rangle. \quad (3.1.6)$$

$j, \ell \in J$  は任意であり,  $P\mathfrak{R} = \overline{\text{span}}\{|\xi_j\rangle \mid j \in J\}$  であったから

$$0 = P(\Pi'_k - q'_k |\eta_k\rangle\langle\eta_k|)P. \quad (3.1.7)$$

$\eta_k$  は  $P\mathfrak{R}$  に属するように取ったのだから,  $P|\eta_k\rangle\langle\eta_k|P = |\eta_k\rangle\langle\eta_k|$ . よって結論を得る. q.e.d.

$\Pi'$  は正作用素値測度であるから  $0 \leq \Pi'_j = 1 - \sum_{j \in J} \Pi'_j$ . よって  $1 \geq \sum_{j \in J} \Pi'_j$ . これを射影  $P$  ではさみ, いま示した主張を用いて次を得る.

$$P \geq \sum_{j \in J} P\Pi'_j P = \sum_{j \in J} q'_j |\eta_j\rangle\langle\eta_j| = q' \sum_{j \in J} |\eta_j\rangle\langle\eta_j|. \quad (3.1.8)$$

上式各辺は何れも  $\geq 0$ . そこでノルムに移って

$$1 \geq q' \left\| \sum_{j \in J} |\eta_j\rangle\langle\eta_j| \right\| \geq q' \frac{1}{q}. \quad (3.1.9)$$

すなわち  $q \geq q'$ . これが証明すべきことであった. q.e.d.

有限個のベクトル状態  $(\xi_j)_{j \in J}$  の最大最低識別確率をどのように求めればよいかを説明する. 原理的には, まず  $(\xi_j)_{j \in J}$  の双直交系  $(\eta_j)_{j \in J}$  を求め, 次に正作用素

$$Y = \sum_j |\eta_j\rangle\langle\eta_j| \quad (3.1.10)$$

のノルムを計算することで最大の最低識別確率  $q$  を求めることができる. しかし, 実際に双直交系を求めるのは面倒である. 幸いにも候補状態が有限個であれば, 双直交系  $(\eta_j)_{j \in J}$  を求めるという手続きは省略できる. それを見るには, 双直交系の定義により

$$X = \sum_j |\xi_j\rangle\langle\xi_j| \quad (3.1.11)$$

が  $\text{span}\{\xi_j \mid j \in J\}$  上で  $Y$  の逆行列になることに注意すれば良い。このことから

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{\|Y\|} = \frac{1}{(Y \text{ の最大固有値})} \\ &= \frac{1}{(X \text{ の } 0 \text{ と異なる固有値の最小値})^{-1}} = (X \text{ の } 0 \text{ と異なる固有値の最小値}). \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

この計算は  $X, Y$  が互いに逆な正作用素であることに依っている。  $X$  は  $(\xi_j)_{j \in J}$  だけを用いて  $\sum_j |\xi_j\rangle\langle\xi_j|$  で与えられ、この固有値を計算することで最大の最低識別確率が求められるのである。特に簡単な場合として、二つのベクトル状態の識別を検討しておく。

例 3.1.2. 二つのベクトル状態の組  $(\xi_j)_{j=\{1,2\}} \in \mathfrak{R}^2$  は一次独立とする。これらの状態の最低識別確率の最大値は次で与えられる。

$$q = 1 - |\langle \xi_1, \xi_2 \rangle| \tag{3.1.13}$$

この値は  $\xi_1, \xi_2$  が直交するときに限り 1 となる。

証明.  $\mathfrak{R} = \mathbb{C}^2$  として、作用素  $X = |\xi_1\rangle\langle\xi_1| + |\xi_2\rangle\langle\xi_2| \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$  の固有値を求めれば良い。 $\langle \xi_1, \xi_1 \rangle = 1 = \langle \xi_2, \xi_2 \rangle$  に注意すれば、 $X$  の固有値が  $1 \pm |\langle \xi_1, \xi_2 \rangle|$  であることが分かる。したがって、上の議論から  $q = 1 - |\langle \xi_1, \xi_2 \rangle|$  である。 q.e.d.

この例の結果は [Die88] に帰されるべきものである。ただし、彼は二つの候補状態に対して一様な事前確率を仮定して議論を行った。なお、無限個の状態に対しては上述の議論は妥当でない。 $(\xi_j)_{j \in J}$  が Riesz-Fischer という条件は  $X = \sum_j |\xi_j\rangle\langle\xi_j|$  の収束を保証しない。

## 2 最適識別の擾乱

一般には識別の事後状態については何も言えないが、最適な識別については事後状態についてははっきりとしたことが言える。すなわち、最適な識別で「確かなことは云えない」という測定値“?”を得た場合、そのあとに残される状態の組はもはや識別不能となる。本節では、最適性の定義の仕方によらずこのことが成り立つことを示す。すなわち、

定理 3.2.1 ([KK18, Theorem]).  $\mathfrak{A}$  を物理系とし、さらに下記を所与とする。

- 可算個の正規状態の組  $(\rho_j)_{j \in J} \in (\mathfrak{A}_*)^J$ .

- 評価関数  $f$  :

次の条件を満たす  $f : (0, 1]^J \rightarrow \mathbb{R}$  を一つとり、これを評価関数と呼ぶ。すなわち、 $(q_j)_{j \in J}, (q'_j)_{j \in J} \in (0, 1]^J$  に対して

$$[\forall j \in J, q_j < q'_j] \implies f(q_j) < f(q'_j). \quad (3.2.1)$$

- 評価関数  $f$  が定める識別の集合上の半順序  $\preceq$  :

$\phi, \phi' \in \text{nCP}(\ell^\infty(J \cup \{?\}) \otimes \mathfrak{A}, \mathfrak{A}; 1)$  を  $(\rho_j)_{j \in J}$  の識別とし、それぞれの識別確率を  $q_j, q'_j$  と記す。そして  $f(q_j) < f(q'_j)$  が成り立つとき  $\phi \prec \phi'$  と記し、 $\phi \prec \phi'$  または  $\phi = \phi'$  が成り立つとき  $\phi \preceq \phi'$  と記すことにする。

以上の設定の下で次が成立する。すなわち、 $(\rho_j)_{j \in J}$  の識別  $\phi$  が上に定めた半順序  $\preceq$  の意味で極大であったとする。このとき測定  $\phi$  を行い測定値“?”を得たあとに残される状態の組  $(\rho_{j,?})_{j \in J}$  はもはや識別可能ではない。ただし、“?”が得られる確率

$$\langle (\phi_j(\delta_j \otimes (-)))_* \rho_j, 1 \rangle = \langle \rho_j, \phi(\delta_j \otimes 1) \rangle \quad (3.2.2)$$

はどの  $j \in J$  に対しても 0 とは異なると仮定する。このために測定後状態

$$\rho_{j,?} = \frac{(\phi(\delta_j \otimes (-)))_* \rho_j}{\langle (\phi(\delta_j \otimes (-)))_* \rho_j, 1 \rangle}. \quad (3.2.3)$$

はどれも一義的に定義される。

ここで定義した半順序“ $\preceq$ ”は評価関数  $f$  で測った識別の良さを表す。したがって、“ $\preceq$ ”の意味で極大な識別はこの意味で最適であるといえる。また、定理における最適性は条件 (3.2.1) を満たすようなどんな評価関数  $f$  を用いて定義しても良い。この条件は極めて緩慢である。それゆえ定理の結論は多様な最適性の定義に対して妥当する。

定理の証明に入る前に、定理で用いた記号や用語の意味を確認する。まず、測定  $\phi \in \text{nCP}(\ell^\infty(J \cup \{?\}) \otimes \mathfrak{A}, \mathfrak{A}; 1)$  が  $(\rho_j)_{j \in J}$  の識別であるとは、その正作用素値測度  $(\phi(\delta_\omega \otimes 1))_{\omega \in J \cup \{?\}}$  が識別であることを指す。Schrödinger 描像における測定後状態が (3.2.11) で与えられることについては、公理 A3.23 (25 頁) を見られたい。これらが一義的に定義されるという定理における仮定は、“?”



が得られる確率

$$\langle (\phi_j(\delta_? \otimes (-)))_* \rho_j, 1 \rangle = \langle \rho_j, \phi(\delta_? \otimes 1) \rangle \quad (3.2.4)$$

がどの  $j \in J$  に対しても 0 でないということを意味する。

証明. 対偶を示す. そのために, 事後状態  $(\rho_{j,?})_{j \in J}$  がなおも識別可能であったと仮定し, これを識別する測定を  $\phi' \in \text{nCP}(\ell^\infty(J \cup \{?\}) \otimes \mathfrak{A}, \mathfrak{A}; 1)$  とする. この  $\phi'$  を用いて  $\phi$  よりも優れた識別  $\psi$  を構成する.

はじめに  $\psi$  をどのように定義すればよいのか直感的に説明しておく. 二つの測定  $\phi, \phi'$  立て続けに行うことを考える. 一回目の測定  $\phi$  で測定値  $j \in J$  が得られたら真の状態は  $\rho_j$  であると直ちに判断する. この場合, 二回目の測定の結果は無視する. 一回目の測定  $\phi$  で測定値 “?” が得られた場合には二回目の測定結果を考慮する. 二回目が  $k$  であれば真の状態は  $\rho_k$  であったと判断し, 二回目も “?” であれば諦めて “?” と応える. 以上の一連の過程によって説明される測定を  $\psi$  とするのである.

次の条件で  $\psi \in \text{nCP}(\ell^\infty(J \cup \{?\}) \otimes \mathfrak{A}, \mathfrak{A}; 1)$  を定義する.

$$\psi(\delta_\omega \otimes X) = \begin{cases} \phi\left(\delta_\omega \otimes \left(\phi'(1 \otimes X)\right)\right) + \phi\left(\delta_? \otimes \left(\phi'(\delta_\omega \otimes X)\right)\right), & \omega \in J \\ \phi\left(\delta_? \otimes \left(\phi'(\delta_? \otimes X)\right)\right), & \omega = ?. \end{cases} \quad (3.2.5)$$

この条件を満たす  $\psi$  は唯一つだけ存在する. この定義と定理の最後に述べた仮定から

$$\begin{aligned} & \langle \rho_k, \psi(\delta_j \otimes 1) \rangle \\ &= \left\langle \rho_k, \phi\left(\delta_j \otimes \left(\phi'(1 \otimes 1)\right)\right) \right\rangle + \left\langle \rho_k, \phi\left(\delta_? \otimes \left(\phi'(\delta_j \otimes 1)\right)\right) \right\rangle \\ &= \langle \rho_k, \phi(\delta_j \otimes 1) \rangle + \left\langle \left(\phi(\delta_? \otimes (-))\right)_* \rho_k, \phi'(\delta_j \otimes 1) \right\rangle \\ &= \langle \rho_k, \phi(\delta_j \otimes 1) \rangle + \underbrace{\left\langle \left(\phi(\delta_? \otimes (-))\right)_* \rho_k, 1 \right\rangle}_{\rho_{k,?}} \left\langle \frac{\left(\phi(\delta_? \otimes (-))\right)_* \rho_k}{\left(\phi(\delta_? \otimes (-))\right)_* \rho_k, 1}, \phi'(\delta_j \otimes 1) \right\rangle \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

ここで  $(\rho_k)_{k \in J}$  ははじめに与えられた状態の組,  $(\rho_{k,?})_{k \in J}$  は測定  $\phi$  を行い “?” を得たあとの状態の組である. 二つの測定  $\phi, \phi'$  はそれぞれこれらの組の識別であったから, 上式は次のように書き換えられる.

$$\langle \rho_k, \psi(\delta_j \otimes 1) \rangle = \delta_{k,j} \left( q_j + (1 - q_j) q'_j \right) \quad (3.2.7)$$

ただし,  $q_j, q'_j$  は  $\phi, \phi'$  の識別確率である. これから  $\psi$  もまた  $(\rho_j)_{j \in J}$  の識別であることが分かる.

識別確率  $q'_j$  は  $> 0$  を満たす. また, 定理の最後の仮定により  $1 - q'_j = \left\langle \left(\phi(\delta_? \otimes (-))\right)_* \rho_k, 1 \right\rangle > 0$  であることに再度注意しておく. それゆえ,  $\psi$  の識別確率を  $r_j = \langle \rho_j, \psi(\delta_j \otimes 1) \rangle$  と書けば, 上式から任意の  $j \in J$  に対して

$$r_j - q_j = (1 - q_j) q'_j > 0. \quad (3.2.8)$$

そこで評価関数  $f$  を任意の一つとると、その性質から  $f(r_j) - f(q_j) > 0$ . ゆえに  $\psi \succ \phi$ . これは  $\phi$  の極大性に反する. q.e.d.

上記定理は単なる識別性についての定理である. 一様識別性についても同様に次の結果を導くことができる.

定理 3.2.2 ([KK18, Theorem']).  $\mathfrak{A}$  を物理系とし、さらに下記を所与とする.

- 可算個の正規状態の組  $(\rho_j)_{j \in J}$  :  
 $(\rho_j)_{j \in J} \in (\mathfrak{A}_*)^J$  を可算集合  $J$  で添字付けられた正規状態の組とする.
- 一様評価関数  $f$  :  
 次の条件を満たす  $f : (0, 1]^J \rightarrow \mathbb{R}$  を一つとり、これを一様評価関数と呼ぶ.  
 $(q_j)_{j \in J}, (q'_j)_{j \in J} \in (0, 1]^J$  に対して

$$\inf\{q'_j - q_j \mid j \in J\} > 0 \implies \inf\{f(q'_j) - f(q_j) \mid j \in J\} > 0. \quad (3.2.9)$$

- 一様評価関数  $f$  が定める一様識別の集合上の半順序  $\preceq_u$  :  
 $\phi, \phi' \in \text{nCP}(\ell^\infty(J \cup \{?\}) \otimes \mathfrak{A}, \mathfrak{A}; 1)$  を  $(\rho_j)_{j \in J}$  の一様識別とし、それぞれの識別確率を  $q_j, q'_j$  と記す. そして  $f(q_j) < f(q'_j)$  が成り立つとき  $\phi \prec_u \phi'$  と記し、 $\phi \prec_u \phi'$  または  $\phi = \phi'$  が成り立つとき  $\phi \preceq_u \phi'$  と記すことにする.

以上の設定の下で次が成立する. すなわち、 $(\rho_j)_{j \in J}$  の一様識別  $\phi$  が上に定めた半順序  $\preceq_u$  の意味で極大であったとする. このとき測定  $\phi$  を行い測定値 “?” を得たあとに残される状態の組  $(\rho_{j,?})_{j \in J}$  はもはや一様識別可能ではない. ただし、“?” が得られる確率について

$$\inf_{j \in J} \langle \rho_j, \phi(\delta_j \otimes 1) \rangle > 0 \quad (3.2.10)$$

を仮定する. このために測定後状態

$$\rho_{j,?} = \frac{(\phi(\delta_j \otimes (-)))_* \rho_j}{\langle (\phi(\delta_j \otimes (-)))_* \rho_j, 1 \rangle}. \quad (3.2.11)$$

はどれも一義的に定義される.

一様識別性においては定理を示すのに、定理の最後に述べたような技術的な条件が必要になる点に注意が必要である. この条件についての自然な物理的解釈が在るかどうかは分からない. なお、この条件  $\sup_{j \in J} \langle \rho_j, \phi(\delta_j \otimes 1) \rangle < 1$  は  $\rho_{j,?} = (\phi(\delta_j \otimes (-)))_* \rho_j / \langle (\phi(\delta_j \otimes (-)))_* \rho_j, 1 \rangle$  がどれも一義的に定義されていることを保証する. 証明は殆ど先の定理と同様であるから、相違点だけ述べることにする.

証明の素描. 定理の最後の仮定を用いる部分だけ述べる. 先と同様に  $(\rho_j)_{j \in J}, (\rho_{?,j})_{j \in J}$  の一様識別を  $\phi, \phi'$  とし、これらから作られる  $(\rho_j)_{j \in J}$  の識別を  $\psi$  と書く.  $r_j, q_j, q'_j$  を  $\psi, \phi, \phi'$  の識別確率とする.  $\phi$  は一様識別であったから、その最低識別確率  $q' = \inf q'_j$  は  $> 0$  を満たす. また、

定理の最後の仮定により  $1 - q > 0$  である。したがって

$$r_j - q_j = (1 - q_j)q'_j \geq (1 - q)q' > 0. \quad (3.2.12)$$

ゆえに  $\inf\{r_j - q_j \mid j \in J\} > 0$ . あとは先の証明と同じである. q.e.d.

次に評価函数と一様評価函数の例を挙げる. はじめに一般に評価函数は一様評価函数であるという点に注意したい. 換言すれば, 一様評価函数の方が大きな類を成している.

例 3.2.3.  $J$  は可算無限集合とし,  $1 \in J$  を仮定する.

•  $f_{av}$  :

事前分布  $(p_j)_{j \in J}$  から定義される平均識別確率を  $f_{av} : (0, 1]^J \rightarrow \mathbb{R}$  と書く. すなわち

$$f_{av}(q_j) = \sum_{j \in J} p_j q_j. \quad (3.2.13)$$

ただし  $\sum_j p_j = 1, p_j \geq 0$ . これは確かに評価函数である.

•  $f_1$  :

前項に述べた  $f_{av}$  の特殊な場合として,  $1 \in J$  だけを評価する評価函数  $f_1$  を定義することができる. すなわち

$$f_1(q_j) = q_1. \quad (3.2.14)$$

これは一つ目の候補状態の識別だけに着目する評価函数である. このようなだいぶ特殊な函数に対しても定理は妥当する.

•  $f_{inf}$  :

最低識別確率を読み出す評価函数  $f_{inf}$  は一様評価函数だが評価函数でない例である.

$$f_{inf}(q_j) = \inf\{q_j \mid j \in J\}. \quad (3.2.15)$$

以上は  $(q_j)_{j \in J}$  について線形な評価函数であるが, 線形でない評価函数もいくらでもある.

最後に先行研究について述べておくことにする. 識別の先行研究は少なくないが, それがもたらす擾乱についての研究となると殆ど見当たらない. 例外は [Che98] である. この節で述べたのは彼の結果を著しく一般化したものである. 一般化されている点は大きく別けて二つある.

第一に, 彼の議論では候補状態はベクトル状態に限られている. また, 測定値 “?” を得た後の事後状態もベクトル状態になると仮定している. これに対して本論文の議論では, 候補状態も事後状態も一般の正規状態で良い. 第二に, 彼は識別を平均識別確率  $f_{av}$  でのみ定義している. これに対して本研究では評価函数の類を拡大した.

彼は, 今述べた条件の下で, 最適な識別を行って “?” を得た後の状態は一次従属になることを示している. その証明は, 最適な識別に対しては適当な行列が 0 固有値を有することになり云々といった調子である. 彼の証明は長くはないが拡張性に乏しい. これに対して本論文の証明は極めて一般化されている上に, 最適性の定義に基づく直感的なものである.

定理の証明は単純な論法に基づくものであった. すなわち, 測定後状態がなお識別可能なら, 識

別を実行して初めの識別より優れた識別を作ることができる。したがって元の識別は最適ではない。この論法は極めて自然でなかば自明といっても良い。しかし、このような論法がどのような議論にて適用でき有意な結果を導くのかという問題はそれほど自明ではない。本節では識別に対してこの論法が上手く機能することを見た。他にどのような文脈でこの論法が有効かを検討するのは興味深い課題かもしれない。

章を閉じるにあたり、本章に関連する二つの付録について触れておきたい。これらの付録は、いずれも識別ないし測定の最適性や擾乱に関係する。本節では評価関数の値の大小により識別の優劣を定義した。この他にも、例えば測定のなす凸集合に着目し、その端点に位置する測定を優れた測定とみなすという立場もありえる。この種の議論については付録 D 節を参照されたい。また、識別の擾乱に関連する話題として、付録 E で識別再構成測定を取り扱った。識別再構成測定は、識別の擾乱に反復性と呼ばれる条件を課して定義される測定である。これはよく知られた射影測定の一つの一般化である上に、端点性とも絡めて論じることが出来る点が興味深い。

## 結

本章では最適な識別を論じた。1 節では、一様識別の最低識別確率の最大値と、それを達成する識別を与えた。次に、2 節では最適性の定義を吟味し、評価関数による最適性の定義に基づいてどのようなことが言えるかを論じた。これは最適性の定義を一般化する議論である。結局、どのような評価関数を取るにしても、最適な識別を行って測定値“?”を得た後に残された状態は識別不能となることが示された。もちろん評価関数には適切な条件を課すが、その条件は極めて緩慢である。また、その証明は識別の定義と最適性の定義に依拠する直感的なものであった。

## 第4章

# コヒーレント状態の識別性

### 序

技術の向上や理論の成熟をもってすれば、物事を幾らでも細かく区別識別してゆけると期待するのは自然なことである。物理学においても永くそう信じられていたのであって、そうであるからこそ古典力学では状態を連続的な相空間の一点に代表させてきたのだと言えるかもしれない。古典力学では、確率論とは無関係に系の状態が相空間のどの点で表されるかを知ることができる。換言すれば、相空間上の全ての点の中から任意の一点を識別できることを前提している。つまり、古典力学では状態の識別能力に限界はないと考えてきたのである。しかしこの前提は量子力学では正しくない。識別能力には限界がある。

本章の主題もこの種の識別性の限界である。特に、これまでの議論を踏まえてコヒーレント状態の識別を論じる。相空間の一点で表される古典状態の量子力学的対応物がコヒーレント状態である。コヒーレント状態の識別を議論することにより、古典力学で前提されていた完璧な識別性が、量子力学でどのように破綻するのかを仔細に検討することができる。そうすることで量子力学の特性を古典力学と対照しながら理解したい。

以下では、幾つかの簡単な例を見たのち、von Neumann 格子と呼ばれるコヒーレント状態の組を取り上げる。von Neumann 格子は相空間の格子点全体に対応するコヒーレント状態の組である。この格子の性質は、これまでに議論してきた識別によって明快に捉えられる。議論の構造は簡単である。第2章で得られた識別性の基準を用いて、この格子に関する既知の性質を測定論の言葉に翻訳すれば良い。この部分だけを述べるならば短く済むのであって、第2章の最後に例として組み込むことも可能ではあったと思う。しかし、本論文ではこの例の物理的重要性に鑑みて、ここに章を別けて論じることにした。本論文の序論で、量子状態の不確定性とは何であるか、どのように理解できるのかと疑問を呈した。本章で得られる結論は、この疑問に対する一つの解答である。

# 1 正準コヒーレント状態

本章では、このあとその識別を議論するコヒーレント状態について説明する。古典力学においては系の状態は相空間の一点で表される。この状態は座標も運動量も決まった値を持っている。正準コヒーレント状態はこの古典状態の量子力学における対応物である。正準コヒーレント状態は古典力学の相空間の点で指定され、座標と運動量はその点の周りに局在している状態である。正準コヒーレント状態は E. R. J. A. Schrödinger が既に 1926 年に発見している [Sch26]。そののち R. J. Glauber や E. C. G. Sudarshan が電磁波の記述に用い、今日では量子光学分野でも広く知られるようになった [Gla63a, Gla63b, Sud63]。

## a 質点の量子力学

これから考察するコヒーレント状態は、一次元空間中の粒子の座標  $Q$  と運動量  $P$  の値がおおよそ定まった状態であると言える。ところで  $Q$  や  $P$  はどのような作用素であったか。作用素である以上なんらかの空間に作用しているのであろうが、それはどのような空間だろうか。もちろんこれらの作用している空間は実軸上の自乗可積分函数のつくる Hilbert 空間  $\mathfrak{R} = L^2(\mathbb{R})$  である。そしてこれらの作用素は函数の引数  $q$  の乗算あるいは微分（掛ける  $i^{-1}$ ）と定義される。しかし、どうしてこういうことになったのか。以下の議論を展開するにあたっては、これら周知の結果から一歩後退して、表現論の立場から話をはじめ、この周知の結果に再び戻ってくるという手続きを踏んでおく方が都合が良い。そこで、この小節では群の表現という立場から作用素  $Q, P$  や Hilbert 空間  $\mathfrak{R} = L^2(\mathbb{R})$  の間の関係を整理しておく。

以降、一次元空間中の一質点の記述を考察する。この物理系の記述は、古典力学では Poisson 括弧、量子力学では正準交換関係が基本になる。

$$\{q, p\} = 1, \quad [Q, P] = i. \quad (4.1.1)$$

ここでは記号の説明は省略する。これらの代数的性質を抽象して Heisenberg 代数を定義する。

定義 4.1.1 (Heisenberg 代数). 三つの記号  $X, Y, Z$  を基底とする Lie 代数であって、関係式  $[X, Y] = Z, [Y, Z] = 0, [Z, X] = 0$  を満たすものを Heisenberg 代数と呼ぶ。以下、Heisenberg 代数を  $\mathfrak{h}$  と記す。Heisenberg 代数は  $C^{3 \times 3}$  の部分 Lie 代数として実現できる。

古典力学はこの Lie 代数の相空間  $\mathbb{R}^2$  上の多項式函数環なり Schwartz 函数環への作用、量子力学は Hilbert 空間への作用と理解できる。ここでは量子力学に関心がある。そこで、この Lie 代数の Hilbert 空間上への表現を考える。ただ、直接にこの Lie 代数の表現を考察すると、取り扱いが難しい非有界作用素が現れてしまう。そこで  $\mathfrak{h}$  を指数の肩に乗せて Heisenberg 群  $\mathbb{H}$  を作り、このユニタリ表現を考察すれば非有界作用素を直接に取り扱わずに済む、というのが Weyl の着想であった [Wey27]。ここでもそのようにして群の表現に話を移す。

定義 4.1.2 (Heisenberg 群). Heisenberg 代数のつくる群を Heisenberg 群  $\mathbb{H}$  と書く. すなわち

$$\mathbb{H} = \{ g_{q,p,t} = \exp[pX - qY + tZ] \mid q, p, t \in \mathbb{R} \} \quad (4.1.2)$$

$g_{q,p,t}$  の形の元は積法則  $g_{q,p,t} g_{q',p',t'} = g_{q+q',p+p',t+t'+(qp'-pq')/2}$  に従う.

実座標  $(q, p) \in \mathbb{R}^2$  の代わりに複素座標  $z \in \mathbb{C}$  を次のように導入して Heisenberg 群の元を記述することもできる.

$$z = \frac{q + ip}{\sqrt{2}}, \quad A = \frac{X + iY}{\sqrt{2}}, \quad B = \frac{X - iY}{\sqrt{2}}. \quad (4.1.3)$$

この対応のもと  $g_{z,t} = g_{q,p,t}$  と定義すれば

$$g_{z,t} = \exp[(zB - z^*A)/i + tZ]. \quad (4.1.4)$$

この表示では積法則は  $g_{z,t} g_{z',t'} = g_{z+z',t+t'+\text{Im}(z^*z')}$  となる.

今しばらく Heisenberg 群  $\mathbb{H}$  のユニタリ既約表現  $T: \mathbb{H} \rightarrow B(\mathfrak{K})$  の存在を仮定して話を進めてみる.  $g_{0,0,t} = \exp[tZ]$  の形の元は  $\mathbb{H}$  の勝手な元と交換することに注目する. このことと  $T$  の既約性から Schur の補題により  $T \exp[tZ]$  は恒等作用素に比例してはならない. それを  $\exp[t(i\hbar)]$  と記す. ユニタリ性により  $\hbar$  は実数である. このようにして Heisenberg 群のユニタリ既約表現ごとに定数  $\hbar \in \mathbb{R}$  が定まる. 逆に, Heisenberg 群のユニタリ既約表現はこの定数  $\hbar \in \mathbb{R}$  によって漏れなく一意に指定できる. このことを述べたのが Stone-von Neuman の定理である. 以降, 適当に単位を取り直して  $\hbar = 1$  の場合にだけ着目することにする.

定理 4.1.3 (Stone-von Neuman の定理). Heisenberg 群  $\mathbb{H}$  の (強連続) ユニタリ既約表現  $T: \mathbb{H} \rightarrow B(\mathfrak{K})$  であって

$$T \exp[tZ] = \exp[t(i1)], \quad t \in \mathbb{R} \quad (4.1.5)$$

を満たすものが存在し, それはユニタリ同値を除いて唯一つしかない.

この定理により表現空間を具体的に指定することなく座標作用素や運動量作用素を定義することができる.

定義 4.1.4 (座標作用素, 運動量作用素, 消滅作用素, 生成作用素).  $T$  を上記定理に云う Heisenberg 群のユニタリ既約表現,  $\mathfrak{K}$  をその表現空間とする. 次の等式により  $\mathfrak{K}$  に作用する自己共役な非有界作用素  $Q, P$  と (自己共役でないが可閉ではある) 非有界作用素  $a$  を定義する. これらの定義域は  $\mathfrak{K}$  に稠密にとれる.

$$\begin{array}{ccccc} Tg_{q,p,t} & \longleftarrow & T \exp[pX - qY + tZ] & \longleftarrow & \exp[i(pQ - qP + t)] \\ & & \parallel & & \\ Tg_{z,t} & \longleftarrow & T \exp[(zB + z^*A)/i + tZ] & \longleftarrow & \exp[za^* - z^*a + it] \end{array}$$



上式的作用素を  $U_{q,p,t}$  もしくは  $U_{z,t}$  と記す. また,  $Q, P, a, a^*$  を座標作用素, 運動量作用素, 消滅作用素, 生成作用素と呼ぶ. 定義によりこれらは交換関係

$$QP - PQ = i, \quad aa^* - a^*a = 1. \quad (4.1.6)$$

を満足する.

ここまで述べてきたことを要約しておく. まず, 古典力学と量子力学に共通し, これらの背後にある構造として Heisenberg 群  $\mathbb{H}$  を導入した. そして, この群の表現として質点の量子力学を再構成しようとした. Heisenberg 群には非同値なユニタリ既約表現があるかもしれない. もし非同値な表現があれば, (例えばスピンの角運動量  $J$  ごとに異なる対象を表すように) 質点の量子力学も複数に分岐し, それぞれを異なる対象として取り扱わざる得なくなったはずである. しかし, 実際には Stone-von Neuman の定理が保証するように, Heisenberg 群の既約ユニタリ表現は本質的に一つしかないことが分かった.

歴史的に見ると, 一次元空間中の一質点の量子力学としては, Heisenberg の行列力学と Schrödinger による波動力学の二つが別個に提案された. これらは Heisenberg 群の見かけ上異なった二つの表現である. そして両者の理論が等価であるのは, これら二つの表現がユニタリ同値であるということにほかならない.

## b 定義

前節で質点の量子力学が Heisenberg 群の既約ユニタリ表現として得られることを確認した. この小節ではこの事実を踏まえた上でコヒーレント状態を定義する.

定義 4.1.5 (真空状態, コヒーレント状態, 数状態). 真空状態, コヒーレント状態, 数状態を次のように定義する.

- $\mathfrak{R}$  の規格化されたベクトル  $\psi_0$  であって,

$$a\psi_0 = 0 \quad (4.1.7)$$

を満たすものが  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  の乗算を除いて唯一つだけ存在する. これを真空ベクトルまたは真空状態と呼ぶ.

- 各  $z \in \mathbb{C}$  に対してコヒーレント状態  $\psi_z \in \mathfrak{R}$  を次のように定義する.

$$\psi_z = D_z \psi_0, \quad D_z = U_{z,0} = \exp[za^* - z^*a]. \quad (4.1.8)$$

ただし,  $\psi_0$  は真空状態,  $U_{z,0}$  は定義 4.1.4 に述べたユニタリ作用素である.

- 各  $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$  に対して数状態  $\Psi_n$  を次のように定義する.

$$\Psi_n = \frac{a^{*n}}{\sqrt{n!}} \psi_0. \quad (4.1.9)$$

数状態  $\Psi_n$  は数作用素  $a^*a$  の固有値  $n$  に属する固有ベクトルである. そこでこれを数状

態と呼ぶ。  $(\Psi_n)_{n \in \{0,1,2,\dots\}}$  は  $\mathfrak{R}$  の正規直交完全系である。数状態は Fock 状態とも呼ばれる。

$D_0 = 1$  より真空ベクトル  $\psi_0$  は  $z = 0$  に対するコヒーレント状態  $\psi_0$  に等しい。それゆえ記号  $\psi_0$  の二つの定義は無矛盾である。また、以降混乱の恐れのない場合には  $\psi_z, \Psi_n$  を  $|z\rangle, |n\rangle$  と略記する。なお、定義から  $\psi_0 = \Psi_0$  である。

真空状態の定義から  $a\psi_0 = 0$  および  $a^*a\psi_0 = 0$  が成り立つ。これから真空状態における  $Q, P$  の（理想測定による）期待値および分散が存在して次が成立する。

$$\langle \psi_0, Q\psi_0 \rangle = 0 = \langle \psi_0, P\psi_0 \rangle, \quad \langle \psi_0, Q^2\psi_0 \rangle = \frac{1}{2} = \langle \psi_0, P^2\psi_0 \rangle. \quad (4.1.10)$$

すなわち真空状態  $|\psi_0\rangle\langle\psi_0|$  は、相空間  $C$  の原点  $0 \in C$  に局在した状態である。

コヒーレント状態はこの真空状態を変位作用素  $D_z$  で  $z$  だけ並進させた状態である。実際、並進作用素  $D_z$  の定義から次が成り立つことが検証される。

$$D_z^* a D_z = a + z. \quad (4.1.11)$$

したがって確かに  $D_z$  は相空間  $C$  の点に対応する作用素  $a$  をちょうど  $z$  だけ並進させる。これと真空状態の定義により

$$(a - z)\psi_z = (D_z a D_z^*)(D_z \psi_0) = D_z(a\psi_0) = 0. \quad (4.1.12)$$

すなわち  $\psi_z$  は  $a$  の固有値  $z$  に属する固有ベクトルである。これから直ちに次を得る。  $z = (q + ip)/\sqrt{2}$  により導入される実変数  $q, p$  について

$$\langle z|Q|z\rangle = q, \quad \langle z|P|z\rangle = p, \quad \langle z|(Q - q)^2|z\rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle z|(P - p)^2|z\rangle = \frac{1}{2} \quad (4.1.13)$$

特に後の二式からベクトル状態  $|\psi_z\rangle\langle\psi_z|$  が（数学的な）Heisenberg の不等式の等号を達することが示される。<sup>\*28</sup>

$$\sqrt{\langle z|(Q - q)^2|z\rangle} \sqrt{\langle z|(P - p)^2|z\rangle} = \frac{1}{2} \quad (4.1.14)$$

これはコヒーレント状態  $\psi_z$  が相空間上の一点  $z = (q + ip)/\sqrt{2}$  に局在していることを示す一つの根拠である（図 4）。以上で、コヒーレント状態についての基本的性質については述べ終えた。次にここまでで導入された記号を便宜のために列挙する。次節以降ではコヒーレント状態の組の識別性について見てゆくことにする。

$\mathfrak{R}$	Heisenberg 群の $\hbar = 1$ に対応する（強連続）既約ユニタリ表現の表現空間。一次元空間中の一粒子を記述する。
$a$	消滅作用素。 $aa^* - a^*a = 1$ を満たす非有界作用素。 $a = (Q + iP)/\sqrt{2}$ により座標作用素 $Q$ と運動量作用素 $P$ と関係する。

<sup>\*28</sup> Heisenberg の不等式については本論文の序論を参照されたい。

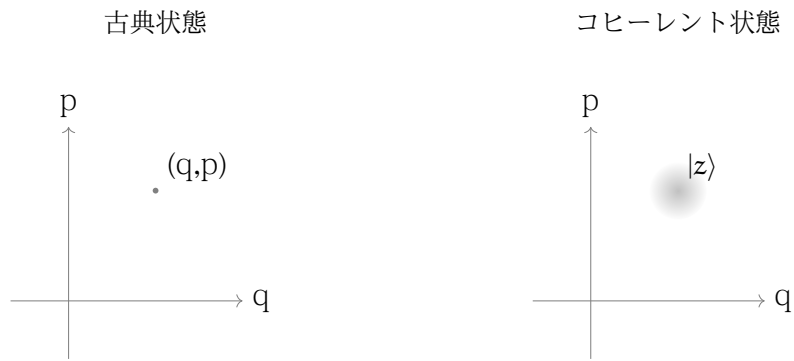


図 4 相空間の一点で表される古典状態とコヒーレント状態の比較. コヒーレント状態は  $z = (q + ip)/\sqrt{2}$  で表される相空間の一点周りに局在している. コヒーレント状態についての図は, 例えば伏見関数 [Hus40, Leo97] を用いて正当化される.

- $|0\rangle = \psi_0$  真空状態.  $a\psi_0 = 0$  を満たす  $\mathfrak{R}$  の規格化されたベクトル. 誤解の恐れのないときには  $|0\rangle$  と略記される.
- $D_z$  変位作用素. これは  $z \in \mathbb{C}$  で添字付けられた  $\mathfrak{R}$  に作用するユニタリ作用素である.  
 $D_z = \exp[za^* - z^*a] = \exp[za^*] \exp[-|z|^2/2] \exp[-z^*a]$  で定義される.
- $|z\rangle = \psi_z$  コヒーレント状態. 相空間  $\mathbb{C}$  の点  $z$  ごとに  $\psi_z = D_z\psi_0$  で定義される. 誤解の恐れのないときには  $|z\rangle$  と略記される.
- $|n\rangle = \Psi_n$  数状態.  $\Psi_n = (a^{*n}/\sqrt{n!})\psi_0$  で定義される. 数作用素  $a^*a$  の固有値  $n$  に属する固有ベクトル.  $(\Psi_n)_{n \in \{0,1,\dots\}}$  は  $\mathfrak{R}$  の正規直交完全系を成す. 誤解の恐れのないときには  $|n\rangle$  と略記される.

## 2 候補状態の個数と識別性

コヒーレント状態の識別性を議論する。識別すべき候補状態の個数が少なければ識別しやすく、多ければ識別しにくくなることが期待される。ここでは候補状態の個数を三種に分けて考える。すなわち、有限、可算無限、非可算無限である。有限個を少ない場合、非可算無限個が極端に多い場合と考える。これらの場合には、候補状態の個数だけから識別性が分かる。本節ではまずこのことを示す。

有限個の場合からはじめる。有限個のコヒーレント状態の組は常に識別可能である。この証明は初等的である。なお、次の命題の証明は有限個のベクトル状態の識別性についての基準に基づく。<sup>\*29</sup> この基準は既に A. Chefles が得ていた結果である。したがって、次の命題も本質的には Chefles に帰されるべきものである。

命題 4.2.1.  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  を相異なる有限個の複素数とする。このときコヒーレント状態の組  $(|z_j\rangle)_{j \in \{1, \dots, n\}}$  は一様識別可能である。

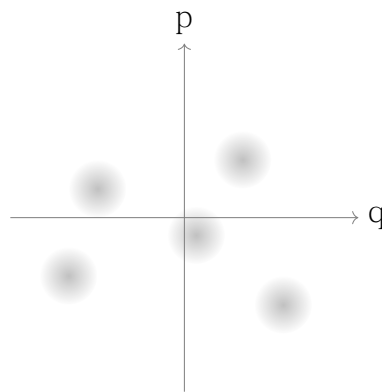


図5 有限個のコヒーレント状態の模式図。図では相空間中の五つのコヒーレント状態を示した。

命題 4.2.1 の証明. 系 2.3.2 (45 頁) で示した通り、有限個のベクトル状態の一様識別可能性は一次独立性に等しい。よって命題の初めに述べた有限個のコヒーレント状態の一次独立性を示せば十分である。

背理法により命題に云うコヒーレント状態の組  $(|z_j\rangle)_{j \in \{1, \dots, n\}}$  が一次独立でなかったと仮定する。このときある  $j \in \{1, \dots, n\}$  があって、 $|z_j\rangle \in \text{span}\{|z_k\rangle \mid k \neq j\}$ 。一般性を失うことなく  $j = 1$  と仮定する。すると、複素数  $\alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$  があって次が成り立つ。

$$|z_1\rangle = \sum_{k=2, \dots, n} \alpha_k |z_k\rangle. \quad (4.2.1)$$

<sup>\*29</sup> 本論文の系 2.3.2 (45 頁)。

ここで次の作用素を考える.

$$\prod_{k=2,\dots,n} (a - z_k). \quad (4.2.2)$$

$(a - z_k)$  たちは互いに可換だから上の作用素は積の順序に依らずに無矛盾に定義される. この作用素を上式の両辺に作用させることができる. すると  $a|z\rangle = z|z\rangle$  より

$$\begin{aligned} \prod_{k=2,\dots,n} (z_1 - z_k) |z_1\rangle &= \sum_{k=2,\dots,n} \alpha_j \prod_{k=2,\dots,n} (z_j - z_k) |z_j\rangle \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

右辺が 0 になるのは  $\prod (z_j - z_k) = 0$  だからである. 他方, 左辺の数因子  $\prod (z_1 - z_k)$  は  $z_1$  が  $z_2, \dots, z_n$  と異なるという仮定により 0 でない. ゆえに

$$|z_1\rangle = 0. \quad (4.2.4)$$

これは不合理である. なぜなら, 真空ベクトル  $|0\rangle$  は 0 でなく, それにユニタリ作用素を作用させて作られた  $|z_1\rangle = D_{z_1} |0\rangle$  も 0 にはなりえないからである. よって背理法の仮定は正しくない. つまり  $(|z_j\rangle)_{j \in \{1, \dots, n\}}$  は一次独立である. q.e.d.

このように有限個のコヒーレント状態の組は識別可能である. 換言すれば, 有限個である限りコヒーレント状態の識別性に定性的な変化は生じない. しかし, もちろん定量的にはいろいろな変化があり得る. 組の中にあまりに接近した二状態があったり, コヒーレント状態の数が増えていけば, 識別確率は低下してゆくのが普通である. 例えば二つのコヒーレント状態  $(|z_1\rangle, |z_2\rangle)$  の間の最低識別確率の最大値  $q$  は次で与えられる. <sup>\*30</sup>

$$q = 1 - |\langle z_1 | z_2 \rangle| = 1 - e^{-|z_2 - z_1|^2 / 2}. \quad (4.2.5)$$

この最低識別確率は, 確かに  $z_1$  と  $z_2$  が近ければ 0 に近づく.

一般に多数の状態の最低識別確率は, その中の二状態の最低識別確率よりも小さい. これは多数の状態を識別するよりも, そのなかの二つだけを識別することのほうがたやすいことから直感的に理解できる. そのため, コヒーレント状態の組  $(|z_j\rangle)_{j \in J}$  の最低識別確率は次の値で上から抑えられる.

$$\inf \left\{ 1 - e^{-|z_j - z_k|^2 / 2} \mid j, k \in J, j \neq k \right\} \quad (4.2.6)$$

これはコヒーレント状態の組が有限でなくても成り立つことである.

\*

次に, 非可算無限個のコヒーレント状態は識別不能であることを示す.

命題 4.2.2. 非可算無限個のコヒーレント状態からなる組は, 識別不能である.

<sup>\*30</sup> 例 3.1.2 (68 頁) 参照.

証明. 命題 2.5.3 で示したとおり, 識別可能な状態の個数は Hilbert 空間の次元を越えない. したがって, コヒーレント状態の属する Hilbert 空間  $\mathfrak{R}$  の次元  $\dim \mathfrak{R}$  が可算であることを示せば十分である. この Hilbert 空間  $\mathfrak{R}$  は Heisenberg 群の (強連続) 既約ユニタリ表現の表現空間であり, 確かに可算次元である (例えば数状態  $\Psi_n, n = 0, 1, 2, \dots$  は可算な正規直交完全系をなす). q.e.d.

以上見てきたとおり, 有限個のコヒーレント状態は一樣識別可能であり, 非可算無限個のコヒーレント状態は識別不能である. したがって, これらの中間に位置する可算無限個のコヒーレント状態の識別性だけが真に非自明である. そのような可算無限個のコヒーレント状態の組の中でもとりわけ興味深い例は von Neumann 格子である. 次にこれを導入し, その識別性を論じる.

### 3 von Neumann 格子

本節では可算無限個のコヒーレント状態の例である von Neumann 格子にまつわる議論を概観し、既知の結果を整理する。この識別性は次節で議論される。

古典力学の相空間は  $C \simeq R^2$  であった。この平面に等間隔に横線を引き、また等間隔に縦線を引いてゆく。こうして描かれた図形が格子であり、この格子によって平面は無数の長方形に分割される。これらの合同な長方形のうちの勝手な一つを格子の基本領域と呼び、縦線と横線の交わる点を格子点と呼ぶ。このような格子点に対応するコヒーレント状態の組を von Neumann 格子と呼ぶ。斜方格子まで含めた一般的な定義を次に述べる。

定義 4.3.1.  $\omega_1, \omega_2 \in C$  は  $\text{Im}(\omega_1^* \omega_2) > 0$  を満たす二つの数とする。これらに対して von Neumann 格子  $vNL(\omega_1, \omega_2)$  を次のように定義する。

$$vNL(\omega_1, \omega_2) = \{ |n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2\rangle \}_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \quad (4.3.1)$$

ここで  $|z\rangle$  は相空間上の一点  $z \in C$  に局在するコヒーレント状態を表す。  $C$  の部分集合  $\{t_1 \omega_1 + t_2 \omega_2 \mid t_1, t_2 \in [0, 1)\}$  を  $vNL(\omega_1, \omega_2)$  の基本領域と呼び、この領域の面積を  $S(\omega_1, \omega_2) = \text{Im}(\omega_1^* \omega_2)$  と記す。そして  $S$  の大小に応じて格子は粗または密であると形容する。混乱の生じる恐れのない場合には  $vNL(\omega_1, \omega_2), S(\omega_1, \omega_2)$  を  $vNL, S$  と略記する。

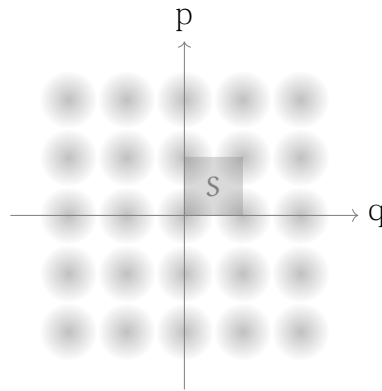


図6 von Neumann 格子の模式図。図は正方格子に対応する von Neumann 格子。  $S$  は格子の基本領域の面積を表す。

von Neumann 格子は幾らか異なった複数の文脈で議論されてきた。この格子の識別性の議論に入る前に、その文脈を三つほど簡単に紹介する。

一つ目は測定論である。もともとこの格子は、von Neumann が彼の有名な教科書 [vN32] で座標と運動量の同時測定に利用する目的で導入したものである。彼はいわゆる Gram-Schmidt の直交化法により von Neumann 格子から正規直交完全系をつくり、これを用いて射影測定を行うことを想定していた。このような測定により精度良く座標と運動量を同時に推定できると考えたのである。しかし、彼の議論はあまりに素描的で、例えばこの射影測定からどのように座標と運

動量を推定すればよいのかすら明らかにされていない。ところで、このようにして直交化により正規直交完全系を得るためには、もとの von Neumann 格子自身が完全系を成している必要がある。この点について von Neumann は興味深いことを証明なしに述べている。すなわち、格子が Planck 定数の逆数程度に密になればこの格子は完全になると宣言しているのである [vN32, p. 217, 日本語版では p. 323]。この点については後でまた触れることにする。いずれにしても、von Neumann 格子は von Neumann が測定論の文脈で導入したものであるが、その測定論的な役割について十分な議論は行われなかった。

二つ目は通信理論である。通信理論では、主として情報を運ぶ主体として電磁波を想定する。特定の周波数に属する電磁波の古典力学的相空間は、一次元空間中の一粒子のそれに等しい。粒子の座標と運動量は、電磁波の正弦成分と余弦成分に読み替えられる。こういうわけで相空間を離散化して格子点に対する電磁波だけ信号として用いること考えると、von Neumann 格子が現れる。このような文脈で von Neumann 格子をはじめ取り扱ったのは D. Gabor である [Gab46]。彼の研究は時間周波数解析と呼ばれてる研究分野の源流と見做されている<sup>\*31</sup>。

三つ目は補間式である。これは数学分野に属する。今考えている Heisenberg 群の既約ユニタリ表現の表現空間  $\mathfrak{R}$  は、適切な整函数 ( $\mathbb{C}$  の全域で解析的な函数) のなす Hilbert 空間と見ることができ [Bar61]。このとき、 $\mathbb{C}$  の格子点で前もって与えられた値を取るような整函数で、かつ  $\mathfrak{R}$  に属するものがあるかどうかを問うことができる。一般に与えられた点で与えられた値を取る函数を補間式と呼ぶ。したがって、この問題は整函数に関する補間式問題と呼ぶことができる。この文脈でも von Neumann 格子が現れる。

このように von Neumann 格子は様々な文脈で顔を出してきた。本論文ではもちろん測定論の文脈でこれを扱う。しかし von Neumann の想定した議論の道筋とは違い、状態識別の観点から von Neumann 格子を見直してみたい。

\*

さて、次に von Neumann 格子の既知の性質についてまとめておく。先に述べた通り、十分密な von Neumann 格子は完全であると予想されていた。これは von Neumann が証明なしに宣言していたところである。しかし、このことを示すのはそれほど容易ではなく、厳密な証明が与えられたのは von Neumann の教科書の公刊からおよそ 40 年も経ったあとであった。A. M. Perelomov [Plm71] と V. Bargmann ら [BBG71] が独立に厳密な証明が与えたのである。これらの結果に加えて、近年 K. Seip が整函数の補間問題に関連してこの格子を一般化し、その性質を更に詳しく調べた [Sei92]。これらの研究で得られた von Neumann 格子の性質を次に定理として引用する。<sup>\*32</sup>

---

<sup>\*31</sup> 例えば [Hei07] を見よ

<sup>\*32</sup> V. Bargmann ら [BBG71] や K. Seip [Sei92] の議論によれば、これらの性質の成立不成立を証明するにあたり、格子の対称性はさほど重要ではない。重要なのは次の二点だけである。第一に、格子は無有限個の点からなるが、無限に接近する二点を含まない。第二に、格子に対しては、格子点の平均密度が定義される。すなわち、格子点の全平面における平均数密度は  $1/S$  であると考えられる。



定理 4.3.2 ([Plm71, BBG71, Sei92]). von Neumann 格子の性質のうち, 完全性, 極小性, Riesz-Fischer 性は, 格子の基本領域の面積  $S$  のみ依存して決まる. この依存関係は次の表で与えられる.

	状態の組	完全性	極小性	Riesz-Fischer 性
$S < \pi$	vNL	○	×	×
$S = \pi$	vNL	○	×	×
	vNL <sup>(1)</sup>	○	○	×†
	vNL <sup>(n)</sup> , $2 \leq n < \infty$	×	○	×†
$S > \pi$	vNL	×	○	○

上記の表において, 記号“○”は性質があることを意味し, “×”は性質がないことを意味する. また, vNL<sup>(n)</sup> は vNL から任意の  $n$  個の要素を取り除いてできるコヒーレント状態の組を表す.

なお, 上記表において記号“†”を付した事実は [Plm71, (38)] から導くことができるが, 著者の知る限り既存の文献で明言されていない.

## 4 von Neumann 格子の識別

本章では von Neumann 格子の識別性を議論する。前章で述べた von Neumann 格子の既知の性質 (定理 4.3.2) と、本論文で示された可算無限個の状態識別についての識別性の基準 (定理 2.3.1) を総合し、この章における主結果を得る。

定理 4.4.1 ([KK16, Theorem 3]). von Neumann 格子の基本領域を  $S$  と書く。このときこの格子の識別性について下記が成り立つ。

- $S > \pi$  であれば、von Neumann 格子は一様に識別可能である。
- $S = \pi$  であれば、von Neumann 格子は識別不能である。しかし、この von Neumann 格子から任意の一つ以上、有限個の状態を取り除くと識別可能になる。ただし一様識別可能にはならない。
- $S < \pi$  であれば、von Neumann 格子は識別不能である。

なお、ここで識別性と言っているのは定義 2.1.1 に述べた識別性を指す。

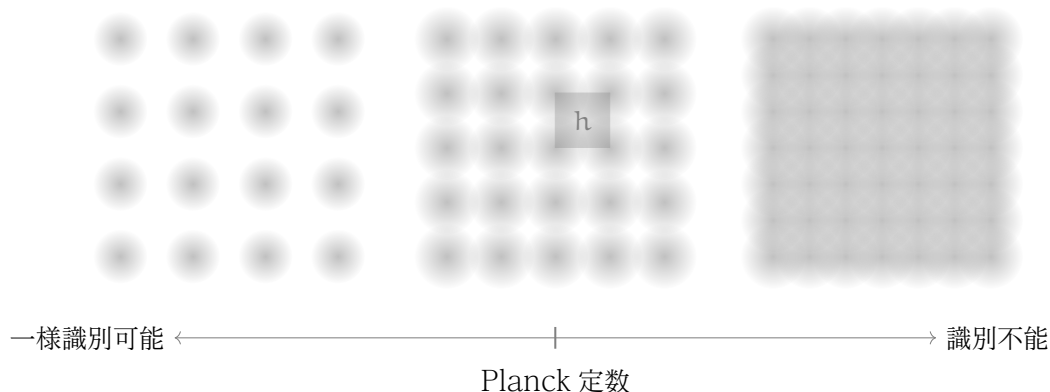


図 7 von Neumann 格子の識別性. von Neumann 格子は基本領域が Planck 定数  $h$  であるところを境に識別性を変える。

基本領域の面積  $S = \pi$  を分岐点として von Neumann 格子は性質を変える。この値は物理的にはちょうど Planck 定数  $h$  に対応する。<sup>\*33</sup> したがって、この定理は Planck 定数  $h$  の測定論的なひとつの特徴づけを与えているものと見られる。

この結果に関連して思い出されるのは Bohr-Sommerfeld の量子化条件である。これは初期量子論において提案されたもので、古典力学的な定常軌道のなかから量子力学的に許されるものを選

<sup>\*33</sup>  $z = (q + ip)/\sqrt{2}$ ,  $1 = \hbar = h/(2\pi)$  より次が成り立つことに注意せよ。

$$d^2z = (d \operatorname{Re} z)(d \operatorname{Im} z) = \frac{dq}{\sqrt{2}} \frac{dp}{\sqrt{2}} = \frac{dq dp}{2} = \frac{dq dp}{2\hbar} = \frac{\pi}{h} dq dp. \quad (4.4.1)$$

び出すのに利用された。式で書けば

$$\oint p \, dq = h \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

左辺の周回積分は運動の一周期に渡り、定常軌道が囲む相空間の面積を表す。それが Planck 定数  $h$  を単位として離散化される、というのが量子化条件の内容である。現代的には Schrödinger 方程式に WKB 近似を適用することで Bohr-Sommerfeld の量子化条件を導出するのが普通である。<sup>\*34</sup> これを根拠に古典力学的相空間は量子力学では Planck 定数  $h$  の細胞に分割されると考えることがある。統計力学の準古典的な取り扱いで、相空間に渡る積分を測度  $dqdp/h$  に対して行うのが良い例である。

本章の定理 4.4.1 は Bohr-Sommerfeld の量子化条件と直接には関係ない。Bohr-Sommerfeld の量子化条件は近似であるが、本章の定理は近似ではないという違いもある。しかし、Bohr-Sommerfeld の量子化条件も上の定理も、どちらも相空間の面積の最小単位は Planck 定数  $h$  であると述べているように思われる。定理 4.4.1 では、そのことを識別という測定論的な観点から捉えている。

\*

いま示した通り、von Neumann 格子が識別可能であるのはその格子の基本領域  $S$  が  $\pi < S$  の場合であり、そのときに限る。しかも、このときには格子は単に識別可能であるばかりでなく、一様に識別可能である。相空間の原点からどんなに遠いところにあるコヒーレント状態が実現されていたとしても、一定の確率以上で検出しえるということは決して自明なことではない。これは注目に値する事実である。

何れにしても  $\pi < S$  で von Neumann 格子は一様に識別可能である。そしてこのときには最低識別確率の最大値がある。その値はいくらか。評価は可能だろうか。  $\pi < S$  で識別可能であることを思うと、  $S \rightarrow \pi$  と  $S \rightarrow \infty$  における最低識別確率の最大値に関心を持つのが自然であろう。ここでは後者に関する初等的な評価を与える。

命題 4.4.2 ([KK16, Theorem 4]). von Neumann 格子  $vNL(\omega_1, \omega_2)$  は  $\pi < S$  で一様に識別可能であったが、その場合の最低識別確率の最大値  $q$  は次のように評価することができる。

$$q \geq 2 - \left( 1 + \frac{2\sqrt{\pi}}{\sin \arg(\omega_1^* \omega_2) \min\{|\omega_1|, |\omega_2|\}} \right)^2. \quad (4.4.2)$$

この評価式から格子を適当な仕方で十分疎にすれば最大の最低識別確率  $q$  を 1 にいくらでも近づけられることが知られる。これは、十分粗な von Neumann 格子は正規直交系に近づくという直感的な理解と整合する。

上式右辺は  $\omega_1, \omega_2$  両方の関数であって  $S$  だけの関数ではない。これは必然である。  $S$  だけで最大の最低識別確率を下から非自明に評価することは出来ない。なぜなら、格子の識別確率はその中

---

<sup>\*34</sup> 例えば [LL77, (48.2)] を見よ

の任意の二状態の最低識別確率で上から抑えられるからである。原点とそれに隣接する格子点  $\omega_j$  に対応する状態の識別を考えることにより  $q$  を上から評価できる。すなわち

$$q \leq 1 - \exp[-|\omega_j|^2]. \quad (4.4.3)$$

したがって、細長い基本領域を考えれば、与えられた  $S$  に対して  $q$  がいくらでも小さくなり得ることが分かる。このようにして  $S$  だけで最低識別確率の最大値を下から非自明に評価することは出来ないことが分かる。

命題 4.4.2 の証明. 定理 4.4.1 で示した通り、与えられたベクトル状態の組に対して、その最低識別確率の全体と Riesz-Fischer 下界の全体は一致する。ここでは Riesz-Fischer 下界を直接評価する。

記号の簡単のため、この証明の中でだけ  $\Omega_{n,m} = n\omega_1 + m\omega_2$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$  と記す。そして有限個のみが 0 と異なる数の組  $(\alpha_{n,m})_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2}$  を勝手に取る。次が評価すべき量である。

$$\begin{aligned} & \left\| \sum \alpha_{m,n} |\Omega_{m,n}\rangle \right\|^2 \\ &= \sum_{m,n} \sum_{k,\ell} \alpha_{k,\ell}^* \alpha_{k+m,\ell+n} \langle \Omega_{k,\ell} | \Omega_{k+m,\ell+n} \rangle \\ &= \sum_{k,\ell} |\alpha_{k,\ell}|^2 + \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \sum_{k,\ell} \alpha_{k,\ell}^* \alpha_{k+m,\ell+n} \langle \Omega_{k,\ell} | \Omega_{k+m,\ell+n} \rangle. \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

Riesz-Fischer 性が成り立つときには、上式第二項の絶対値が十分小さく第一項を相殺することはないと考えられる。そこで第二項を次のように上から評価する。

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \sum_{k,\ell} \alpha_{k,\ell}^* \alpha_{k+m,\ell+n} \langle \Omega_{k,\ell} | \Omega_{k+m,\ell+n} \rangle \right| \\ & \leq \sum_{(m,n) \neq (0,0)} e^{-|\Omega_{m,n}|^2/2} \sum_{k,\ell} |\alpha_{k,\ell}| |\alpha_{k+m,\ell+n}| \quad |\langle z|w \rangle|^2 = e^{-|z-w|^2} \\ & \leq \sum_{(m,n) \neq (0,0)} e^{-|\Omega_{m,n}|^2/2} \sum_{k,\ell} |\alpha_{k,\ell}|^2. \quad \text{Schwartz の不等式} \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

この結果を先の式に戻して次を得る。

$$\left\| \sum \alpha_{m,n} |\Omega_{m,n}\rangle \right\|^2 \geq A \sum_{k,\ell} |\alpha_{k,\ell}|^2, \quad A = 1 - \sum_{(m,n) \neq (0,0)} e^{-|\Omega_{m,n}|^2/2}. \quad (4.4.6)$$

ここで定義された  $A$  を命題に述べたとおり評価すればよい。

一般に複素数  $\lambda, \nu \in \mathbb{C}$  に対して  $|\lambda^* \lambda + \lambda^* \nu| \geq |\operatorname{Im}(\lambda^* \lambda + \lambda^* \nu)| = |\operatorname{Im}(\lambda^* \nu)|$  が成り立つから、 $m \neq 0$  に対して

$$\begin{aligned} |\Omega_{m,n}| &= \frac{1}{|\omega_1 m|} |(\omega_1 m)^* \omega_1 m + (\omega_1 m)^* \omega_2 n| \\ &\geq \frac{1}{|\omega_1 m|} \left| \operatorname{Im} \left( (\omega_1 m)^* \omega_2 n \right) \right| = \frac{1}{|\omega_1 m|} |mn| S \geq \frac{S}{\max_i |\omega_i|} |n|. \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

したがって任意の  $n, m \in \mathbb{Z}$  に対して

$$|\Omega_{m,n}|^2 \geq \frac{S^2}{\max_i |\omega_i|^2} n^2. \quad (4.4.8)$$

全く同様に右辺の  $n$  を  $m$  に置換した不等式も示すことができる。そこで  $n$  に対する評価式と  $m$  に対する評価式を平均して、任意の  $n, m \in \mathbb{N}$  に対して成り立つ次の評価式を得る。

$$|\Omega_{m,n}|^2 \geq \frac{S^2}{2 \max_i |\omega_i|^2} (n^2 + m^2). \quad (4.4.9)$$

よって  $A$  の定義から

$$\begin{aligned} 1 - A &= \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \exp \left[ -\frac{|\Omega_{m,n}|}{2} \right] \\ &\leq \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \exp \left[ -\frac{S^2}{4 \max_i |\omega_i|^2} (m^2 + n^2) \right] \\ &= -1 + \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp \left[ -\frac{S^2}{4 \max_i |\omega_i|^2} k^2 \right] \right)^2 \\ &\leq -1 + \left( 1 + \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{S^2}{4 \max_i |\omega_i|^2} x^2 \right] dx \right)^2 \\ &= -1 + \left( 1 + \frac{2\sqrt{\pi} \max_i |\omega_i|}{S} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

もともと  $S = \text{Im}(\omega_1^* \omega_2) = |\omega_1| |\omega_2| \sin \arg(\omega_1^* \omega_2)$  であったから求める評価式を得る。  
q.e.d.

前節で von Neumann 格子が  $\pi < S$  で Riesz-Fischer になることを述べたが、この命題もまた十分疎な格子が Riesz-Fischer であることを直接に証明している。

## 5 補論：幾つかの例

前章では可算個のコヒーレント状態の例として、von Neumann 格子を取り上げた。本節ではさらに幾つかの例を取り上げる。例を補うのには主に次の二つの目的がある。

von Neumann 格子は最も興味深い例であるに違いないが、この例に基づいて単なる識別性と一様識別性の違いを von Neumann 格子から理解するのは難しい。本節では比較的簡単な例を挙げることでこの違いを直感的に理解したい。これが第一の目的である。

ここまでの議論では von Neumann 格子の性質については既存研究を引用しただけで、その証明には一切立ち入らなかった。実際には、その証明には Fock-Bargmann 空間と呼ばれる Hilbert 空間が活用される。この空間を用いることにより、コヒーレント状態の識別性はある種の整函数 ( $\mathbb{C}$  上の正則函数) の存在問題に帰着される。本節では簡単な例の証明を通じてこのような論理的な道筋を示したい。これが第二の目的である。

以下ではまず三つの例を提示し、その後で Fock-Bargmann 空間と整函数の性質を記述する術語を幾つか導入する。その後で、これらの結果を用いて三つの例の性質を証明する。Fock-Bargmann 空間や整函数の性質についてはよく知られている既存の研究成果であるが、それらを識別性の観点から活用するところには本論文の独自性がある。

### a 命題

本章で取り上げる三つの例を次に示す。それぞれの命題の証明は本章の最後に行う。

命題 4.5.1. 勝手に  $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $\tau \in \mathbb{C}$  を取り次の複素数列を考える。

$$\dots, -2\omega + \tau, -\omega + \tau, \tau, +\omega + \tau, +2\omega + \tau, \dots \quad (4.5.1)$$

これらの点列に対応するコヒーレント状態の組は一様に識別可能である。

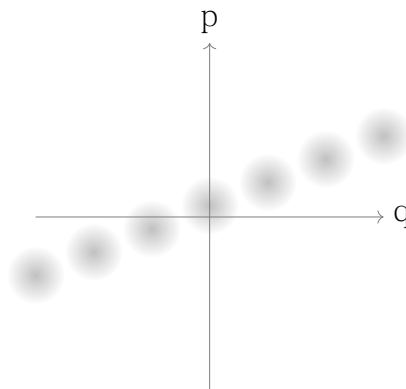


図8 命題 4.5.1 に述べたコヒーレント状態の組の例。

相空間に直線を引いて、この上に等間隔に点を打っていく (図 8)。そうして出来た無限個の点

に対応するコヒーレント状態の組は一様に識別可能である，というのが上の系の内容である．想像しやすいのは  $\text{Re}z$  軸ないし  $q$  軸上に等間隔に並んだ点集合である．これらは現実の物理的な一次元空間に等間隔に並んで殆ど静止している粒子たちに対応する．上記の系によればこのような状態の組は一様に識別可能である．もちろん，間隔が狭まれば識別確率は低下する．しかし，識別確率が小さいとはいえ識別可能ではある．

命題 4.5.2. 符号  $s = \pm$  と自然数  $n \in \mathbb{N}$  で添字付けられた次の複素数列を考える．

$$c_{\pm, n} = n \pm i \frac{1}{n}. \quad (4.5.2)$$

これらの点列に対応するコヒーレント状態の組は識別可能だが一様識別可能ではない．

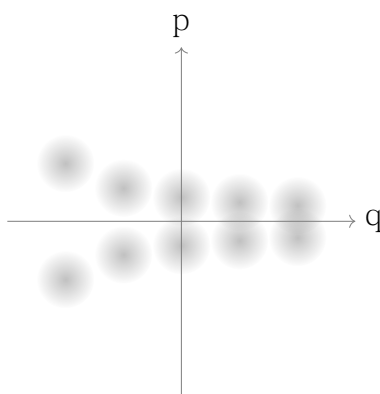


図9 命題 4.5.2 に述べたコヒーレント状態．

これは識別可能であるが一様識別不能である例である．この例は幾らでも近づく二状態を含むにもかかわらず識別可能である (図 9)．しかし，このような状態は一様識別可能であることを妨げる．

命題 4.5.3. 集積点を有する可算集合  $S \subset \mathbb{C}$  に対応するコヒーレント状態の組は識別不能である．

先の命題 4.5.2 とこの命題 4.5.3 の際に注意したい．どちらも幾らでも接近する二状態を有するが，その程度に違いが在る．集積点を有する可算集合 (図 8) の場合には単なる識別性すら満たし得ない．

## b Fock-Bargmann 空間

質点の記述は Heisenberg 群の既約ユニタリ表現で与えられ，それは本質的に一意である．したがってその表現空間も本質的に一意である．Schrödinger 表現では表現空間を実軸  $\mathbb{R}$  上の自乗可積分函数のなす Hilbert 空間  $L^2(\mathbb{R})$  に取る．これは座標作用素  $Q$  の形式的な固有ベクトルにより任意のベクトルを展開して計算することに相当する．Heisenberg 表現では，表現空間を

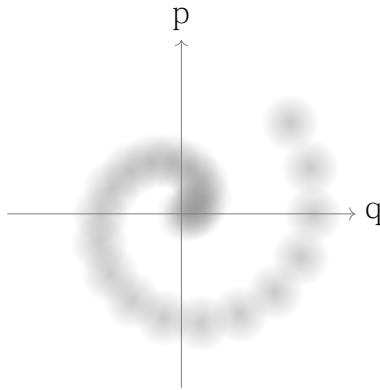


図 10 命題 4.5.3 に述べたコヒーレント状態の例. 図では  $0$  を集積点とする点列に対応するコヒーレント状態の組を示した.

$\{0, 1, 2, \dots\}$  上の自乗可積分数列の空間  $\ell^2 = \ell^2(\{0, 1, 2, \dots\})$  にとる. これは数作用素  $a^*a$  の固有ベクトルである数状態  $\Psi_n = |n\rangle$  による展開に相当する. 次に紹介する Fock-Bargmann 空間も Heisenberg 群の既約ユニタリ表現の表現空間であり, 上述の空間と同型である. これはコヒーレント状態による展開に相当する.

定義 4.5.4. Fock-Bargmann 空間  $\mathfrak{F}$  は次のように定義される函数空間である.

$$\mathfrak{F} = \left\{ \xi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid \xi \text{ は整函数 (} \mathbb{C} \text{ 上の正則関数), } \int_{\mathbb{C}} |\xi(z)|^2 \exp[-|z|^2/2] \frac{d^2z}{\pi} < \infty \right\} \quad (4.5.3)$$

$\xi, \eta \in \mathfrak{F}$  に対して次のように内積を定義することができて, この内積について Fock-Bargmann 空間  $\mathfrak{F}$  は Hilbert 空間をなす.

$$\langle \xi, \eta \rangle = \int_{\mathbb{C}} (\xi(z))^* (\eta(z)) \exp[-|z|^2/2] \frac{d^2z}{\pi} \quad (4.5.4)$$

ただし,  $d^2z$  は  $\mathbb{C}$  の Lebesgue 測度を表す.

消滅作用素  $a$  を函数の引数についての微分, 生成作用素  $a^*$  を函数の引数の乗算と定義することにより Fock-Bargmann 空間  $\mathfrak{F}$  に Heisenberg 群の (強連続) 既約ユニタリ表現を定めることができる. 整函数の引数を  $z^*$  とする場合には, これらの作用素は次のように書かれる.

$$a = \partial = \frac{\partial}{\partial z}, \quad a^* = z. \quad (4.5.5)$$

これらは確かに互いに随伴である. 同じことであるが, 函数の引数を  $z^*$  とする場合には

$$a = \bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial z^*}, \quad a^* = z^* \quad (4.5.6)$$

とする.

上のように定義した  $a, a^*$  は確かに交換関係  $aa^* - a^*a = 1$  を満たす.  $a = \partial, a^* = z^*$  が互いに



随伴であることは内積の定義に注意すれば検証できる.

次に真空状態, コヒーレント状態, 数作用素の固有ベクトルが Fock-Bargmann 空間の元としてどのように与えられるかを見る.

■ 真空状態 真空状態は  $0 = \alpha\psi_0$  で特徴づけられる. 定数関数  $\psi_0(z^*) = 1$  はこの方程式を満たし, 規格化もされている.

■ 数状態 数状態  $\Psi_n$  は

$$\Psi_n(z^*) = \frac{\alpha^{*n}}{\sqrt{n!}}\psi_0 = \frac{z^{*n}}{\sqrt{n!}} \quad (4.5.7)$$

で与えられる.  $\alpha, \alpha^*$  は変数の微分と乗算に対応し, 多項式の次数を上げ下げする. 数作用素  $\alpha^*\alpha$  の固有ベクトルである数状態は  $n$  次単項式に他ならない. これらの直交性は奇函数の積分が消えることから出る. また,  $(\Psi_n)_{n \in \{0,1,\dots\}}$  が  $\mathfrak{F}$  で完全であることは, 整函数が  $z=0$  周りで収束半径  $r = \infty$  の Taylor 級数に展開されることに対応する.

■ コヒーレント状態 変位作用素は, その定義で  $\alpha = \bar{\delta}, \alpha^* = z$  と置き換えて

$$D_w = \exp[wz^* - w^*\bar{\delta}] = \exp[wz^*] \exp[-|z|^2/2] \exp[-w^*\bar{\delta}]. \quad (4.5.8)$$

したがって

$$\psi_w(z^*) = D_w 1 = \exp[wz^* - |z|^2/2]. \quad (4.5.9)$$

すなわちコヒーレント状態は Fock-Bargmann 空間では指数関数で与えられる. そして, コヒーレント状態が消滅作用素  $\alpha$  の固有ベクトルであることは, 指数関数が微分作用素  $\bar{\delta}$  の固有函数であることに対応する.

■ 不等式 Fock-Bargmann 空間の元はノルムが有限の正函数である. ノルムが有限であることから正函数の  $z \rightarrow \infty$  における発散の程度について条件がつく. それを見るために  $\xi \in \mathfrak{F}$  を数状態で展開して次のように書く.

$$\xi(z) = \sum c_n \frac{z^n}{\sqrt{n!}} = \sum c_n \Psi_n. \quad (4.5.10)$$

$\xi \in \mathfrak{F}$  のベクトルとしてのノルムは

$$\|\xi\|^2 = \sum |c_n|^2. \quad (4.5.11)$$

従って Schwartz の不等式から

$$|\xi(z)|^2 \leq \left( \sum |c_n| \frac{|z|^n}{\sqrt{n!}} \right)^2 \leq \left( \sum |c_n|^2 \right) \left( \sum \frac{|z|^{2n}}{n!} \right) = \|\xi\|^2 \exp[|z|^2] \quad (4.5.12)$$

あるいは

$$e^{-|z|^2/2} \xi(z^*) \leq \|\xi\|. \quad (4.5.13)$$

すなわち,  $\xi \in \mathfrak{F}$  は  $z \rightarrow \infty$  において高々  $e^{|z|^2/2}$  程度に発散するにすぎない. これは  $\mathfrak{F}$  におけるノルムの定義式から予想された関係式であった.

■ コヒーレント状態との内積 Fock-Bargmann 空間においてはコヒーレント状態を上とは幾らか異なった仕方で導入することもできる. 前項の不等式 (4.5.13) から  $w \in \mathbb{C}$  ごとに定まる次の線型汎関数がどれも有界であることがわかる.

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \xi &\longmapsto \xi(w^*)e^{-|z|^2/2}. \end{aligned}$$

この線型汎関数を与えるベクトルを今しばらく  $\psi'_w \in \mathfrak{F}$  と記す. すなわち

$$\langle \psi'_w, \xi \rangle = \exp[-|w|^2/2] \xi(w^*), \quad \xi \in \mathfrak{F}. \quad (4.5.14)$$

この定義と数状態  $\Psi_n(z) = z^n/\sqrt{n!}$  が正規直交完全系であることから次を得る.

$$\begin{aligned} \psi'_w(z^*) &= e^{+|z|^2/2} \langle \psi'_z, \psi'_w \rangle \\ &= e^{+|z|^2/2} \sum_n \langle \psi'_z, \Psi_n \rangle \langle \Psi_n, \psi'_w \rangle \\ &= e^{+|z|^2/2} \sum_n \left( e^{-|z|^2/2} \frac{z^{*n}}{n!} \right) \left( e^{-|w|^2/2} \frac{w^{*n}}{n!} \right)^* = e^{wz^* - |w|^2/2} \end{aligned} \quad (4.5.15)$$

すなわち,  $\psi'_z$  はコヒーレント状態  $\psi_z$  にほかならない. こうして Fock-Bargmann 空間におけるコヒーレント状態の重要な機能が明らかになった. すなわち, コヒーレント状態  $\psi_w$  との内積を取る操作は函数の  $w^*$  における値を与える. これから特に次を得る.

補題 4.5.5.  $\eta$  を Fock-Bargmann 空間  $\mathfrak{F}$  のベクトルとする. このベクトルがコヒーレント状態の組  $(\psi_{z_j})_{j \in J}$  に直交するための必要十分条件は, 整函数  $\eta$  が  $z_j^*$ ,  $j \in J$  に零点を持つことである.

## c 整函数の増大度

Fock-Bargmann 空間の元  $\xi$  は整函数であって, そのノルム

$$\int |\xi(z)|^2 \exp[-|z|^2/2] \frac{d^2z}{\pi} \quad (4.5.16)$$

が有限なものである.  $\xi$  が  $z = \infty$  であまりに強く発散するようでは, ノルムは有限になりえない. 一般に整函数であって  $\exp[\sigma r^\rho]$  程度に発散するものをオーダー  $\rho$ , タイプ  $\sigma$  と呼ぶ. 正確な定義は次の通り.

定義 4.5.6.  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  を整函数とする.

$$M_f(r) = \sup\{|f(z)| \mid |z| \leq r\} \quad (4.5.17)$$

と定めると, 最大値の原理により  $M_f$  は  $r$  の単調増加函数である. さらに

$$\rho_f = \limsup \frac{\log \log M_f(r)}{\log r}, \quad \sigma_f = \limsup \frac{\log M_f(r)}{r^\rho}. \quad (4.5.18)$$

$\rho_f$  を  $f$  のオーダー,  $\sigma_f$  をタイプと呼ぶ. 混乱の恐れのない場合には  $\rho_f, \sigma_f$  を  $\rho, \sigma$  と記す.

函数の増大度はオーダー  $\rho$  でまず分類され、次に等しいオーダーを有する函数はさらにタイプ  $\sigma$  で分類される。(4.5.13) から分かる通り、Fock-Bargmann 空間の元のオーダーは  $\rho = 2$  を越えない。また、オーダーが  $\rho = 2$  の場合にはタイプは  $\sigma = 1/2$  を越えない。逆に、これらの条件を満たす整函数は Fock-Bargmann 空間に属する。

与えられたコヒーレント状態に対する双直交系を作るには、その点に零点を有する正函数を構成すれば良い。多項式を考えれば分かる通り、より多くの零点を有する函数ほど  $z = \infty$  でより強く発散することが期待される。したがって、より多くのコヒーレント状態に対する双直交系はノルムが強く発散しやすく  $\mathfrak{F}$  に属しにくい。

さて、与えられた点  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  で零となる整函数は、Weierstrass の基本因子の掛け合わせとして

$$f(z) = \prod_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{z}{c_n}\right) \exp \left[ \left(\frac{z}{c_n}\right) + \cdots + \frac{1}{p} \left(\frac{z}{c_n}\right)^{p_n} \right] \quad (4.5.19)$$

の如く構成すれば良い。ここで現れた指数は積の各項の値を 1 に近づけるための因子で、このような因子を適当に選ぶことにより無限乗積を収束させることができる。この積を評価することにより次の結果が得られる。

命題 4.5.7 ([Lev64, Theorem7]).  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  は  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  内の点列で、 $|c_1| \leq |c_2| \leq \cdots$  を満たし  $z = \infty$  以外に収束点を持たないものとする。そして

$$\rho_1 = \inf \left\{ \rho' > 0 \mid \sum \frac{1}{|c_n|^{\rho'}} < \infty \right\} \quad (4.5.20)$$

と定める。このとき  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  に一位の零点を有するオーダー  $\rho_1$  の整函数が存在する。

## d 証明

本設の初めに述べた三つの命題の証明を述べる。

まず一直線に等間隔に並んだコヒーレント状態は一樣識別可能であった (命題 4.5.1)。これは von Neumann 格子についての結果から示すことも、直接に示すこともできる。それぞれを以下に述べる。

命題 4.5.1 の第一証明.  $\pi$  よりも十分大きな数の例としてここでは  $6.022 \times 10^{23}$  を取る。さて、与えられた  $\omega \in \mathbb{C}$  に対して  $\omega' = 6.022 \times 10^{23} \pi i \omega$  と定めれば、 $vNL(\omega, \omega')$  は定理 4.4.1 により一樣に識別可能。よってその部分組である問題のコヒーレント状態の組も一樣に識別可能である。 q.e.d.

命題 4.5.1 の第二証明. ベクトル状態の識別性はユニタリ操作で変わらない。そこで必要であれば変位作用素  $D_z$  や回転作用素  $e^{\theta a^* a}$  の定める操作を施すものとするれば、 $L > 0$  を用いて

$$\dots, -2L, -L, 0, +L, 2L, \dots \quad (4.5.21)$$

と書かれる点に対応するコヒーレント状態たちの一樣識別性を示せば十分である。識別性の基準 (定理 2.4.5) により一樣識別性を示すには Bessel な双直交系  $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  を受容すること示せば

良い. そのような双直交系を Fock-Bargmann 空間において構成する.

第一に, 双直交系を構成する. 整函数  $\eta_0$  を次のように定める,

$$\eta_0(z^*) = \frac{\sin(\pi z^*/L)}{\pi z^*/L}. \quad (4.5.22)$$

すると補題 4.5.5 により

$$\langle \psi_{nL}, \eta_0 \rangle = \eta_0(nL) = \frac{\sin(\pi z^*/L)}{\pi z^*/L} \Big|_{z=nL} = \delta_{n,0}. \quad (4.5.23)$$

また,  $\eta_0$  のオーダー  $\rho$  は明らかに

$$\rho = 1. \quad (4.5.24)$$

したがって,  $\eta_0 \in \mathfrak{F}$ . この  $\eta_0$  から  $\eta_n = D_{nL}\eta_0$  と定義すれば  $(\eta_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  は  $(\psi_{nL})_{n \in \mathbb{Z}}$  の双直交系をなす.

第二に今構成した双直交系  $(\eta_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  が Bessel であることを示す. まず,

$$\begin{aligned} \left| e^{-|z|^2/2} \eta_n(z^*) \right| &= \left| e^{-|z|^2/2} e^{-|nL|^2/2 + (nL)z^*} \eta_0(z^* - nL) \right| \\ &= e^{-|z^* - nL|^2/2} \cdot |\eta_0(z^* - nL)| \\ &\leq e^{-|z^* - nL|^2/2} \cdot C e^{-|z^* - nL|^{1.001}} && \rho = 1 \text{ による} \\ &\leq C' e^{-|z^* - nL|^2/100} \end{aligned} \quad (4.5.25)$$

最後の二行における  $C, C' > 0$  は適当な正数である. したがって,

$$\begin{aligned} |\langle \eta_m, \eta_n \rangle| &= |\langle \eta_0, \eta_{n-m} \rangle| \\ &\leq C'^2 \int \exp\left[-\frac{|z|^2 + |z - (n-m)L|^2}{100}\right] \frac{d^2z}{\pi} \\ &= C'' \exp\left[-\frac{(n-m)^2 L^2}{200}\right] \end{aligned} \quad (4.5.26)$$

ただし,  $C'' = 100C'^2$ . 有限個だけが 0 と異なる数列  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  に対して

$$\begin{aligned} \left\| \sum \beta_n \eta_n \right\|^2 &\leq \sum_n \left( \sum_m |\beta_m| |\beta_{m+n}| \right) C'' \exp\left[-\frac{n^2 L^2}{200}\right] \\ &\leq \sum_n \left( \sum_m |\beta_m|^2 \right) C'' \exp\left[-\frac{n^2 L^2}{200}\right] && \text{Schwartz の不等式} \\ &\leq B \left( \sum_m |\beta_m|^2 \right). \end{aligned} \quad (4.5.27)$$

ただし,  $B = C'' \sum \exp[-n^2 L^2/200]$  と書いた.  $B$  は任意の  $L$  に対して収束して  $> 0$  である. よって上式は  $(\eta_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  が Bessel であることを示している. q.e.d.

この命題を示すには, 一直線上に等間隔に並んだ点で零になる整函数として正弦函数を取った. von Neumann 格子が  $S > \pi$  で Riesz-Fischer であることを示すには, 格子点に零点を持つ函

数である  $\sigma$  関数が利用される。<sup>\*35</sup>

次に、識別可能だが一様識別不能な例 (命題 4.5.1) の証明に移る。

命題 4.5.2 の証明. まず、一様識別可能ではないことを示す.  $c_{+,n}, c_{-,n}$  は  $n \rightarrow \infty$  で幾らでも接近し、この二点の識別確率が幾らでも小さくなることから出る. 実際、もしも一様識別であれば、識別性の基準 (定理 2.3.1 または定理 2.4.5) より、 $(\psi_{c_{s,n}})_{(s,n)}$  は Riesz-Fischer である. よって、ある  $A > 0$  があって、有限個だけが 0 と異なる数列  $(\alpha_{s,n})_{(s,n)}$  に対して

$$A \sum |\alpha_{s,n}|^2 \leq \left\| \sum \alpha_{s,n} \psi_{c_{s,n}} \right\|^2. \quad (4.5.28)$$

したがって特に

$$A(1^2 + (-1)^2) \leq \|\psi_{c_{+,n}} - \psi_{c_{-,n}}\|^2. \quad (4.5.29)$$

整理して

$$A \leq 1 - e^{-2/n^2}. \quad (4.5.30)$$

$n$  は任意ゆえ、これから  $A = 0$  を得るが、これは  $A > 0$  に反する.

次に、識別可能であることを示す. 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して

$$\sum \frac{1}{|c_{s,n}|^{1+\varepsilon}} \leq 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} < \infty. \quad (4.5.31)$$

すなわち

$$\rho_1 = \inf \left\{ \rho' > 0 \mid \sum \frac{1}{|c_{s,n}|^{\rho'}} \right\} \leq 1. \quad (4.5.32)$$

したがって命題 4.5.7 により、 $c_{s,n}$  に一位の零点を持つ整関数  $\eta$  でオーダー  $\rho \leq 1$  を満たすものが存在する.  $\rho \leq 1$  より  $\eta \in \mathfrak{F}$ . この整関数から

$$\eta_{s,n}(z^*) = \frac{\eta(z^*)}{z^* - c_{s,n}} \quad (4.5.33)$$

と定める. すると補題 4.5.5 により

$$\langle \psi_{c_{s',n'}}, \eta_{s,n} \rangle = \eta_{s,n}(c_{s',n}') = \delta_{(s,n),(s',n')}. \quad (4.5.34)$$

さらに、 $\eta \in \mathfrak{F}$  より  $\eta_{n,s} \in \mathfrak{F}$ . したがって、 $(\eta_{s,n})_{(s,n)}$  は  $(\psi_{c_{s,n}})_{(s,n)}$  の双直交系である. q.e.d.

最後に、集積点を有する点列に対応するコヒーレント状態の組が識別不能であることを示す.

命題 4.5.2 の証明.  $S$  の集積点を  $c$  とし、 $t \in S \setminus \{c\}$  を任意にとり固定する. 背理法により  $(\psi_s)_{s \in S}$  が識別可能であったと仮定する. すると、識別性の基準 (定理 2.4.5) より、 $(\psi_s)_{s \in S}$

<sup>\*35</sup>  $\sigma$  関数を若干変更することでオーダー  $\rho = 2$ , タイプ  $\lambda = \pi/S$  の整関数で、格子点に零点を有する整関数がえられる. 詳しくは [Plm71] を見られてたい.

の双直交系  $(\eta_s)_{s \in S}$  が存在する。このとき二つの両立しない結論が導かれる。

- 整函数として  $\eta_t \neq 0$  :

双直交系の定義と補題 4.5.5 により  $1 = \langle \psi_t, \eta_t \rangle = \eta_t(t^*)$  だからである。

- 整函数として  $\eta_t = 0$  :

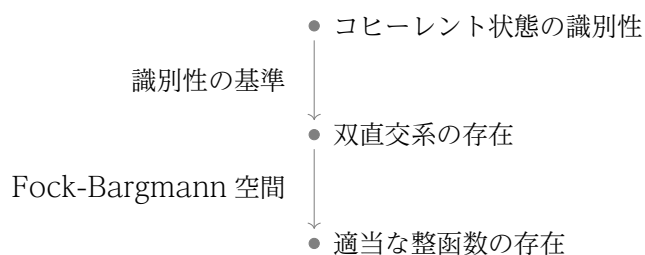
双直交系の定義と補題 4.5.5 により  $\eta_t$  は集積点を有する集合  $S \setminus \{c, t\}$  上で 0 である。したがって、一変数正則函数について的一致の定理により整函数  $\eta$  は恒等的に 0 である。

このような矛盾のため背理法の仮定は正しくない。すなわち  $(\psi_s)_{s \in S}$  が識別不能である。 q.e.d.

## 結

本章では、第 2 章で展開した識別の一般論を踏まえてコヒーレント状態の組の識別性を議論した。古典力学では相空間の一点で系の状態が代表される。この状態の量子力学的類似物がコヒーレント状態である。古典力学では相空間の任意の部分集合が与えられたとき、この各点を互いに確実に識別できると暗に仮定している。量子力学においても任意のコヒーレント状態の組が識別可能であろうか。これが本章で取り扱った問題である。

この問題は、本論文で示された識別性の基準 (定理 2.3.1 または定理 2.4.5) と Fock-Bargmann 空間によりある種の整函数の存在問題に帰着された。



本章では 1 節でコヒーレント状態の基本的性質を概説した。そのうちコヒーレント状態の個数と識別性の関係について 2 節で論じた。既存研究から有限個のコヒーレント状態は一様識別可能であると分かる。また、第 2 章で得られた結果から非可算無限個のコヒーレント状態が識別不能であることも分かる。これらの場合にはコヒーレント状態の個数だけから識別性が判定できる。逆に言えば、個数だけから識別性が判定できないのは可算無限個の場合だけである。

そこで、可算無限個のコヒーレント状態の例として von Neumann 格子を取り上げた。von Neumann 格子は古典力学の相空間の格子に対応するコヒーレント状態の組である。3 節で von Neumann 格子についての既知の結果を紹介し、次いで 4 節でこの格子の識別性を議論した。既知の結果に本論文で示した識別性の基準を総合することにより von Neumann 格子の識別性が明らかにされた。von Neumann 格子は、基本領域が大きく疎なときには一様識別可能となり、密なときには識別不能となる。そしてその境目はちょうど基本領域の面積が Planck 定数となるところにある。これは Planck 定数を状態識別の観点から特徴づける結果である。なお、疎な von Neumann 格子が単に識別可能であるばかりでなく一様識別可能であることは非自明な結果である。特にこの場合について最低識別確率を初等的に評価し、基本領域を適切な仕方で大きくすれば、最低識別確率を幾らでも 1 に近づけられることも示した。この結果は、疎な格子が正規直交系に漸近するという直感的理解と符合する。

最後に 5 節ではコヒーレント状態の組の例を幾つか補った。これらは単なる識別性と一様識別性の違いを直感的に説明する例である。また、この節では Fock-Bargmann 空間を導入し、上に説明したようにコヒーレント状態の識別性の議論がある種の整函数の存在問題に帰着されるという議論の道筋を明らかにした。

# 結論

まず本論文全体を要約し、次に残された課題、最後に総括を述べる。

第1章では、代数的観点に基づいて測定の定義を与えた。物理系は von Neumann 代数、操作（物理過程）は物理系間の完全正写像として定式化された。特に古典系は可換 von Neumann 代数として定義され、測定は一般の物理系と古典系の合成系に対する一種の操作であると定義された。

第2章と第3章では、識別の一般論を展開した。本論文で言う識別は unambiguous discrimination と呼ばれる。この識別の特徴は「真の状態は分からなかった」という決定の放棄を許すところにある。代わりに真の状態ではない状態を誤って真の状態と名指してしまう取り違えは禁じる。この識別については、まず候補状態がこの意味で識別可能か否かという定性的問題が主題化される。そして識別が可能な場合に限り、次に最適性にまつわる定量的問題が主題化される。本論文では第2章で定性的問題、第3章で定量的問題を論じた。

第2章では、はじめに量子測定的一种として状態識別を定義した。本論文では程度に応じて識別を二通りに定義した。単なる識別と一様識別である。これらは識別される状態が無限個あるときにはじめて違いを示す。この章の主結果は識別性の基準である。一方には、識別可能性という状態の組の測定論的な性質があり、他方には、ベクトルの一次独立に類する数学的な性質がある。識別性の基準はこれらの性質の間に対応を与えるものである。識別性の基準は可算個のベクトル状態について述べたが、ベクトル状態とは限らない正規状態の識別性や、非可算無限個の状態識別についても論じた。

第3章では、最適な識別について議論した。第一に、一様識別における最低識別確率の最大値を与える公式を示した。ここでは最低識別確率によって最適性を測っている。第二に、最適性の定義を一般化したときに何が言えるかについて議論した。そして次の結果を得た。すなわち、どのように最適性を定義したとしても、最適な識別は真の状態の識別に失敗したあとの事後状態を識別不能にする。ただし、識別の最適性は緩慢な条件を満たす評価関数によって定義した。どのように最適性を定義したとしてもと云ったのは、この評価関数の類が十分大きいことを意味している。

第4章ではここまで得られた結果を用いてコヒーレント状態の組の識別性を論じた。古典力学では状態は相空間の一点で代表され、これらの状態は確実に識別されると仮定されている。量子力学でも同様のことが言えるだろうか。言えないとしたらどこに識別性の限界があるのだろうか。このような疑問に答えるのが本章の議論である。はじめに有限個のコヒーレント状態は一様識別可能であり、非可算無限個のコヒーレント状態は識別不能であることを指摘した。その上で残った可算無限個の場合の議論に移った。可算無限個のコヒーレント状態には識別可能なものと識別不能なものがある。なかでも von Neumann 格子は興味深い例である。von Neumann 格子は古典的相空間に描かれた格子の格子点全体に対応するコヒーレント状態の組である。この格子についての既知の数学的性質と本論文で示された識別性の基準を総合することにより次の結果を得た。すなわち、この格子は十分疎であれば一様識別可能であり、十分密であれば識別不能である。そしてその境界は格子の基本領域がちょうど Planck 定数  $h$  となるところにある。この結果は、Planck 定数  $h$  を識別性の観点から特徴づけている。さらにこの章の最後では、コヒーレント状態の識別問題が



適当な整関数の存在問題に帰着されることも述べた。以上がこれまでに行ってきた議論の内容である。

ここで本研究と既存研究の関係を整理しておく。本研究では、特に無限個のコヒーレント状態の識別 (unambiguous discrimination) を論じた。というのは、有限個の量子状態の識別については一般論が既にあり、それから有限個のコヒーレント状態が識別可能であることも直ちに分かるからである。無限個の状態識別についての議論はなかったので、本研究ではまずその一般論を新たに整備した。次いで一般論をコヒーレント状態に適用するという手続を踏んだ。有限個のコヒーレント状態は必ず識別可能だったが、無限個の場合には事情はそれほど単純ではなく、いろいろな例があることが分かった。識別不能な例や、識別可能だが一様識別不能な例は本研究で発見されたものである。なお、単なる識別性と一様識別性を区別して定義したのも本研究がはじめてである。そもそもこれらの区別は候補状態が無限個ある場合にしか生じない。いろいろなコヒーレント状態の組のなかでも、とりわけ興味深い例が von Neumann 格子である。この格子はもともと測定論における活用を見込んで導入されたが、長らく測定論の文脈から切断されたままその性質の理解が深められてきた。本研究では、この格子の数学的性質を識別性の観点から見直すことにより Planck 定数の測定論的な特徴づけを得た。この結果は、識別性という観点の基礎論的研究における有用性を示すとともに、von Neumann 格子という興味深い研究対象を再び測定論の文脈に接続するものでもある。

次に、本論文で論じることのできなかつた問題を三つ挙げる。一つ目は、識別性の一般論に関する。本論文では、可算無限個のベクトル状態が識別可能であるための条件が極小性であり、一様識別可能であるための条件が Riesz-Fischer 性であることを示した。さらに可算無限個の正規状態が識別可能であるための条件も述べた。ただ、正規状態が一様識別可能であるための条件は述べなかつた。ベクトル状態の結果を用いてこのための条件を形式的に述べることは可能であるが、工夫無くこれを実行した場合にはかなり煩瑣になる。この条件を洗練された形式において提示することが積み残した第一の問題である。

二つ目は、von Neumann 格子の最低識別確率の  $S = \pi$  (物理的な単位では Planck 定数に相当する) 付近における評価である。von Neumann 格子の最低識別確率の最大値  $q$  は  $S > \pi$  なら  $q > 0$ ,  $S \leq \pi$  なら定義上  $q = 0$  となる。本論文では  $S \rightarrow \infty$  における  $q$  の評価を与えたが、 $S = \pi$  付近における評価は与えていない。この付近において  $q$  は格子の基本周期  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$  について連続だろうか。こうした問題にすら答えられていない。これが積み残した第二の問題である。

三つ目は、一般化コヒーレント状態の識別性である。本論文で考察したコヒーレント状態は、Heisenberg 群の既約ユニタリ表現から生じている。他の群の既約ユニタリ表現を議論の起点に取ることにより、一般化コヒーレント状態が得られる [Plm12]。このような一般化コヒーレント状態にまで本論文の議論が敷衍できるか検討することが積み残した第三の問題である。この方向で研究を進めるにあたりまず考察すべき群は  $SU(1, 1)$  であるように思われる。この群は適切な解析関数のなす無限次元 Hilbert 空間上に既約にユニタリ表現を有する。解析関数が表れる点が Heisenberg 群の表現に類似しており、本研究で用いた識別性の証明手法を再び利用できる可能性が高い。以上が本論文で解決できなかつた問題群であり、今後の課題である。

最後に、いくらか大局的な見地から総括を述べる。本論文の序論において不確定性とは何であるかという問を立てた。そしてこの問が本論文の背後にある問題意識であるとも言った。ところで、もしも我々が古典力学を知らず、量子力学だけを解するような存在であるなら、状態の不確定性は自明の事実過ぎない。したがって不確定性とは何であるかと問うこと自体無かったであろう。不確定性は量子力学の重要な特徴であるが、我々が不確定性に関心を持つのは、全てが原理的には確定しえらとする古典力学を知っているからである。それゆえ不確定性を理解しようとするなら、古典力学と量子力学の偏差に注目するのが自然であるように思われる。古典状態の識別問題を量子力学に移植して得られたコヒーレント状態の識別問題は、まさしくそのような偏差を見るのに適した問題であった。

古典状態はどんなに密に分布していても識別可能であったが、量子状態は Planck 定数より密に分布すると識別できない。von Neumann 格子についての結果は、このような直感的理解を厳密な仕方で正当化したものといえるであろう。この結果を踏まえて、著者は次のようにはじめに立てた問に答えたいと思う。すなわち、不確定性とは識別性を阻害する一因であり、それは Planck 定数により特徴づけられる。本研究は、このようにして識別性という観点から量子状態の不確定性の一側面を明らかにするものである。

# 謝辞

本論文は著者が慶應義塾大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻後期博士課程在学中（2015年4月から2018年3月）に古池達彦専任講師の指導のもとで行った研究をまとめたものです。本論文に記した研究成果は、どれも古池達彦先生との議論の中で見出されたものです。先生の温かいご指導のおかげで研究を進めることができました。研究の他にも公私に渡り大変お世話になりました。感謝申し上げます。

慶應義塾大学大学院の佐々田博之教授、藤谷洋平教授、山本直樹准教授には、本論文の審査を引き受けていただきました。論文や発表は明瞭さを欠いていた点多々あったと存じますが、精読傾聴いただき、そのうえ数々の貴重な助言をくださりましたこと、感謝しております。本論文が少しでも読みやすくなっているとすれば、先生方のおかげです。

同じ研究グループに所属していた遠藤傑さんと若村浩明さんとは研究の関心が近いこともあり、研究上の示唆を沢山いただきました。また、杉生光平さんと川島聡さんにも、同じグループに所属した縁で相対性理論の興味深い話題を教えていただきました。大学院生活を楽しくおくることが出来たのは、グループの構成員の方々をはじめ、理論研究室、物理学科のみなさんのおかげです。ありがとうございます。

両親親族には、様々な側面から生活を支えていただきました。また、万有引力については母に、光子については父にはじめて聞いたことを最近ふと思い出しました。学問的な好奇心に理解のある両親を持たれたことは私にとってありがたいことでした。感謝いたします。

# 付録

以下に本論文を補う内容を付録として付け加える。ここでは各付録の概要と本論の各章との関係について手短かに述べる (図 11)。

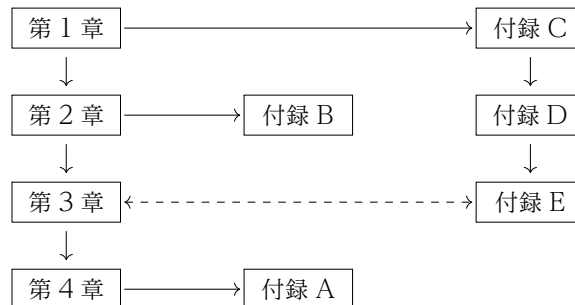


図 11 各章と付録の関係。実線矢印は論理的な関係を表す。第 3 章と付録 E の間に引かれた破線の矢印は、論理的な関係を意味するものではない。どちらも識別が被測定系に与える擾乱についての議論である点を強調するために引かれたものである。

付録 A は実験についての補足である。本論で取り上げた識別 (unambiguous discrimination) の理論は実験的にも検証されている。この付録では特に第 4 章で説明したコヒーレント状態の識別実験について述べる。

付録 B では、ベクトルの一次独立に類似した性質である極小性, Riesz-Fischer 性, 正規直交性の違いを説明する簡単な例を与える。これらはベクトル状態の識別性, 一様識別性, 完璧識別性に対応する性質であった。この付録で与える例は, コヒーレント状態にくらべると物理的な意味付けは明確ではないが, そのぶん簡単ではある。

付録 C では Stinespring の定理とその簡単な応用について述べる。Stinespring の定理は完全正写像についての最も基本的な定理である。本論では測定を操作として, また操作を完全正写像として抽象的に定義した。このような操作の完全正写像による記述と, ユニタリ操作や系の合成さらには部分系への着目といった操作による記述との関係が Stinespring の定理により明らかにされる。

付録 D では測定の端点性について述べる。本論では第 3 章で識別の最適性を論じた。この付録に述べる端点性は, 凸関数を評価関数として測定を評価する場合の最適性に密接に関係するものである。この付録は第 3 章とは論理的には独立であるが, 最適な測定についての興味ある議論として付録で紹介することにした。

付録 E では識別再構成測定について述べた。本論では識別について議論した。識別再構成測定は本論文で取り上げた識別の条件に加えて, 反復性と呼ばれる条件を課すことで定義される測定である。これは射影測定の自然な一般化であり, 本論の延長線上にある議論のように思われるのでここで紹介した。

以上の付録は付録 E を例外として, 基本的に先行研究の要約であることを先に断っておく。また, この付録では形式的に付録を 5 章とみなして式番号を付す。

## A コヒーレント光の識別実験

本論文ではコヒーレント状態の識別 (unambiguous discrimination) を論じた。本論では主として候補状態が無限個ある場合を考察したが、これはもちろん有限個の場合の極限である。本節では有限個のコヒーレント状態の識別実験について手短かに述べる。<sup>\*36</sup> コヒーレント状態は一次元空間中の一粒子の状態であるが、これはある周波数に属する光の状態ともみなせる。この場合には座標と運動量を電磁波の正弦成分と余弦成分に読み替える。以下でもコヒーレント状態を光の状態とみなす。

二つのコヒーレント状態の識別を行う実験装置の提案は、B. Huttner らや K. Banaszek によってなされた [HIG95, Ban99]。実際の実験報告もある。二つのコヒーレント状態の識別実験については [BCS08]、四つのコヒーレント状態の識別実験については [BFM13] を見られたい。Banaszek が提案した二つのコヒーレント状態の識別のための実験装置は、理論的に単純で、上に挙げた実験に用いられた装置の機構も説明する。そこで本節ではこの実験装置を説明する。

コヒーレント状態の識別を行うための実験装置の主要部分は、ビームスプリッターと光子数計測器 (光子数 0 と  $\geq 1$  を区別できれば良い) からなる。後者は正作用素値測度 ( $\Pi_0 |0\rangle, 1 - |0\rangle$ ) で表される測定を記述する。ビームスプリッターについてはこれほど簡単には説明できない。そこで、まずビームスプリッターの機能について必要な範囲で述べてから、次に Banaszek によって提案された実験装置を紹介する。

### A.1 ビームスプリッター

ビームスプリッターについて述べる。より包括的な議論については、例えば [Leo97, Section 4.1] を参照されたい。ビームスプリッターの模式図を次に示す (図 12)。

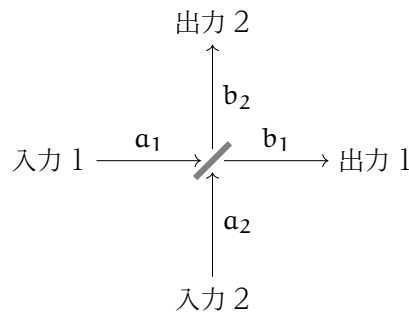


図 12 ビームスプリッターの模式図。特定の周波数に属する光を考察する。入力される光の消滅作用素を  $a_1, a_2$ 、ビームスプリッターを通過したあとのそれらを  $b_1, b_2$  と書く。

$b_1, b_2$  が  $a_1, a_2$  にユニタリ操作を施すことで得られるとすれば、これらは次のような線形関係

<sup>\*36</sup> コヒーレント状態の他にこの種の識別の対象になるのは、例えば偏光状態である。この種の実験については [HMG96, CCB01] を見られたい。

にある.

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} \\ u_{2,1} & u_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

消滅作用素  $a_1, a_2$  および  $b_1, b_2$  がいずれも  $[a, a^*] = 1$  の如き交換関係に従うためには, 上式の係数行列はユニタリ行列でなければならない. そして, このユニタリ行列によってビームスプリッターは特徴づけられる.

上式は Heisenberg 描像において  $a_1, a_2$  と  $b_1, b_2$  関係を与えている. 次に, やはり Heisenberg 描像において, コヒーレント光がビームスプリッターでどのように変換されるかを次に考える. 一般に, 消滅作用素  $c$  に対するコヒーレント状態を  $|\gamma\rangle_c$  または  $|\gamma\rangle_c \langle \gamma|$  と記す. そして次の公式に注意する. <sup>\*37</sup>

$$: \exp[-(c - \gamma)^*(c - \gamma)] := |\gamma\rangle_c \langle \gamma|$$

これと初等的な等式

$$\begin{aligned} & \exp \left[ \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \right\}^* \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \right\} \right] \\ &= \exp \left[ \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} \\ u_{2,1} & u_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \right\}^* \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} \\ u_{2,1} & u_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \right\} \right] \end{aligned} \quad (5.A.1)$$

を用いると, ビームスプリッターはコヒーレント光をコヒーレント光に移すことが分かる. すなわち

$$|\alpha_1\rangle_{a_1} |\alpha_2\rangle_{a_2} = |u_{1,1}\alpha_1 + u_{1,2}\alpha_2\rangle_{b_1} |u_{2,1}\alpha_1 + u_{2,2}\alpha_2\rangle_{b_2}. \quad (5.A.2)$$

二つのコヒーレント光を  $a_1, a_2$  に入力すると, このコヒーレント光のパラメータ  $\alpha_1, \alpha_2$  がビームスプリッターを特徴づけるのユニタリ行列による変換を受けて  $b_1, b_2$  に出力される. 次の二つの形の特異なビームスプリッターは特に重要である.

■ ハーフミラー ここでは, 次のユニタリ行列で特徴づけられるビームスプリッターをハーフミラーと呼ぶ.

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (5.A.3)$$

$a_1$  に信号を入力し,  $a_2$  には真空  $|0\rangle$  を入力すると

$$|\alpha\rangle_{a_1} |0\rangle_{a_2} = \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_{b_1} \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_{b_2}. \quad (5.A.4)$$

すなわち, 入力信号の振幅が  $1/\sqrt{2}$  倍されて出力  $b_1, b_2$  に等しく分かれたることを示している.

<sup>\*37</sup> 左辺は級数  $\sum_n \lambda^n (n!)^{-1} a^{*n} a^n = \sum_n (\lambda + 1)^n |n\rangle \langle n|$  の  $\lambda \rightarrow -1$  における極限と理解する.

■ 変位作用素 次に透過率の高いビームスプリッターと強度の強いコヒーレント光を用いて変位作用素を実現できることを示す。次の形のビームスプリッターを考える。

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{t} & \sqrt{1-t} \\ -\sqrt{1-t} & \sqrt{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

ただし  $t \in [0, 1]$ . 入射光は  $t = 1$  の場合には全透過し,  $t = 0$  のとき全反射される.  $a_1$  には測定対象になる状態 (信号)  $|\alpha\rangle$  を入力し,  $a_2$  には強いコヒーレント光  $|sz\rangle$ ,  $s \gg 1$  を参照光として入力する. このとき

$$|\alpha\rangle_{a_1} |sz\rangle_{a_2} = \left| \sqrt{t}\alpha_1 + s\sqrt{1-t}z \right\rangle_{b_1} \left| \sqrt{1-t}\alpha + s\sqrt{t}z \right\rangle_{b_2}. \quad (5.A.5)$$

したがって,  $a_2$  に入力する光の強度を表すパラメータ  $s$  を  $s = 1/\sqrt{1-t}$  としながら,  $t \rightarrow 1$  とすれば

$$|\alpha\rangle_{a_1} |\infty z\rangle_{a_2} = |\alpha_1 + z\rangle_{b_1} |\infty z\rangle_{b_2}. \quad (5.A.6)$$

ここで  $\infty z$  は形式的な量である. さて, 上式で  $a_1$  から  $b_1$  に抜ける透過光に着目すると, そのパラメータは  $+z$  だけ変位されている. 結局, 透過率の高いビームスプリッターに脇から強いコヒーレント光を入力すると, このような変位を生じさせることができる.

## A.2 二つのコヒーレント状態の識別

次に, Banaszek が提案された実験装置 [CCB01] を概説する. その模式図を図 13 に示す.

ここで光学素子 BS, D1, D2 はいずれもコヒーレント状態をコヒーレント状態に移す. 今の場合, 入射信号は図 14 のように変化しながら実験装置を進む.

さて, 光子検出器 D1 の測定値が  $n_1 \in \{0, 1\}$ , D2 の測定値が  $n_2 \in \{0, 1\}$  であることを  $(n_1, n_2)$  で表すことにする. すると生じ得る結果は  $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$  の 4 通りである. いま, 仮に真の状態, すなわち信号が  $|\alpha_1\rangle$  であったとすると, D1, D2 にはそれぞれ次の状態が入射する.

$$|0\rangle, \left| \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sqrt{2}} \right\rangle. \quad (5.A.7)$$

このとき D1 は測定値  $n_1 = 0$  を確実に返す. したがってこの場合に生じ得る結果は  $(0, 1), (0, 0)$  のいずれかである. 信号が  $|\alpha_2\rangle$  であった場合も同様である. そこで,  $(0, 1)$  のとき  $\omega = 1$ ,  $(1, 0)$  のとき  $\omega = 2$ , 他の場合  $\omega = ?$  と定義することにより,  $\{1, 2, ?\}$  に測定値  $\omega$  を取る測定を定義できる. 構成からこの測定は識別である (図 15 参照).

特に真の状態が  $|\alpha_1\rangle$  であるとき測定値  $\omega = 1$  が得られる確率は

$$\begin{aligned} q_1 &= \left( \langle 0| \otimes \left\langle \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sqrt{2}} \right| \right) \left( |0\rangle\langle 0| \otimes (1 - |0\rangle\langle 0|) \right) \left( |0\rangle \otimes \left| \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sqrt{2}} \right\rangle \right) \\ &= 1 - \left| \left\langle 0 \left| \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sqrt{2}} \right\rangle \right|^2 \\ &= 1 - |\langle \alpha_1 | \alpha_2 \rangle|. \end{aligned} \quad (5.A.8)$$

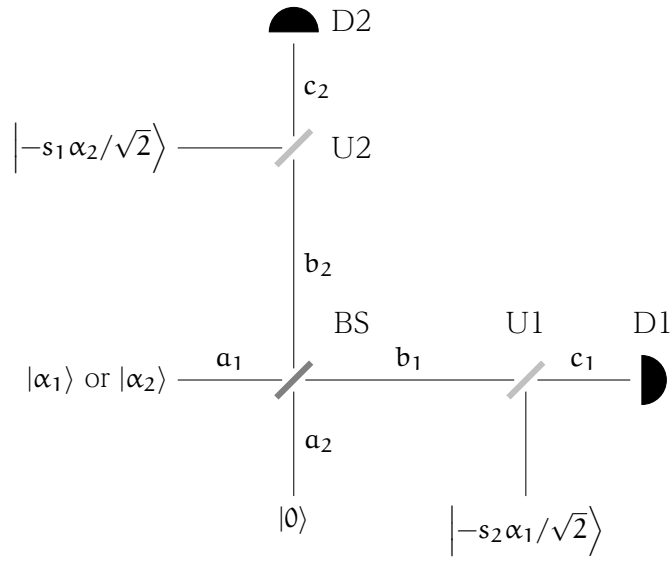


図 13 二つのコヒーレント状態を識別する光学装置の概要.  $a_j, b_j, c_j$  はそれぞれの路の (特定の周波数に属する) 光子の消滅作用素.  $a_1$  から入射した信号  $|\alpha_j\rangle$  と  $a_2$  から入射した真空がハーフミラー (BS) で合成され, 右方  $b_1$  と上方  $b_2$  に等強度に分かれる. 右方に出た信号は透過率の高いビームスプリッター (U1) に入射する. U1 には適当な強いコヒーレント光を脇から入射し  $b_1$  から入射したコヒーレント光を  $-\alpha_1/\sqrt{2}$  だけ変位させる. U2 についても同様. U1, U2 を通過した光はそれぞれ光子検出器 D1 または D2 に入る. 光子検出器は光子数が 0 の真空と, 光子数が  $\geq 1$  の状態を区別し, 測定値 0 または 1 を出力する.

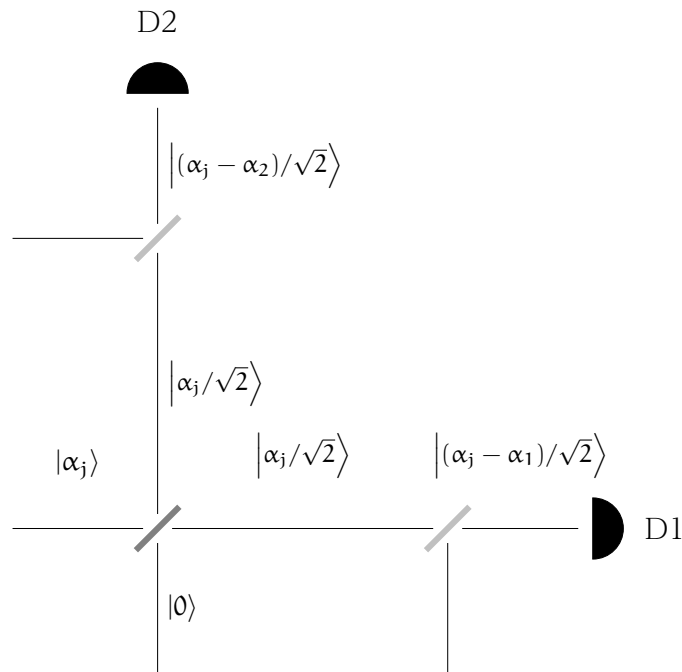


図 14 図 13 に示された実験装置内の各段階を通過した信号の状態.



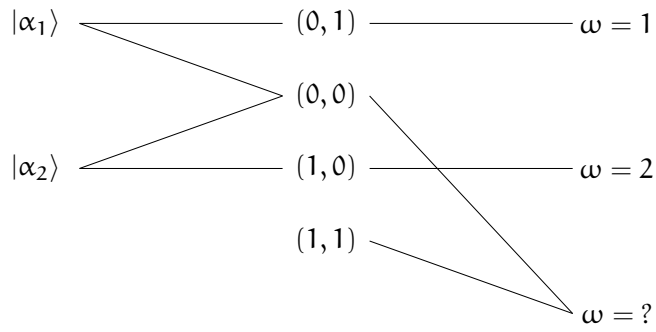


図 15 測定の定める遷移図. 信号  $|\alpha_j\rangle$  ごとにどの測定値  $\omega \in \{1, 2, ?\}$  が得られるかを図示している.

真の状態が  $|\alpha_2\rangle$  であるとき測定値  $\omega = 2$  が得られる確率  $q_2$  も  $q_1$  に等しい. したがって, この識別の最低識別確率は

$$q = \inf\{q_1, q_2\} = 1 - |\langle \alpha_1 | \alpha_2 \rangle|. \quad (5.A.9)$$

これは二つのコヒーレント状態の最低識別確率の最大値である (68 頁の例 3.1.2 参照). したがって, 上に述べたコヒーレント状態の識別は最低識別確率を最大化するという意味で最適である.

以上が Banaszek [CCB01] により提案された実験装置の概要である. これは二つのコヒーレント状態を最大の最低識別確率で識別する. なお, この実験装置から容易に有限個のコヒーレント状態を (最適ではないにせよ) 識別する実験装置が得られる. 信号  $|\alpha_j\rangle$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$  をビームスプリッターにより  $n$  個の信号  $|\gamma_j \alpha_j\rangle$ ,  $|\gamma| < 1$  に分け, それぞれを  $-\gamma_j \alpha_j$  だけ変位させれば良い. そのあとの  $n + 1$  値測定の定義は上と同様に行えば良い.

## B 一次独立性, 極小性, Riesz-Fischer 性, 正規直交性

一次独立性, 極小性, Riesz-Fischer 性, 正規直交性が一般には異なることを示す例を以下に与える.

例 5.2.1 (一次独立だが極小でない例).  $(e_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  を正規直交完全系とする Hilbert 空間  $\mathfrak{H}$  を考える. このとき, 次のように定義されるベクトルたちのなす組  $(\xi_j)_{j \in \{0\} \cup \mathbb{N}}$  は一次独立だが極小ではない.

$$\xi_0 = \frac{1}{\pi^2/6} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} e_k, \quad \xi_1 = e_1, \quad \xi_2 = e_2, \quad \dots \quad (5.B.1)$$

この組のどのベクトルも他のベクトルの有限個の線形結合で書くことはできないから, この組は一次独立である. ところが  $\xi_0$  は  $\xi_1, \xi_2, \dots$  でいくらでも近似できるため極小ではない.

例 5.2.2 (極小だが Riesz-Fischer でない例).  $(e_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  を正規直交完全系とする Hilbert 空間  $\mathfrak{H}$  を考える. このとき, 次のように定義されるベクトルたちのなす組  $(\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  は極小だが Riesz-Fischer ではない.

$$\begin{cases} \xi_{2k} &= e_{3k} + \frac{1}{3k+1} e_{3k+1} \\ \xi_{2k+1} &= e_{3k} + \frac{1}{3k+2} e_{3k+2} \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.B.2)$$

この組  $(\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  の代わりに規格化した組  $(\xi_j / \|\xi_j\|)_{j \in \mathbb{N}}$  を考えても以下の議論は本質的に変更を受けないことに注意しておく.

まず, この組は極小である. それを示すには双直交系を構成すれば良い. 次のように定義される  $(\eta_j)_{j \in \mathbb{N}}$  が  $(\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  の双直交系になる. したがって  $(\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  は極小である.

$$\begin{cases} \eta_{2k} &= (3k+1)e_{3k+1} \\ \eta_{2k+1} &= (3k+2)e_{3k+2} \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.B.3)$$

次にこの組  $(\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  が Riesz-Fischer でないことを背理法で示す.  $(\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  が Riesz-Fischer であるとすれば, ある定数  $0 < A < \infty$  があって, 勝手な  $k$  に対して次が成り立たねばならない.

$$\left\| (+1)\xi_{2k} + (-1)\xi_{2k+1} \right\|^2 \geq A \left( (+1)^2 + (-1)^2 \right). \quad (5.B.4)$$

少し計算すれば左辺が  $k \rightarrow \infty$  で 0 に収束することが分かる. ゆえに  $A = 0$  でなければならないが, これは不合理である. したがって  $(\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  は Riesz-Fischer ではない. なお, ここでは検証を略すが, この組は例えば  $B = 3$  を上界として Bessel である.

例 5.2.3 (Riesz-Fischer だが正規直交でない例).  $(e_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  を正規直交完全系とする Hilbert 空間  $\mathfrak{H}$  を考える. このとき, 次のベクトルたちのなす組  $(\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  は Riesz-Fischer だが正規直交でない.

$$\xi_1 = e_1 + \frac{1}{1}e_0, \quad \dots \quad \xi_k = e_k + \frac{1}{k}e_0, \quad \dots \quad (5.B.5)$$

この組  $(\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  の代わりに規格化した組  $(\xi_j / \|\xi_j\|)_{j \in \mathbb{N}}$  を考えても以下の議論は本質的に変更を受けないことに注意しておく. Riesz-Fischer 性を示すために有限個だけが 0 とことなる数列  $(\alpha_k)$  をとる. すると

$$\left\| \sum_k \alpha_k \eta_k \right\|^2 = \left| \sum_k \alpha_k \frac{1}{k} \right|^2 + \sum_k |\alpha_k|^2 \geq 0 + \sum_k |\alpha_k|^2. \quad (5.B.6)$$

すなわち  $A = 1$  を下界として  $(\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  は Riesz-Fischer である. おな, この組は例えば  $B = (\pi^2/6) + 1$  を上界として Bessel である.

## C Stinespring 拡張

測定は操作であり、操作は完全正写像であった。本節で紹介する Stinespring の定理は完全正写像を取り扱うための基本的な技巧である。完全正写像を用いた操作や測定の記述はこの定理とその系によって実質が与えられるといっても過言ではない。

Stinespring の定理は完全正写像  $\phi \in \text{nCP}(\mathfrak{A}, B(\mathfrak{K}))$  の標準形を与えるものである。この定理によれば完全正写像  $\phi$  は  $\phi X = V^*(\pi X)V$ ,  $X \in \mathfrak{A}$  と書くことができる。ここで  $\pi: \mathfrak{A} \rightarrow B(\mathfrak{L})$  は von Neumann 代数の準同型,  $V: \mathfrak{K} \rightarrow B(\mathfrak{L})$  は有界写像である。ここに現れた三組  $(\mathfrak{L}, \pi, V)$  を Stinespring 拡張と呼ぶ。完全正写像よりも拡張の方が取り扱いやすい。このことは本章の議論を通じて理解されると思う。いずれにせよ、Stinespring の定理は完全正写像  $\phi$  に拡張  $(\mathfrak{L}, \pi, V)$  を対応付ける。しかも、この対応は本質的に一対一である。したがって、完全正写像の性質は全てその拡張を用いて記述できる。この点に Stinespring 定理の基本的な重要性がある。C.1 節ではこの Stinespring の定理の素描を行い、簡単な応用を二つほど述べる。

C.2 節では、Stinespring の定理の系として完全正写像の表示をさらに三つ与える。三つの表示とは、標準化された拡張による表示、開放環境表示、作用素和表示である。これらはそれぞれ次のように書かれる。特に開放環境表示では、外部系との合成、ユニタリ操作、部分系への着目の合成の結合の形に完全正写像が書かれる。この表示は、これら三つの操作が実現可能であるなら完全正写像で記述される操作も実現可能であることを保証する。この意味で開放環境表示表示はユニタリ操作等を用いた通常の操作の記述と完全正写像による記述の等価性を示すものである。他の表示については後で述べる。

### C.1 Stinespring の定理

この節では、まず Stinespring の定理を述べ、その証明を素描する。その後で定理の簡単な応用を二つほど述べる。

#### C.1.1 定理

Stinespring の定理は W. F. Stinespring が  $C^*$ 代数に対して証明した [Sti55]。この定理を von Neumann 代数用に少し変形したものを次に引用する。

定理 5.3.1 (Stinespring の定理 [Sti55]。正規性については例えば [Dav76, Section 9.2 Theorem 2.1 p. 137] を参照)。von Neumann 代数間の線形写像  $\phi: \mathfrak{A} \rightarrow B(\mathfrak{K})$  に関して次の二条件は同値である。

- $\phi \in \text{nCP}(\mathfrak{A}, B(\mathfrak{K}))$ :  $\phi$  は正規な完全正写像。
- $\phi$  の Stinespring 拡張 (または単に拡張) とよばれる三組  $(\mathfrak{L}, \pi, V)$  があって、

$$\phi = V^*\pi V \tag{5.C.1}$$

が成り立つ ( $V^*\pi V$  は写像  $a \mapsto V^*(\pi a)V$  の略記である)。ただし、三組はつぎの要素か

らなる.

- Hilbert 空間  $\mathfrak{L}$ .
- von Neumann 代数の準同型 (正規な単位的  $*$ -準同型または表現)  $\pi: \mathfrak{A} \rightarrow B(\mathfrak{K})$ .
- 有界写像  $V: \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{L}$ .

特に  $\overline{\text{span}}((\pi\mathfrak{A})V\mathfrak{K}) = \mathfrak{L}$  を満たす拡張  $(\mathfrak{L}, \pi, V)$  を極小拡張と呼ぶ. 任意の  $\phi \in \text{nCP}(\mathfrak{A}, B(\mathfrak{K}))$  に対して, 極小拡張が存在し, それはユニタリ同値を除いてただ一つに決まる.

ユニタリ同値を除いてただ一つにといったのは正確には次を意味する. すなわち,  $(\mathfrak{L}, \pi, V), (\mathfrak{L}_0, \pi_0, V_0)$  がいずれも  $\phi \in \text{nCP}(\mathfrak{A}, B(\mathfrak{K}))$  の極小拡張であれば, ユニタリ  $U: \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{L}_0$  であって  $(\mathfrak{L}_0, \pi_0, V_0) = (U\mathfrak{L}, U\pi U^*, UV)$  を満たすものがただ一つだけ存在する.

正規な完全正写像  $\phi$  は, von Neumann 代数の積や単位元を保つとは限らない. それを積や単位元を保つ準同型  $\pi$  に標準化できる, というのが定理の内容と見ても良い.  $\phi$  の準同型からの偏差が  $V$  で表される. また, 定理に述べた通り完全正写像とその極小拡張はユニタリ同値を除いて一対一に対応する. したがって, 完全正写像についての条件は, どんなものであっても原理的にはその極小拡張に対する条件に翻訳できる. この意味で極小拡張は基本的である.

次にこの定理の証明を素描する. いくら形式的ではあるものの, この証明は拡張の一つの構成法を与えている.

Stinespring の拡張定理の証明の素描. 十分性. 定理に述べた性質を有する拡張  $(\mathfrak{L}, \pi, V)$  を用いて  $\phi$  が  $\phi = V^*\pi V$  と与えられているとする. 以下,  $\phi_V X = V^*XV$  と記す. 正規な完全正写像同士の結合はやはり正規な完全正写像であるから,  $\phi = \phi_V \pi$  が正規な完全正写像であることを示すには,  $\pi, \phi_V$  がそれぞれ正規な完全正写像であることを示せば良い. これらは次のようにして示される.

- 一般に von Neumann 代数の準同型  $\pi$  は正写像である. それは  $\pi(X^*X) = (\pi X)^*(\pi X)$ ,  $X \in \mathfrak{A}$  より分かる. さらに準同型の自明な拡張もやはり準同型である. したがって,  $\pi$  は完全正写像である. さらに準同型  $\pi$  は仮定により正規でもある.
- $\phi_V$  は正写像である. それは  $\phi_V(X^*X) = (XV)^*(XV)$ ,  $X \in \mathfrak{A}$  より分かる. さらに  $\phi_V$  の自明な拡張は  $\phi_V \otimes 1 = \phi_{V \otimes 1}$  のように, やはり  $\phi_V$  の形に書かれる. したがって,  $\phi_V$  は完全正写像である. さらに,  $\phi_V$  の転置写像は前双対の要素を前双対に移すことが確かめられる. それゆえ  $\phi_V$  は超弱作用素位相に関して連続 (正規) でもある.

以上から拡張により定義される  $\phi$  が正規な完全正写像であることが分かった.

必要性.  $\phi \in \text{nCP}(\mathfrak{A}, B(\mathfrak{K}))$  が与えられたとし, 極小拡張を構成する. 極小拡張  $(\mathfrak{L}, \pi, V)$  がどのようなものであるか見当をつけるために, 今しばらくこれが存在したと仮定して, その性質を調べてみる. まず, 極小性から  $\mathfrak{L}$  は  $(\pi X)V\xi$  の形の元で生成される. そしてこの形の元は  $X \in \mathfrak{A}$  と  $\xi \in \mathfrak{K}$  について双線型である. したがって,  $\mathfrak{L}$  は代数的テンソル積  $\mathfrak{A} \otimes_{\text{alg}} \mathfrak{K}$  の商空間

として実現できるはずである。さらに、 $\mathfrak{L}$  の元の内積は  $\phi$  だけから計算されることに注意したい。実際、

$$\langle (\pi X)V\xi, (\pi U)V\eta \rangle = \langle \xi, V^*(\pi(X^*Y))V\eta \rangle = \langle \xi, (\phi(X^*Y))\eta \rangle \quad (5.C.2)$$

が成り立つ。ただし、 $\xi, \eta \in \mathfrak{R}$ ,  $X, Y \in \mathfrak{A}$ 。以上を踏まえて  $\mathfrak{L}$  を構成する。

まず、代数的テンソル積  $\mathfrak{A} \otimes_{\text{alg}} \mathfrak{R}$  を考え、この上に次の条件で二次形式を定義する。

$$\langle X \otimes \xi, Y \otimes \eta \rangle = \langle \xi, (\phi(X^*Y))\eta \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{A}, \xi, \eta \in \mathfrak{R}. \quad (5.C.3)$$

$\phi$  の完全正性からこの二次形式の非負性を示すことができる。証明のために代数的テンソル積の元  $Z \in \mathfrak{A} \otimes_{\text{alg}} \mathfrak{R}$  を取る。代数的テンソル積の性質により  $Z$  は適当な有限列  $Y_1, \dots, Y_n \in \mathfrak{A}$ ,  $\eta_1, \dots, \eta_n \in \mathfrak{R}$  を用いて  $Z = \sum_j Y_j \otimes \eta_j$  と書くことができる。このとき  $\phi$  の  $n$  正値性から

$$\langle Z, Z \rangle = \left\langle \sum_j \eta_j \otimes e_j, \phi \left\{ \left( \sum_k Y_k \otimes e_{1,k} \right)^* \left( \sum_k Y_k \otimes e_{1,k} \right) \right\} \sum_j \eta_j \otimes e_j \right\rangle \geq 0. \quad (5.C.4)$$

ここで  $(e_j)_j$  および  $(e_{i,j})_{i,j}$  はそれぞれ  $C^n, C^{n \times n}$  の標準的基底である。上式から  $\mathfrak{A} \otimes_{\text{alg}} \mathfrak{R}$  上に定義された二次形式は非負である。これが退化する空間を  $\mathfrak{N}$  とする。そして商空間  $(\mathfrak{A} \otimes_{\text{alg}} \mathfrak{R})/\mathfrak{N}$  をこの二次形式により完備化して得られる Hilbert 空間を  $\mathfrak{L}$  と定義する。以降、自然な商写像を  $Q: \mathfrak{A} \otimes_{\text{alg}} \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{L}$  と書く。

$\pi, V$  はそれぞれ次の条件で定義すれば良い。すなわち、 $X, Y \in \mathfrak{A}$ ,  $\xi, \eta \in \mathfrak{R}$  に対して

$$\pi(Y)Q(X \otimes \xi) = Q((YX) \otimes \xi), \quad (5.C.5)$$

$$V\eta = Q(1 \otimes \eta), \quad (5.C.6)$$

このようにして確かに（正規性を有するかどうかは必ずしもわからない）準同型  $\pi$  と有界作用素  $V$  が定義される。以上のようにして構成した  $(\mathfrak{L}, \pi, V)$  が極小拡張となっていることの確認は難しくない。なお、 $\pi$  の正規性は  $\phi$  の正規性から導くことができる。 q.e.d.

次に、Stinespring の定理の簡単な応用を二つほど述べることにする。

### C.1.2 古典化操作と測定

第一の応用は、測定と古典化操作の関係についてである。測定は古典化操作を定める。逆に、勝手に与えられた古典化操作に対してそれをもたらす測定が存在するだろうか。この間に対する答えは肯定的である。そのことを Stinespring の定理を用いて次に示す。<sup>\*38</sup>

命題 5.3.2.  $\mathfrak{C}, \mathfrak{B}$  を Hilbert 空間  $\mathfrak{H}, \mathfrak{K}$  上の物理系とする。このとき任意の操作  $\Pi \in n\text{CP}(\mathfrak{C}, \mathfrak{B}; 1)$  に対して、操作  $\phi \in n\text{CP}(\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{C}, \mathfrak{B}; 1)$  であって  $\Pi = \phi(1 \otimes (-))$  を満たすも

<sup>\*38</sup> この命題に相当する事実は [DL70, Theorem 1][Oza84, Proposition 4.1] で示されている。しかし、これらは本論文におけるのとは若干違った（測度論的な）測定の定義に基づいて示されている。

のが存在する. 特に, 任意の古典化操作に対して, それをもたらず測定が存在する.

証明. 操作  $\Pi$  の拡張を  $(\mathfrak{L}_0, \pi_0, V_0)$  とする.  $\Pi$  は操作ゆえ単位的. よって  $V_0$  は等長 ( $V_0^*V_0 = 1$ ) である. 再び Stinespring の定理を考慮し, 以下では拡張  $(\mathfrak{L}, \pi, V)$  を通じて  $\phi$  を構成する. まず,  $\mathfrak{H} = \mathfrak{K} \otimes \mathfrak{L}_0$  と定め, 次に,  $\pi = 1 \otimes \pi_0 : \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{C} \rightarrow B(\mathfrak{K}) \otimes B(\mathfrak{L}_0) = B(\mathfrak{K} \otimes \mathfrak{L}_0)$  と置く. 最後に  $V$  を次のように定義する.

$$\begin{aligned} \mathfrak{K} &\xrightarrow{V} \mathfrak{L} = \mathfrak{K} \otimes \mathfrak{L}_0 \\ \xi &\longmapsto \xi_0 \otimes V_0 \xi \end{aligned}$$

ただし,  $\xi_0 \in \mathfrak{K}$  は勝手に取った規格化されたベクトルである.  $V_0$  は等長であり  $\xi_0$  は規格化されているから  $V$  もまた等長である. ここまでで拡張  $\text{dil} \mathfrak{L}, \pi, V$  と, それの定める操作  $\phi : \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{C} \rightarrow B(\mathfrak{K})$  が構成された.

次に, 任意の  $\xi \in \mathfrak{K}, B \in \mathfrak{B}, C \in \mathfrak{C}$  に対して

$$\langle \xi, (\phi(B \otimes C))\xi \rangle = \langle V\xi, (1 \otimes \pi_0)(B \otimes C)V\xi \rangle \quad (5.C.7)$$

$$= \langle \xi_0 \otimes V_0 \xi, (B \otimes \pi_0 C)(\xi_0 \otimes V_0 \xi) \rangle \quad (5.C.8)$$

$$= \langle \xi_0, B\xi_0 \rangle \langle V_0 \xi, (\pi_0 C)V_0 \xi \rangle = \langle \xi, \langle \xi_0, B\xi_0 \rangle (\Pi C)\xi \rangle. \quad (5.C.9)$$

したがって

$$\phi(B \otimes C) = \langle \xi_0, B\xi_0 \rangle \Pi C. \quad (5.C.10)$$

これから  $\phi$  の像が  $\mathfrak{B}$  に含まれることが分かる. そこで  $\phi$  の終域を  $\mathfrak{B}$  に制限したものを改めて  $\phi$  と定義することにより  $\phi : \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{B}$  を得る. 上式から  $\phi(1 \otimes C) = \Pi C$  も分かる. q.e.d.

### C.1.3 可逆操作

第二の Stinespring 定理の応用は, 操作の可逆性に関係する. Hilbert 空間を基調にした量子力学の枠組では, ユニタリ操作に特権的な地位が与えられるのが普通である. ただし, ユニタリ操作とは Hilbert 空間間のユニタリ作用素  $U : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{K}$  によって次のように与えられる操作を指す.

$$B(\mathfrak{H}) \xrightarrow{\phi_U} B(\mathfrak{K})$$

$$X \longmapsto U^* X U$$

この操作を  $\mathfrak{H}$  または  $\mathfrak{K}$  上の von Neumann 代数に制限して得られる操作もユニタリ操作と呼ぶことにする.

ユニタリ操作は可逆である. 逆に, 可逆な操作はユニタリに限られるのだろうか. この問題について考察する. 次の命題により, 可逆な操作についての問題を von Neumann 代数間の同型についての問題に帰着させることができる.\*<sup>39</sup>

\*<sup>39</sup> 著者にはこの命題が記載されている文献は見つけられなかった. なお, 完全正写像であって片側逆元を有するものの性質に関係した議論が [NS06] でなされている.

命題 5.3.3. 二つの操作  $\phi \in \text{nCP}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}; 1)$ ,  $\psi \in \text{nCP}(\mathfrak{B}, \mathfrak{A}; 1)$  が互いに逆, すなわち  $\psi\phi = 1$ ,  $\phi\psi = 1$  を満たすとする. このとき,  $\phi, \psi$  はいずれも von Neumann 代数の同型である.

証明.  $\psi, \phi$  が作用素の積を保つことを示せば良い.

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  を  $\mathfrak{H}, \mathfrak{K}$  上の von Neumann とし,  $\phi$  の極小な拡張を  $(\mathfrak{L}, \pi, V)$  とする.  $\phi$  は単位的であるから  $V$  は等長. したがって,  $VV^*$  は  $B(\mathfrak{L})$  の射影であり  $VV^* \leq 1$  を満たす. ゆえに, 任意の  $X \in \mathfrak{A}$  に対して

$$\begin{aligned}\phi(X^*X) &= V^*(\pi(X^*X))V \\ &= V^*(\pi X)^*(\pi X)V \\ &\geq V^*(\pi X)^*(VV^*)(\pi X)V \\ &= (\phi X)^*(\phi X).\end{aligned}\tag{5.C.11}$$

同様の公式が  $\psi$  に対しても成り立つ. よって

$$\begin{aligned}\psi\phi(X^*X) &\geq \psi\left((\phi X)^*(\phi X)\right) \\ &\geq (\psi\phi X)^*(\psi\phi X) \\ &= X^*X \\ &= \psi\phi(X^*X).\end{aligned}\tag{5.C.12}$$

すなわち  $\psi\phi(X^*X) = \psi\left((\phi X)^*(\phi X)\right)$ . ところで  $\psi$  は逆を有し単射であったから,

$$\phi(X^*X) = (\phi X)^*(\phi X).\tag{5.C.13}$$

これから任意の  $X, Y \in \mathfrak{A}$  に対して  $\phi(XY) = (\phi X)(\phi Y)$  となることが従う. q.e.d.

こうして本小節冒頭に述べた問題は, 具体的 von Neumann 代数の同型は全てユニタリ操作だろうか, という問題に還元される.<sup>\*40</sup> 具体的 von Neumann 代数の間の同型でなければ, それがユニタリ操作による同型であるかどうかを問うことが出来ないことに注意したい.

この問題に対する答えは否定的である. たとえば増幅  $B(\mathfrak{H}) \ni \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a} \otimes 1 \in B(\mathfrak{H}) \otimes 1 \subset B(\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K})$  は von Neumann 代数の同型であるが,  $\dim \mathfrak{H} \neq (\dim \mathfrak{H})(\dim \mathfrak{K})$  であれば空間的ではあり得ない.<sup>\*41</sup> しかし, 特定の条件下では von Neumann 代数間の同型が空間的なものに限られる場合がある. 次に, そのような場合を二つ挙げる.

- 有限次元 Hilbert 空間上の  $B(\mathfrak{K})$  の形の von Neumann 代数間の同型は空間的なものに限る.

これは直接証明もできるし, 後に述べる補題 5.3.4 から導くこともできる.<sup>\*42</sup>

<sup>\*40</sup> ユニタリ操作による同型は, 数学だと空間的同型と呼ばれることが多い.

<sup>\*41</sup> 同型の一般的な形については例えば [Tak01, Theorem 5.5, p. 222; Exercise 1, p. 308] や [Dix11, Part I, Chapter 4, Section 1.4, Corollary, p. 62] を見られたい.

<sup>\*42</sup> 直接証明は次のように行う.  $\mathfrak{H}, \mathfrak{K}$  を有限次元 Hilbert 空間,  $(e_j)_{j=1, \dots, n}$  を  $\mathfrak{K}$  の正規直交完全系,  $\pi: B(\mathfrak{H}) \rightarrow B(\mathfrak{K})$  を表現とする. すると射影  $\pi(|e_j\rangle\langle e_j|)$  たちが  $\mathfrak{K}$  を同型な Hilbert 空間の直和への



- 標準的 von Neumann 代数間の同型は空間的なものに限る。<sup>\*43</sup>

なお、 $\mathfrak{H}$  上の von Neumann 代数  $\mathfrak{A}$  が標準的 (standard) であるとは、分離的 ( $a \in \mathfrak{A}, a\xi = 0 \implies \xi = 0$ ) かつ巡回的 ( $\overline{\text{span}}\{\xi \mid a \in \mathfrak{A}\} = \mathfrak{H}$ ) なベクトル  $\xi \in \mathfrak{H}$  を受容することを指す。このような von Neumann 代数は、 $\sigma$ -有限と呼ばれることがある ([UHO03, 定義 4.6, 定理 4.46] 参照).

上記第一項によれば、物理系が有限次元で  $\mathfrak{H}$  という形をしていれば、可逆な操作としてユニタリ操作を特徴づけることができる。

## C.2 完全正写像の表示

Stinespring 拡張は完全正写像の一つの書き表し方を与えている。本節ではこれに加えてさらに三つの完全正写像の表示を与える。以下でそれぞれの表示について見てゆくことにする。

補題 5.3.4 ([Dix11, 1.4.4, p. 61]).  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  をそれぞれ Hilbert 空間  $\mathfrak{H}, \mathfrak{K}$  上の von Neumann 代数,  $\pi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  をこれらの間の準同型とする。このとき、 $\pi$  は増幅と誘導の積にユニタリ同値である。すなわち  $\pi$  はつぎの形に書くことができる。

$$\pi(X) = U^*(E(X \otimes 1)E)U, \quad X \in \mathfrak{A}. \quad (5.C.14)$$

ただし、

- $\mathfrak{K}$  は Hilbert 空間,
- $E$  は射影  $E \in (\mathfrak{A} \otimes 1)' \subset B(\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K})$ ,
- $U: \mathfrak{H} \rightarrow E(\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K})$  はユニタリである。

なお  $U$  の終域は適宜  $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K}$  に拡張するものと了解する。

特に、 $\mathfrak{A} = B(\mathfrak{H})$  の場合には、誘導を省略することができる。すなわちこの場合、準同型は増幅にユニタリ同値である。

なお、「特に」以下の主張はそれより前の主張の系として証明できる。<sup>\*44</sup> Stinespring の定理と今述べた補題から完全正写像の三つの表示が得られる。

---

分解を与える。このことに注意して次のようにユニタリ作用素  $U: \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{L} = (\pi(|e_1\rangle\langle e_1|)\mathfrak{K}) \otimes \mathfrak{H}$  を  $U\eta = \sum_j (\pi(|e_1\rangle\langle e_j|)\xi) \otimes e_j, \eta \in \mathfrak{L}$  と定めれば  $\pi X = U^*(1 \otimes 1)U, X \in B(\mathfrak{H})$  を得る。

<sup>\*43</sup> このことの証明については [Dix11, Part III, Chapter 1, Section 1.4, Corollary, p. 250] や [SZ79, 10.15 Corollary, p. 278] を参照されたい。

<sup>\*44</sup>  $\pi: B(\mathfrak{H}) \rightarrow B(\mathfrak{K})$  を準同型とする。これを補題 5.3.4 に従って  $\pi X = U^*(E(X \otimes 1)E)U$  と書く。テンソル積についての交換定理 [Tak01, Theorem 5.9, p. 226] によれば、交換団を取る操作はテンソル積に分配する。すなわち  $E \in (B(\mathfrak{H}) \otimes 1)' = B(\mathfrak{H})' \otimes C' = C \otimes B(\mathfrak{K})$ 。したがって  $E = 1 \otimes F$  と書くことができる。ここで  $F \in B(\mathfrak{K})$  は  $\mathfrak{K}$  の射影である。これにより  $E(\mathfrak{K} \otimes \mathfrak{K}) = \mathfrak{K} \otimes (F\mathfrak{K})$ 。そこで  $F\mathfrak{K}$  を改めて  $\mathfrak{K}$  と定義することにより、 $\pi$  が増幅にユニタリ同値であることが分かる。

系 5.3.5.  $\mathfrak{A}$  を  $\mathfrak{H}$  上の von Neumann とする. このとき  $\phi \in \text{nCP}(\mathfrak{A}, B(\mathfrak{K}))$  に対して次が成り立つ.

1. 標準化された拡張 Hilbert 空間  $\mathfrak{K}$  と有界写像  $V: \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{K} \otimes \mathfrak{A}$  があって次が成り立つ.

$$\phi X = V^*(X \otimes 1)V, \quad X \in \mathfrak{A}. \quad (5.C.15)$$

2. 開放環境表示 ある Hilbert 空間  $\mathfrak{K}$  とベクトル状態  $\sigma \in (B(\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K}))_*$  とユニタリ作用素  $U \in B(\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K} \otimes \mathfrak{A})$  があって次が成り立つ.

$$\phi X = \mathbb{E}_\sigma [U^*(X \otimes 1)U], \quad X \in \mathfrak{A}. \quad (5.C.16)$$

あるいは Schrödinger 描像で書けば

$$\phi_* \rho = \text{tr}_{\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K}} [U(\rho \otimes \sigma)U^*(X \otimes 1)], \quad \rho \in (B(\mathfrak{K}))_*. \quad (5.C.17)$$

ただしテンソル積の並び順は適当に入れ替えて理解するものとする.

3. 作用素和表示 集合  $J$  で添字づけられた有界写像  $K_j: \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{H}$  があって, 次が成り立つ.

$$\langle \rho, \phi X \rangle = \sum_{j \in J} \langle \rho, K_j^* X K_j \rangle, \quad \rho \in (B(\mathfrak{K}))_*, \quad X \in \mathfrak{A}. \quad (5.C.18)$$

証明. それぞれの主張を順番に示す.

1.  $\phi$  の拡張を  $(\mathfrak{L}, \pi, V)$  とする. この  $\pi$  を補題 5.3.4 にしたがって書き換える. その上で  $EUU$  を新ためて  $V$  と定義すれば良い.
2. 1. で示した標準化された拡張 (5.C.15) を証明の起点に取る.  $\mathfrak{H}, \mathfrak{K}, \mathfrak{A}$  の単位ベクトル  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$  を一つずつ任意にとり,  $\sigma = |\xi_0 \otimes \zeta_0\rangle\langle \xi_0 \otimes \zeta_0|$  とおく. さらに次を満たすユニタリ  $U$  を一つとる ( $\mathfrak{K}, \mathfrak{H}$  の並び順に注意せよ).

$$\mathfrak{K} \otimes \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{A} \xrightarrow{U} \mathfrak{K} \otimes \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{A}$$

$$\eta \otimes \xi_0 \otimes \zeta_0 \longmapsto \eta_0 \otimes V\eta$$

$\phi$  は単位的ゆえ  $V$  は等長である. よってこのような  $U$  は確かに存在する. このように定義された  $\sigma, U$  に対して (5.C.16) が成り立つ. これからまた (5.C.17) も出る.

3. 再び 1. で示した標準化された拡張 (5.C.15) を証明の起点に取る.  $\mathfrak{A}$  の正規直交完全系を  $(e_j)_{j \in J}$  とし, 有界写像  $L_j$  を次のように定める.

$$\mathfrak{H} \xrightarrow{L_j} \mathfrak{K}$$

$$\xi \longmapsto L_j \xi = V^*(\xi \otimes e_j)$$

そして,  $K_j = L_j^*$  と定義する. すると, この  $K_j$  に対して作用素和表示 (5.C.18) が成り

立つ.

q.e.d.

以下で開放環境表示と作用素和表示についての説明を与える.

まず開放環境表示について述べる. 本論では任意の操作は正規な単位的完全正写像であるとした. ところで, 通常, 孤立系の操作はユニタリ操作によって記述されるとされている. さらに, 開放系上の操作を記述する場合には, 必要に応じて系の合成や部分系への着目を適宜導入して, それらによって操作を記述しようとする. 開放環境表示によれば, 任意の操作はこれら三つの操作の結合で実現できる. したがってこれら三種類の操作がいずれも実現可能であると認める場合には, 任意の操作の実現可能であると考えて良いことになる.

さて, 測定は操作の一種であるから, 測定も開放環境表示を有する. この測定に対する開放環境表示は, 測定を射影作用素値測度に帰着させるという意義がある. この点についても説明する.  $\phi \in \mathfrak{nCP}(B(\mathfrak{K}) \otimes L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu), B(\mathfrak{K}); 1)$  を測定とする. これを開放環境表示して次のように書く.

$$\phi X = \mathbb{E}_\sigma [U^*(X \otimes 1)U], \quad X \in B(\mathfrak{K}) \otimes L^\infty(\Omega). \quad (5.C.19)$$

特に単項式  $X = Y \otimes f$  を  $\phi$  に代入すると,

$$\phi(Y \otimes f) = \mathbb{E}_\sigma [U^*(Y \otimes f \otimes 1)U] = \mathbb{E}_\sigma [U^*(Y \otimes (\pi_1 f))U] \quad (5.C.20)$$

ただし  $\pi_1 f = f \otimes 1$  と定めた.  $\pi_1$  は増幅であり, したがって特に von Neumann 代数の表現である. 上式の  $U$  に挟まれた作用素がどの空間に作用しているかを明示すれば次の通り.

$$Y \otimes (\pi_1 1_\Delta) \in B(\mathfrak{K}) \otimes \underbrace{\left( (B(L^2(\Omega)) \otimes B(\mathfrak{K})) \otimes B(\mathfrak{R}) \right)}_{B(L^2(\Omega) \otimes \mathfrak{K} \otimes \mathfrak{R})} \quad (5.C.21)$$

……で指示された部分をあらたに環境系と考える. 状態  $\sigma$  はこの新たな環境系上のベクトル状態であることに注意する. 以上の議論を踏まえると, 等式  $\phi(Y \otimes f) = \mathbb{E}_\sigma [U^*(Y \otimes \pi_1 f)U]$  は測定  $\phi$  を次の四段階に分解するものと理解できる.

1. 被測定系  $\mathfrak{K}$  をベクトル状態  $\sigma$  にある環境系と合成する.
2. 合成系にユニタリ操作を施す.
3. 環境系に古典化操作  $\pi_1$  (をもたらず測定) を実行して測定値を得る.
4. 再び被測定系に着目する.

$\pi_1$  は準同型である. これは測度論的にみれば射影作用素値測度であるとも言える. このようにして, 一般の測定は射影作用素値測度に帰着させられる. 本論文でははじめから測定を単一の完全正写像として導入したので, その開放環境表示も Stinespring の定理の系として得られた. 測定を測度論的に定義する場合には, Stinespring の定理の証明に倣って測定に対する開放環境表示を別途証明する必要が生じる. このような仕方での測定の開放環境表示を一般に示したのは [Oza04, Theorem 5.1] である. <sup>\*45</sup>

<sup>\*45</sup> 物理的に実現可能な測定を完全正写像により記述するという着想は [Kra71, Kra83] や [Dav76] に既に見られる. 前者では二値測定を完全正写像で記述し, その開放環境表示を導いている. 後

次に測定の作用素和表示について述べる．作用素和表示は，考察対象の物理系間の作用素だけしか含まない．この点で作用素和表示は完全正写像の具体的な計算に適している．特に測定の作用素和表示は計算や測定の具体的な定義において有用である．測定は操作であるから，この作用素和表示が上に述べた意味で存在する．しかし，普通はこれとは違い，測定値で添字付けられた作用素和表示を測定の作用素和表示という．これを説明する．

簡単のため測定値が離散的である場合から議論をはじめ．離散的といったのは測定器系が可算集合  $\Omega$  を用いて  $\ell^\infty(\Omega)$  と書かれる場合を指す．そして，測定  $\phi \in \text{nCP}(\ell^\infty(\Omega) \otimes B(\mathfrak{K}), B(\mathfrak{K}); 1)$  を考える．測定  $\phi$  の第一引数を  $\delta_\omega \in \ell^\infty(\Omega)$  に固定することで次の完全正写像を得る．

$$\phi(\delta_\omega \otimes (-)) \in \text{nCP}(B(\mathfrak{K}), B(\mathfrak{K}); 1). \quad (5.C.22)$$

この完全正写像の作用素和表示を次のように書くことにしてみる．

$$\phi(\delta_\omega \otimes X) = \sum_j K_{\omega,j}^* X K_{\omega,j}. \quad (5.C.23)$$

各測定値  $\omega \in \Omega$  ごとにこのような作用素和表示があるから，それらを加えて次の表示を得る．

$$\phi(f \otimes X) = \sum_j \sum_\omega f_\omega K_{\omega,j}^* X K_{\omega,j}, \quad \sum_j \sum_\omega K_{\omega,j}^* K_{\omega,j} = 1. \quad (5.C.24)$$

このような  $\phi$  の表示を測定の作用素和表示と呼ぶ．それは測定値  $\omega$  ごとの作用素和表示の和である．なお， $j$  が走る範囲は  $\omega$  に依存するがここでは明示していない．また，上記第二式は測定が単位的であることの言い換えにすぎない．

古典系が離散的な場合には，上述のように測定の作用素和表示を容易に導くことができた．一般の測定が作用素和表示を有することも A. S. Holevo によって示されている．その結果を次に引用する．

命題 5.3.6 ([Hol98, Theorem 1]).  $\mathfrak{K}$  を可分 Hilbert 空間とするととき，測定  $\phi \in \text{nCP}(\ell^\infty(\Omega) \otimes B(\mathfrak{K}), B(\mathfrak{K}); 1)$  に対して，稠密な定義域  $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{K}$  上で定義された線形作用素たち  $A_{\omega,j}$  があって次が成り立つ．

$$\langle \xi, \phi(f \otimes X)\xi \rangle = \int \sum_j f(\omega) \langle A_{\omega,j}\xi, X A_{\omega,j}\xi \rangle d\nu(\omega), \quad \xi \in \mathfrak{D}. \quad (5.C.25)$$

ここで  $\nu$  は  $\sigma$ -有限測度であり，対応  $\omega \mapsto A_{\omega,j}$  はこの測度に関して殆ど至るところで定義されている．また， $A_\omega$  たちは任意の  $\xi \in \mathfrak{D}$  に対して次を満たす．

$$\int \sum_j \|A_{\omega,j}\xi\|^2 d\nu(\omega) = \|\xi\|^2. \quad (5.C.26)$$

---

者では測定をあらかじめ完全正写像にからめて論じてはいないが，次のような記述が 9.2 節にある．“We remark that the condition of complete positivity could have been imposed on operations, instruments and all subsequent results in this volume.”

測定の Stinespring 拡張に比べて、一般の測定の作用素和表示は一意性を欠いていたり非有界作用素を含むといった欠点を有する。しかしながら、既に述べたとおり作用素和表示は物理系  $\mathfrak{K}$  上の作用素だけで測定を記述できる点が優れている。Stinespring 拡張における拡張空間  $\mathfrak{K}$  や表現  $\pi$  は必ずしも物理的な意味合いが明確でない。作用素和表示はこのような要素を含まない。

## D 端点性

この付録では操作や測定が端点に位置するための条件について述べる。本節も基本的に先行研究の概説である。同じ物理系に対する二つの操作が与えられたとき、これらを確率的に実行したものもやはり一つの操作となる。このようにして操作の集合  $nCP(\mathfrak{A}, B(\mathfrak{K}); 1)$  に凸構造が入る。<sup>\*46</sup> 操作や測定の端点と言っているのはこの凸集合の端点である。端点に位置しない操作は、別の二種以上の操作の確率的実行で再現することができる。逆に、端点に位置する操作はこのような確率的実行で再現できないという意味で基本的である。 $nCP(\mathfrak{A}, B(\mathfrak{K}); 1)$  の端点は、その拡張を用いて特徴づけることができる。その特徴づけを与えるのが Arveson の定理である。そこでこの節ではまずこの定理を紹介する。その次に、測定の端点について考察する。この結果により測定の具体例が端点にあるかどうかを容易に判定できるようになる。

操作の優劣をこれらのなす凸空間上の関数で測ることがしばしばある。この場合、端点に属する操作がこの関数の値を最大化する。換言すれば、最適な操作は測定の端点に見いだされる。第3章では必ずしも凸とは限らない評価関数を用いて最適な識別を定義したが、これから述べるのは評価関数を凸関数に限った場合の議論であるとも考えられる。

以下では、まず完全正写像の端点を特徴づける W. B. Arveson の定理を説明する。その次に、適当な作用素和表示で定義された測定が端点に位置するための条件を書き下す。

### D.1 操作の端点条件

まず、操作が端点に位置するための条件について述べる。既に述べたとおり、完全正写像の性質は全て原理的には極小拡張の性質に翻訳する事ができる。端点性についてこの翻訳を行ったのが次に述べる Arveson の端点定理である。以降、凸集合  $C$  の端点の全体を  $\text{ext } C$  で表す。

定理 5.4.1 (Arveson の端点定理 [Arv69, Corollary 1.4.3, Theorem 1.4.6, Definition 1.4.5 直下の注意]). 零でない正規な完全正写像  $\phi \in nCP(\mathfrak{A}, B(\mathfrak{K}); B)$  の (極小とは限らない) 拡張を  $(\mathfrak{L}, \pi, V)$  とする。このとき下記の含意が成り立つ。

$$\begin{array}{ccc}
 (\pi\mathfrak{A})' = C & \xrightarrow{1} & \phi \in \text{ext } nCP(\mathfrak{A}, B(\mathfrak{K})) \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 (\pi\mathfrak{A})' \cap \{Z \in B(\mathfrak{L}) \mid V^*ZV = 0\} = \{0\} & \xrightarrow{2} & \phi \in \text{ext } nCP(\mathfrak{A}, B(\mathfrak{K}); B) \\
 \Downarrow & & \\
 (\pi\mathfrak{A})' \cap \{Z \in B(\mathfrak{L}) \mid ZV = 0\} = \{0\} & \iff & (\mathfrak{L}, \pi, V) \text{ は極小}
 \end{array}$$

特に、 $(\mathfrak{L}, \pi, V)$  が極小であるという前提のもとでは、二つの含意  $\xrightarrow{1}$  と  $\xrightarrow{2}$  の逆

<sup>\*46</sup>  $(\mathbb{R}$  上の) 線形空間  $\mathfrak{H}$  の部分集合  $S$  は、勝手な  $\xi, \xi' \in S$  と  $p, p' \geq 0, p + p' = 1$  から作られる凸結合  $p\xi + p'\xi'$  が再び  $S$  に属するとき凸と呼ばれる。二つの von Neumann 代数  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  間の有開写像のなす線形空間の部分集合  $nCP(\mathfrak{A}, B(\mathfrak{K}); 1)$  は、この意味で凸集合である。

も成り立つ.

Stinespring 同様, Arveson も  $C^*$ 代数を対象として上記定理を示している. しかし, 彼の証明は von Neumann 代数に適用すれば自動的に正規性 (超弱作用素位相) を尊重する. そこで, 上では von Neumann 代数用に少し変形して定理を引用した. 次に定理の簡単な適用例を挙げる.

例 5.4.2. 有界写像  $V: \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{H}$  から次のように  $\phi_V \in \text{nCP}(B(\mathfrak{H}), B(\mathfrak{K}))$  を定める.

$$B(\mathfrak{H}) \xrightarrow{\phi_V} B(\mathfrak{K})$$

$$X \xrightarrow{\quad\quad\quad} V^*XV$$

この  $\phi_V$  は  $\text{nCP}(B(\mathfrak{H}), B(\mathfrak{K}))$  および  $\text{nCP}(B(\mathfrak{H}), B(\mathfrak{K}); V^*V)$  の端点に位置する.

特にユニタリ操作は  $\text{nCP}(B(\mathfrak{H}), B(\mathfrak{K}); 1)$  の端点に位置する. また,  $B(\mathfrak{H})$  上のベクトル状態も正規状態のなす凸集合  $\text{nCP}(B(\mathfrak{H}), C; 1)$  の端点に属する.

証明.  $(\mathfrak{H}, \pi = \text{恒等写像}, V)$  は  $\phi_V$  の拡張である. この拡張に対して  $(\pi B(\mathfrak{H}))' = (B(\mathfrak{H}))' = C$  が成り立つことと Arveson の定理から結論が得られる. ベクトル  $\xi \in \mathfrak{H}$  の定めるベクトル状態  $X \mapsto \langle \xi, X\xi \rangle$ ,  $X \in B(\mathfrak{H})$  に対しては,  $V: C \ni \lambda \mapsto \lambda\xi \in \mathfrak{H}$  を対応付けて考えればよい. q.e.d.

## D.2 測定の端点条件

先にも少し触れたように, 具体的な測定の定義は作用素和表示を用いて与えられることが多い. そのようにして定義された測定が端点に位置するための条件を調べたい.

一般に, 測定  $\phi \in \text{nCP}(L^\infty(\Omega) \otimes B(\mathfrak{K}), B(\mathfrak{K}); 1)$  は次のように作用素和表示できるのであった.

$$\phi(f \otimes X) = \int \sum_j f(\omega) A_{\omega,j}^* X A_{\omega,j} d\nu(\omega). \quad (5.D.1)$$

以下では逆に  $A_{\omega,j}$  たちから  $\phi$  を定義することを考える. 特に, 上式における和  $\sum_j$  がなく,  $A_{\omega,j}$  たちが取り扱いやすい条件を満たすという場合を考える. 次の定理は, そのような条件下で作用素  $A_\omega$  たちが確かに測定を定義することを確認した上で, その測定が端点に属するための条件を与えるものである.

ここで先行研究について補足しておきたい. 次に述べる定理に類似の定理が [Pel13, Theorem 2 (4)] に与えられている. この定理自身は正しく端点に位置する測定を特徴づけている. しかし, 具体的に作用素和表示で定義された測定が端点に位置するかどうかを判定するといった用途に彼の定理を使うのは難しいのではないかと著者は考えている. 次の定理は比較的簡単な場合についてはあるが, このような問題を適当に処理している.\*47

\*47 J-P, Pellonpää による類似の先行研究 [Pel13, Theorem 2] は次のような論理的形式を持つものである. すなわち「任意の測定  $\phi$  に対して, ある〈良い作用素和表示〉があって, その測定が端点に位置するための条件はこの〈良い作用素和表示〉を用いて (…端点条件…) と書き下すことができる. この特徴付けは正しいが, 作用素和表示は測定  $\phi$  から一意に定まるものではない (少なくとも彼の定

定理 5.4.3. 次を所与とする.

- $(\Omega, \Sigma, \mu)$ : 測度空間.  $\Omega$  は位相空間,  $\Sigma$  はこの位相を含む  $\sigma$ -代数,  $\mu$  は  $\sigma$ -有限測度と仮定する.
- $\mathfrak{K}$ : 可分 Hilbert 空間.
- $(A_\omega)_{\omega \in \Omega}$ :  $B(\mathfrak{K})$  の元の組. 次の二条件を仮定する.
  - 写像  $(\omega \mapsto A_\omega)$  は  $B(\mathfrak{K})$  の超弱作用素位相に関して連続.
  - 任意の  $\rho \in (B(\mathfrak{K}))_*$  に対して

$$\int_{\Omega} \langle \rho, A_\omega^* A_\omega \rangle d\mu(\omega) = \langle \rho, 1 \rangle. \quad (5.D.2)$$

このとき次が成り立つ.

- (I) 次の条件を満たす測定  $\phi \in \text{nCP}(L^\infty(\Omega) \otimes B(\mathfrak{K}), B(\mathfrak{K}); 1)$  が唯一つだけ存在する.

$$\langle \rho, \phi(f \otimes X) \rangle = \int f(\omega) \langle \rho, A_\omega^* X A_\omega \rangle d\mu(\omega). \quad (5.D.3)$$

ただし,  $\rho \in (B(\mathfrak{K}))_*$ ,  $f \otimes X \in L^\infty(\Omega) \otimes B(\mathfrak{K})$ .

- (II) (I) に述べた測定が凸集合  $\text{nCP}(L^\infty(\Omega) \otimes B(\mathfrak{K}), B(\mathfrak{K}); 1)$  の端点に属するための十分条件は, この測定の古典化操作  $\phi((-) \otimes 1)$  が単射であることである. すなわち, (I) に述べた測定  $\phi$  について

$$\left[ \phi(f \otimes 1) = 0 \iff f = 0 \right] \quad (5.D.4)$$

$$\implies \left[ \phi \in \text{ext nCP}(L^\infty(\Omega) \otimes B(\mathfrak{K}), B(\mathfrak{K}); 1) \right]. \quad (5.D.5)$$

- (II)' 作用素の組  $(A_\omega)_{\omega \in \Omega}$  がさらに次の条件を満たすと仮定する. すなわち  $f \in L^\infty(\Omega)$  に対して

$$\forall \xi, \eta \in \mathfrak{K}, \psi \in L^2(\Omega), \int f_\omega \psi_\omega \langle \eta, A_\omega \xi \rangle d\mu(\omega) = 0 \implies f = 0. \quad (5.D.6)$$

このときには (II) の主張において “ $\implies$ ” を “ $\iff$ ” で置き換えられる. すなわちこの場合には, 古典化操作  $\phi((-) \otimes 1)$  が単射であることであることは, 測定  $\phi$  が端点に位置するための十分条件であるだけでなく必要条件でもある.

---

理における言明からは一意性は明白でない). この点が彼の定理を具体例に適用することを困難にしているように思われる. もう少しこの問題を詳しく述べれば次のようになる. いま  $\langle$ ある作用素和表示 $\rangle$  により測定  $\phi$  を定義したとする. しかし, 作用素和表示は一意ではないから, この定義に用いた  $\langle$ ある作用素和表示 $\rangle$  が  $\langle$ 良い作用素和表示 $\rangle$  であるかどうかは分からない. したがって, この  $\langle$ ある作用素和表示 $\rangle$  に彼のいう ( $\dots$ 端点条件 $\dots$ ) を適用したところで端点性は判定できない.

これから述べる定理は, 具体例に適用してその端点性を判定することが難しくない. 定理の (II)' が  $\langle$ 良い作用素和表示 $\rangle$  であることを保証する条件に相当する. [Pel13, Theorem 2] は  $A_\omega$  についてのこのような条件への言及が著しく不鮮明である.



この定理は Stinespring の定理と Arveson の定理から出る。証明は次の小節で与える。

(I) の主張は [OO16] から導くこともできるが、(II) を示す過程で副産物として得られるのでここでも定理に含めて述べておいた。この (I) が証明を要する事項であるということは少し説明を要するかもしれない。問題は  $\phi$  の始域が von Neumann 代数のテンソル積全域であるにも関わらず、(I) の等式は  $\phi$  の単項式における値しか定めていないということにある。

問題をよく理解するために von Neumann 代数のテンソル積がどのように定義されていたかを想起しておく。 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  を  $\mathfrak{H}, \mathfrak{K}$  上の von Neumann 代数とする。 $X \in \mathfrak{A}$  と  $Y \in \mathfrak{B}$  は自然に  $X \otimes Y \in B(\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K})$  を定義する。一般に  $X \otimes Y$  のような元を単項式と呼ぶ。単項式の線形結合の全体は  $B(\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K})$  の単位的  $*$ -部分代数をなす。これが  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  の代数的テンソル積  $\mathfrak{A} \otimes_{\text{alg}} \mathfrak{B}$  に他ならない。しかし、 $\mathfrak{A} \otimes_{\text{alg}} \mathfrak{B}$  は超弱作用素位相に関して閉じているとは限らない。そこでこの位相についての閉包をとって von Neumann 代数のテンソル積  $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$  を定義する。結局これらは次のような関係にある。

$$\mathfrak{A} \otimes_{\text{alg}} \mathfrak{B} \subset \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \subset B(\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K}). \quad (5.D.7)$$

これらの包含関係は一般には等号関係には置き換えられない。なお、上の定理においては  $\mathfrak{A} = L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ ,  $\mathfrak{B} = B(\mathfrak{K})$  である。

定理の (I) にある等式は  $\phi$  の単項式における値を確定する。それゆえ線形性（代数的テンソル積の普遍性）により  $\phi$  は代数的テンソル積にまで拡張できる。しかし、これが von Neumann 代数のテンソル積  $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$  にまで超弱連続性（正規性）を保ったまま拡張できるかどうかは証明を要するのである。

### D.3 証明

この小節は定理 5.4.3 の証明に充てられる。 $A_\omega$  たちから Stinespring 拡張を構成することで  $\phi$  の存在を証明し、次いで構成された拡張に Arveson の端点定理を適用することで端点条件 (II)(II)' を導出する。

#### D.3.1 Hilbert 空間 $L^2(\Omega, \Sigma, \mu; \mathfrak{K}) = L^2(\Omega, \Sigma, \mu) \otimes \mathfrak{K}$

この後の証明では Hilbert 空間に値を取る自乗可積分関数の空間  $L^2(\Omega, \Sigma, \mu; \mathfrak{K})$  を用いる。そこで具体的な証明に入る前に、この空間について基本的なことを述べておく。まず定義は次の通りである [RS81, Example 6, p. 40, p. 64, p. 115].

$$L^2(\Omega, \Sigma, \mu; \mathfrak{K}) = \left\{ \Psi: \Omega \rightarrow \mathfrak{K} \mid \Psi \text{ は弱可測かつ } \int \|\Psi_\omega\|^2 d\mu(\omega) < \infty \right\} / \sim \quad (5.D.8)$$

ここで  $\Psi: \Omega \rightarrow \mathfrak{K}$  が弱可測であるとは、任意の  $\eta \in \mathfrak{K}$  に対して  $\Omega \ni \omega \mapsto \langle \eta, \Psi_\omega \rangle \in \mathbb{C}$  が可測関数であることを意味する。<sup>\*48</sup> この可測性のために関数  $\omega \mapsto \|\Psi_\omega\|^2 = \sum_j |\langle e_j, \Psi_\omega \rangle|^2$  も可測であ

<sup>\*48</sup>  $\mathfrak{K}$  が一般の Banach の場合にはこの種の可測性として弱可測性の他に Borel 可測性や強可測性が定義され、これらを区別する必要がある。しかし、いまのように  $\mathfrak{K}$  が可分 Hilbert 空間である場合にはこれらを区別する必要はない [RS81, p. 115].

り、二つ目の条件に現れる積分が定義される。ただし、 $(e_j)_{j \in J}$  は可分 Hilbert 空間  $\mathfrak{K}$  の正規直交完全系である。また、上記定義式の “ $\sim$ ” は「 $\mu$  に関して殆ど至る所一致する函数を同視する」と読むこととする。このように定義された  $L^2(\Omega, \Sigma, \mu; \mathfrak{K})$  は内積

$$\langle \Psi, \Phi \rangle = \int \langle \Psi_\omega, \Phi_\omega \rangle d\mu(\omega) \quad (5.D.9)$$

に関して Hilbert 空間となる。

いま定義した Hilbert 空間  $L^2(\Omega, \Sigma, \mu; \mathfrak{K})$  は Hilbert 空間のテンソル積  $L^2(\Omega, \Sigma, \mu) \otimes \mathfrak{K}$  に同型である。実際、次の条件で特徴づけられるユニタリ作用素が唯一存在する [RS81, Theorem II.10(b), p. 52].

$$\begin{aligned} L^2(\Omega, \Sigma, \mu) \otimes \mathfrak{K} &\xrightarrow{\mathbf{U}} L^2(\Omega, \Sigma, \mu; \mathfrak{K}) \\ \psi \otimes \xi &\longmapsto (\mathbf{U}(\psi \otimes \xi))_\omega = \psi_\omega \xi. \end{aligned} \quad (5.D.10)$$

以上が Hilbert 空間  $L^2(\Omega, \Sigma, \mu; \mathfrak{K})$  についてこの後使うことになる性質の全部である。以降しばしば  $L^2(\Omega, \Sigma, \mu; \mathfrak{K})$  を  $L^2(\Omega; \mathfrak{K})$  と略記する。

### D.3.2 $W: \mathfrak{K} \rightarrow L^2(\Omega; \mathfrak{K})$ の構成

第一に、作用素の組  $(A_\omega)_{\omega \in \Omega}$  を使って作用素  $W: \mathfrak{K} \rightarrow L^2(\Omega; \mathfrak{K})$  を次の条件で定義できることを示す。

$$\begin{aligned} \mathfrak{K} &\xrightarrow{W} L^2(\Omega; \mathfrak{K}) \\ \xi &\longmapsto (W\xi)_\omega = A_\omega \xi. \end{aligned}$$

作用素  $W$  が無矛盾に定義されていることを検証すると次の通りである。

- 可測性. 任意に  $\xi, \eta \in \mathfrak{K}$  を取る. すると  $(A_\omega)_{\omega \in \Omega}$  についての第一の仮定により、写像

$$\omega \mapsto \langle \eta, (W\xi)_\omega \rangle = \langle \eta, A_\omega \xi \rangle = \langle |\xi\rangle \langle \eta|, A_\omega \rangle \quad (5.D.11)$$

は連続である。したがって、特に写像  $\omega \mapsto (W\xi)_\omega$  は可測。

- 有界性. 前項で示した可測性と組  $(A_\omega)_{\omega \in \Omega}$  についての第二の仮定から

$$\begin{aligned} \|W\xi\|^2 &= \int \langle (W\xi)_\omega, (W\xi)_\omega \rangle d\mu(\omega) \\ &= \int \langle \xi, A_\omega^* A_\omega \xi \rangle d\mu(\omega) \\ &= \int \langle |\xi\rangle \langle \xi|, A_\omega^* A_\omega \rangle d\mu(\omega) \\ &= \langle |\xi\rangle \langle \xi|, 1 \rangle = \|\xi\|^2. \end{aligned} \quad (5.D.12)$$

したがって、 $W\xi$  は確かに  $L^2(\Omega; \mathfrak{K})$  に属する。さらに上式から  $W$  は等長で特に有界。

### D.3.3 Stinespring 拡張 $(\mathfrak{L}, \pi, V)$ と $\phi$ の構成

第二に, Stinespring 拡張を用いて  $\phi$  を定義する. そのためにまず,  $L^2(\Omega) \otimes \mathfrak{K}$  と  $L^2(\Omega; \mathfrak{K})$  は同型であること, そしてこの同型が (5.D.10) で特徴づけられるユニタリによって与えられることを想起しておく. そのうえで, Stinespring 拡張  $(\mathfrak{L}, \pi, V)$  を次のように定義する.

- $\mathfrak{L} = L^2(\Omega) \otimes \mathfrak{K}$ .
- $\pi : L^\infty(\Omega) \otimes B(\mathfrak{K}) \rightarrow B(L^2(\Omega)) \otimes B(\mathfrak{K}) = B(\mathfrak{L})$  は自然な入射とする. これは確かに von Neumann 代数の準同型である. ここでは乗算により  $L^\infty(\Omega) \subset B(L^2(\Omega))$  と見做している.
- $V = U^*W : \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{L}$ .  $U^*, V$  はどちらも等長であるから  $V$  も等長である.

これらを用いて  $\phi$  を  $\phi Z = V^*(\pi Z)V$ ,  $Z \in L^\infty(\Omega) \otimes B(\mathfrak{K})$  と定義する. すると Stinespring の定理により  $\phi \in \text{nCP}(L^\infty(\Omega) \otimes B(\mathfrak{K}), B(\mathfrak{K}); 1)$ .

### D.3.4 (I) の検証

第三に, このようにして定義された  $\phi$  が定理 (I) の条件式を満たすことを示す.

1.  $\rho \in (B(\mathfrak{K}))_*$  がベクトル状態の場合:

まず次の等式に注意しておく.

$$\left( U(\pi(f \otimes X))U^*\Psi \right)_\omega = f_\omega X \Psi_\omega \quad (5.D.13)$$

ただし,  $f \in L^\infty(\Omega)$ ,  $X \in B(\mathfrak{K})$ ,  $\Psi \in L^2(\Omega; \mathfrak{K})$ . この等式は  $(f \otimes X)(\psi \otimes \xi) = (f\psi) \otimes (X\xi)$ ,  $\psi \in L^2(\Omega)$ ,  $\xi \in \mathfrak{K}$  の言い換えである.

さて,  $\rho = |\xi\rangle\langle\xi|$ ,  $\|\xi\|^2 = 1$ ,  $\xi \in \mathfrak{K}$  と書かれる場合を考える. このとき

$$\begin{aligned} & \left\langle |\xi\rangle\langle\xi|, \phi(f \otimes X) \right\rangle \\ &= \langle W\xi, U(\pi(f \otimes X))U^*W\xi \rangle && \phi \text{ の定義} \\ &= \int \left\langle (W\xi)_\omega, \left( U(\pi(f \otimes X))U^*W\xi \right)_\omega \right\rangle d\mu(\omega) && L^2(\Omega; \mathfrak{K}) \text{ の内積の定義} \\ &= \int f_\omega \langle (W\xi)_\omega, X(W\xi)_\omega \rangle d\mu(\omega) && (5.D.13) \\ &= \int f_\omega \langle A_\omega \xi, X A_\omega \xi \rangle d\mu(\omega) && W \text{ の定義} \\ &= \int f_\omega \left\langle |\xi\rangle\langle\xi|, A_\omega^* A_\omega \right\rangle d\mu(\omega). && (5.D.14) \end{aligned}$$

したがって, この場合確かに所望の公式が成り立つ.

2.  $\rho \in (B(\mathfrak{K}))_* = B^1(\mathfrak{K})$  が任意の場合:

$\rho$  は四つの密度作用素の和に書かれるから, 初めから  $\rho$  は密度作用素であると仮定して良い. このときには密度作用素のスペクトル分解から,

$$\langle \rho, Y \rangle = \sum_{j \in J} \langle \xi_j, Y \xi_j \rangle, \quad \xi_j \in \mathfrak{K}, \quad \sum_{j \in J} \|\xi_j\|^2 = 1. \quad (5.D.15)$$

以下、 $\rho$  はこの形に与えられているものとする。このとき、 $f \in L^\infty(\Omega)$ ,  $X \in B(\mathfrak{K})$  に対して

$$\begin{aligned}
& \langle \rho, \phi(f \otimes X) \rangle \\
&= \sum_{j \in J} \langle \xi_j, \phi(f \otimes X) \xi_j \rangle && \rho \text{ の定義} \\
&= \sum_{j \in J} \langle |\xi_j\rangle\langle \xi_j|, \phi(f \otimes X) \rangle \\
&= \sum_{j \in J} \int f_\omega \langle |\xi_j\rangle\langle \xi_j|, A_\omega^* X A_\omega \rangle d\mu(\omega) && \text{前項の結果} \\
&= \int \sum_{j \in J} f_\omega \langle |\xi_j\rangle\langle \xi_j|, A_\omega^* X A_\omega \rangle d\mu(\omega) && \text{Fubini の定理} \\
&= \int f_\omega \langle \rho, A_\omega^* X A_\omega \rangle d\mu(\omega) && \rho \text{ の定義} \tag{5.D.16}
\end{aligned}$$

積分と総和の交換に Fubini の定理を使った。この定理の使用は  $\mu$  が  $\sigma$ -有限という仮定と、次の評価により正当化される。

$$\begin{aligned}
& \sum_{j \in J} \int |f_\omega \langle |\xi_j\rangle\langle \xi_j|, A_\omega^* X A_\omega \rangle| d\mu(\omega) \\
&\leq \|f\| \|X\| \sum_{j \in J} \int \langle |\xi_j\rangle\langle \xi_j|, A_\omega^* A_\omega \rangle d\mu(\omega) \\
&\leq \|f\| \|X\| \sum_{j \in J} \langle |\xi_j\rangle\langle \xi_j|, 1 \rangle \\
&\leq \|f\| \|X\| \sum_{j \in J} \|\xi_j\|^2 < \infty. \tag{5.D.17}
\end{aligned}$$

ただし、二つ目の不等号を示す際に  $(A_\omega)_{\omega \in \Omega}$  についての第二の仮定を用いた。

ここまでで (I) の証明が終わった。

### D.3.5 (II) の検証

次に、(II) を示す。Arveson の定理 (123 頁) により問題の測定が端点に位置するための十分条件は

$$\left( \pi(L^\infty(\Omega) \otimes B(\mathfrak{K})) \right)' \cap \{Z \in B(\mathfrak{L}) \mid V^* Z V = 0\} = \{0\}. \tag{5.D.18}$$

これを变形してゆき、(II) に述べた条件を導く。

まず、上記条件に現れた交換団  $(\pi \cdots)'$  を計算する。一般に交換団を取る操作は von Neumann 代数のテンソル積に分配される (テンソル積についての交換定理 [Tak01, Theorem 5.9, p. 226])。したがって

$$\begin{aligned}
\left( \pi(L^\infty(\Omega) \otimes B(\mathfrak{K})) \right)' &= \left( L^\infty(\Omega) \otimes B(\mathfrak{K}) \right)' && \pi \text{ の定義} \\
&= (L^\infty(\Omega))' \otimes (B(\mathfrak{K}))' && \text{テンソル積についての交換定理} \\
&= L^\infty(\Omega) \otimes \mathbb{C} \\
&= L^\infty(\Omega) \otimes 1. \tag{5.D.19}
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
& \left( \pi(L^\infty(\Omega) \otimes B(\mathfrak{K})) \right)' \cap \{Z \in B(\mathfrak{L}) \mid V^*ZV = 0\} = \{0\} \\
\iff & \left( L^\infty(\Omega) \otimes 1 \right) \cap \{Z \in B(\mathfrak{L}) \mid V^*ZV = 0\} = \{0\} \\
\iff & \forall f \in L^\infty(\Omega) \left[ V^*(f \otimes 1)V = 0 \implies f \otimes 1 = 0 \right] \\
\iff & \forall f \in L^\infty(\Omega) \left[ \phi(f \otimes 1) = 0 \implies f = 0 \right]. \tag{5.D.20}
\end{aligned}$$

したがって確かに端点条件は (II) に述べた条件に同値である.

### D.3.6 (II)' の検証

最後に, (II)' を示す. Arveson の定理 (123 頁) に述べてあるように, (II) の条件が必要十分条件となるためには, 拡張が極小であることを示せば良い. 拡張が極小となるための必要十分条件は,

$$\left( \pi(L^\infty(\Omega) \otimes B(\mathfrak{K})) \right)' \cap \{Z \in B(\mathfrak{L}) \mid ZV = 0\} = 0. \tag{5.D.21}$$

先と同様に, この条件を変形してゆき (II)' の仮定が得られれば良い.

$$\begin{aligned}
& \left( \pi(L^\infty(\Omega) \otimes B(\mathfrak{K})) \right)' \cap \{Z \in B(\mathfrak{L}) \mid ZV = 0\} = 0 \\
\iff & \forall f \in L^\infty(\Omega) \left[ (f \otimes 1)V = 0 \implies f = 0 \right]. \tag{5.D.22}
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
& (f \otimes 1)V = 0 \\
\iff & U(f \otimes 1)U^*W = 0 \\
\iff & \forall \xi, \eta \in \mathfrak{K}, \psi \in L^2(\Omega), \langle \psi \otimes \eta, U(f \otimes 1)U^*W\xi \rangle = 0 \\
\iff & \forall \xi, \eta \in \mathfrak{K}, \psi \in L^2(\Omega), \int f_\omega \psi_\omega^* \langle \eta, A_\omega \xi \rangle d\mu(\omega) = 0. \tag{5.D.23}
\end{aligned}$$

したがって, (II)' の主張を得る.

以上で定理 5.4.3 の証明が終わった.

## E 識別再構成測定

測定には、測定値を得るという側面と、被測定系を乱すという側面の二つがある。本論では測定値に対する条件を課して識別を定義した。そして識別の擾乱については、第3章の議論を別にして触れなかった。ここで取り上げる識別再構成測定は、擾乱についての反復性と呼ばれる条件を課すことで定義される識別である。

### E.1 定義

識別再構成測定の定義を行う前に、反復性による射影測定の特徴づけについて想起しておく。Hilbert 空間  $\mathfrak{K}$  の正規直交完全系を  $(e_j)_{j \in J}$  とする。このとき、射影の族  $(E_j = |e_j\rangle\langle e_j|)_{j \in J}$  についての射影測定  $\phi \in \text{nCP}(B(\mathfrak{K}) \otimes \ell^\infty(J), B(\mathfrak{K}); 1)$  は次の条件で定義される [vN32, Lüd51]。  $X \in B(\mathfrak{K})$  と  $f \in \ell^\infty(J)$  に対して

$$\phi(X \otimes f) = \sum_{j \in J} f_j E_j X E_j. \quad (5.E.1)$$

この射影測定  $\phi$  は次の二条件を満たす。

$$\langle E_j, \phi(1 \otimes \delta_k) \rangle = \delta_{j,k}, \quad (5.E.2)$$

$$\phi(\phi(1 \otimes \delta_k) \otimes \delta_j) = \delta_{j,k} \phi(1 \otimes \delta_j). \quad (5.E.3)$$

第一の条件は、射影測定  $\phi$  が物理量  $A = \sum_j \alpha_j E_j$  の正確な測定であると解釈されるのが普通である。本論文の文脈では、むしろこの条件は次のように理解するのが自然である。すなわち、測定  $\phi$  は互いに直交する正規状態の組  $(E_j)_{j \in J}$  の完璧識別である。第二の条件は反復性と呼ばれる条件である、この条件は、二度立て続けに測定  $\phi$  を行うとき、二度目の測定値が必ず一度目の測定値に一致することを述べている、立て続けに行う測定の測定値の確率密度分布が  $J \times J$  の対角線上に集中するといっても良い。

逆に、射影の族  $(E_j = |e_j\rangle\langle e_j|)_{j \in J}$  についての射影測定は上述の完璧識別性 (5.E.2) と反復性 (5.E.3) で一義的に特徴づけられる。ここまでの議論は正規直交系  $(e_j)_{j \in J}$  を議論の起点にしている。正規直交の代わりに非直交系  $(\xi_j)_{j \in J}$  から議論をはじめたらどうだろうか。本論で見たとおり非直交系は完璧に識別することは出来ない。そこでこの条件を単なる識別性に弱めて識別再構成測定を定義する。

定義 5.5.1 (識別再構成測定). 物理系  $\mathfrak{B}$  の正規状態の組  $(\rho_j)_{j \in J} \in \mathfrak{B}_*^J$  に関する識別再構成測定とは、 $\phi \in \text{nCP}(\mathfrak{B} \otimes \ell^\infty(J \cup \{?\}), \mathfrak{B}; 1)$  であって次を満たすものである。ある正数  $q_j > 0$  の組  $(q_j)_{j \in J}$  があって、任意の  $j, k \in J$  に対して

$$\langle \rho_j, \phi(1 \otimes \delta_k) \rangle = q_j \delta_{j,k}, \quad (5.E.4)$$

$$\phi(\phi(1 \otimes \delta_k) \otimes \delta_j) = q_j \delta_{j,k} \phi(1 \otimes \delta_j). \quad (5.E.5)$$

このような測定  $\phi$  は識別確率  $(q_j)_{j \in J}$  で  $(\rho_j)_{j \in J}$  を識別再構成するとも言う。

一つ目の条件 (5.E.4) は、測定  $\phi$  がベクトル状態の組  $(|\xi_j\rangle\langle\xi_j|)_{j \in J}$  を定義 2.1.1 の意味で識別することを述べている。  $(q_j)_{j \in J}$  を識別確率と呼ぶのは定義 2.1.1 とも整合する。二つ目の条件 (5.E.5) は、先に述べた反復性に他ならない。

## E.2 具体的表示

次の命題は識別再構成測定より具体的な表示を与える。その結果によれば、射影測定の場合と同様に、測定値  $j \in J$  が出た場合の事後状態は全て識別再構成測定の定義条件により確定する。しかし、“?” が出た後の挙動は確定しない。そしてこの挙動は単一の完全正写像で記述される。

命題 5.5.2.  $(\xi_j)_{j \in J}$  を Hilbert 空間  $\mathfrak{K}$  の規格化された完全系 ( $\overline{\text{span}}\{\xi_j \mid j \in J\} = \mathfrak{K}$ ) とする。

測定  $\phi \in \text{nCP}(B(\mathfrak{K}) \otimes \ell^\infty(J \cup \{?\}), B(\mathfrak{K}); 1)$  が識別確率  $(q_j)_{j \in J}$  で  $(|\xi_j\rangle\langle\xi_j|)_{j \in J}$  を識別再構成するなら、  $(\xi_j)_{j \in J}$  の双直交系  $(\eta_j)_{j \in J}$  が唯一つ存在し、任意の  $X \in B(\mathfrak{K})$  と  $f \in \ell^\infty(J \cup \{?\})$  に対して次が成り立つ。

$$\phi(X \otimes f) = \phi(X \otimes \delta_?) f_? + \sum_{j \in J} q_j |\eta_j\rangle\langle\xi_j, X\xi_j\rangle\langle\eta_j| f_j \quad (5.E.6)$$

さらにこのとき  $(\eta_j)_{j \in J}$  と  $(q_j)_{j \in J}$  は次を満たす。

$$\sum_{j \in J} q_j |\eta_j\rangle\langle\eta_j| \leq 1 \quad (5.E.7)$$

逆に、  $(\xi_j)_{j \in J}$  の双直交系  $(\eta_j)_{j \in J}$  があり、これと正数の組  $(q_j)_{j \in J}$  が (5.E.7) を満たすとす。このとき

$$\text{nCP} \left( B(\mathfrak{K}) \otimes \ell^\infty(J \cup \{?\}), B(\mathfrak{K}); 1 - \sum_{j \in J} q_j |\eta_j\rangle\langle\eta_j| \right) \quad (5.E.8)$$

は空でない。そしてこの集合の任意の元  $\phi_?$  ごとに測定  $\phi \in \text{nCP}(B(\mathfrak{K}) \otimes \ell^\infty(J \cup \{?\}), B(\mathfrak{K}); 1)$  を

$$\phi(X \otimes f) = (\phi_? X) f_? + \sum_{j \in J} q_j |\eta_j\rangle\langle\xi_j, X\xi_j\rangle\langle\eta_j| f_j \quad (5.E.9)$$

と定めることが出来て、この  $\phi$  は識別確率  $(q_j)_{j \in J}$  で  $(|\xi_j\rangle\langle\xi_j|)_{j \in J}$  を識別再構成する

証明. 命題の後半 [(5.E.8) と (5.E.9)] の検証は容易であるから、命題の前半 [(5.E.6) と (5.E.7)] だけを以下で証明する。条件を満たす  $\phi$  が存在しなければ示すべきことはない。  $\phi$  が存在する場合にはベクトル状態  $(|\xi_j\rangle\langle\xi_j|)_{j \in J}$  は識別可能。したがって、定理 2.4.5 により  $(\xi_j)_{j \in J}$  の双直交系  $(\eta_j)_{j \in J}$  が存在する。しかも  $(\xi_j)_{j \in J}$  は完全であるから、  $(\eta_j)_{j \in J}$  は唯一つに定まる (補題 2.4.2)  $(\xi_j)_{j \in J}$  の完全性から  $(\eta_j)_{j \in J}$  も完全である事がわかる。

次に命題の公式 5.E.6 を示す。  $(\eta_j)_{j \in J}$  は完全であるから  $X = |\eta_m\rangle\langle\eta_n|$ ,  $m, n \in J$  に対して証明すれば十分である。更に、公式の形から  $f$  も  $f = \delta_j$ ,  $j \in J$  に限って良い。結局示すべき式は

$$\phi(|\eta_m\rangle\langle\eta_n| \otimes \delta_j) = q_j |\eta_j\rangle\langle\eta_j| \delta_{j,m} \delta_{n,j}. \quad (5.E.10)$$

以降, 特に断らない限り  $m, n, j, k, \ell \in J$  とする. まず次を示す.

主張. 次が成り立つ.

$$\phi(1 \otimes \delta_j) = q_j |\eta_j\rangle\langle\eta_j|. \quad (5.E.11)$$

主張の証明.  $1 \otimes \delta_j \geq 0$  より  $\phi(1 \otimes \delta_j) \geq 0$  に注意せよ. さて,  $\phi$  は  $(\xi_j)_{j \in J}$  の識別だから [(5.E.4) 参照]  $q_j \delta_{j,k} = \langle |\xi_k\rangle\langle\xi_k|, \phi(1 \otimes \delta_j) \rangle = \left\| \sqrt{\phi(1 \otimes \delta_j)} \xi_k \right\|^2$ . ゆえに  $\langle \xi_k, \phi(1 \otimes \delta_j) \xi_\ell \rangle = \delta_{k,j} q_j \delta_{j,\ell} = \langle \xi_k, q_j |\eta_j\rangle\langle\eta_j| \xi_\ell \rangle$ . これと  $(\xi_j)_{j \in J}$  は完全性から主張の公式を得る. q.e.d.

今示した主張 (5.E.11) と  $\phi$  の反復性 [(5.E.5) 参照] から次を得る.

$$\phi(|\eta_m\rangle\langle\eta_m| \otimes \delta_j) = q_j^{-1} \phi(\phi(1 \otimes \delta_m) \otimes \delta_j) = q_j^{-1} q_j \delta_{j,m} \phi(1 \otimes \delta_j) = q_j \delta_{j,m} |\eta_j\rangle\langle\eta_j|. \quad (5.E.12)$$

これは  $m = n$  の場合に (5.E.10) を示す.

主張.  $(\phi X)^*(\phi X) \leq \phi(X^* X)$ ,  $X \in B(\mathfrak{K}) \otimes \ell^\infty(J \cup \{?\})$ .

主張の証明.  $\phi$  は完全正写像だから拡張  $(\mathfrak{L}, V, \pi)$  を有する. さらに  $\phi$  は単位的だから  $1 = \phi 1 = V^* V$ . よって  $V V^*$  は射影であり  $\leq 1$  を満たす. したがって  $(\phi X)^*(\phi X) = \{(\pi X)V\}^*(V V^*)\{(\pi X)V\} \leq \{(\pi X)V\}^*\{(\pi X)V\} = \phi(X^* X)$ . q.e.d.

$m \neq n$  を仮定する. このとき  $j \neq m$  または  $j \neq n$  が成り立つ. ここでは  $j \neq m$  と仮定する. すると既に示した  $m = n$  の場合における (5.E.10) と今示した主張により

$$(\phi(|\eta_n\rangle\langle\eta_m| \otimes \delta_j))^* (\phi(|\eta_n\rangle\langle\eta_m| \otimes \delta_j)) \leq \|\eta_n\|^2 \phi(|\eta_m\rangle\langle\eta_m| \otimes \delta_j) = 0. \quad (5.E.13)$$

よって,  $\phi(|\eta_n\rangle\langle\eta_m| \otimes \delta_j) = 0$ . すなわち  $m \neq m$  の場合にも確かに (5.E.10) が成り立つ.

最後に (5.E.7) を示す.  $\phi$  は完全正写像であり, 特に正写像である. したがって  $1 \otimes (1 - \delta_j) \geq 0$  より  $\phi(1 \otimes (1 - \delta_j)) \geq 0$ . これは (5.E.7) に等しい. q.e.d.

### E.3 凸性

最後に識別再構成測定が凸集合を成していることを指摘し, その端点について調べる. 識別再構成測定は識別性 (5.E.2) と反復性 (5.E.3) で定義されている. (5.E.2) は  $\phi$  について線形であるが, (5.E.3) はそうではない. したがって識別再構成測定が凸集合をなしていることは定義からは必ずしも明らかではない. これが凸集合を成していることを示すには, 今示した命題 5.5.3 を用いる.

先にある測定が測定全体 (今しばらく  $M$  と記す) の端点に属する条件を紹介した. ここで問題となっているのは識別再構成測定の成す凸集合 (今しばらく  $DR$  と記す) の端点である. 明らかに  $M \supset DR$  であり, 一般には  $M \neq DR$  である. それゆえ  $DR$  の端点の中には  $M$  の端点に属さないものがありえる. このように, ある凸集合の端点をすべて知っていたとしても, その部分凸集合の端点についてすべてが分かるわけではない. この意味で次の命題は  $D$  の議論に回収されない.



命題 5.5.3. Hilbert 空間  $\mathfrak{K}$  の規格化された極小な完全系  $(\xi_j)_{j \in J}$  を任意にとり固定し, このただ一つの双直交系を  $(\eta_j)_{j \in J}$  と書く. さらに,  $DR(q_j)_{j \in J}$ ,  $DR \subset nCP(B(\mathfrak{K}) \otimes \ell^\infty(J \cup \{?\}), B(\mathfrak{K}); 1)$  および  $Q \subset \mathbb{R}^J$  を次のように定める.

$$DR(q_j)_{j \in J} = \{ \phi \mid \phi \text{ は識別確率 } (q_j)_{j \in J} \text{ で } (|\xi_j\rangle\langle\xi_j|)_{j \in J} \text{ を識別再構成する} \}, \quad (5.E.14)$$

$$DR = \bigcup_{(q_j)_{j \in J} \in \mathbb{R}^J} DR(q_j)_{j \in J}, \quad (5.E.15)$$

$$Q = \left\{ (q_j)_{j \in J} \in \mathbb{R}^J \mid q_j > 0, \sum q_j |\eta_j\rangle\langle\eta_j| \leq 1 \right\}. \quad (5.E.16)$$

$Q$  は定義により凸集合である. これらについて次が成り立つ.

1.  $DR(q_j)_{j \in J} \neq \emptyset \iff (q_j)_{j \in J} \in Q$ . また,  $(q_j)_{j \in J}, (q'_j)_{j \in J} \in Q$  に対して  $(q_j)_{j \in J} \neq (q'_j)_{j \in J}$  なら  $DR(q_j)_{j \in J} \neq DR(q'_j)_{j \in J}$ .
2.  $DR(q_j)_{j \in J}, DR$  は凸集合である.
3.  $\phi \in DR(q_j)_{j \in J}$  が  $DR(q_j)_{j \in J}$  の端点であるための必要十分条件は

$$\phi(- \otimes \delta_?) \in \text{ext } nCP \left( B(\mathfrak{K}) \otimes \ell^\infty(J \cup \{?\}), B(\mathfrak{K}); 1 - \sum_{j \in J} q_j |\eta_j\rangle\langle\eta_j| \right). \quad (5.E.17)$$

4. 次が成り立つ.

$$\text{ext } DR = \bigcup_{(q_j)_{j \in J} \in \text{ext } Q} \text{ext } DR(q_j)_{j \in J}. \quad (5.E.18)$$

略証. どの主張も命題 5.5.3 の簡単な応用である. そこでここでは 2. に述べた  $DR$  の凸性だけを示すに留める.  $\phi, \phi' \in DR$  と  $p, p' \geq 0, p + p' = 1$  を満たす数  $p, p'$  を勝手取る. そして,  $\phi'' = p\phi + p'\phi', q''_j = pq_j + p'q'_j$  と定める.  $\phi \in DR(q_j)_{j \in J}, \phi' \in DR(q'_j)_{j \in J}$  とし, 命題 5.5.3 の前半により  $\phi, \phi'$  を次のように書く.

$$\phi(X \otimes f) = \phi(X \otimes \delta_?)f_? + \sum_{j \in J} q_j |\eta_j\rangle\langle\xi_j, X\xi_j\rangle\langle\eta_j| f_j, \quad 0 \leq 1 - \sum q_j |\eta_j\rangle\langle\eta_j|, \quad (5.E.19)$$

$$\phi'(X \otimes f) = \phi'(X \otimes \delta_?)f_? + \sum_{j \in J} q'_j |\eta_j\rangle\langle\xi_j, X\xi_j\rangle\langle\eta_j| f_j, \quad 0 \leq 1 - \sum q'_j |\eta_j\rangle\langle\eta_j|. \quad (5.E.20)$$

これら二式を加えて

$$\phi''(X \otimes f) = (p\phi + p'\phi')(X \otimes \delta_?)f_? + \sum_{j \in J} q''_j |\eta_j\rangle\langle\xi_j, X\xi_j\rangle\langle\eta_j| f_j, \quad (5.E.21)$$

$$0 \leq 1 - \sum q''_j |\eta_j\rangle\langle\eta_j|. \quad (5.E.22)$$

命題 5.5.3 の後半の主張により,  $\phi'' \in DR(q''_j)_{j \in J} \subset DR$ . よって  $DR$  は凸である.  $q.e.d.$

上記命題は識別再構成測定のなす凸集合  $DR$  の形状を記述している。すなわち、 $Q \subset \mathbb{R}^J$  の各点  $(q_j)_{j \in J}$  に繊維 (fiber, fibre)  $DR(q_j)_{j \in J} = nCP(\dots)$  を立てる。これらの繊維は互いに交わらない。この繊維の総体が  $DR$  である。そしてこの凸集合  $DR$  の端点は、 $Q$  の端点に対応する繊維の端点である。



## 参考文献

- [Ara93] 荒木不二洋. 量子場の数理. 岩波書店, 1993.
- [AG88] Arthurs, E.; Goodman, M. S. Quantum correlations: A generalized Heisenberg uncertainty relation. *Physical Review Letters*. 1988, vol. 60, iss. 24, p. 2447-2449.
- [AK65] Arthurs, E.; Kelly Jr, J. K. On the simultaneous measurement of a pair of conjugate observables. *Bell System Technical Journal*. 1965, vol. 44, iss. 4, p. 725-729.
- [Arv69] Arveson, W. B. Subalgebras of  $C^*$ -algebras. *Acta Mathematica*. 1969, vol. 123, p. 141-224.
- [Ban99] Banaszek, K. Optimal receiver for quantum cryptography with two coherent states. *Physics Letters A*. 1999, vol. 253, iss. 1-2, p. 12-15, 1999.
- [Bar61] Bargmann, V. On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform part I. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1961, vol. 14, iss. 3, p. 187-214.
- [BBG71] Bargmann, V.; Butera, P.; Girardello, L.; Klauder, J. R. On the completeness of the coherent states. *Reports on Mathematical Physics*. 1971, vol. 2, iss. 4, p. 221-228.
- [BCS08] Bartůšková, L.; Črnoch, A.; Soubusta, J.; Dušek, M. Programmable discriminator of coherent states: Experimental realization. *Phys. Rev. A*. 2008, vol. 77, iss. 3, 034306.
- [Ben92] Bennett, C. H. Quantum cryptography using any two nonorthogonal. *Physical Review Letters*. 1992, vol. 68, no. 21, p. 3121-3124.
- [BFM13] Becerra, F. E.; Fan, J.; Migdall, A. Implementation of generalized quantum measurements for unambiguous discrimination of multiple non-orthogonal coherent states. *Nature Communications*. 2013, vol. 4, 2028.
- [BR87] Bratteli, O.; Robinson, D. W. *Operator algebras and quantum statistical mechanics 1*. Springer-Verlag, 1987.
- [CCB01] Clarke, R. B. M.; Chefles, A.; Barnett S. M.; Riis, E. Experimental demonstration of optimal unambiguous state discrimination. *Physical Review A*. 2001, vol. 63, iss. 4, 040305.
- [Che98] Chefles, A. Unambiguous discrimination between linearly independent quantum states. *Physics Letters A*. 1998, vol. 239, iss. 6, p. 339-347.
- [Cho72] Choi, M. D. Positive linear maps on  $C^*$ -algebras. *Canadian Journal of*

- Mathematics. 1972, vol. 24, no. 3, p. 520-529.
- [Chr03] Christensen, O. An introduction to frames and Riesz bases. Birkhäuser Basel, 2003.
- [Dav76] Davies, E. B. Quantum theory of open systems. Academic Press, 1976, 171p.
- [DG04] Gillies, D. 確率の哲学理論. 中山智香子訳. 日本経済評論社, 2004.
- [Die88] Dieks, D. Overlap and distinguishability of quantum states. Phys. Lett. A, 1988, vol. 126, iss. 5 - 6, p. 303-306.
- [Dix11] Dixmier, J. Von Neumann algebras. North Holland, 1981.
- [DL70] Davies, E. B.; Lewis, J. T. An operational approach to quantum probability. Communications in Mathematical Physics. 1970, vol. 17, no. 3, p. 239-260.
- [ES12] Sober, E. 科学と証拠：統計の哲学入門. 松王政浩訳. 名古屋大学出版会, 2012.
- [FDY04] Feng, Y.; Duan, R.; Ying, M. Unambiguous discrimination between mixed quantum states. Physical Review A. 2004 vol. 70, iss. 1, 012308.
- [Gab46] Gabor, D. Theory of communication. part 1: The analysis of information. Journal of the Institution of Electrical Engineers - Part III: Radio and Communication Engineering. 1946, vol. 93, iss. 26, p. 429-441.
- [Gla63a] Glauber, R. J. Photon correlations. Physical Review Letters. 1963, vol. 10, iss. 3, p. 84-86.
- [Gla63b] Glauber, R. J. Coherent and incoherent states of the radiation field. Physical Review Letters. 1963, vol. 131, no. 6, p. 2766-2788.
- [Hei27] Heisenberg, W. Über den anschaulichen inhalt der quantentheoretischen kinematik und mechanik. Zeitschrift für Physik. 1927, vol. 43, iss. 3-4, p. 172-198. 次は同論文の邦訳である. Heisenberg, W. “量子論的な運動学および力学の直観的内容について”. 河辺六男訳. 世界の名著 66 現代の科学 II. 湯川秀樹, 井上健編. 中央公論社, 1970, p. 325-355.
- [Hei07] Heil, C. History and evolution of the density theorem for Gabor frames. Journal of Fourier Analysis and Applications. 2007, vol. 13, iss. 2, pp,113-166.
- [Hel67] Helstrom, C. W. Detection theory and quantum mechanics. Information and Control. 1967, vol. 10, iss. 3, p. 254-291.
- [Hel76] Helstrom, C. W. Quantum Detection and Estimation Theory. Academic Press, 1976.
- [HIG95] Huttner, B.; Imoto, N.; Gisin, N.; Mor, T. Quantum cryptography with coherent states. Physical Review A. 1995, vol. 51 iss. 3, p. 1863-1869.
- [HK69] Hellwig, K. E.; Kraus, K. Pure operations and measurements. Communi-

- cations in Mathematical Physics. 1969, vol. 11, no. 3, p. 214-220.
- [HMG96] Huttner, B.; Muller, A.; Gautier, J. D.; Zbinden, H.; Gisin, N. Unambiguous quantum measurement of nonorthogonal states. *Physical Review A*. 1996, vol. 54, iss. 5, p. 3783-3789.
- [Hol98] Holevo, A. S. Radon-nikodym derivatives of quantum instruments. *Journal of Mathematical Physics*. 1998, vol.39 iss. 3, p. 1373-1387.
- [Hus40] K. Husimi. Some formal properties of the density matrix. *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series*. 1940, vol. 22, iss. 4, p. 264-314.
- [IH13] Hacking, I. 確率の出現. 森元良太, 広田すみれ訳. 慶應義塾大学出版会, 2013.
- [Iva87] Ivanovic, I. D. How to differentiate between non-orthogonal states. *Physics Letters A*. 1987, vol. 123, iss. 6, p. 257-259.
- [Jam74] Jammer, M. 量子力学の哲学 (下). 井上健訳. 紀伊國屋書店, 1984.
- [JS95] Jaeger, G.; Shimony, A. Optimal distinction between two non-orthogonal quantum states. *Physics Letters A*. 1998, vol. 197, iss. 2, p.83-87.
- [Kad90] Kadison, R. V. "Operator Algebras - An Overview", *The Legacy of John von Neumann*. Glimm, J.; Impagliazzo, I.; Singer, I., eds. American Mathematical Society, 1990, p. 61-90.
- [Kra83] Kraus, K. States, effects, and operations. Springer-Verlag, 1983.
- [Kho82] Kholevo, A. S. Probabilistic and statistical aspects of quantum theory. North-Holland Pub. Co., 1982.
- [KK16] Kawakubo, R.; Koike, T. Distinguishability of countable quantum states and von Neumann lattice. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2016, vol. 49, no. 26, 265201.
- [KK18] Kawakubo, R.; Koike, T. Disturbance by optimal discrimination. *Physical Review A*. 2018 vol. 97, iss. 3, 032102.
- [Kla60] Klauder, J. K. The action option and a Feynman quantization of spinor fields in terms of ordinary c-numbers. *Annals of Physics*. 1960, vol. 11, iss. 2, p. 123-168.
- [KR97a] Kadison, R. V.; Ringrose, J. R. Fundamentals of the theory of operator algebras. Volume I: Elementary theory. Academic Press, 1983.
- [KR97b] Kadison, R. V.; Ringrose, J. R. Fundamentals of the theory of operator algebras. Volume II: Advanced Theory. Academic Press, 1986.
- [Kra71] Kraus, K. General state changes in quantum theory. *Annals of Physics*. 1971, vol. 64, iss. 2, p. 311-335.
- [KS85] Klauder, J. K.; Skagerstam, Bo-S. Coherent states applications in physics and mathematical physics. World Scientific, 1985.

- [Leo97] Leonhardt, U. Measuring the quantum state of light. Cambridge University Press, 1997.
- [Lev64] Levin, B. Ja. Distribution of zeros of entire functions. Revised Ed., American Mathematical Society, 1980.
- [LL77] Landau, L. D.; Lifshitz, E. M. Quantum mechanics: Non-relativistic theory. 2nd edn., Pergamon Press, 1958.
- [Lüd51] Lüders, G. Über die Zustandsänderung durch den Meßprozeß. *Annalen der Physik*. 1951, vol. 8, p. 322-328 (*Annalen der Physik*. 6 Folge. Band 8. Heft 5/8. 1951). 同誌に同論文の K. A. Kirkpatrick による英訳が再録されている. Lüders, G. Concerning the state-change due to the measurement process. Kirkpatrick, K. A., trans. *Annalen der Physik*. 2006, vol. 15, iss. 9, p. 663-670.
- [NC10] Nielsen, M.; Chuang, I.; Quantum computation and quantum information. 10th anniversary ed., Cambridge University Press, 2010.
- [NS06] Nayak, A.; Sen, P.; Invertible quantum operations and perfect encryption of quantum states. arXiv.org e-Print archive, 2006, quant-ph/0605041. <https://arxiv.org/abs/quant-ph/0605041v4>.
- [OO16] Okamura, K.; Ozawa, M. Measurement theory in local quantum physics. *Journal of Mathematical Physics*. 2016, vol. 57, iss. 1, 015209.
- [Oza84] Ozawa, M. Quantum measuring processes of continuous observables. *Journal of Mathematical Physics*. 1984, vol. 25, iss., 1, p. 79-87.
- [Oza03] Ozawa, M. Universally valid reformulation of the Heisenberg uncertainty principle on noise and disturbance in measurement. *Physical Review A*. 2003, vol. 67, iss. 12, 042105,
- [Oza04] Ozawa, M. Uncertainty relations for noise and disturbance in generalized quantum measurements. *Annals of Physics*. 2004, vol. 311, iss. 2, p. 350-416.
- [Pau02] Paulsen, V. Completely bounded maps and operator algebras. Cambridge University Press, 2002.
- [Ped12] Pedersen, G. K. Analysis now. Springer-Verlag, 2012.
- [Pel13] Pellonpää, J.-P. Quantum instruments: I. extreme instruments. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2013, vol. 46, no. 2, 025302.
- [Plm71] Perelomov, A. M. On the completeness of a system of coherent states. *Theoretical and Mathematical Physics*. 1971, vol. 6, iss. 2, p. 156-164. 露語版は *Теоретическая и Математическая физика*. 1971, vol. 6, no. 2, p.213-224.
- [Plm12] Perelomov, A. Generalized coherent states and their applications.

- Springer-Verlag, 1986.
- [Prs88] Peres, A. How to differentiate between non-orthogonal states. *Physics Letters A*. 1988, vol. 128, iss. 1-2, p. 19.
- [Rau09] Raussen, M. Interview with J. Dixmier. *European Mathematical Society, Newsletter*. 2009, vol. 72, p. 34-40.
- [Rob29] Robertson, H. P. The uncertainty principle. *Physical Review*. 1929, vol. 34, iss. 1, p. 163-164.
- [Rob34] Robertson, H. P. An indeterminacy relation for several observables and its classical interpretation. *Physical Review*. 1934, vol. 46, iss. 9, p. 794-801.
- [RS81] Reed, M.; Simon, B. *Methods of modern mathematical physics I: Functional analysis*. Academic Press, 1980.
- [Rud87] Rudin, W. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill, 1987.
- [Sak12] Sakai, S. *C\*-algebras and W\*-algebras*. Springer-Verlag, 1971.
- [Sch26] Schrödinger, E. Der stetige Übergang von der mikro- zur makromechanik. *Naturwissenschaften*. 1926, vol. 14, iss. 28, p. 664-666. 英訳は Schrödinger, E. "The continuous transition from micro- to macro-mechanics", *Collected papers on wave Mechanics*. 3rd ed., American Mathematical Society, 2003, p. 41-44.
- [Sch30] Schrödinger, E. Zum Heisenbergschen Unschärfepinzip. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse*. vol. 19, p. 296-303. 1930. 英訳は Schrödinger, E. About Heisenberg Uncertainty Relation. Angelow, A.; Batoni, M.-C., trans. *Bulgarian Journal of Physics*. 1999, vol. 26, iss. 5-6, p. 193-203.
- [Sei92] Seip, K. Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1992, iss. 429, p. 91-106.
- [Sti55] Stinespring, W. F. Positive functions on C\*-algebras, *Proceedings of the American Mathematical Society*. 1955, vol. 6, no. 2, p. 211-216.
- [Sud63] Sudarshan, E. C. G. Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams. *Physical Review Letters*. 1963, vol 10, iss. 7, p. 277-279.
- [SZ79] Stratila, S.; Zsido, L. *Lectures on von Neumann algebras*. Abacus Press, 1979, 478p.
- [Tak01] Takesaki, M. *Theory of operator algebras I*. Springer-Verlag, 1979.
- [UHO03] 梅垣寿春, 日合文雄, 大矢雅則. *作用素代数入門*. 共立出版, 2003, 227p.
- [vN32] von Neumann, J. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Springer-Verlag, 1932. 次はこの書籍の邦訳である. J. v. ノイマン. 量子力学



の数学的基礎. 井上健, 広重徹, 恒藤敏彦訳. みすず書房, 1957.

- [Wey27] Weyl, H. Quantenmechanik und gruppentheorie. Zeitschrift für Physik. 1927, vol. 46, iss. 1-2, p. 1-46.
- [WSU11] Watanabe, Y; Sagawa, T.; Ueda, M. Uncertainty relation revisited from quantum estimation theory. Physical Review A. 2011, vol. 84, iss. 4, 042121.
- [You80] Young, R. M. An introduction to nonharmonic Fourier series. Academic Press, 1980, 246p.

# 記号表

本文中でしばしば説明せずに用いた記号を掲げる.

$\emptyset$	空集合.
$A \subset B$	$A$ は $B$ の部分集合. $A = B$ も許す.
$A \setminus B$	差集合. $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$ .
$f: A \rightarrow B$	$f$ は集合 $A$ から集合 $B$ への写像. $A$ を $f$ の始域 (定義域), $B$ を $f$ の終域と呼ぶ. また, 図式

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ a & \longmapsto & b \end{array}$$

で  $f: A \rightarrow B$  であることと  $a \in A$  は  $f$  で  $b \in B$  に移されることを表す. このことを  $f(a) = b$  または  $fa = b$  と記す.

$(-)$	関数の引数を $(-)$ で表す.
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	自然数の全体 (0 は含めない), 整数の全体, 実数の全体, 複素数の全体.
$i$	虚数単位. $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ .
$\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z,  z , z^*$	複素数 $z \in \mathbb{C}$ の実部, 虚部, 絶対値, 複素共役.
$\mathfrak{H}, \mathfrak{K}, \dots$	Hilbert 空間.
$\operatorname{span} S, \overline{\operatorname{span}} S$	ノルム空間の部分集合 $S$ を含む最小の線形部分空間. ノルム空間の部分集合 $S$ を含む最小の (ノルム位相に関する) 閉線形部分空間.
$\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_*$	von Neumann 代数とその前双対.
$B(\mathfrak{H}), B^1(\mathfrak{H})$	Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上の有界作用素の全体と跡類作用素の全体. $B(\mathfrak{H})_* = B^1(\mathfrak{H})$
$\operatorname{tr}$	$B^1(\mathfrak{H})$ 上の跡. $\operatorname{tr}: B^1(\mathfrak{H}) \rightarrow \mathbb{C}$ .
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Hilbert 空間の内積. または, von Neumann 代数とその前双対の対.
$(\Omega, \Sigma, \mu)$	(非負な局所化可能) 可測空間. $\Omega$ は集合, $\Sigma$ はその上の $\sigma$ -代数, $\mu$ は $\Sigma$ 上の測度.
$1_\Delta$	指示函数. $\Delta \subset \Omega$ に対して $1_\Delta: \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ は $\Delta$ 上で 1, その外で 0.
$L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$	測度空間 $(\Omega, \Sigma, \mu)$ 上の $L^p$ 空間.
$\ell^p(\Omega)$	測度空間 $(\Omega, 2^\Omega, \text{数え上げ測度})$ 上の $L^p$ 空間.
$\delta_\omega, \delta_{\omega, \omega'}$	$\delta_\omega = 1_{\{\omega\}} \in \ell^\infty(\Omega)$ . $\delta_{\omega, \omega'} = \delta_\omega(\omega')$ .
$n\operatorname{CP}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$	von Neumann 代数 $\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{B}$ への正規な完全正写像の全体.
$n\operatorname{CP}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}; b)$	$b \in B$ に対して $n\operatorname{CP}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}; b) = \{\phi \in n\operatorname{CP}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \mid \phi 1 = b\}$ . 特に $n\operatorname{CP}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}; 1)$ は $\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{B}$ への操作の全体を表す.
$(\mathcal{L}, \pi, V)$	完全正写像の Stinespring 拡張.
$\operatorname{ext} C$	凸集合 $C$ の端点全体.