

Arithmetic of non-abelian Galois extensions

March 2014

Jiro Nomura

主 論 文 要 旨

報告番号	甲 乙 第	号	氏 名	野村 次郎
主 論 文 題 目 :				
Arithmetic of non-abelian Galois extensions (非アーベルガロワ拡大の数論)				
(内容の要旨)				
整数論における最も重要な研究テーマの1つは、代数的対象と L-関数の特殊値との関係の研究である。このテーマに関連して、Brumer 予想と Brumer-Stark 予想が長年にわたり研究されてきた。代数体の有限次アーベル拡大に対して「Stickelberger 元」をそのガロワ群上の群環の中に定義することができる。この2つの予想はその Stickelberger 元がイデアル類群を消すということを予想している。Stickelberger 元は代数体の拡大に付随する Artin L-関数の特殊値を用いて定義されているので、これらの予想は、イデアル類群のガロワ加群としての構造と L-関数の特殊値との関係を予想している。つい最近、Andreas Nickel によって非可換拡大に対する2つの予想の一般化が定式化された。Nickel 本人によっていくつかの結果も得られている。 本論文の1つ目の目的は、Nickel の予想とアーベル拡大に対する予想との関係を調べることである。主結果の一つとして、非可換拡大に対する「弱い形」の Nickel の予想がそのアーベル拡大に対する予想に帰着できることを証明する。その結果の応用として、ガロワ群が位数 $4p$ (p は奇素数) の二面体群の場合、位数 2^{n+2} (n は自然数) の一般四元数群の場合そして四次交代群と位数2の巡回群との直積である場合に、Nickel の予想が正しいことを証明する。また、Nickel の予想の数値計算例も与える。この数値計算例は Nickel の予想を理解するのに非常に有用なものである。 代数体上定義されたアーベル多様体とそれに付随する Hasse-Weil L-関数に対して、Nickel の予想の類似の問題を考える。すると、Nickel の予想と同様に、非可換拡大に対する問いをアーベル拡大の間に帰着することができる。結果として、ガロワ群が位数 $4p$ (p は奇素数) の二面体群の場合に、Birch and Swinnerton-Dyer 予想 (と技術的な仮定) のもと、この問が肯定的に解けることを証明する。				

SUMMARY OF Ph.D. DISSERTATION

School Fundamental Science and Technology	Student Identification Number	SURNAME, First name NOMURA, Jiro
Title Arithmetic of non-abelian Galois extensions		
Abstract One of the main subjects in number theory is the study of the relation between the algebraic objects and L-values. Concerning this subject, Brumer's conjecture and the Brumer-Stark conjecture have been studied for many years. For an abelian extension of number fields, we can define the "modified Stickelberger element" in a group ring over the Galois group. These conjectures claim that the modified Stickelberger element annihilates the ideal class group. Since Stickelberger elements are defined by using the special values of Artin L-functions attached to abelian extensions, the conjectures predict the relation between the Galois module structure of ideal class groups and L-values. Quite recently, Andreas Nickel formulated non-abelian generalizations of these conjectures. Several results were obtained by himself. The first aim of this thesis is to study the relation between Nickel's conjectures and conjectures for abelian extensions. We prove that the "weak" versions of Nickel's conjectures are reduced to those of conjectures for abelian extensions. As an application of this result, we prove that the certain "prime parts" of the weak versions of Nickel's conjectures are true in the cases the Galois group is isomorphic to the dihedral group of order $4p$ with an odd prime p, the generalized quaternion group of 2-power order and the direct product of a cyclic group of order 2 and the alternative group on 4-letters. We also give numerical examples of Nickel's conjectures, which are very useful to understand his conjectures. For an abelian variety over a number field and the Hasse-Weil L-function, we study similar problems to Nickel's conjectures. Then we can reduce the problems for non-abelian extensions to that for abelian extensions as well as Nickel's conjectures. As a result, we prove that the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture (and some technical assumptions) implies affirmative answers for the problems in the case the Galois group is isomorphic to the dihedral group of order $4p$.		