

学位論文 博士（工学）

結晶性ポリマにおける  
クレーズ進展挙動のモデル化  
およびそれを用いた  
破壊予測シミュレーション

2013 年度

慶應義塾大学大学院理工学研究科

高橋 順一



# 目次

第1章 緒言	1
1.1 本研究の背景	2
1.1.1 ポリマの分類	2
1.1.2 ポリマの変形と破壊	3
1.1.3 ポリマ製品の設計における CAE の利用	5
1.2 ポリマを対象とした材料モデルに関する従来の研究と問題点	7
1.2.1 マルチスケールシミュレーション	7
1.2.2 分子鎖網目理論および分子鎖塑性理論	7
1.2.3 巨視的材料モデル	8
1.3 本研究の目的	9
1.4 本論文の構成	10
1.5 本論文で用いる記号	12
1章の参考文献	20
第2章 運動学	27
2.1 第2中間配置における擬似無損傷配置の導入	28
2.2 ひずみの弾・塑性分解	30
2.3 ひずみ速度の弾・塑性分解	30
2.4 変形速度の弾・塑性分解	31
2章の参考文献	32
第3章 熱力学的力の定義と釣合い方程式	33
3.1 熱力学的力の定義	34
3.2 連続の式	34
3.3 力学的釣合い方程式	35
3.4 エネルギー方程式	36
3.5 エントロピー不等式	36
第4章 構成式の導出	39
4.1 Clausius-Duhem の不等式	40
4.2 保存部分に対する熱力学的制限	41

4.3	散逸部分に対する熱力学的制限	42
4.4	速度形弾性構成式	43
4.5	粘塑性構成式	45
4.6	弾粘塑性構成式	50
4.7	熱力学的ポテンシャルと熱力学的力の関係	51
	4章の参考文献	52
第5章 静水圧依存形ひずみ速度硬化則		53
5.1	硬化則の引数の制限	54
5.2	静水圧依存形ひずみ速度硬化則の具体化	55
	5章の参考文献	58
第6章 クレーズ挙動のモデリング		59
6.1	クレーズ発展式の表現	60
6.2	クレーズ発展式の具体化	61
6.3	塑性平均垂直ひずみの発展式の同定	63
6.4	ひずみ速度依存形クレーズ発生条件式	66
6.5	広ひずみ速度域に対応したクレーズ発展式への拡張	67
6.6	クレーズ密度に基づく破断予測の方法	70
	6章の参考文献	71
第7章 PPを対象とした単軸引張試験		73
7.1	実験方法	74
7.2	実験結果	76
7.3	ポリマを対象とした引張試験の課題	77
	7章の参考文献	78
第8章 商用FEMプログラムにおけるクレーズを考慮した大変形解析		79
8.1	本材料モデルの商用FEMプログラムへの組み込み	80
8.2	ひずみ速度 $1\text{ s}^{-1}$ における単軸引張解析および検討	82
8.3	広ひずみ速度域における単軸引張解析および検討	88
8.4	圧縮および引張試験の再現シミュレーション	95
	8章の参考文献	100

第9章 結言	101
9.1 本論文の結言	102
9.2 今後の課題と展開	103
9.2.1 除荷時の変形応答	103
9.2.2 異方性の導入	104
9.2.3 塑性発熱および熱伝導現象の導入	104
9.2.4 打抜き試験に対する再現シミュレーション	104
謝辞	105
主論文に関する原著論文目録および口頭発表論文目録	107
定期刊行誌掲載論文(本論文に関連する原著論文)	107
国際会議発表	107
国内会議発表	107
補足 A 第1章の補足	109
A.1 ポリマ	110
A.2 ポリマの特徴	110
A.3 熱可塑性ポリマ	110
A.4 熱硬化性ポリマ	111
A.5 ポリプロピレンの分類と分析	111
A.6 破断と破壊	111
A.7 再結晶温度	111
A.8 クレーズの消滅	112
補足 B 第2章の補足	113
B.1 第1 中間配置	114
B.2 極分解	114
B.3 客観速度	114
B.4 損傷配置と擬似無損傷配置ににおける応力と弾性率の関係	114
補足 C 第3章の補足	115
C.1 内力のなす仮想仕事率に関する変形	116

補足 D	第 4 章の補足	117
D.1	構成式	118
補足 E	第 5 章の補足	119
E.1	レベル応力	120
補足 F	第 6 章の補足	121
F.1	クレーズ密度の体積分率と面積分率	122
F.2	従来のクレーズ発展式の不安定性	123
補足 G	第 7 章の補足	125
G.1	つかみ具の速度	126
補足 H	第 8 章の補足	127
H.1	本材料モデルが利用可能な要素	128
H.2	単軸引張試験における 2 次くびれの再現シミュレーション	128
H.2.1	シミュレーションの目的	128
H.2.2	材料モデル	128
H.2.3	PP を対象とした単軸引張試験	129
H.2.4	2 次くびれを伴う PP 材の硬化則	129
H.2.5	FEM 解析および検討	130
H.3	公称応力-公称ひずみ関係におけるクレーズ考慮の影響について	131
H.4	破断予測と破壊過程の再現	132
H.5	低ひずみ速度側の実験データ	132
H.6	破断ひずみのひずみ速度依存性	132
H.7	打抜き試験の再現シミュレーション	132
H.7.1	シミュレーションの目的	132
H.7.2	材料モデル	132
H.7.3	PP を対象とした打抜き試験	133
H.7.4	打抜き試験の再現シミュレーション	133
H.8	解析モデルと解析時間	135
H.9	各材料係数の決定方法	135
H.10	変形の進行にともなうくびれの幅について	136

補足 I 第 9 章の補足	137
I.1 クレーズ密度テンソルとその構成式	138
I.2 熱伝導現象の測定	138
補足の参考文献	139





# 第1章

## 緒言

## 1.1 本研究の背景

### 1.1.1 ポリマの分類

ポリマはモノマの重合反応により生成し[補足 A.1], その製品は我々の生活の利便性に大きく貢献している. コップや皿などの食器類, 家電製品の筐体や椅子などのオフィス用品の部品, さらには十分な強度と耐久性も要求される航空機や自動車の部品などにも利用されている. これらの製品には, 金属に比べて比重が低く, かつ複雑な形状に成型できることに加え, 常温において適度な強度を有する素材であるポリマの特徴[補足 A.2]が活かされている.

ポリマ製品に用いられる材料は多岐にわたり, 種々のポリマがその特徴を活かして利用されている. ポリマは, 加熱によって鎖状分子の重合体が流動して軟化する熱可塑性ポリマ[補足 A.3]と加熱すると化学架橋して生じる高分子の網目構造の形成により硬化する熱硬化性ポリマ[補足 A.4]とに大別される. 熱可塑性ポリマは, 分子構造に着目すれば結晶性ポリマと非晶性ポリマに分類できる. 結晶性ポリマの例としてポリプロピレン(PP), ポリアミド(PA), ポリエチレン(PE)などが, 非晶性ポリマの例としてポリスチレン(PS), ポリカーボネート(PC), ポリメタクリル酸メチル(PMMA)などが, 熱硬化性ポリマの例としてフェノール樹脂, エポキシ樹脂などが挙げられる.

結晶性ポリマは, 溶融状態からの徐冷により球晶を形成し, 球晶には分子鎖が折りたたまれた大き

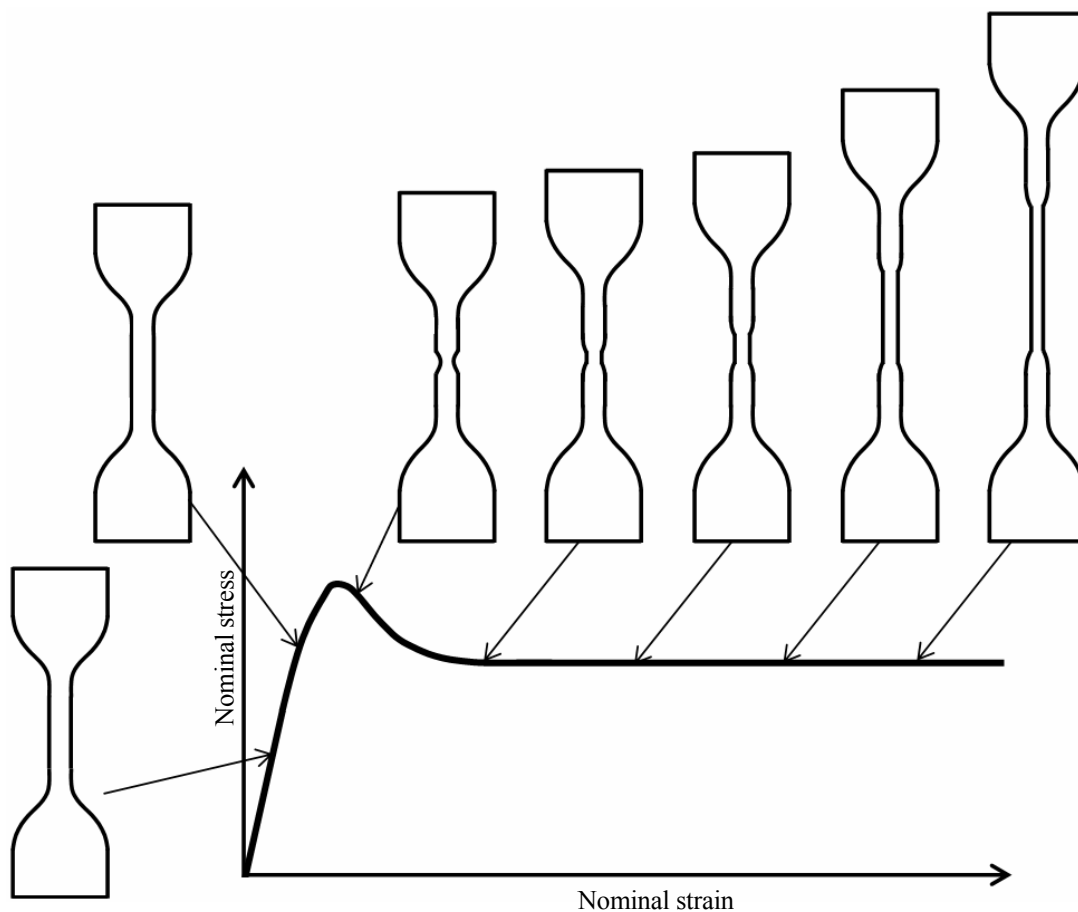


Fig. 1.1. Schematic deformation and nominal stress- nominal strain curve of crystalline polymer<sup>(1,2)</sup>

さ 10 nm 程度のラメラ状の結晶質部分と分子鎖がランダムコイル状になった非晶質部分とが混在する<sup>(1.1)</sup>。一方で、非晶性ポリマには結晶領域が存在しない。結晶性ポリマの多くは、ガラス転移点が常温より低いために常温において十分な延性を有することから、工業部品用素材として広く利用されている。例えば、PA66 は自動車のシリンダーヘッドカバー、ドアミラーステイおよびルーフレールなどに、PP はバンパーフェースやドアライニング等に利用されている。本論文では、結晶性ポリマの中で、ガラス転移点が常温よりも十分低い PP を対象とする。なお、工業的に最も多く用いられているアイソタクチックポリプロピレン(iPP)に主眼をおきつつ、一般に入手可能なポリマ製品の中で PP 系ポリマとして一般に知られている広い範囲の PP[補足 A.5]を、本論文では対象とする。

### 1.1.2 ポリマの変形と破壊

結晶性ポリマの巨視的変形の特徴は、単軸引張試験における試験片の変形履歴により示すことができる。無配向結晶性ポリマの公称応力-公称ひずみ曲線の例を、各変形段階における試験片の形状とあわせて図 1.1 に示す<sup>(1.2)</sup>。初期降伏点で形成された試験片中央におけるくびれ部分では、分子鎖の配向のため変形が起りにくくなる。このため、ポリマの単軸引張試験ではくびれが伝ばしつつ試験片の伸張が継続する。

くびれはせん断帯をとまなうといわれている。せん断帯とは、引張方向にある角度を保って板厚方向にひずみが集中した線状の変形帯のことであり、ひずみの局所化とも呼ばれる。ポリマの引張では、くびれの安定伝ばにとまない、せん断帯は徐々に局所化の程度を弱めるといわれている。ただし、せん断帯は高々板厚程度の幅の帯領域に入る板厚方向の局所ひずみ帯なので、薄板の引張りにおいてはせん断帯に沿って破断する[補足 A.6]。

このようなポリマの挙動は、いったんくびれが形成されるとその後の変形はくびれ部分に限定される延性金属で認められる現象とは対照的である。なお、焼鈍された軟鋼の引張試験において材料表面で観察されるリュウダース帯は降伏時に現れるものであり、せん断帯とは区別されている。さらに、金属の引張試験において応力-ひずみ曲線にひずみ速度依存性が現れるのは、ひずみ速度  $1 \text{ s}^{-1}$  程度以上<sup>(1.3)</sup>の高速変形時あるいは再結晶温度以上の温度範囲に限られるが[補足 A.7]、ポリマは室温においても、しかもひずみ速度  $10^{-4} \text{ s}^{-1}$  程度の極めて低速変形時でもひずみ速度依存性が認められる。例として、エチレンプロピレンラバー(EPR)を 5%内添したブロック PP を用いた単軸引張試験を 3 水準の速度で実施した場合の応力-ひずみ曲線<sup>(1.4)</sup>を図 1.2 に示す。

結晶性ポリマの変形および破断の微視的機構は、分子鎖の挙動で概ね説明できる<sup>(1.2)</sup>。弾性変形においては、分子鎖が安定した配置から負荷応力の方向に伸びる。続いて生じる塑性変形においては、非晶領域の分子鎖が互いに滑ったり結晶領域のラメラ内の折りたたみ分子鎖が回転するなどして引張方向に次第に整列し、これらがその後ラメラの分離をとまなう引張方向により強く配向していく。分子鎖の配向により強化された領域では後続する変形が起りにくくなるため、巨視的には初期降伏直後に形成されたくびれが安定的に伝ばする。この変形過程において発生するのが、ボイドとフィブリルで構成されるクレーズ<sup>(1.5)(1.6)(1.7)</sup>である。

クレーズはポリマ特有の微視的損傷であり、その内部に存在する分子鎖の束であるフィブリル<sup>(1.8)</sup>により応力を支えることができるという点で、金属の延性破壊の際に形成されるマイクロボイドとは異なる。クレーズに作用する応力が十分大きくなり、フィブリルが切断<sup>(1.9)</sup>されると分子鎖が疎な領域であるクレーズ中のマイクロボイドの結合が始まる。フィブリルの切断が隣接するクレーズで連続的に生じるとクラックに発展し、さらに応力が作用し続ければポリマは最終的に破壊する。

クレーズに関する実験・観察を通じた研究は30年以上も続いており<sup>(1.10)</sup>、多くの実験的事実が明らかになっている。特に、き裂先端におけるクレーズは、多くの研究者により観察されている<sup>(1.11~20)</sup>。また、クレーズは塑性変形の進行とともに生じること<sup>(1.21)</sup>、クレーズの生成は繰り返し負荷後の疲労破壊<sup>(1.22)</sup>においても認められること、圧延によりクレーズ発生が少なくなること<sup>(1.23)</sup>、分子鎖配向領域ではクレーズの成長が停止すること<sup>(1.8)</sup>、2軸応力状態でクレーズが交差すると著しくボイド率が大きくなりフィブリルの破断を早める<sup>(1.24)</sup>ことなど、各研究者がそれぞれの視点で観察事実を報告している。また、き裂先端におけるクレーズ領域が時間とともに徐々に進展する現象が破壊力学的表現で記述<sup>(1.25)</sup>されるなど、観察事実を現象論的に数式で表現することも試みられており、さら計算機能力の向上にともない、分子動力学<sup>(1.10)</sup>によるクレーズ進展シミュレーションも行われるようになってきている。しかしながら、クレーズ分布の可視化およびクレーズ密度の定量化に関しては、現時点ではほとんど報告されていない。

ところで、近年においては適切にクレーズ生成を制御することにより、ほとんど強度を低下させることなく光学的異方性あるいは多孔性高分子素材の性質を有するフィルム<sup>(1.26~28)</sup>が作られており、クレーズの積極的利用もある。

### 1.1.3 ポリマ製品の設計における CAE の利用

1.1.1 項で述べたように、近年では工業部品にポリマが幅広く用いられている。自動車ではポリマの使用比率が重量比で10%程度という調査結果<sup>(1.29)</sup>もあり、しかも燃費向上の要請から更なる軽量化が求められているので、自動車におけるポリマ製品は増加傾向にある。自動車の設計においては耐衝撃性能や空気力学性能、エンジンルーム内の熱流動性<sup>(1.30)</sup>・振動性能などが計算機シミュレーションによって評

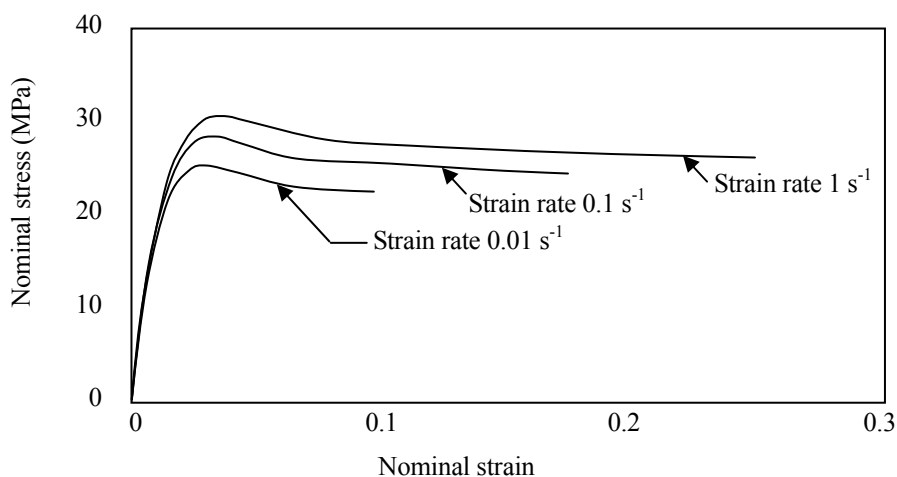


Fig. 1.2. Nominal stress versus nominal strain curves with strain rate dependency<sup>(1.4)</sup>

価され、シミュレーション結果が設計に活かされている。コンピュータを利用した設計はCAEと呼ばれ、試作数および実験回数の削減にともなう開発期間の短縮<sup>(1.31)</sup>ならびにコスト低減に大きく貢献している。

このような状況下で、耐衝撃性を計算機シミュレーションによって予測することは、自動車のシャーシやボディーのような金属部品と同様に、非金属製品を設計する際にも必須になりつつある。例えば衝突安全性の向上をCAEにより検討する際には、ダミー等の乗員モデルに加えて、エアバック、シートベルトおよびドアトリム(内装材)<sup>(1.32)</sup>のような非金属材料部品をモデル化したうえで、前面衝突および側面衝突におけるエアバッグ展開時の頭部損傷基準値(HIC)が計算機シミュレーションにより予測されている。このような衝突安全性評価に関わるポリマ製品の設計開発において、ポリマメーカの技術者が自動車メーカや部品メーカの技術者と共同でCAEを活用した開発を進めることが最近多くなっている。ここで、企業におけるCAEがFORTRAN言語等で作成した自作プログラムで実施されることはほとんどない。特に、企業間で連携して製品開発を進める場合には、商用FEMプログラムを利用するのが一般的である。FEM(Finite element method)とは数値解析手法の一種<sup>(1.33)(1.34)</sup>で、解析対象を離散化、すなわち有限要素分割したモデルに置き換える手法のことである。図1.3にシェル要素により分割されたシリンダーヘッドカバー<sup>(1.35)</sup>を示す。商用FEMプログラムにより実施したバンパーフェースの衝突解析の例<sup>(1.36)</sup>を図1.4に示す。

商用FEMプログラム<sup>(1.37)</sup>の例としては、ABAQUS, MARC, PAM-CRASH, RADIOSS, LS-DYNAなどを挙げるができる。商用FEMプログラムの開発元はユーザーカンファレンスを毎年開催しており、ここでは商用FEMプログラムへの追加機能の解説だけでなく、ユーザーによる解析例が紹介される機会も設けられており、ユーザー同士の交流も盛んに行われている。近年ではポリマを題材にした解析例<sup>(1.38)(1.39)</sup>も多く見られるようになり、ユーザーの関心の高さを実感できる。

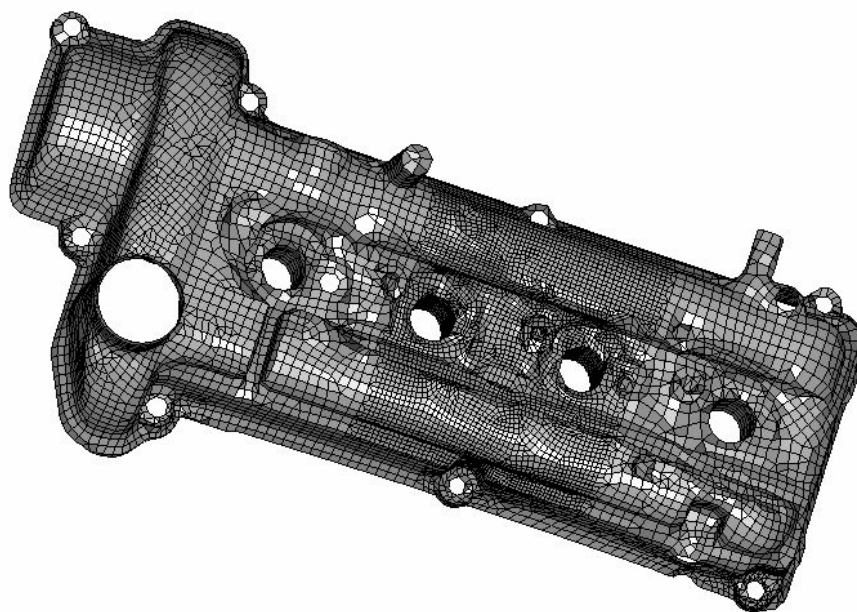


Fig. 1.3 Numerical model divided by Finite element<sup>(1.35)</sup>

ポリマの製品開発において、設計者は構造解析によりポリマ部品が実用上必要な強度を有することを確認する必要がある。さらに近年では、加害性のない安全な破面形状に配慮する必要性も高いため、商用 FEM プログラムを用いた衝突シミュレーションにおいて、ポリマ部品の大変形挙動の再現性ならびに破壊過程および破壊部位の予測の正確さがますます重要になってきている。ポリマは金属とは全く異なる微視的構造を持つため、設計者はポリマ特有の微視的構造に基づきモデル化された材料モデルを用いて衝突シミュレーションを行い、ポリマ特有の破壊機構が考慮された破断判定基準により破壊を予測する必要がある。しかしながら、現在の商用 FEM プログラムに標準装備されている材料モデルのほとんどは金属を対象に開発されたもの<sup>(1.40)</sup>であり、ポリマを対象に開発された材料モデル<sup>(1.41)(1.42)</sup>は少ない。ポリマ製品の設計において破壊予測シミュレーションを行う際に、金属を対象とした材料モデルを用いると、力学的応答に関するポリマ特有の性質が表現できないことが原因で、場当たりの材料パラメータの当てはめが必要になることがある。したがって、ポリマ製品の設計では、ポリマ特有の力学的応答が再現できる材料モデルを用いたシミュレーションを実施し、かつポリマ特有の破壊機構に基づき破壊を予測する手法が用いられるべきである。さらに、熱力学的議論を通じて導出された材料モデルで、かつポリマ特有の破壊機構に基づき破壊予測ができるものは、現在の商用 FEM プログラムには見られない。

ただし、商用 FEM プログラムの多くは、ユーザーが記述したユーザーサブルーチンプログラムを介して、ユーザーが必要とする機能をユーザー自身で付加できるように構成されている。このため、ポリマの特徴を表現可能な構成式および付随する諸発展式で構成される材料モデルをユーザーサブルーチンにプログラムすれば、ポリマを対象とした材料モデルを商用 FEM プログラムに組み込むことができ、商用 FEM プログラムでポリマ製品の变形挙動の再現ならびに破壊予測シミュレーションが実施可能となる。しかし、一般ユーザーに許されているプログラムの改変はユーザーサブルーチンの中でのみであり、商用 FEM プログラムのメインプログラムに手を加えることはできない。そこで、組み込む材料モデルは、メインプログラムからユーザーサブルーチンに引き渡される情報(変数)のみで記述できるような、商用 FEM プログラムへ組み込みやすい材料モデルである必要がある。また、大変形を対象とした解析を安定的に実施でき、しかも設計検討で利用可能な解析時間である数時間以内において解析結果が得られる必要がある。さらに、破断判定基準を満たした要素を削除するなどして、破壊の進展過程を再現できることが望ましい。

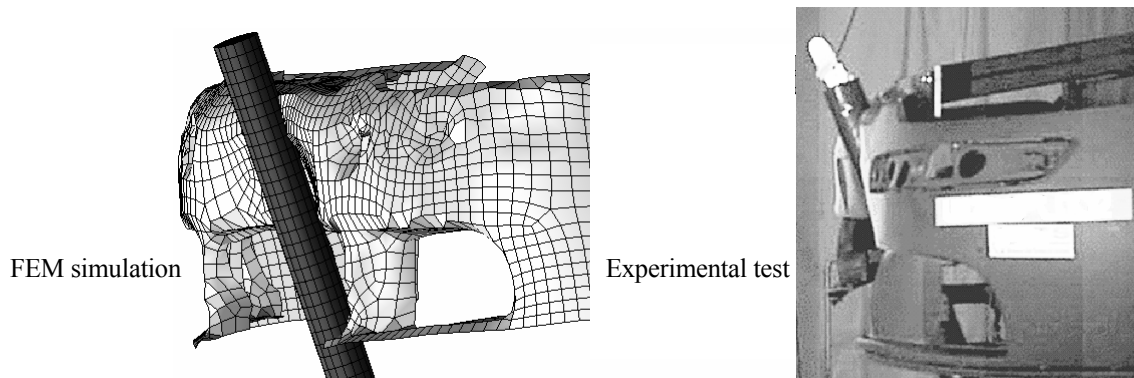


Fig. 1.4 Crash simulation for bumper face by commercial FEM solver and experimental test<sup>(1.36)</sup>

## 1.2 ポリマを対象とした材料モデルに関する従来の研究と問題点

### 1.2.1 マルチスケールシミュレーション

マルチスケールシミュレーションとは、複数の領域サイズ、すなわち複数のスケール間での情報を連成させて同時に行うシミュレーションの手法であり、近年では特に精力的に研究が進められている<sup>(1.43~45)</sup>。結晶性ポリマは1.1.1で述べたように分子鎖、ラメラ状の結晶質と非晶質、および球晶というスケール間で異なる構造をもっている。各スケールにおけるシミュレーションも盛んに研究されており、球晶の成長過程のPhase-Field法によるシミュレーション<sup>(1.46)</sup>やエラストマやタルクを含むポリマの微視損傷の分子動力学によるシミュレーション<sup>(1.47)</sup>などを挙げるができる。このような特定のスケールに着目したシミュレーションだけでなく、マルチスケールシミュレーションも近年では多くの成果が上がっている。内田・富田<sup>(1.48)</sup>は、分子鎖が規則正しく配列したラメラ状の結晶質と分子鎖がランダム状態で分布した非晶質が積層状をなすマイクロ構造と、このマイクロ構造がパッチワーク状に存在する球晶内の組織をモデル化したメゾ構造における変形を同時に考慮可能な均質化法を援用した数値シミュレーションを実施し、マイクロ領域およびメゾ領域における構造と変形の相互作用によって進行する特徴的な結晶性ポリマの変形挙動を示している。また内田ら<sup>(1.49)(1.50)</sup>は、ゴム粒子を充填した結晶性ポリマのブレンド材を対象としたマルチスケールシミュレーションモデルも構築し、粒子径や界面領域の状態などの微視的構造に基づきゴム粒子による耐衝撃性向上のメカニズムを考察している。一方で陸らは、非晶性ポリマにガラス繊維が充填された材料を対象としたメゾ領域とマクロ領域の変形を均質化法により同時に考慮して、ガラス繊維の分散状態やガラス繊維と非晶性ポリマの界面の物性がマクロ領域の変形<sup>(1.51)</sup>や応力ひずみ関係に与える影響を考察<sup>(1.52)</sup>している。また、ゴム粒子充填ポリマを対象に大きさの異なるゴム粒子を含むポリマ部のせん断帯の発生と伝ばならびにクレーズ発生を支配する応力値<sup>(1.53)</sup>や、介在物を含有する非晶性ポリマ<sup>(1.54)</sup>およびカーボンブラック充填ゴム<sup>(1.55)</sup>の変形挙動が均質化法により評価されている。

以上のように均質化法を利用したマルチスケールシミュレーションは、ポリマの微視的構造および微視的変形を巨視的変形や応力状態に反映できるという点で大変優れた手法といえる。しかしながら、この手法を利用してポリマー部品の性能評価を実施したり、さらには自動車のフルカーモデルに適用することは、計算機の処理能力に課題があるため、現時点では実用的ではない。さらに、均質化法を商用FEMソルバと連携させるためには複雑な定式化が必要であり<sup>(1.56)</sup>、一般ユーザーがユーザーサブルーチンを介して均質化法を商用FEMソルバで利用することは現在のところ難しい。したがって、マルチスケールシミュレーションは、現時点では今後の発展が期待される手法といえる。

### 1.2.2 分子鎖網目理論および分子鎖塑性理論

ひずみ軟化後の後続再硬化現象は、配向硬化により引き起こされる。配向硬化は、微視的にはポリマを構成している高分子鎖が延伸方向へと配向して内部の分子鎖網目構造が変化することで生じている。分子鎖の挙動に関する研究の歴史は古く、Kuhn-Grün<sup>(1.57)</sup>の1本の分子鎖の変形挙動のモデル化をはじめ、分子鎖網目構造がゴム弾性応答を示すとするアフラインモデルを用いて分子鎖網目理論<sup>(1.58~61)</sup>が提案さ

れている。なかでも分子鎖網目構造が単位ブロックあたり絡み点を中心とする8本の分子鎖で構成されているとする Arruda-Boyce<sup>(1.59)</sup>による8鎖モデルは、非晶性ポリマの引張・圧縮変形のシミュレーションで実験結果をよく再現できている。しかし、Arruda-Boyceの8鎖モデルでは、主ストレッチが大きく回転する単純せん断問題において大変形時に応力の値を実験よりも大きく評価してしまうことが報告<sup>(1.62)</sup>されるに至り、Tomita-Tanaka<sup>(1.63)</sup>は、その原因がアフィンモデルにおける分子鎖の絡み点数を一定にする仮定にあると考えて分子鎖の絡み点数変化を許容する非アフィンモデル<sup>(1.64)(1.65)</sup>を提案している。一方で灘ら<sup>(1.66~68)</sup>は、金属の結晶塑性論<sup>(1.69)</sup>に類似した方法によって分子鎖挙動を表現する分子鎖塑性理論を非晶性ポリマに対して構築し、微視的な分子鎖の配向状態を可視化するとともに、巨視的な引張シミュレーションにおいて分子鎖配向による変形誘起異方性の発現を再現している。しかしながら分子鎖網目理論および分子鎖塑性理論ともに、計算コストの課題から、現時点でポリマ部品の性能評価や自動車のフルカーモデルへの適用例は見られない。

### 1.2.3 巨視的材料モデル

通常のマクロスケールの変形を記述する材料モデルのことであり、ポリマを対象とした材料モデルおよびシミュレーションに関する研究も従来から多く、降伏後のひずみ軟化や配向硬化は、従来の巨視的塑性論における現象論的な応力-ひずみ関係<sup>(1.70)(1.71)</sup>を用いて再現されている。くびれの伝ば挙動についてはひずみ速度<sup>(1.72)(1.73)</sup>、塑性発熱および熱伝導<sup>(1.74~77)</sup>などが及ぼす影響について詳細な検討がなされている。延伸フィルムの異方性<sup>(1.78)</sup>やPPの静水圧依存性<sup>(1.79)</sup>が考慮された構成式の提案も見られる。これらの構成式は、商用FEMプログラムに組み込む場合に、メインプログラムから引き渡される変数だけで比較的容易にユーザーサブルーチンプログラムを記述できることから、商用FEMプログラムに対して親和性が高いといえる。

村上ら<sup>(1.80)(1.81)</sup>は、熱力学の理論体系に整合するように散逸関数を塑性ポテンシャルとする流れ則の形で非共軸粘塑性構成式を導出し、速度形弾性構成式を加えて弾粘塑性構成式とした上で、水平応力の仮定に基づき同定された流れ応力で表現されるひずみ速度硬化則を加えて、ポリマに特徴的なくびれの発生および安定的な伝ばを自作のFEM解析コードによる解析で再現している。

さらに、小林ら<sup>(1.82)</sup>は損傷量としてクレーズ密度を導入することで、クレーズの影響を考慮した弾性構成式を導出し、上述の非共軸粘塑性構成式とひずみ速度硬化則を加味してクレーズ挙動を考慮できるようにしている。このとき、クレーズ進展のモデル化を試みているが、分子鎖配向領域ではクレーズの一部が流れ込んだ分子鎖で充填されやすくなるとし、この現象をクレーズの消滅としたうえで、クレーズの発生および消滅をひずみ加速度に比例する形で表現している。さらに、X形せん断帯状に分布するひずみ速度の高い領域が、変形の進行にともない値を下げながら伝ばすることを考慮してクレーズの発生がひずみ速度に反比例するものとしている。このようにモデル化されたクレーズの発生・消滅項により、高クレーズ密度領域が変形の進行にともない引張方向へ伝ばすることを表現できるとし、Gurson<sup>(1.83)</sup>のポイド発展式を参考にしてクレーズの等方成長が塑性平均垂直ひずみに比例するものとして表現された項も加えてクレーズ発展式を提案している。その際、塑性平均垂直ひずみの発展式を数値実験的に求



めている。このとき、中心に円筒形の貫通孔を有する、一辺と厚さの比が 10 対 1 の正方形板材が解析モデルとして用いられて数値実験が行われており、その結果に基づき発展式の関数形ならびに係数が同定されている。さらに、Kawagoe-Kitagawa<sup>(1,84)</sup>により提案されたクレーズ発生条件式をそのまま加え、クレーズ進展の影響が考慮された材料モデルとしたうえで、Fortran 言語でプログラムされた自作の FEM コードで平板の単軸引張シミュレーションを実施している。このとき、くびれ端部におけるクレーズ密度が高いことに基づき、ポリマの破断がくびれ進行端部において生じることを予測可能であるとしている。

しかしながら、小林らの研究には、以下のような問題点がある。まず、クレーズ密度は弾粘塑性構成式においては面積分率、一方でクレーズ発展式においては体積分率として定義される必要があるにもかかわらず、異なる 2 種類のクレーズ密度が区別されていない。次に、クレーズ進展のモデル化において、分子鎖配向領域ではクレーズの一部が流れ込んだ分子鎖で充填されてクレーズが消滅する[補足 A.8]としているが、古口・堀<sup>(1,8)</sup>は分子鎖配向領域ではクレーズの成長が停止することを報告しており、クレーズは消滅するのではなく成長を停止するものとしてモデル化する必要がある。したがって、クレーズの発生および消滅をひずみ加速度に比例する形で表現できない。その上、井上・山本<sup>(1,5)</sup>は、クレーズは非弾性変形すなわち塑性変形の進行とともに生じるとしている。よって、クレーズの発生および成長は塑性ひずみの増加にともない生じると考えるのが妥当である。したがって、くびれの伝ばにともない値を下げながら伝ばする塑性ひずみ速度に反比例してクレーズ速度が高くなり、その結果くびれ端部においてクレーズ密度が高くなるとするモデリングは、実験事実に反する。さらに、ポリマ製品の設計で利用するためには、低ひずみ速度から高ひずみ速度まで幅広い速度域におけるクレーズ挙動が再現できるようにクレーズ発展式をモデル化する必要がある。一方で、クレーズの等方成長を表現する塑性平均垂直ひずみの発展式を、円孔を有する薄板を想定した数値実験によって同定しているが、解析条件に等方性を加え、等 3 軸引張状態を想定した解析モデルへ変更する方が望ましい。また、クレーズは低速変形ほど低応力状態で発生する<sup>(1,1)</sup>ことが知られているが、このひずみ速度依存性がクレーズ発生条件式に導入されていない。加えて、ポリマの応力-ひずみ関係には静水圧依存性<sup>(1,77)</sup>があることが知られているが、この性質が材料モデルに導入されていない。

さらに、クレーズ挙動に基づく単軸引張状態のくびれ端部における破断予測が可能であることを、自作の FEM 解析コードによる平面ひずみ問題として示しているが、商用 FEM プログラムにおいても同様な解析が行えるようにすることが産業界では必要とされる。その上、ひずみ速度  $1 \text{ s}^{-1}$  の条件における単軸引張シミュレーションのみで材料モデルの表現力を評価しており、ひずみ速度  $100 \text{ s}^{-1}$  のような高速側やひずみ速度  $0.01 \text{ s}^{-1}$  のような低速側におけるシミュレーション結果に基づいて実用性を評価するには至っていない。

### 1.3 本研究の目的

以上で述べた従来の研究の問題点を踏まえ、本研究ではクレーズを考慮した材料モデルを再構築するとともにポリマ特有の破壊機構であるフィブリルの切断をフィブリル強度に基づき評価し、結晶性ポリマの破断予測を可能とする新たなスキームを構築する。さらに本材料モデルが組み込まれた商用 FEM ソ

ルバによる単軸引張シミュレーションを通じて本スキームの実用性を評価する．具体的には，次のことを目的とする．

- (1) クレーズに関する観察事実に基づきクレーズ発展式を構築し直す．まず，クレーズの伝ば項を塑性ひずみの増加にともない進展するとする新たな形に改めたうえで，クレーズ伝ばのひずみ速度依存性と分子鎖配向領域におけるクレーズの停止を表現するとともに，高ひずみ速度において小さなクレーズが多数発生する一方で低ひずみ速度ではクレーズ長さが大きく成長するという相反する傾向も表現可能とする．加えて，クレーズ発生条件式をひずみ速度依存形に一般化するとともに，ひずみ速度硬化則を静水圧依存形に拡張し，クレーズ挙動の予測精度を高める．
- (2) 本材料モデルをユーザーサブルーチンを介して組み込み，商用 FEM プログラムにおいて利用可能としたうえで，ひずみ速度  $1 \text{ s}^{-1}$  の条件で単軸引張シミュレーションを実施し，くびれの伝ばならびにクレーズ進展の定性的な傾向の再現性を確認する．
- (3) 次にひずみ速度  $0.01 \sim 100 \text{ s}^{-1}$  の条件で単軸引張シミュレーションを実施し，広ひずみ速度領域におけるクレーズ挙動の再現性を確認するとともに，クレーズ密度と実応力に基づく破断予測スキームを構築する．
- (4) さらに PP の単軸圧縮試験結果との比較，ならびにひずみ速度  $1 \sim 100 \text{ s}^{-1}$  の単軸引張試験との比較を実施し，本材料モデルが妥当であることを示すとともに，構築したスキームの実用性を評価する．

以上を通じて，本材料モデルの実用性を示す．なお，本研究では，ポリマに関する材料科学的(高分子科学的)な内容には深く踏み込まずに，力学的検討に焦点をあてる．また，変形時の内部発熱および熱伝導については考慮しない．

## 1.4 本論文の構成

第2章では，大変形を記述する運動学を示す．ポリマは金属のような規則正しい結晶格子構造をもたないため，粘塑性変形の素過程を転位運動に関係付けることはできないので，材料に依存しないスピンを共回転スピんに用いる．この材料に依存しないスピンの導入により変形過程を4つの配置に分解し，客観性を有する共回転応力速度を定義する．さらに，構成式の参照配置で表示された変形速度の弾性部分が状態量としてのひずみ尺度の速度に，塑性部分が非状態量としての変形尺度の速度によって表現されることを示す．

第3章では，全自由エネルギーの引数に内部変数として塑性変形速度およびクレーズ密度を導入し，各引数に共役な熱力学的力を定義する．次に，保存則に基づいて力学的釣合い方程式，エネルギー方程式およびエントロピー不等式を導出し，従来の方程式系と比較する．

第4章では，構成式の導出過程と熱力学的力に対する熱力学的制限を示す．まず，Clausius-Duhem の不等式を Green-Zerna<sup>(1.85)</sup>の手法を介して保存部分と散逸部分に分離し，その保存部分から弾性構成式を導出する．一方で散逸部分に対しては最大散逸速度の原理<sup>(1.86)</sup>を適用することにより，散逸関数を塑性

ポテンシャルとする流れ則として非共軸粘塑性構成式を導出する。次に、弾性構成式と粘塑性構成式を組み合わせる弾粘塑性構成式を導出する。さらに、得られた構成式を第2中間配置に戻して散逸関数の表式に代入することにより、散逸関数をスカラー量のみで表現する。最後に、散逸関数は全自由エネルギー速度の散逸部分に等しいことを考慮して、熱力学的力の引数を制限する。

第5章では、材料の応力-ひずみ関係を与えるひずみ速度硬化則を定式化する。まず、熱力学的議論を通じて制限された相当塑性ひずみ速度の引数に静水圧応力が含まれることから、相当塑性ひずみ速度の静水圧依存性を熱力学的整合性をもって導入する。このとき、擬似無損傷配置で議論していることからクレーズ密度を無視する。さらに、全塑性変形速度の中で塑性変形速度の偏差部分に比べて十分小さいことから、塑性平均垂直ひずみ速度を無視する。次に、ひずみ速度感度指数および流れ応力を用いるPan-Rice形の従来のひずみ速度硬化則をそのまま利用しつつ、初期硬化段階ならびに静水圧依存性を双曲線正接関数で、後続硬化段階を指数関数で表現する新しい流れ応力の関数形を提案する。

第6章では、クレーズ挙動のモデリングを行う。まず、熱力学的議論を通じて制限されたクレーズ速度の引数の中から支配的な引数を選ぶ。このとき、クレーズの発生および伝ばが相当塑性ひずみの増加にともない進展すること、配向硬化にともないクレーズが停止すること、およびクレーズ中のボイドが塑性平均垂直ひずみの増加にともない成長することから、支配的な引数として相当塑性ひずみ、相当塑性ひずみ速度、クレーズ密度、塑性平均垂直ひずみの速度が選ばれる。これらの量を引数として、クレーズ発展式を構築する。このとき、クレーズの体積分率と面積分率の関係について言及し、両分率を結びつける関係式を示す。さらに、クレーズ伝ば項の係数が有する相当塑性ひずみ速度依存性と相当塑性ひずみ依存性を具体化するために、新たな関数を提案する。一方で、塑性平均垂直ひずみの発展式の関数形を、ボイドを有する立方体ポリマブロックを解析モデルとした数値実験を通じて決定し、その係数を同定する。さらに、クレーズ発生条件式にひずみ速度依存性を導入する。最後に、クレーズ発展式を広いひずみ速度域に対応すべく拡張する。

第7章では、PPを対象とした単軸引張試験をひずみ速度  $1 \text{ s}^{-1}$  から  $100 \text{ s}^{-1}$  において実施し、ひずみ速度依存性を有する応力-ひずみ関係を取得するとともに、PP試験片における破断部位を確認する。

第8章では、上述の材料モデルを用いてPP平板に対するFEMシミュレーションを行い、得られた結果について考察する。まず、本材料モデルをユーザーサブルーチンを介して商用FEMプログラムに組み込み、単軸引張シミュレーションを行う。その結果、くびれ端部でクレーズ密度が高く、実応力がフィブリル強度を超えることにより予測される破壊部位が、PPの破壊部位と一致することと通じて、本材料モデルの再現性の高さを確認する。次に、広いひずみ速度領域に対応するために拡張されたクレーズ発展式を含む材料モデルを商用FEMプログラムに組み込み、ひずみ速度  $0.01 \text{ s}^{-1}$  から  $100 \text{ s}^{-1}$  までの5つの水準の速度を与える単軸引張シミュレーションを行う。その結果により、クレーズ密度およびフィブリル強度に基づいて、PPの延性破壊が広いひずみ速度域において予測できることを示す。さらに、本材料モデルが静水圧依存性を再現できることに言及したうえで、第7章において得た単軸引張試験の結果が再現されることを示し、本材料モデルの実用性を評価する。最後に、第9章は結言であり、本研究により得られた知見を要約する。

## 1.5 本論文で用いる記号

本論文では特に断りのない限り物理量を表すスカラーを斜字体の細字で、ベクトルを斜字体の小文字の太字で、2階以上のテンソルを斜字体の太字で表す。そして、初期配置、第1中間配置、第2中間配置および現配置における配置表示記号はそれぞれ  $\beta_{(l)}$ 、 $\beta_{(M)}$ 、 $\beta_{(m)}$  および  $\beta_{(c)}$  のように表す。また、テンソルの配置表示記号は次のように表す。

初期配置	:	$\mathbf{A}_{(l)}$
第1中間配置	:	$\mathbf{A}_{(M)}$
第2中間配置	:	$\mathbf{A}_{(m)}$
現配置	:	$\mathbf{A}_{(c)}$

次に、ベクトルおよびテンソルの成分をそれぞれ小文字および大文字の斜字体で表し、添字を付して、 $a_i$ 、 $b_i$ 、 $c_i$ 、 $\dots$ 、 $A_{ij}$ 、 $B_{ij}$ 、 $C_{ij}$ 、 $\dots$  のように表す。

また、線形変換、微分の関係の後形記法で表し、直接表示および指標表示による線形変換、内積、外積、テンソル積および2重積を次のように表す。

線形変換	:	$\mathbf{AB}$	$A_{ik} B_{kj}$
内積	:	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	$A_{ij} B_{ij}$
外積	:	$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$	$e_{jlm} A_{il} B_{mk}$
テンソル積	:	$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$	$A_{ij} B_{kl}$
2重積	:	$e \cdot \cdot \mathbf{A}$	$e_{ijk} A_{kj}$
	:	$\mathbf{A} : \mathbf{B}$	$A_{ijkl} B_{kl}$
	:	$\mathbf{A} : \mathbf{B}$	$A_{ijmn} B_{mnkl}$

さらに、微分演算を直接表示および指標表示により次のように表す。

微分演算子	:	$\nabla$	$A_{ik} B_{kj}$
こう配	:	$\text{grad } \mathbf{A}$	$A_{ij,k}$
発散	:	$\text{div } \mathbf{A}$	$A_{ij,j}$
回転	:	$\text{curl } \mathbf{A}$	$e_{jkl} A_{il,k}$

ここで、記号  $(\ )_{,i}$  は座標  $x_i$  による変微分を表し、記号  $e_{ijk}$  は交代記号を表す。

さらに、上記の記号に関する規約で、1つの項に現れる2つ1組の指標については、1~3の総和記号を省略する、総和の規約を適用する。例えば、 $\sum_{j=1}^3 A_j b_j = A_j b_j$  のように記号  $\sum_{j=1}^3$  を省略する。

次ページ以降に、各記号の意味をまとめて示しておく。

## 主な記号

$A$	: クレーズ発展式中のパラメータ
$A_1$	: ひずみ速度依存形クレーズ発生条件式のパラメータ
$a$	: 体積要素 $v$ を囲む閉曲面の表面積
$B$	: クレーズ発展式中のパラメータ
$B_1$	: ひずみ速度依存形クレーズ発生条件式のパラメータ
$C^e$	: 4 階の弾性係数テンソル
$C^v$	: 4 階の弾粘塑性係数テンソル
$C_1$	: ひずみ速度依存形クレーズ発生条件式のパラメータ
$C_{pr}$	: $\varepsilon^p$ に対する $\hat{\omega}$ の増加率(クレーズの伝ば項における係数)
$C_{ig}$	: $\varepsilon_m^p$ に対する $\hat{\omega}$ の増加率(クレーズの等方成長項における係数)
$C_{ge}$	: クレーズ数密度の増加を表現する係数(クレーズの発生項における係数)
$C_{gr}$	: クレーズ長さが大きく成長することを表現する係数 (クレーズの発生項における係数)
$D_1, D_2, D_3, D_4$	: クレーズ発展式中のパラメータ
$D$	: 変形速度テンソル
$D^e$	: 変形速度テンソルの弾性部分
$D^p$	: 変形速度テンソルの塑性部分
$D^{p'}$	: 変形速度テンソルの塑性部分の偏差成分
$da$	: 現配置(変形後) における微小面積要素
$da_0$	: 初期配置(変形前) における微小面積要素
$dv$	: 現配置(変形後) における微小体積要素
$dv_0$	: 初期配置(変形前) における微小体積要素
$d_m^p$	: 粘塑性構成式の等方部分
$dx$	: 微小線素ベクトル

$\mathbf{E}$	: Green のひずみテンソル
$\mathbf{E}^e$	: Green のひずみテンソルの弾性部分
$\mathbf{E}^p$	: Green のひずみテンソルの塑性部分
$E$	: 擬似無損傷配置における縦弾性係数
$E_0$	: 損傷配置における縦弾性係数
$\mathbf{F}$	: 変形こう配テンソル
$\mathbf{f}$	: 単位質量あたりの物体力ベクトル
$f_1(\dot{\bar{\epsilon}}^p)$	: クレーズ進展のひずみ速度依存性を表現する関数
$f_2(\bar{\epsilon}^p)$	: クレーズの成長停止を表現する関数
$g$	: 流れ応力
$G$	: Gibbs 関数
$H_\omega$	: 弾粘塑性構成式における係数
$H_s$	: 割線係数
$\mathbf{I}$	: 恒等テンソル
$I$	: 最大散逸速度の原理における汎関数
$I_{T_1}, I_{T_2}, I_{T_3}$	: $\tilde{\mathbf{T}}_{(m)}$ に対する基本不変量
$J_2, J_{2a}, J_{2b}$	: $\mathbf{T}'_{(m)}$ と $\mathbf{M}'_{(m)}$ の作るスカラ不変量
$J$	: 変形こう配テンソルの Jacobian
$K$	: 運動エネルギー密度
$k_0, k_1, \dots, k_5$	: ひずみ速度硬化則における材料定数
$L$	: 解析対象の代表長さ
$L_0$	: 引張試験における初期長さ
$\mathbf{L}$	: 速度こう配テンソル

$l'$	: 応力に垂直な方向テンソル
$m$	: ひずみ速度感度指数
$m_w$	: 副次的な初期不整モードの波数
$M$	: 塑性変形速度に共役な内力テンソル
$m'$	: 応力方向テンソル
$n$	: 閉曲面 $da$ の外向き単位法線ベクトル
$P$	: 内力のなす仕事率
$p_1$	: ひずみ速度感度指数に対する, 偏差応力と塑性変形速度のなす角がつくる正弦の最大値
$p_2$	: 偏差応力と塑性変形速度のなす角がつくる正弦が最大値をとるときのひずみ速度感度指数値
$p_3$	: ひずみ速度感度指数 $m$ が $p_2$ であるとき, 非共軸パラメータ $k$ が零に漸近する速度を支配するパラメータ
$Q$	: 左ストレッチを対角化する直交テンソル
$Q_b$	: 単位体積に供給される単位時間当たりの熱量
$q$	: 熱流束ベクトル
$q_1, q_2, q_3, q_4$	: 塑性平均垂直ひずみと静水圧応力の関係式の中のパラメータ
$R$	: 剛体回転を表す直交テンソル
$R_w$	: 物体の全回転を表す直交テンソル
$r$	: 放射熱密度
$S$	: 擬似無損傷配置における断面積
$S_0$	: 損傷配置における断面積
$T$	: Cauchy 応力テンソル
$T^*$	: 損傷空間における Cauchy 応力テンソル

$\tilde{\mathbf{T}}$	: Kirchhoff 応力テンソル
$t$	: 現時刻
$t_0$	: 初期(基準) 時刻
$\overset{[n]}{\mathbf{t}}$	: 微小面積要素 $da$ に作用する応力(けん引力)ベクトル
$\mathbf{U}$	: 右ストレッチテンソル
$\mathbf{U}_\chi$	: 直交テンソル $\chi$ に対応するストレッチテンソル
$\mathbf{U}_\chi^e$	: 直交テンソル $\chi$ に対応する弾性ストレッチテンソル
$\mathbf{U}_\chi^p$	: 直交テンソル $\chi$ に対応する塑性ストレッチテンソル
$\hat{U}$	: 内部変数を考慮した単位体積あたりの内部エネルギー
$U$	: 解析対象の端面変位
$v$	: 現配置(変形後) における物質検査体積
$v_0$	: 初期配置(変形前) における物質検査体積
$\mathbf{v}$	: 物質速度ベクトル
$\mathbf{W}$	: 連続体スピンテンソル
$W^p$	: 粘塑性仕事
$\Delta w$	: 初期形状不整量
$\mathbf{w}$	: 連続体スピンテンソルに双対な軸性ベクトル
$Y$	: クレーズ共役力
$Y^c$	: クレーズ共役力の保存部分
$Y^d$	: クレーズ共役力の散逸部分
$\alpha$	: 散逸曲面における応力方向テンソルと応力速度テンソルのなす角度
$\alpha'$	: 熱膨張係数
$\beta$	: 散逸曲面の尖り角



$\beta_{(c)}$	: 現配置
$\beta_{(I)}$	: 初期配置
$\beta_{(M)}$	: 第1 中間配置
$\beta_{(m)}$	: 第2 中間配置
$\Phi$	: 散逸関数
$\phi_V$	: ボイド率
$\overset{[i]}{\gamma}$	: 内部エントロピー生成速度の密度
$\delta$	: 散逸曲面における応力方向テンソルと塑性変形速度テンソルのなす角
$\delta I$	: 汎関数 $I$ の第1 変分
$\varepsilon$	: 内部エネルギー密度
$\varepsilon_c$	: クレーズの成長停止ひずみ
$\varepsilon_v$	: 全体積ひずみ
$\varepsilon_m^e$	: 弾性平均垂直ひずみ
$\varepsilon_m^p$	: 塑性平均垂直ひずみ
$\varepsilon_h$	: 再硬化ひずみ
$\dot{\varepsilon}_r$	: 参照ひずみ速度
$\hat{\varepsilon}$	: 内部変数が内在する場合の内部エネルギー密度
$\bar{\varepsilon}^p$	: 相当塑性ひずみ
$\eta$	: エントロピー密度
$\hat{\lambda}$	: Lagrange の未定乗数
$\lambda, \mu$	: Lamé 定数
$\nu$	: Poisson 比
$\theta$	: 温度

$\theta_0$	: 基準温度
$\rho$	: 現配置の密度
$\rho_0$	: 初期配置の密度
$\sigma$	: 擬似無損傷配置における応力
$\sigma^*$	: 損傷配置における応力
$\bar{\sigma}$	: 相当応力
$\sigma_b$	: フィブリルの配向に必要な応力
$\sigma_L$	: レベル応力
$\sigma_m$	: 平均垂直応力
$\sigma_r$	: 参照応力
$\sigma_y$	: 降伏応力
$\chi$	: 第2 中間配置を与える一般的な直交テンソル
$\bar{\psi}$	: 単位体積あたりの全自由エネルギー
$\bar{\psi}^d$	: 単位体積あたりの全自由エネルギーの散逸部分
$\psi$	: 自由エネルギー密度
$\Omega_x$	: 一般的な共回転スピンの
$\omega$	: 面積分率としてのクレーズ密度
$\hat{\omega}$	: 体積分率としてのクレーズ密度
$\hat{\omega}_{ge}$	: 体積分率としてのクレーズ発生密度 ( $\hat{\omega}_{ge} \equiv \int_l C_{ge}$ )
$D/Dt$	: 物質時間微分を表す演算子
$( )_A$	: テンソルの反対称部分を表す記号
$( )_s$	: テンソルの対称部分を表す記号
$( )^T$	: テンソルの転置を表す記号

$\tilde{A}$  :  $A$  の  $J$  倍を表す記号

$\bar{A}$  :  $A$  の仮想量を表す記号

## 1章の参考文献

- (1.1) Osswald, A. and Menges, G., “Materials Science of Polymers for Engineers”, (1996), Carl Hanser Verlag.
- (1.2) Callister, W.D., “Materials Science and Engineering An Introduction”, (2000), John Wiley & Sons, Inc.
- (1.3) 野田直剛, 中村保, 基礎塑性力学, (1991), 日新出版
- (1.4) 小林誠一, 岡田裕, “樹脂材料の塑性変形に関する硬化則の同定”, 日本機械学会全国大会講演論文集, Vol. 76, No.1 (1998), pp.473-474.
- (1.5) 井上達雄, 山本勲, “高分子材料の非弾性変形に伴うクレイジングのテンソル表示とその特性”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 48, No.426 (1982), pp.221-229.
- (1.6) 北川正義, “ガラス状高分子材の降伏”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.45, No.400 (1979), pp.1512-1519.
- (1.7) 北川正義, 川越誠, “クレイズの発生と成長を伴う高分子材料の塑性変形”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.46, No.411 (1980), pp.1290-1297.
- (1.8) 古口日出男, 堀幸夫, “高分子材料のクレイズの発生・成長に関する研究(第3報, クレイズの停止について)”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 53, No.491 (1987), pp.1151-1156.
- (1.9) 鶴田望, 柘植康仁, 前田尚志, 中沖隆彦, 林久夫, “エンジニアリングプラスチックの破壊の微視的メカニズム”, 高分子論文集, Vol.54, No.4 (1997), pp.199-208.
- (1.10) Rottler, J. and Robbins, M. O., “Growth, microstructure, and failure of crazes in glassy polymers”, *Physical Review E*, Vol.68, No.1 (2003), pp.011801-011801-18.
- (1.11) Donald, M. A. and Kramer, J. E., “Plane Stress Deformation Zones at Crack Tips in Polycarbonate”, *Journal of Materials Science*, Vol.16 (1981), pp.2967-2976.
- (1.12) Donald, M. A., Kramer, J. E. and Kambour, P. R., “Interaction of Crazes with Pre-existing Shear Bands in Glassy Polymers”, *Journal of Materials Science*, Vol.17 (1982), pp.1739-1744.
- (1.13) Donald, M. A. and Kramer, J. E., “Effect of Molecular Entanglements on Craze Microstructure in Glassy Polymers”, *Journal of Polymer Science: Polymer Physics Edition*, Vol.20 (1982), pp.899-909.
- (1.14) Henkee, S. C. and Kramer, J. E., “Crazing and Shear Deformation in Crosslinked Polystyrene”, *Journal of Polymer Science: Part B: Polymer Physics*, Vol.34 (1996), pp.2825-2841.
- (1.15) Gensler, R., Plummer, G., C.J., Grein, C., Kausch, -H., H., “Influence of the loading rate on the fracture resistance of isotactic polypropylene and impact modified isotactic polypropylene”, *Polymer*, Vol.41 (2000), pp.3809-3819.
- (1.16) Van Melick, G.H. H., Bressers, F.J.T. O., Den Toonder, M.J. J., Govaert, E. L. and Meijer, E.H. H., “A Micro-indentation method for probing the craze-initiation stress in glassy polymers”, *Polymer*, Vol.44 (2003), pp.2481-2491.
- (1.17) Meijer, E.H. H. and Govaert, E. L., “Mechanical Performance of Polymer Systems: The Relation between Structure and Properties”, *Progress in Polymer Science*, Vol.30 (2005), pp.915-938.

- (1.18) Deblieck, A.C. R, Van Beek J.M. D., Remerie, K. and Ward, M. I., “Failure Mechanisms in Polyolefines: The Role of Crazeing, Shear yielding and the Entanglement Network”, *Polymer*, Vol.52 (2011), pp.2979-2990.
- (1.19) Mallick, K. P. and Zhou, Y., “Yield and Fatigue Behavior of Polypropylene and Polyamide-6 nanocomposites”, *Journal of Materials Science*, Vol.38 (2003), pp.3183-3190.
- (1.20) Leever, S. P. and Godart, M-A., “Adiabatic Decohesion in a Thermoplastic Craze Thickening at Constant or Increasing rate”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.56, No.6 (2008), pp.2149–2170.
- (1.21) 古口日出男, 堀幸夫, “高分子材料のクレイズの発生・成長に関する研究(第1報, クリーブとクレイズ成長との関係)”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.51, No.467 (1985), pp.1687-1694.
- (1.22) 永井信一郎, 石川優, “ポリプロピレンの疲労破壊”, 高分子論文集, Vol.52, No.3 (1995), pp.125-133.
- (1.23) 北川正義, 小河弘, “ガラス状高分子圧延異方性材のクレイズ発生(ポリカーボネイト)”, 材料, Vol.25, No.277 (1976), pp.974-978.
- (1.24) King, P, S. and Kramer, E, J., “Craze intersections in biaxially-stressed polystyrene”, *Journal of materials science*, No.16 (1981), pp.1843-1852.
- (1.25) Luo, W., Yang, T. and Wang, X., “Time-dependent craze zone growth at crack tip in polymer solids”, *polymer*, Vol.45, (2008), pp.3519-3525.
- (1.26) 武野明義, “周期的クレイズ生成を利用したメソポーラス層複合高分子フィルム及び繊維”, 繊維と工業, Vol.64, No.12 (2008), pp.432-435.
- (1.27) 武野明義, 吉村昌也, 三輪寛, 横井輝之, “クレイズ内重合によるポリピロール/ポリフッ化ビニリデン複合フィルムの異方導電性と異方光透過特性”, 繊維学会誌, Vol.57, No.11 (2001), pp.301-305.
- (1.28) 武野明義, 尾関孝充, 三輪寛, 横井輝之, “周期的マイクロネッキングを持つポリエステル単繊維”, 繊維学会誌, Vol.63, No.7 (2007), pp.172-176.
- (1.29) 自動車技術会, 自動車技術, Vol.66, No.8 (2012), pp.140-142.
- (1.30) 大林和弘, “車両開発プロセスの革新に向けた CAE 活用の動向”, 日産技報, No.66 (2010-3), pp.48-51.
- (1.31) 河野勝人, 朝日龍介, 杉本繁, 上野正樹, 小島宏介, 花田裕, “衝突安全開発における CAE の進化”, マツダ技報, No.30 (2012), pp.151-155.
- (1.32) 大林和弘, 名取奏, 井山淳, 園山大介, “CAE による衝突安全技術向上”, 日産技報, No.66 (2010-3), pp.59-62.
- (1.33) 後藤學, 実践 有限要素法—大変形弾塑性解析—, (1995), コロナ社.
- (1.34) 富田佳宏, 数値弾塑性力学—有限要素シミュレーション—基礎と応用, (1990), 養賢堂.

- (1.35) 高橋順一, 加藤巖生, “樹脂パーツ開発における CAE の活用～損傷に基づく破断予測シミュレーション”, *Polyfile*, 2010 年 2 月号.
- (1.36) 日刊工業新聞特別取材班, 旭化成の研究, (2012), 日刊工業新聞社.
- (1.37) Belytschko, T., Liu, W. K. and Moran, B., *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, (2000), John Wiley & Sons Ltd.
- (1.38) Huberth, F., Hiermaier, S. and Neumann, M., “Material Model for Polymers under Crash Loads Existing LS-DYNA Models and Perspective”, *LS-DYNA Anwenderforum*, (2005), Material Session(H-I-3).
- (1.39) Nutini, M. and Vitali, M., “Characterization of Polyolefins of Design under Impact: from True Stress/Local Strain Measurements to the F.E. Simulation with LS-DYNA Mat.SAMP-1”, *LS-DYNA Anwenderforum*, (2008), Material Session(D-I-11).
- (1.40) 一ノ瀬規世, “自動車関連樹脂部品の衝突解析の現状と今後の課題”, *成型加工*, Vol.20, No.5 (2008), pp.291-295.
- (1.41) Vogler, M., Kolling, S. and Haufe, A., “A Constitutive Model for Plastics with Piecewise Linear Yield Surface and Damage”, *LS-DYNA Anwenderforum*, (2007), Crash II, pp.B-II-13 - B-II-30.
- (1.42) Haufe, A., Du Bois, P.A., Kolling, S. and Feucht, M., “A Semi-analytical Model for Polymers Subjected to High Strain Rates”, *5th European LS-DYNA User Conference*, (2005), Material Technology Session, pp. 2b-58.
- (1.43) 高野直樹, 奥野義紘, “マルチスケール法による不均質体中のき裂先端におけるマイクロ応力解析” *日本機械学会論文集 A 編*, Vol.70, No.692 (2004), pp.525-531.
- (1.44) 高野直樹, 座古勝, “微視破壊を考慮した均質化法による織物複合材料の非線形解析”, *材料*, Vol.44, No.505 (2006), pp.1231-1237.
- (1.45) 山本崇史, 丸山新一, 泉井一浩, 西脇眞二, 寺田賢二郎, “マルチスケール解析による多孔質吸音材モデル”, *日本機械学会論文集 C 編*, Vol.76, No.768 (2010), pp.2039-2048.
- (1.46) Asanishi, M., Takaki, T. and Tomita, Y., “Polymer Spherulite Growth Simulation during Crystallization by Phase-Field Method”, *AES-ATEMA'2007 International Conference*, Montreal, Canada, August 06-10, (2007), pp.195-203.
- (1.47) Mae, H., Omiya, M. and Kishimoto, K., “Microstructural Observation and Simulation of Micro Damage Evolution of Ternary Polypropylene Blend with Ethylene-Propylene-Rubber(EPR) and Talc”, *Journal of Solid Mechanics and Materials Engineering*, Vol.2, No.8 (2008), pp.1018-1036.
- (1.48) 内田真, 富田佳宏, “異なる応力状態下における結晶性高分子材料のメゾ領域の変形挙動”, *日本機械学会論文集 A 編*, Vol. 71, No.707 (2005), pp. 996-1002.
- (1.49) 内田真, 多田直哉, 富田佳宏, “ゴム粒子を充填した結晶性ポリマーの変形挙動のマルチスケールモデリング”, *日本機械学会論文集 A 編*, Vol. 73, No.725 (2007), pp.73-79.

- (1.50) Uchida, M., Tada, N. and Tomita, Y., “Computational Evaluation of Elasto-Viscoplastic Deformation and Strength of Rubber Blended Semi-crystalline Polymer”, *International Journal of Damage Mechanics*, Vol.19, No.3 (2010), pp.361-374.
- (1.51) 陸偉, 富田佳宏, “ゴム充てん非晶性ポリマーの変形特性の評価”, *材料*, Vol.50, No.6 (2001), pp.578-584.
- (1.52) 陸偉, Naghi K. Esmacili, 富田佳宏, “ガラス繊維充填熱可塑性樹脂の変形挙動に及ぼす界面効果の評価”, *日本機械学会論文集 A 編*, Vol. 71, No.710 (2005), pp.1299-1305.
- (1.53) 陸偉, 富田佳宏, “軟質ゴム粒子充填ポリマーの変形挙動の評価”, *日本機械学会論文集 A 編*, Vol. 69, No.678 (2003), pp.265-272.
- (1.54) 田中繁之, 富田佳宏, 陸偉, “円柱状介在物を含む非晶性高分子材料の引張変形挙動シミュレーション”, *日本機械学会論文集 A 編*, Vol.66, No.643 (2000), pp.454-463.
- (1.55) 古谷泰大, 内藤正登, 陸偉, 富田佳宏, “カーボンブラック充填ゴムの繰り返し変形挙動の評価”, *日本機械学会論文集 A 編*, Vol.71, No.708 (2005), pp.1109-1115.
- (1.56) Kobayashi, M., Mukai, M., Takahashi, H., Ohno, N., Tawakami, T. and Ishikawa, T., “Implicit integration and consistent tangent modulus of a time-dependent non-unified constitutive model”, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol.58 (2003), pp.1523-1543.
- (1.57) Kuhn, W. and Gr $\ddot{u}$ n, F., “Besiehungen Zwischen Elastischen Konstanten und Dehnungsdoppelbrechung Hochelastischer Stoffe”, *Kolloid-Zeitschrift*, Vol.101, No.3 (1942), pp.248-271.
- (1.58) Tomita, Y., “Constitutive Modeling of Deformation Behavior of Glassy Polymers and Applications”, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol.42, No.8 (2000), pp.1455-1469.
- (1.59) Arruda, E. M. and Boyce, M. C., “A Three-Dimensional Constitutive Model for the Large Stretch Behavior of Rubber Elastic Materials”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.41, No.2 (1993), pp.389-412.
- (1.60) Tomita, Y. and Adachi, T., “Network Models for Glassy Polymer and Prediction of Instability Propagation”, *Materials Science Research International*, Vol.3, No.3 (1997), pp.125-136.
- (1.61) Tomita, Y. and Adachi, T. and Tanaka, S., “Computational Prediction of Instability Propagation in Glassy Polymers”, *Archives of Computational Methods in Engineering*, Vol.5, No.2 (1998), pp.168-198.
- (1.62) Wu, P. D. and Van der Giessen, E., “On Improved Network Models for Rubber Elasticity and Their Applications to Orientation Hardening in Glassy Polymers”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.41, No.3 (1993), pp.427-456.
- (1.63) Tomita, Y. and Tanaka, S., “Prediction of Deformation Behavior of Glassy Polymers Based on Molecular Chain Network Model”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.32, No.23 (1995), pp.3423-3434.
- (1.64) 富田佳宏, “ガラス状ポリマーの分子鎖網目理論による構成式と変形挙動のシミュレーション”, *塑性と加工*, Vol.37, No.424 (1996), pp.485-491.

- (1.65) 富田佳宏, “非晶性ポリマの分子鎖網目理論による構成式とその応用”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.66, No.643 (2000), pp.420-427.
- (1.66) 灘裕統, 志澤一之, “自由体積変化に基づく確率論的非弾性応答則を用いた非晶性ポリマの結晶塑性論的分子鎖塑性モデル”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.74, No.737 (2008), pp.97-104.
- (1.67) 灘裕統, 志澤一之, “自由体積変化を考慮した結晶塑性論的分子鎖塑性モデルに基づく非晶性ポリマの大変形シミュレーション”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.74, No.737 (2008), pp.105-114.
- (1.68) 灘裕統, 只野裕一, 志澤一之, “非晶性ポリマの分子鎖多絡み点を考慮した分子鎖塑性モデルおよび変形誘起異方性に関する大変形 FEM 解析”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 74, No.743 (2008), pp.961-970.
- (1.69) Peirce, D., Asaro, R. J. and Needleman, A., “Material Rate Dependence and Localized Deformation in Crystalline Solids”, *Acta Metallurgica*, Vol.31, No.12 (1983), pp.1951-1976.
- (1.70) Hutchinson, J. W. and Neale, K. W., “Neck Propagation”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.31, No.5 (1983), pp. 405-426.
- (1.71) Chater, E. and Hutchinson, J. W., “On the Propagation of Bulges and Buckles”, *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol.51, No.2 (1984), pp.269-277.
- (1.72) Tugcu, P. and Neale, K. W., “Analysis of Plane-Strain Neck Propagation in Viscoplastic Polymeric Films”, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol.29, No.12 (1987), pp.793-805.
- (1.73) Tugcu, P. and Neale, K. W., “Analysis of Neck Propagation in Polymeric Fibers Including the Effects of Viscoplasticity”, *Transactions of the ASME, Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 110, No.4 (1988), pp.395-400.
- (1.74) Tomita, Y. and Hayashi, K., “Thermo-Elasto-Viscoplastic Deformation of Polymeric Bars under Tension”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 30, No.2 (1993), pp.225-235.
- (1.75) Tugcu, P. and Neale, K., “Cold Drawing of Polymers with Rate and Temperature Dependent Properties”, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol.32, No.5 (1990), pp.405-416.
- (1.76) Tomita, Y. and Hayashi, K., “Deformation Behavior in Elasto-Viscoplastic Polymeric Bars Under Tension”, *Proceedings of PLASTICITY '91*, (1991), pp.524-527.
- (1.77) Tomita, Y., Shindo, A. and Sasayama, T., “Plane Strain Tension of Thermo-Elasto-Viscoplastic Blocks”, *International Journal of Mechanical Science*, Vol.32, No.7 (1990), pp. 613-622.
- (1.78) 佐野村幸夫, 早川邦夫, 水野衛, “有理連続体力学に基づく延伸高分子材料の異方弾性構成式の定式化”, 成型加工, Vol.18, No.4 (2006), pp.300-305.
- (1.79) Sanomura, Y., “Constitutive Equation for Plastic Behavior of Hydrostatic-Pressure-Dependent Polymers”, *Materials Science Research International*, Vol.9, No.4 (2003), pp.243-247.
- (1.80) 村上大介, 小林誠一, 鳥垣俊和, 志澤一之, “ポリマの粘塑性大変形挙動に関する熱・力学的モデリングとシミュレーション(第1報, ひずみ速度依存性に由来する構成式の非共軸性)”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 68, No.668 (2002), pp.674-681.



- (1.81) 村上大介, 小林誠一, 鳥垣俊和, 志澤一之, “ポリマの粘塑性大変形挙動に関する熱・力学的モデリングとシミュレーション(第2報, 流れ則に基づく尖り点モデルとそのFEM解析)”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 68, No.668 (2002), pp.682-689.
- (1.82) 小林誠一, 富井大介, 志澤一之, “クレイズの進展・消滅を考慮したポリマの破断予測モデルおよび大変形シミュレーション”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 70, No.694 (2004), pp.810-817.
- (1.83) Gurson, A. L., “Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I Yield criteria and flow rules for porous ductile media”, *Journal of Engineering Materials and Technology, Trans. ASME*, Vol.99, (1977), pp.2-15.
- (1.84) Kawagoe, M. and Kitagawa, M., “Craze Initiation in Poly(methyl Methacrylate) under Biaxial Stress”, *Journal of Polymer Science: Polymer Physics Edition*, Vol.19, (1981), pp.1423-1433.
- (1.85) Green, A. E. and Zerna, W., *Theoretical Elasticity*, 2nd Edition, (1968), pp.72, Oxford University Press.
- (1.86) Ziegler, H., *An Introduction to Thermomechanics*, (1983), pp.268, North-Holland.



## 第2章 運動学

本章では、Shizawa-Zbib<sup>(2.1)</sup>による手法に基づき、初期配置および現配置に加えて2つの中間配置を導入する。ポリマは金属のような規則正しい結晶格子構造をもたないため、粘塑性変形の素過程を転位運動に関係付けることはできない。そこで、材料に依存しないスピンを共回転スピンの用いる。この材料に依存しないスピンの導入により変形過程を4つの配置に分解し、客観性を有する共回転応力速度を定義する。その際、小林ら<sup>(1.82)</sup>の手法に基づき、第2中間配置に損傷による観測断面積の変化を考慮した損傷配置と、それと変形が等価であるが損傷による断面積変化を考慮しない仮想的な擬似無損傷配置を導入する。また、現配置から弾・剛体回転を取り除いた第2中間配置で定義された量は客観性を有することから、第2中間配置を構成式の参照配置に選ぶことの妥当性を村上ら<sup>(1.80)(1.81)</sup>と同様の手法で示す。

### 2.1 第2中間配置における擬似無損傷配置の導入

Shizawa-Zbib<sup>(2.1)</sup>による手法に基づき、初期配置  $\beta_{(i)}$  から現配置  $\beta_{(e)}$  への変形過程を、まず  $\beta_{(i)}$  から第1中間配置<sup>(2.2)</sup>  $\beta_{(M)}$  へ塑性変形が[補足 B.1]、次に  $\beta_{(M)}$  から第2中間配置  $\beta_{(m)}$  へ弾性変形が生じ、さらに  $\beta_{(m)}$  から  $\beta_{(e)}$  へ直交テンソル  $\chi$  による剛体回転が起こり全変形が終了するものとする(図2.1)。このことは、変形こう配  $F$  を次のように分解[補足 B.2]することに他ならない。

$$F = RU = \chi U_x^e U_x^p = F_x^* U_x^p = \chi \bar{U}_x \tag{2.1}$$

ここで、式の最初の等号部分は通常の極分解であり、 $R$ は剛体回転の直交テンソル、 $U$ は右ストレッチテンソルを表す。また、第2の等号が弾塑性分解であり、 $U_x^e$ および $U_x^p$ は直交テンソル $\chi$ に対応する弾性および塑性ストレッチ、 $F_x^*$ および $\bar{U}_x$ はそれぞれ $F_x^* \equiv \chi U_x^e$ および $\bar{U}_x \equiv U_x^e U_x^p$ で定義される。

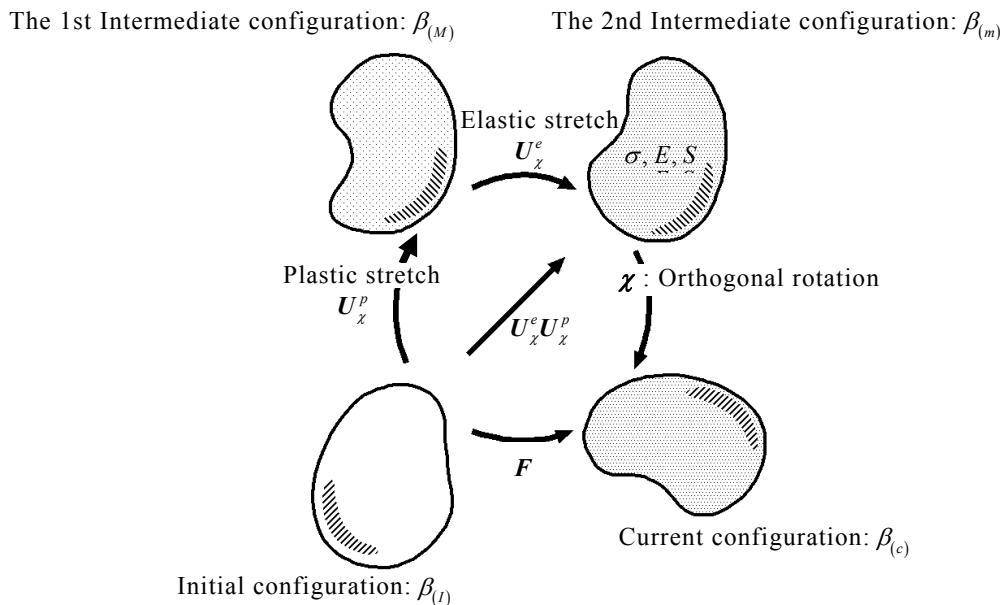


Fig.2.1 Configurations

各種スピンに対応する直交テンソル  $\chi$  が  $\mathbf{R}$  , 左ストレッチテンソルを対角化する直交テンソル  $\mathbf{Q}$  および速度こう配の反対称部分を表現する直交テンソル  $\mathbf{R}_W$  である場合, 共回転スピン  $\mathbf{\Omega}_\chi \equiv \dot{\chi}\chi^T$  は, それぞれ Green-Naghdi スピン, Euler スピン, 連続体スピンに一致する. なお, ここではポリマの粘弾性は考慮せず, その変形過程が式(2.1)のように弾性と塑性に分離できるものとする.

ここで, 現配置  $\beta_{(c)}$  における2階のテンソルを  $\mathbf{A}$ ,  $\beta_{(m)}$ ,  $\beta_{(M)}$  および  $\beta_{(I)}$  においては  $\mathbf{A}_{(m)}$ ,  $\mathbf{A}_{(M)}$  および  $\mathbf{A}_{(I)}$  とすれば,  $\mathbf{A}$  は  $\mathbf{A}_{(m)} = \chi^T \mathbf{A} \chi$  のように変換されるので,  $\mathbf{A}_{(m)}$  の速度(物質時間微分)は次のように与えられる[補足B.3].

$$\dot{\mathbf{A}}_{(m)} = \chi^T \overset{\nabla}{\mathbf{A}} \chi \tag{2.2}$$

$$\overset{\nabla}{\mathbf{A}} \equiv \mathbf{A} - \mathbf{\Omega}_\chi \mathbf{A} + \mathbf{A} \mathbf{\Omega}_\chi \tag{2.3}$$

したがって, 構成式の参照配置<sup>(1.80)(1.81)</sup>として  $\beta_{(m)}$  を採用すれば, 共回転スピンの  $\mathbf{\Omega}_\chi$  となることわかる.

次に, 図 2.2 に示すようにクレーズによる断面積の変化を考慮する損傷配置[図 2.2(b)]および, それとひずみが等価であるがクレーズによる断面積変化を考慮しない仮想的な擬似無損傷配置[図 2.2(a)]を第2中間配置  $\beta_{(m)}$  に導入する<sup>(1.82)</sup>. ここで, 損傷配置における応力, 縦弾性係数, 断面積をそれぞれ  $\sigma^*$ ,  $E_0$  および  $S^*$  とし, 擬似無損傷配置におけるそれらをそれぞれ  $\sigma$ ,  $E$  および  $S$  とする. ここで面積分率としてのクレーズ密度を  $\omega$  とすれば, 両配置間の断面積の関係は次式のように表される.

$$S^* = (1 - \omega)S \tag{2.4}$$

また, 両配置間の弾性ひずみが等しいとするひずみ等価配置の概念<sup>(2.3)</sup>を導入すれば, 次式が成立する.

$$\sigma/E = \sigma^*/E_0 \tag{2.5}$$

したがって両配置間の応力および縦弾性係数の関係は,  $\omega$  を介して次式のように表現できる.

$$\sigma^* = \sigma/(1 - \omega), \quad E = E_0(1 - \omega) \tag{2.6}$$

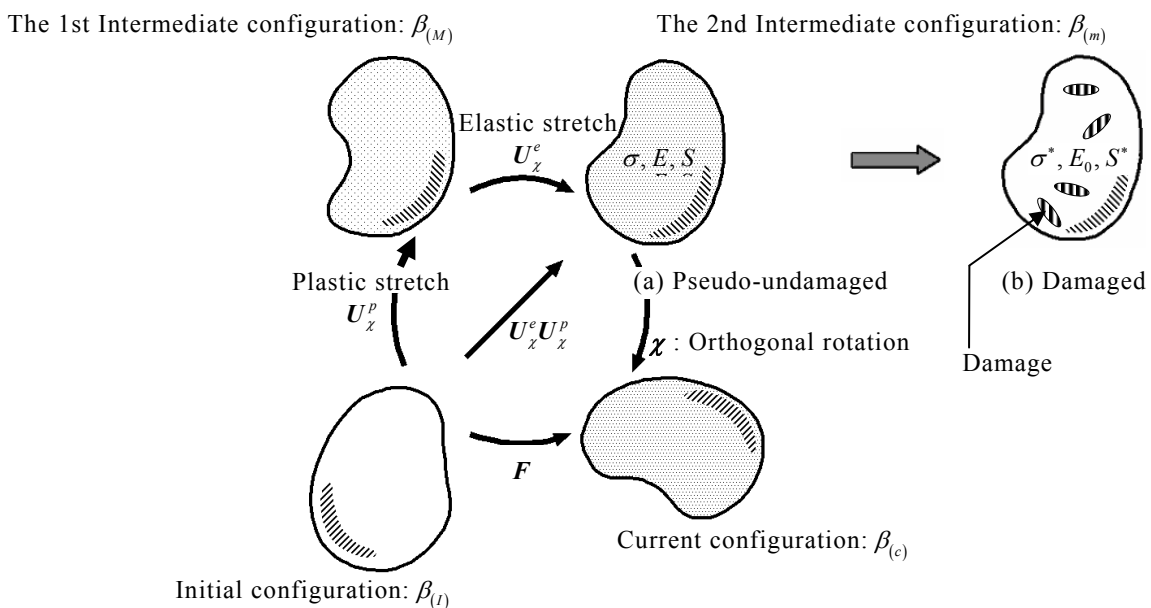


Fig.2.2 Introduction of pseudo-undamaged and damaged configurations

ここで、擬似無損傷配置における見かけの縦弾性係数  $E$  には損傷の影響が内在しているが、損傷配置における真の弾性係数である  $E_0$  は初期縦弾性係数のまま一定となる。なお、クレーズは主応力方向に対して垂直な方向へ進展することが知られている<sup>(1,5)</sup>ので、 $\omega$  は異方性をもつ量として定義すべきであるが、本論文では簡単のため、小林ら<sup>(1,82)</sup>と同様に  $\omega$  を等方的なスカラー量として扱うことにする。

## 2.2 ひずみの弾・塑性分解

従来どおり微小線素の自乗の差を用いて、ひずみを定義する。図 2.2 より各配置での微小線素ベクトル間の関係は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} dx &= \chi dx_{(m)} \\ dx_{(m)} &= U_\chi^e \chi dx_{(M)} \\ dx_{(M)} &= U_\chi^p \chi dX_{(I)} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

このとき微小線素の自乗の差は

$$dx^2 - dX_{(I)}^2 = (dx^2 - dx_{(M)}^2) + (dx_{(M)}^2 - dX_{(I)}^2) \quad (2.8)$$

と表される。式(2.7)を式(2.8)に代入して整理すると

$$dx^2 - dX_{(I)}^2 = 2E_{(M)}^e \cdot dx_{(M)} \otimes dx_{(M)} + 2E_{(I)}^p \cdot dX_{(I)} \otimes dX_{(I)} \quad (2.9)$$

となる。ここで  $E_{(M)}^e$  および  $E_{(I)}^p$  は Green ひずみの弾性部分および塑性部分であり、従来と同様の形式で次のように定義される。

$$E_{(M)}^e \equiv \frac{1}{2}(U_\chi^{eT} U_\chi^e - I) \quad (2.10)$$

$$E_{(I)}^p \equiv \frac{1}{2}(U_\chi^{pT} U_\chi^p - I) \quad (2.11)$$

ただし、 $I$  は恒等テンソルを表す。式(2.7)を式(2.9)に適用すれば、弾性ひずみおよび塑性ひずみにおける配置間の変換則が次のように得られる。

$$\begin{aligned} E &= \chi E_{(m)} \chi^T \\ &= \chi (U_\chi^{e-T} E_{(M)} U_\chi^{e-1}) \chi^T \\ &= \chi U_\chi^{e-T} (U_\chi^{p-T} E_{(I)} U_\chi^{p-1}) U_\chi^{e-1} \chi^T \end{aligned} \quad (2.12)$$

## 2.3 ひずみ速度の弾・塑性分解

各配置でのひずみ速度と変形速度の関係を導くために、通常の金属材料と同様にポリマにおいても弾性変形は微小であり、塑性変形は有限であると仮定し、 $U_\chi^e$  に関する2次項で  $U_\chi^e = I$  と近似する。そのとき、第2中間配置  $\beta_{(m)}$  におけるひずみ速度は次式のように書ける。

$$\dot{E}_{(m)}^e = (\dot{U}_\chi^e U_\chi^{e-1})_s \quad (2.13)$$

$$\dot{E}_{(m)}^p = (\dot{U}_\chi^p U_\chi^{p-1})_s \quad (2.14)$$

ここで、 $A_s$  は2階のテンソル  $A$  の対称部分である。また、 $\overset{\Delta}{A}$  は初期配置  $\beta_{(I)}$  を参照した場合のCotter-Rivlin速度であり、次のように定義される。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_{(m)}^p &\equiv \dot{\mathbf{E}}_{(m)}^p + \bar{\mathbf{L}}_{(m)}^T \mathbf{E}_{(m)}^p + \mathbf{E}_{(m)}^p \bar{\mathbf{L}}_{(m)} \\ \bar{\mathbf{L}}_{(m)} &\equiv \bar{\mathbf{U}}_{\chi} \bar{\mathbf{U}}_{\chi}^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

## 2.4 変形速度の弾・塑性分解

現配置  $\beta_{(c)}$  での変形速度  $\mathbf{D}$  は,  $\mathbf{D} = (\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1})_s = \boldsymbol{\chi}\mathbf{D}_{(m)}\boldsymbol{\chi}^T$  で与えられるので, 第2中間配置  $\beta_{(m)}$  における変形速度は

$$\mathbf{D}_{(m)}^e = (\dot{\mathbf{U}}_{\chi}^e \mathbf{U}_{\chi}^{e-1})_s \quad (2.16)$$

$$\mathbf{D}_{(m)}^p = (\dot{\mathbf{U}}_{\chi}^p \mathbf{U}_{\chi}^{p-1})_s \quad (2.17)$$

となる. 式(2.13)と式(2.16), 式(2.14)と式(2.17)を比較すれば, 変形速度  $\mathbf{D}_{(m)}$  はひずみ速度を用いて

$$\mathbf{D}_{(m)} = \mathbf{D}_{(m)}^e + \mathbf{D}_{(m)}^p = \dot{\mathbf{E}}_{(m)}^e + \mathbf{E}_{(m)}^p \quad (2.18)$$

のように表される. いま, 式(2.18)を基準時刻  $t_0$  から現時刻  $t$  まで時間積分すると

$$\int_{t_0}^t \mathbf{D}_{(m)}(\tau) d\tau = \mathbf{E}_{(m)}^e + \bar{\mathbf{E}}_{(m)}^p \quad (2.19)$$

となる. ここで,  $\bar{\mathbf{E}}_{(m)}^p$  は次式で定義される塑性変形尺度であり, 塑性ひずみ尺度  $\mathbf{E}_{(m)}^p$  とは異なる.

$$\bar{\mathbf{E}}_{(m)}^p \equiv \int_{t_0}^t \mathbf{E}_{(m)}^p(\tau) d\tau, \quad \bar{\mathbf{E}}_{(m)}^p \neq \mathbf{E}_{(m)}^p \quad (2.20)$$

しかしながら,  $\mathbf{D}_{(m)}^e$  の積分形は完全に弾性ひずみ尺度  $\mathbf{E}_{(m)}^e$  に一致する. このことは弾性ひずみおよび塑性ひずみがそれぞれ可逆量および非可逆量であることを意味する. 以上より, 第2中間配置  $\beta_{(m)}$  を構成式の参照配置に選ぶのが妥当であるといえる.

## 2章の参考文献

- (2.1) Shizawa, K. and Zbib, H. M. , “A Thermodynamical Theory of Gradient Elastoplasticity with Dislocation Density Tensor. I: Fundamentals”, *International Journal of Plasticity*, Vol.15, No.9(1999), pp.899-938.
- (2.2) Lee, E. H. and McMeeking, R. M., “Concerning Elastic and Plastic Components of Deformation”, *International Journal of Solid and Structures*, Vol.16, No.8 (1980), pp.899-938.
- (2.3) Lemaitre, J., “Evaluation of Dissipation and Damage in Metals Subjected to Dynamic Loading”, *Proceedings of International Conference on the Mechanical Behavior of Materials 1.*, Kyoto, (1971).



## 第3章

# 熱力学的力の定義と釣り合い方程式

本章では、全自由エネルギーの引数に内部変数として塑性ひずみ速度およびクレーズ密度を導入し、これらに共役な熱力学的力を定義する。ここで内部変数とは、他の変数と同様に連続体の内部構造に起因する巨視的な量であるが、他の巨視的な変数と比べて巨視的エネルギーに対する寄与が小さい変数のことである。内部変数の増加にともない状態の自由度が増加するため、釣合い方程式系を検証する必要がある。そこで、連続の式、力学的釣合い方程式、エネルギー方程式およびエントロピー不等式を、それぞれ質量保存則、仮想仕事の原理、熱力学第1法則および熱力学第2法則に基づいて導出する。また、仮想仕事の原理からは、運動方程式および角運動方程式とともに力学的境界条件も得られる。以上の手続きは村上ら<sup>(1.80)(1.81)</sup>および小林ら<sup>(1.82)</sup>によるものに基づく。なお、本研究においては熱伝導現象は扱わないので、簡単のため、熱流束の項は省略する。

### 3.1 熱力学的力の定義

構成式の参照配置である第2中間配置 $\beta_{(m)}$ において、全自由エネルギー $\bar{\Psi}$ の引数に内部変数として、塑性ひずみ速度 $\mathbf{D}_{(m)}^p$ およびクレーズ密度 $\omega$ を導入する。

$$\bar{\Psi} = \bar{\Psi}(\theta, \bar{\mathbf{E}}_{(m)}; \mathbf{D}_{(m)}^p, \omega) \quad (3.1)$$

ただし、 $(\bar{\quad})$ は非状態量を、 $(\quad)_{(m)}$ は配置 $\beta_{(m)}$ を参照した量を表している。また、セミコロン「;」の右側の引数は内部変数、左側は巨視的な変数であり、それぞれ $\theta$ は温度、 $\bar{\mathbf{E}}_{(m)}$ は全ひずみである。ここで、式(3.1)を物質時間微分すれば次式を得る。

$$\dot{\bar{\Psi}}(\theta, \bar{\mathbf{E}}_{(m)}, \bar{\mathbf{p}}_{(m)}; \dot{\mathbf{E}}_{(m)}^p, \dot{\omega}) = -H\dot{\theta} + \tilde{\mathbf{T}}_{(m)} \cdot \dot{\bar{\mathbf{E}}}_{(m)}^p + \tilde{\mathbf{M}}_{(m)} \cdot \dot{\bar{\mathbf{E}}}^p + \tilde{Y}\dot{\omega} = -H\dot{\theta} + \tilde{\mathbf{T}}_{(m)} \cdot \mathbf{D}_{(m)} + \tilde{\mathbf{M}}_{(m)} \cdot \mathbf{D}_{(m)}^p + \tilde{Y}\dot{\omega} \quad (3.2)$$

式(3.2)より熱力学的力は、次のように定義される。

$$\left. \begin{aligned} -H &\equiv \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta}, & \tilde{\mathbf{T}}_{(m)} &\equiv \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\mathbf{E}}_{(m)}} \\ \tilde{\mathbf{M}}_{(m)} &\equiv \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \mathbf{D}_{(m)}^p}, & \tilde{Y} &\equiv \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \omega} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

ここで、 $H$ はエントロピー、 $\tilde{\mathbf{T}}_{(m)}$ はKirchhoff応力、 $\tilde{\mathbf{M}}_{(m)}$ は $\mathbf{D}_{(m)}^p$ に共役な内力および $\tilde{Y}$ は損傷共役力である。また、 $(\tilde{\quad})$ は変形こう配 $\mathbf{F}$ のヤコビアン： $J \equiv \det \mathbf{F}$ を乗じた量であり、たとえば $\tilde{\mathbf{T}}_{(m)} = J \mathbf{T}_{(m)}$ である。ただし、 $\mathbf{T}_{(m)}$ は第2中間配置におけるCauchy応力である。

### 3.2 連続の式

質量保存則は次式のように定式化される。

$$\frac{D}{Dt} \int_v \rho dv = 0 \quad (3.4)$$

ここで、 $\rho$ は現配置の密度、 $v$ は物質検査体積、 $dv$ は微小体積要素、また $D/Dt$ は物質時間微分

$DA/Dt \equiv \dot{A}$ を表す演算子である。式(3.4)の左辺にReynoldsの輸送定理:

$$\frac{D}{Dt} \int_v A dv = \int_v (\dot{A} + A \operatorname{div} \mathbf{v}) dv \quad (3.5)$$

を適用し局所化すると次のような連続の式を得る.

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (3.6)$$

ここで,  $\mathbf{v}$  は物質速度である. 式(3.6)は通常の連続の式である.

### 3.3 力学的釣合い方程式

内部変数の導入は, 状態の自由度の増加を意味するため, この自由度すなわち変数の増加にともない釣合い方程式系を検証する必要がある. そこで, 式(3.3)で定義した内力に対する力学的釣合い方程式を仮想仕事率の原理に基づいて導出する. この原理は, 「外力(表面力および物体力)のなす仮想仕事率は, 内力のなす仮想仕事率に等しい。」と一般に述べられ, 次のように定式化される.

$$\oint_{\partial v} \check{P}_s da + \int_v \check{P}_b dv = \int_v \check{P} dv \quad (3.7)$$

ここで,  $\partial v$  は体積  $v$  を囲む物質検査面,  $da$  は微小面積要素である. また,  $\check{A}$  は仮想量を表し,  $\check{P}_s$ ,  $\check{P}_b$  および  $\check{P}$  は, それぞれ単位体積あたりの表面力のなす仮想仕事率, 物体力のなす仮想仕事率および内力のなす仮想仕事率である. これらの仮想仕事率はそれぞれ次のように表現できる.

$$\check{P}_s = \mathbf{t} \cdot \check{\mathbf{v}} \quad (3.8)$$

$$\check{P}_b = \check{P}_0 - \check{P}_1 = \rho \mathbf{f} \cdot \check{\mathbf{v}} - \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \check{\mathbf{v}} \quad (3.9)$$

$$\check{P} = \rho \check{\psi} \Big|_{\theta, \check{\mathbf{E}}^p} = \mathbf{T} \cdot \check{\mathbf{D}} \quad (3.10)$$

ここで,  $\mathbf{t}$  は表面力,  $\check{P}_0$  は純粋な物体力  $\rho \mathbf{f}$  のなす仮想仕事率,  $\check{P}_1$  は慣性力  $\rho \dot{\mathbf{v}}$  のなす仮想仕事率である. また, 内力のなす力学的仕事率いわゆるひずみエネルギーは等温過程における全自由エネルギーに等しいことが知られている. さらに, 内部変数理論によると, 内部変数は巨視的な力学的仕事率には陽に現れないので, 内部変数も一定としている. このとき式(3.10)は以下のように書きかえられる[補足 C.1].

$$\begin{aligned} \check{P} &= \rho \check{\psi} \Big|_{\theta, \check{\mathbf{E}}^p} = \mathbf{T} \cdot \check{\mathbf{D}} \\ &= \mathbf{T} \cdot (\check{\mathbf{L}} - \check{\mathbf{W}}) \\ &= \mathbf{T} \cdot (\operatorname{grad} \check{\mathbf{v}} - \mathbf{I} \times \check{\mathbf{w}}) \\ &= \operatorname{div} (\mathbf{T}^T \check{\mathbf{v}}) - (\operatorname{div} \mathbf{T}) \cdot \check{\mathbf{v}} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{T}) \cdot \check{\mathbf{w}} \end{aligned} \quad (3.11)$$

ここで,  $\check{\mathbf{L}}$  および  $\check{\mathbf{W}}$  は, それぞれ仮想速度こう配およびその反対称部分  $\check{\mathbf{W}}$  の仮想量である. また,  $\check{\mathbf{w}}$  は反対称テンソル  $\check{\mathbf{W}}$  に双対な軸性ベクトルである. ただし,  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{T} \equiv e_{ijk} T_{ij} \mathbf{e}_k$  である.

式(3.8), 式(3.9)および式(3.11)を仮想仕事率の原理の式(3.7)に代入して, さらに Gauss の発散定理を用いると次式を得る.

$$\oint_{\partial v} (\mathbf{t} - \mathbf{Tn}) \cdot \check{\mathbf{v}} da + \int_v \left[ \{ \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{v}}) \} \cdot \check{\mathbf{v}} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{T}) \cdot \check{\mathbf{w}} \right] dv = 0 \quad (3.12)$$

ここで,  $\mathbf{n}$  は微小面積要素の単位法線ベクトルである.

式(3.12)が任意の仮想量について成立するための条件として次のような関係式を得る.

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{n} \quad (3.13)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{T} + \rho(\mathbf{f} - \dot{\mathbf{v}}) = 0 \quad (3.14)$$

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{T} = 0 \quad (3.15)$$

式(3.13)は Cauchy の基本定理, 式(3.14)は運動方程式および式(3.15)は角運動方程式である. なお, Cauchy の基本定理は連続体の表面における通常の力学的境界条件である. また, 運動方程式および角運動方程式は通常の力学的釣合い方程式である.

### 3.4 エネルギー方程式

熱力学の第1法則(エネルギー保存則)は, 「系内の全エネルギーの時間変化は, 単位時間あたりに系になされる外力のなす仕事と系に供給される熱量の総和に等しい。」と述べられ, 次式のように定式化できる.

$$\oint_{\partial v} P_s da + \int_v P_b dv + \int_v Q_b dv - \frac{D}{Dt} \int_v \rho(\hat{\varepsilon} + K) dv = 0 \quad (3.16)$$

ここで,  $Q_b$  は単位体積に供給される単位時間あたりの熱量であり,  $K$  は単位質量あたりの運動エネルギーである. ただし, 簡単化のためここでは面積供給熱は省略する. また,  $\hat{\varepsilon}$  は単位質量あたりの内部エネルギーであり, 内部変数によるエネルギーを含む. これらは次式のように与えることができる.

$$Q_b \equiv \rho r, \quad K \equiv \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \quad (3.17)$$

ここで,  $r$  は放射熱密度である.

ところで, 力学的エネルギーの釣合い方程式は仮想仕事率の原理における仮想量を現実量に置換することにより次式のように表せる.

$$\oint_{\partial v} P_s da + \int_v P_b dv - \frac{D}{Dt} \int_v \rho K dv - \int_v P dv = 0 \quad (3.18)$$

式(3.16)と式(3.18)で辺々を差し引きして, 局所化すると次のようなエネルギー方程式を得る.

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} + \rho(\mathbf{r} - \dot{\hat{\varepsilon}}) = 0 \quad (3.19)$$

式(3.19)は, 通常のエネルギー方程式と同形式ではあるが, 内部エネルギー速度が内部変数を含んだ形となっているところが通常とは異なる.

### 3.5 エントロピー不等式

熱力学の第2法則はエントロピー増大則ともよばれ, 「系内のエントロピーの時間変化は, 系に供給されるエントロピーよりも大きく, その差は内部エントロピー生成によって補われる。」と述べられ, 次のように定式化される.

$$\int_v \rho \gamma^{[1]} dv = \frac{D}{Dt} \int_v \rho \eta dv - \int_v \frac{\rho r}{\theta} dv \geq 0 \quad (3.20)$$

ここで,  $\overset{[1]}{\gamma}$  は内部エントロピー生成速度の密度,  $\eta$  はエントロピー密度である. なお, 簡単化のためここでは面積供給熱は省略している.

式(3.20)を局所化すると次のようなエントロピー不等式を得る.

$$\rho \overset{[1]}{\gamma} \equiv \rho \dot{\eta} - \rho \frac{r}{\theta} \geq 0 \quad (3.21)$$

式(3.21)は通常のエントロピー不等式である.



## 第4章 構成式の導出

本章では、クレーズ依存性弾粘塑性構成式を導出する[補足 D.1]。まず、Clausius-Duhem の不等式を Green-Zerna<sup>(1.85)</sup>の手法を介して保存部分と散逸部分に分離し、その保存部分から弾性構成式を導出する。一方で最大散逸速度の原理<sup>(1.86)</sup>に基づいて散逸関数を塑性ポテンシャルとする流れ則の形で粘塑性構成式が導出されるので、両者を組み合わせればクレーズが考慮された弾粘塑性構成式が得られる。最後に、熱力学的制限を通じて熱力学的力の引数を制限する。以上の構成式<sup>(4.1)</sup>の導出および引数の制限の方法は、村上ら<sup>(1.80)(1.80)</sup>および小林ら<sup>(1.82)</sup>によるものに基づく。

## 4.1 Clausius-Duhem の不等式

エネルギー方程式(3.19)を用いてエントロピー不等式(3.21)から供給熱の部分を消去し、中間配置  $\beta_{(m)}$  に戻せば、Clausius-Duhem の不等式が次のように得られる。

$$\tilde{\Phi} \equiv \rho_0 \theta \dot{\gamma} = \theta \dot{H} - \dot{\hat{U}} + \tilde{\mathbf{T}}_{(m)} \cdot \mathbf{D}_{(m)} \geq 0 \quad (4.1)$$

ここで、 $\tilde{\Phi}$  は散逸関数、 $\rho_0 (\equiv J\rho)$  は初期配置における密度、 $H$  および  $\hat{U}$  はそれぞれ  $H \equiv \rho_0 \eta$  および  $\hat{U} \equiv \rho_0 \varepsilon$  である。ここで、温度とエントロピーの独立-従属関係を逆にするために次のような自由エネルギーを導入し、Legendre 変換を行う。

$$\hat{\Psi} \equiv \hat{U} - \theta H \quad (4.2)$$

式(4.2)を式(4.1)に代入すれば、

$$\tilde{\Phi} = -\dot{\hat{\Psi}} - \dot{\theta} H + \tilde{\mathbf{T}}_{(m)} \cdot \mathbf{D}_{(m)} \geq 0 \quad (4.3)$$

を得る。

一方、全自由エネルギーの散逸部分  $\bar{\Psi}^d$  は散逸関数により次式のように定義される。

$$\bar{\Psi}^d = \int_{\tau} \tilde{\Phi} d\tau \quad (4.4)$$

上式より散逸関数は次式のように書ける。

$$\tilde{\Phi} = \dot{\hat{\Psi}} - \dot{\Psi} \equiv \dot{\bar{\Psi}}^d \geq 0 \quad (4.5)$$

式(4.5)を式(4.3)に代入すれば、次式を得る。

$$\dot{\bar{\Psi}}^d = \dot{\Psi} - \dot{\Psi} - \dot{\theta} H + \tilde{\mathbf{T}}_{(m)} \cdot \mathbf{D}_{(m)} \quad (4.6)$$

一方、式(3.1)を物質時間微分することで

$$\dot{\bar{\Psi}}^d = -\dot{\theta} H + \tilde{\mathbf{T}}_{(m)} \cdot \mathbf{D}_{(m)} + \tilde{\mathbf{M}}_{(m)} \cdot \mathbf{D}_{(m)}^p + \tilde{Y} \dot{\omega} \quad (4.7)$$

が得られる。式(4.6)と式(4.7)を比較すれば、次式のように内部変数を陽に表示した  $\dot{\bar{\Psi}}^d$  の表現が得られる。

$$\dot{\bar{\Psi}}^d = \dot{\Psi} - \tilde{\mathbf{M}}_{(m)} \cdot \mathbf{D}_{(m)}^p - \tilde{Y} \dot{\omega} \quad (4.8)$$

式(4.8)を考慮すれば、式(4.1)は次のように書き直せる

$$\tilde{\Phi} = -(\dot{\Psi} + \dot{\theta} H) + \tilde{\mathbf{T}}_{(m)} \cdot \mathbf{D}_{(m)}^e + \tilde{\mathbf{T}}_{(m)} \cdot \mathbf{D}_{(m)}^p + \tilde{\mathbf{M}}_{(m)} \cdot \mathbf{D}_{(m)}^p + \tilde{Y} \dot{\omega} \geq 0 \quad (4.9)$$

ここで、式(2.18)の弾・塑性分解を考慮している。さらに、状態量としての Gibbs 関数  $G$  を Legendre 変換

$$G = \Psi - \tilde{\mathbf{T}}_{(m)} \cdot \mathbf{E}_{(m)}^e \quad (4.10)$$



によって導入し、熱力学的ポテンシャルを  $\Psi$  から  $G$  へ変更することによって応力と弾性ひずみの間でそれらの役割を逆転させる。その結果、式(4.9)は次式のようになる。

$$\tilde{\Phi} \equiv -\left(\dot{G} + \dot{\theta}H\right) - \dot{\tilde{T}}_{(m)} \cdot \mathbf{E}_{(m)}^e + \dot{\tilde{T}}_{(m)} \cdot \mathbf{D}_{(m)}^p + \tilde{\mathbf{M}}_{(m)} \cdot \dot{\mathbf{D}}_{(m)}^p + \tilde{Y}\dot{\omega} \geq 0 \quad (4.11)$$

## 4.2 保存部分に対する熱力学的制限

式(4.11)において、可逆部分で力と速度の関係を逆転させたため、非可逆部分も同様に力と速度の関係を逆転させると考えれば、式(4.11)より  $G$  の引数となる可能性のあるものは次のようになる。

$$G = G(\theta, \tilde{\mathbf{T}}_{(m)}, \dot{\theta}, \dot{\tilde{\mathbf{T}}}_{(m)}, \tilde{\mathbf{M}}_{(m)}, \omega, \dot{\omega}) \quad (4.12)$$

全ての熱力学的力(構成量)の引数候補は、エントロピー不等式によって熱力学的制限が加えられるまでは、熱力学的ポテンシャルの引数候補と同じ量を選ぶことができるという等存在の公理<sup>(4.2)</sup>より、構成量の引数も熱力学的ポテンシャル  $G$  と全く同様に以下のように選ぶ。

$$\left. \begin{aligned} H &= H(\theta, \tilde{\mathbf{T}}_{(m)}, \dot{\theta}, \dot{\tilde{\mathbf{T}}}_{(m)}, \tilde{\mathbf{M}}_{(m)}, \omega, \dot{\omega}) \\ \mathbf{E}_{(m)}^e &= \mathbf{E}_{(m)}^e(\theta, \tilde{\mathbf{T}}_{(m)}, \dot{\theta}, \dot{\tilde{\mathbf{T}}}_{(m)}, \tilde{\mathbf{M}}_{(m)}, \omega, \dot{\omega}) \\ \mathbf{D}_{(m)}^p &= \mathbf{D}_{(m)}^p(\theta, \tilde{\mathbf{T}}_{(m)}, \dot{\theta}, \dot{\tilde{\mathbf{T}}}_{(m)}, \tilde{\mathbf{M}}_{(m)}, \omega, \dot{\omega}) \\ \mathbf{M}_{(m)} &= \mathbf{M}_{(m)}(\theta, \tilde{\mathbf{T}}_{(m)}, \dot{\theta}, \dot{\tilde{\mathbf{T}}}_{(m)}, \tilde{\mathbf{M}}_{(m)}, \omega, \dot{\omega}) \\ \tilde{Y} &= \tilde{Y}(\theta, \tilde{\mathbf{T}}_{(m)}, \dot{\theta}, \dot{\tilde{\mathbf{T}}}_{(m)}, \tilde{\mathbf{M}}_{(m)}, \omega, \dot{\omega}) \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

さらに、式(4.13)のクレーズ共役力  $\tilde{Y}$  をその保存部分  $\tilde{Y}^c$  と散逸部分  $\tilde{Y}^d$  に、次のように分解する。

$$\tilde{Y}(\theta, \tilde{\mathbf{T}}_{(m)}, \dot{\theta}, \dot{\tilde{\mathbf{T}}}_{(m)}, \tilde{\mathbf{M}}_{(m)}, \omega, \dot{\omega}) = \tilde{Y}^c(\theta, \tilde{\mathbf{T}}_{(m)}, \omega) + \tilde{Y}^d(\dot{\theta}, \dot{\tilde{\mathbf{T}}}_{(m)}, \tilde{\mathbf{M}}_{(m)}, \dot{\omega}) \quad (4.14)$$

式(4.14)を考慮して式(4.12)を式(4.11)に代入し、鎖状則で展開すれば、次式を得る。

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} \equiv & -\left(H + \frac{\partial G}{\partial \theta}\right)\dot{\theta} - \left(\mathbf{E}_{(m)}^e + \frac{\partial G}{\partial \tilde{\mathbf{T}}_{(m)}}\right) \cdot \dot{\tilde{\mathbf{T}}}_{(m)} - \left(\tilde{Y}^c - \frac{\partial G}{\partial \omega}\right)\dot{\omega} \\ & - \left[ \frac{\partial G}{\partial \dot{\theta}}\ddot{\theta} + \frac{\partial G}{\partial \dot{\tilde{\mathbf{T}}}_{(m)}} \cdot \ddot{\tilde{\mathbf{T}}}_{(m)} + \frac{\partial G}{\partial \tilde{\mathbf{M}}_{(m)}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{M}}}_{(m)} + \frac{\partial G}{\partial \dot{\omega}}\ddot{\omega} \right] + \tilde{Y}^d\dot{\omega} + \tilde{\mathbf{T}}_{(m)} \cdot \mathbf{D}_{(m)}^p + \tilde{\mathbf{M}}_{(m)} \cdot \dot{\mathbf{D}}_{(m)}^p \geq 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

式(4.12)を考慮すれば、式(4.15)の [ ] 内における各項は各速度について線形であるから、不等式(4.15)が常に成立するためには

$$\frac{\partial G}{\partial \dot{\theta}} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \dot{\tilde{\mathbf{T}}}_{(m)}} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \dot{\tilde{\mathbf{M}}}_{(m)}} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \dot{\omega}} = 0 \quad (4.16)$$

でなければならない。したがって、 $G$  の引数を

$$G = G(\theta, \tilde{\mathbf{T}}_{(m)}, \omega) \quad (4.17)$$

のように制限できる。また、式(4.15)の第1～第3項の各速度についても線形となり、次のような熱力学的関係を得る。

$$H = -\frac{\partial G}{\partial \theta}, \quad \mathbf{E}_{(m)}^e = -\frac{\partial G}{\partial \tilde{\mathbf{T}}_{(m)}}, \quad \tilde{Y}^c = \frac{\partial G}{\partial \omega} \quad (4.18)$$

ここでは非平衡エントロピーは考えないものとし、式(4.18)よりエントロピー  $H$  と弾性ひずみ  $\mathbf{E}_{(m)}^e$  およびクレーズ共役力  $\tilde{Y}^c$  の引数も

$$H = H(\theta, \tilde{\mathbf{T}}_{(m)}, \omega), \quad \mathbf{E}_{(m)}^e = \mathbf{E}_{(m)}^e(\theta, \tilde{\mathbf{T}}_{(m)}, \omega), \quad \tilde{Y}^c = \tilde{Y}^c(\theta, \tilde{\mathbf{T}}_{(m)}, \omega) \quad (4.19)$$

のように制限される。

### 4.3 散逸部分に対する熱力学的制限

式(4.16)および式(4.18)を用いれば、式(4.15)において可逆部分は取り除かれる。このとき、散逸仕事率のみが次のように残る。

$$\Phi = \mathbf{T}_{(m)} \cdot \mathbf{D}_{(m)}^p + \mathbf{M}_{(m)} \cdot \dot{\mathbf{D}}_{(m)}^p + Y^d \dot{\omega} \geq 0 \quad (4.20)$$

なお、式(4.15)の両辺に  $J^{-1}$  を乗じている。ここで、Kirchhoff 応力を偏差部分と等方部分に分解すると式(4.20)は次のように書き直される。

$$\Phi \equiv \mathbf{T}'_{(m)} \cdot \mathbf{D}'_{(m)} + 3\sigma_m \dot{\epsilon}_m^p + \mathbf{M}'_{(m)} \cdot \dot{\mathbf{D}}'_{(m)} + 3\zeta_m \ddot{\epsilon}_m^p + Y^d \dot{\omega} \geq 0 \quad (4.21)$$

なお、 $\mathbf{M}_{(m)}$  の等方部分を  $\zeta_m \equiv \text{tr } \mathbf{M}_{(m)} / 3$  にて表している。散逸関数の引数も等存在の公理にしたがって、式(4.12)と同様に選んでおく。その際、第2中間配置  $\beta_{(m)}$  における Kirchhoff 応力を同配置における偏差 Kirchhoff 応力と静水圧応力に置き換えておく。

$$\Phi = \Phi(\theta, \mathbf{T}'_{(m)}, \sigma_m, \dot{\theta}, \dot{\mathbf{T}}'_{(m)}, \dot{\sigma}_m, \tilde{\mathbf{M}}'_{(m)}, \zeta_m, \omega, \dot{\omega}) \quad (4.22)$$

構成式の散逸部分は、非可逆過程の進むべき方向を定めた最大散逸速度の原理<sup>(1.86)</sup>によって決定される。これは、「閉じた系におけるエントロピーは、可能な最短経路を通して最大エントロピー状態に近づく。」というものである。この原理は、式(4.20)の散逸関数に対する次式のような汎関数  $I$  に極値解を与えることで定式化できる。

$$I \equiv \int_v \left[ \mathbf{T}'_{(m)} \cdot \mathbf{D}'_{(m)} + \mathbf{M}'_{(m)} \cdot \dot{\mathbf{D}}'_{(m)} + 3\sigma_m \dot{\epsilon}_m^p + 3\zeta_m \ddot{\epsilon}_m^p + Y^d \dot{\omega} - \hat{\lambda} \left\{ \Phi - \left( \mathbf{T}'_{(m)} \cdot \mathbf{D}'_{(m)} + \mathbf{M}'_{(m)} \cdot \dot{\mathbf{D}}'_{(m)} + 3\sigma_m \dot{\epsilon}_m^p + 3\zeta_m \ddot{\epsilon}_m^p + Y^d \dot{\omega} \right) \right\} \right] dv \quad (4.23)$$

ここで式(4.20)を付帯条件としておりは、 $\hat{\lambda}$  はLagrangeの未定乗数である。また汎関数  $I$  の引数も散逸関数と同様に、まず、

$$I = I(\theta, \mathbf{T}'_{(m)}, \sigma_m, \dot{\theta}, \dot{\mathbf{T}}'_{(m)}, \dot{\sigma}_m, \tilde{\mathbf{M}}'_{(m)}, \zeta_m, \omega, \dot{\omega}) \quad (4.24)$$

とおいておく。式(4.23)の第1変分を求め、さらに散逸関数  $\Phi$  を鎖状則で展開して次式を得る。

$$\begin{aligned} \delta I \equiv \int_v \left[ \left\{ (1 + \hat{\lambda}) \mathbf{D}'_{(m)} - \hat{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{T}'_{(m)}} \right\} \cdot \delta \mathbf{T}'_{(m)} + \left\{ (1 + \hat{\lambda}) \dot{\mathbf{D}}'_{(m)} - \hat{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}'_{(m)}} \right\} \cdot \delta \mathbf{M}'_{(m)} + \left\{ (1 + \hat{\lambda}) \dot{\epsilon}_m^p - \hat{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m} \right\} \cdot \delta \sigma_m \right. \\ \left. + \left\{ (1 + \hat{\lambda}) \ddot{\epsilon}_m^p - \hat{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_m} \right\} \cdot \delta \zeta_m + \left\{ (1 + \hat{\lambda}) Y^d - \hat{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \right\} \cdot \delta \dot{\omega} - \hat{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \cdot \delta \theta - \hat{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\theta}} \cdot \delta \dot{\theta} - \hat{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\omega}} \cdot \delta \dot{\omega} - \hat{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{T}}'_{(m)}} \cdot \delta \dot{\mathbf{T}}'_{(m)} - \hat{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\sigma}_m} \cdot \delta \dot{\sigma}_m \right] dv \quad (4.25) \end{aligned}$$

汎関数の極値条件  $\delta I = 0$  が任意の変分に対して常に成立するためには、各変分の係数が零でなければならない。したがって、本原理の極値解として

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\theta}} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{T}}'_{(m)}} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\sigma}_m} = 0 \quad (4.26)$$

$$Y^d = \frac{\hat{\lambda}}{1 + \hat{\lambda}} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\omega}} \quad (4.27)$$

$$\mathbf{D}_{(m)}^{p'} = \frac{\hat{\lambda}}{1 + \hat{\lambda}} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{T}}'_{(m)}}, \quad \dot{\mathbf{D}}_{(m)}^{p'} = \frac{\hat{\lambda}}{1 + \hat{\lambda}} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{M}}'_{(m)}} \quad (4.28)$$

$$\dot{\varepsilon}_m^p = \frac{\hat{\lambda}}{1 + \hat{\lambda}} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\sigma}_m}, \quad \ddot{\varepsilon}_m^p = \frac{\hat{\lambda}}{1 + \hat{\lambda}} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varsigma}_m} \quad (4.29)$$

を得る。式(4.26)に従えば、 $\Phi$  の引数を次のように制限できる。

$$\Phi = \Phi(\mathbf{T}'_{(m)}, \mathbf{M}'_{(m)}, \sigma_m, \varsigma_m, \dot{\omega}) \quad (4.30)$$

また、式(4.27)～式(4.30)より各構成量の引数も

$$Y^d = Y^d(\mathbf{T}'_{(m)}, \mathbf{M}'_{(m)}, \sigma_m, \varsigma_m, \dot{\omega}) \quad (4.31)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D}_{(m)}^{p'} &= \mathbf{D}_{(m)}^{p'}(\mathbf{T}'_{(m)}, \mathbf{M}'_{(m)}, \sigma_m, \varsigma_m, \dot{\omega}) \\ \dot{\mathbf{D}}_{(m)}^{p'} &= \dot{\mathbf{D}}_{(m)}^{p'}(\mathbf{T}'_{(m)}, \mathbf{M}'_{(m)}, \sigma_m, \varsigma_m, \dot{\omega}) \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_m^p &= \dot{\varepsilon}_m^p(\mathbf{T}'_{(m)}, \mathbf{M}'_{(m)}, \sigma_m, \varsigma_m, \dot{\omega}) \\ \ddot{\varepsilon}_m^p &= \ddot{\varepsilon}_m^p(\mathbf{T}'_{(m)}, \mathbf{M}'_{(m)}, \sigma_m, \varsigma_m, \dot{\omega}) \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

のように制限できる。

## 4.4 速度形弾性構成式

弾性ひずみの構成式を式(4.18)から得るために、 $G$  をその引数を作る基本不変量の多項式で表現することを考える。引数である  $\tilde{\mathbf{T}}_{(m)}$  は2階の対称テンソルであるから、それに対する基本不変量は、Cayley-Hamilton の定理より次の3個となる。

$$I_{T1} \equiv \text{tr} \tilde{\mathbf{T}}_{(m)}, \quad I_{T2} \equiv \text{tr} \tilde{\mathbf{T}}_{(m)}^2, \quad I_{T3} \equiv \text{tr} \tilde{\mathbf{T}}_{(m)}^3 \quad (4.34)$$

ここで、一般的なPPの引張試験の結果から、金属材料と同様に弾性変形は微小で、塑性変形は有限であると仮定している。したがって、弾性構成式は線形でなければならず、式(4.34)においては  $I_{T3}$  が不要となる。この結果、 $G$  の引数は次のように不変量で置きかえることができる。

$$G = G(\theta, I_{T1}, I_{T2}) \quad (4.35)$$

式(4.35)を式(4.18)に代入すれば

$$\mathbf{E}_{(m)}^e = -\frac{\partial G}{\partial I_{T1}} \frac{\partial I_{T1}}{\partial \tilde{\mathbf{T}}_{(m)}} - \frac{\partial G}{\partial I_{T2}} \frac{\partial I_{T2}}{\partial \tilde{\mathbf{T}}_{(m)}} = a_1 \mathbf{I} + 2a_2 \tilde{\mathbf{T}}_{(m)} \quad (4.36)$$

となる。ここで係数  $a_1$  および  $a_2$  は

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a_1(\theta, I_{T1}, I_{T2}) \equiv -\frac{\partial G}{\partial I_{T1}} \\ a_2 &= a_2(\theta, I_{T1}, I_{T2}) \equiv -\frac{\partial G}{\partial I_{T2}} \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

である。式(4.37)から明らかなように、これら2つの係数は不変量の関数であるから、構成式(4.36)は線形にならない。そこで、 $\theta = \theta_0$ 、 $\tilde{\mathbf{T}}_{(m)} = \mathbf{0}$ を基準状態とし、このとき弾性ひずみが零になるとして式(4.37)をこの基準状態の近傍で展開すると次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a_{10} + a_{11}(\theta - \theta_0) + a_{12} \text{tr} \tilde{\mathbf{T}}_{(m)} + \cdots \\ a_2 &= a_{20} + a_{21}(\theta - \theta_0) + a_{22} \text{tr} \tilde{\mathbf{T}}_{(m)} + \cdots \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

ここで、 $a_{10}$ および $a_{20}$ は定数である。式(4.38)を式(4.36)に代入したとき、この構成式が線形となり、しかも $\tilde{\mathbf{T}}_{(m)} = \mathbf{0}$ のとき $\mathbf{E}_{(m)}^e = \mathbf{0}$ とならねばならないことを考慮すれば、式(4.38)中の各係数は

$$a_{10} = a_{13} = \cdots = 0, \quad a_{21} = a_{22} = a_{23} = \cdots = 0 \quad (4.39)$$

のようになる。式(4.39)を式(4.38)に代入した結果を式(4.36)に適用すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{(m)}^e &= a_{11}(\theta - \theta_0) + a_{12}(\text{tr} \tilde{\mathbf{T}}_{(m)})\mathbf{I} + 2a_{20}\tilde{\mathbf{T}}_{(m)} \\ &= \alpha'(\theta - \theta_0)\mathbf{I} - \frac{\nu}{E}(\text{tr} \tilde{\mathbf{T}}_{(m)})\mathbf{I} + \frac{1+\nu}{E}\tilde{\mathbf{T}}_{(m)} \end{aligned} \quad (4.40)$$

ここで $\alpha'$ は熱膨張係数、 $E$ は損傷情報を含む縦弾性係数である。さらに $\tilde{\mathbf{T}}_{(m)} = J\mathbf{T}_{(m)}$ を考慮すれば式(4.40)は、まだ非線形であることがわかる。いま、変形こう配を変位こう配で表現すると

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \quad (4.41)$$

となるから、 $J$ は

$$J = \det \mathbf{F} = 1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}\right|\right) \quad (4.42)$$

と表現できる。したがって、 $|\partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{X}|$ の1次以上の項を無視することによって式(4.40)を完全に線形化できる。すなわち、式(4.40)におけるKirchhoff応力をCauchy応力置きかえることができ、

$$\mathbf{E}_{(m)}^e = \alpha'(\theta - \theta_0)\mathbf{I} - \frac{\nu}{E}(\text{tr} \mathbf{T}_{(m)})\mathbf{I} + \frac{1+\nu}{E}\mathbf{T}_{(m)} \quad (4.43)$$

となり、これは通常の熱弾性構成式である。さらにLemaitreによれば、上式(4.43)における損傷情報を含む縦弾性係数 $E$ は、損傷情報を含まない一定縦弾性係数 $E_0$ を用いて、次式のように書き表すことができる。

$$E = (1 - \omega)E_0 \quad (4.44)$$

式(4.44)を考慮すれば、式(4.43)は次式のように書き改められる。

$$\mathbf{E}_{(m)}^e = \frac{1}{1 - \omega} \left\{ \frac{1+\nu}{E_0}\mathbf{T}_{(m)} - \frac{\nu}{E_0}(\text{tr} \mathbf{T}_{(m)})\mathbf{I} + \alpha'(\theta - \theta_0)\mathbf{I} \right\} \quad (4.45)$$

ここで、式(4.43)を、式(4.45)のように $E_0$ で表される形に改めたのは、数値解析に構成式を適用する際に、値の入手が可能である一定縦弾性係数 $E_0$ で記述されている方が都合が良いからである。ここで、簡単化のため等温過程を想定して、上式(4.45)において温度に影響する項を無視したうえで物質時間微分し、応力とひずみの逆関係を求め、さらに現配置へ回転させれば、次式のような共回転速度で表現されたクレーズ依存性を考慮した速度形弾性構成式が得られる。

$$\overset{\vee}{\mathbf{T}} = (1-\omega)\mathbf{C}^e : \mathbf{D}^e - \frac{\dot{\omega}}{1-\omega}\mathbf{T} \quad (4.46)$$

ここで、 $\mathbf{C}^e : \mathbf{D}^e \equiv C_{ijkl}^e D_{kl}^e \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ であり、4階の弾性係数テンソル $\mathbf{C}^e$ の成分は次式にて与えられる。

$$C_{ijkl}^e = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (4.47)$$

なお、 $\lambda$ および $\mu$ は初期状態( $\omega=0$ )における Lamé 定数であり、 $(\overset{\vee}{\cdot})$ は共回転速度である。

## 4.5 粘塑性構成式

ここでは、村上ら<sup>(1.80)(1.81)</sup>によって提案された粘塑性尖り点モデルの構築方法に基づき、非共軸粘塑性構成式の偏差部分に対する導出過程を紹介する。式(4.28)から粘塑性構成式を得るために、散逸関数 $\Phi$ をその引数 $\mathbf{T}'_{(m)}$ と $\mathbf{M}'_{(m)}$ が作るスカラ不変量の多項式で表現すると次式のようになる。

$$\Phi = \Phi(J_2, J_{2a}, J_{2b}) \quad (4.48)$$

ただし、スカラ不変量 $J_2$ 、 $J_{2a}$ および $J_{2b}$ を次式のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} J_2 &\equiv \text{tr} \mathbf{T}'_{(m)2} \\ J_{2a} &\equiv \text{tr} \left( \mathbf{T}'_{(m)} \mathbf{M}'_{(m)} \right) \\ J_{2b} &\equiv \text{tr} \mathbf{M}'_{(m)2} \end{aligned} \right\} \quad (4.49)$$

なお、Chakrabartiらによれば、2個の対称テンソルが作る不変量は式(4.49)の他に次のようなものが存在する。

$$\text{tr} \mathbf{T}'_{(m)3}, \quad \text{tr} \mathbf{M}'_{(m)2}, \quad \text{tr} \left( \mathbf{T}'_{(m)2} \mathbf{M}'_{(m)} \right), \quad \text{tr} \left( \mathbf{T}'_{(m)} \mathbf{M}'_{(m)2} \right)$$

さて、式(4.28)に式(4.49)を代入して次式を得る。

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{(m)}^{p'} &= \frac{\hat{\lambda}}{1+\hat{\lambda}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{T}'_{(m)}} + \frac{\partial \Phi}{\partial J_{2a}} \frac{\partial J_{2a}}{\partial \mathbf{T}'_{(m)}} + \frac{\partial \Phi}{\partial J_{2b}} \frac{\partial J_{2b}}{\partial \mathbf{T}'_{(m)}} \right) \\ &= \mu_1 \mathbf{T}'_{(m)} + \mu_2 \mathbf{M}'_{(m)} \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{D}}_{(m)}^{p'} &= \frac{\hat{\lambda}}{1+\hat{\lambda}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{M}'_{(m)}} + \frac{\partial \Phi}{\partial J_{2a}} \frac{\partial J_{2a}}{\partial \mathbf{M}'_{(m)}} + \frac{\partial \Phi}{\partial J_{2b}} \frac{\partial J_{2b}}{\partial \mathbf{M}'_{(m)}} \right) \\ &= \mu_2 \mathbf{T}'_{(m)} + \mu_3 \mathbf{M}'_{(m)} \end{aligned} \quad (4.51)$$

ただし、各係数は次式にて定義される。

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &\equiv \frac{2\hat{\lambda}}{1+\hat{\lambda}} \frac{\partial \Phi}{\partial J_2} \\ \mu_2 &\equiv \frac{2\hat{\lambda}}{1+\hat{\lambda}} \frac{\partial \Phi}{\partial J_{2a}} \\ \mu_3 &\equiv \frac{2\hat{\lambda}}{1+\hat{\lambda}} \frac{\partial \Phi}{\partial J_{2b}} \end{aligned} \right\} \quad (4.52)$$

次に式(4.50)と式(4.51)から $\mathbf{M}'_{(m)}$ を消去すれば、

$$\mathbf{D}_{(m)}^{p'} = \tau_1 \mathbf{T}'_{(m)} + \tau_2 \dot{\mathbf{D}}_{(m)}^{p'} \quad (4.53)$$

$$\tau_1 = \left( \mu_1 - \frac{\mu_2^2}{\mu_3} \right), \quad \tau_2 = \frac{\mu_2}{\mu_3} \quad (4.54)$$

となる. 式(4.53)を物質時間微分し,  $\mathbf{D}_{(m)}^{p'}$  について整理すれば,

$$\dot{\mathbf{D}}_{(m)}^{p'} = \frac{1}{1 - \dot{\tau}_2} \left( \dot{\tau}_1 \mathbf{T}'_{(m)} + \tau_1 \dot{\mathbf{T}}'_{(m)} + \tau_2 \dot{\mathbf{D}}_{(m)}^{p'} \right) \quad (4.55)$$

と書ける. 式(4.55)を式(4.53)に代入すれば,

$$\mathbf{D}_{(m)}^{p'} = \left( \tau_1 + \frac{\dot{\tau}_1 \tau_2}{1 - \dot{\tau}_2} \right) \mathbf{T}'_{(m)} + \frac{\tau_1 \tau_2}{1 - \dot{\tau}_2} \dot{\mathbf{T}}'_{(m)} + \frac{\tau_2^2}{1 - \dot{\tau}_2} \ddot{\mathbf{D}}_{(m)}^{p'} \quad (4.56)$$

となる. 同様の操作を  $n$  階微分まで繰り返せば, 式(4.56)は次のように記述される.

$$\mathbf{D}_{(m)}^{p'} = \zeta_0 \mathbf{T}'_{(m)} + \zeta_1 \dot{\mathbf{T}}'_{(m)} + \zeta_2 \ddot{\mathbf{T}}'_{(m)} + \cdots + \zeta_{n-1} \overset{[n-1]}{\mathbf{T}}'_{(m)} + \zeta_n \overset{[n]}{\mathbf{D}}_{(m)}^{p'} \quad (4.57)$$

ここで,  $\overset{[n]}{\mathbf{A}}$  は  $\mathbf{A}$  の  $n$  次導関数であり,  $\zeta_n$  はその係数である.

式(4.50)と式(4.57)を比較すれば,  $\mathbf{M}'_{(m)}$  は次式のように書ける.

$$\mathbf{M}'_{(m)} = \frac{1}{\mu_2} \left\{ (\zeta_0 - \mu_1) \mathbf{T}'_{(m)} + \zeta_1 \dot{\mathbf{T}}'_{(m)} + \zeta_2 \ddot{\mathbf{T}}'_{(m)} + \cdots + \zeta_{n-1} \overset{[n-1]}{\mathbf{T}}'_{(m)} + \zeta_n \overset{[n]}{\mathbf{D}}_{(m)}^{p'} \right\} \quad (4.58)$$

式(4.57)においては, 右辺の各項において第1項が平均量, 第2項以降が変動量に対応しているとみなせるため, 第2項以降は第1項に比べて小さいと考えられる. 特に  $\mathbf{D}_{(m)}^{p'}$  の  $n$  階微分項は十分小さく無視できる.

また, 応力速度が時間に対して急変しない問題を扱うとすれば, 応力の2階以上の高次導関数も十分小さいとして無視できる. 以上より, 次式のような非共軸粘塑性構成式が得られる.

$$\mathbf{D}_{(m)}^{p'} = \zeta_0 \mathbf{T}'_{(m)} + \zeta_1 \dot{\mathbf{T}}'_{(m)} \quad (4.59)$$

また, 式(4.58)は次のように書き改められる.

$$\mathbf{M}'_{(m)} = \frac{1}{\mu_2} \left\{ (\zeta_0 - \mu_1) \mathbf{T}'_{(m)} + \zeta_1 \dot{\mathbf{T}}'_{(m)} \right\} \quad (4.60)$$

このように, 粘塑性ひずみ速度テンソルとそれに共役な内力による散逸仕事率を考慮した本熱・力学的理論では, 粘塑性構成式は必然的に非共軸性を有することになる. その非共軸性は材料のひずみ速度依存性に由来している. また, 式(4.59)は非共軸であるにもかかわらず, 散逸関数を塑性ポテンシャルとする流れ則に基づいている. なお, 新たな内力  $\mathbf{M}'_{(m)}$  は, 応力  $\mathbf{T}'_{(m)}$  と応力速度  $\dot{\mathbf{T}}'_{(m)}$  で式(4.60)のように関係づけられているので, 巨視的な力学的釣合い方程式系と構成式で, 基礎方程式系は閉じた系となる. 式(4.59)および式(4.60)を現配置に戻せば,

$$\mathbf{D}^{p'} = \zeta_0 \mathbf{T}' + \zeta_1 \overset{\nabla}{\mathbf{T}}' \quad (4.61)$$

$$\mathbf{M}' = \frac{1}{\mu_2} \left\{ (\zeta_0 - \mu_1) \mathbf{T}' + \zeta_1 \overset{\nabla}{\mathbf{T}}' \right\} \quad (4.62)$$

となる. さらに式(4.61)は次のように書き改められる.

$$\mathbf{T}' = \frac{1}{\zeta_0} \mathbf{D}^{p'} - \frac{\zeta_1}{\zeta_0} \overset{\nabla}{\mathbf{T}}' \quad (4.63)$$

ところで、粘性流体の構成式は、

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \eta_1(\text{tr}\mathbf{D})\mathbf{I} + 2\eta_2\mathbf{D} \quad (4.64)$$

と表せる。ここで、 $p$ 、 $\eta_1$ 、 $\eta_2$ はそれぞれ静水圧、第1粘性係数、せん断粘性係数である。式(4.63)

の右辺第1項  $\frac{1}{\zeta_0}\mathbf{D}^{p'}$  が式(4.64)の右辺3項に対応する粘性項である。そして、式(4.63)の  $\frac{1}{\zeta_0}$  が式(4.64)

の粘性係数 $\eta_2$ に対応する。したがって、本粘塑性構成式(4.61)は塑性変形速度に依存する粘性効果を表現できる。

さて、式(4.61)および式(4.62)において、図4.1に示すように $\mathbf{D}^{p'}$  および $\mathbf{M}'$  を偏差応力方向とそれに垂直な方向に直交分解すれば、両式は次のように書き直せる。

$$\mathbf{D}^{p'} = a_1\mathbf{T}' + a_2\left(\mathbf{T}' - \frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}}\mathbf{T}'\right) \quad (4.65)$$

$$\mathbf{M}' = a_3\mathbf{T}' + a_2\left(\mathbf{T}' - \frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}}\mathbf{T}'\right) \quad (4.66)$$

ここで、

$$a_1 \equiv \zeta_0 + \frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}}a_2, \quad a_2 \equiv \zeta_1, \quad a_3 \equiv \frac{1}{\mu_2}(\zeta_0 - \mu_1) + \frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}}a_2 \quad (4.67)$$

である。また、相当応力および相当応力速度は、それぞれ

$$\begin{cases} \bar{\sigma} \equiv \sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{T}' \cdot \mathbf{T}'} \\ \dot{\bar{\sigma}} \equiv \sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{T}'^{\vee} \cdot \mathbf{T}'^{\vee}} \end{cases} \quad (4.68)$$

と定義される。式(4.65)は流れ則を表す式(4.28)から得られたものであるから、 $\mathbf{D}^{p'}$  は必ず散逸曲面の法線方向を向く(図4.2)。以上より、 $\mathbf{D}^{p'}$  は散逸曲面に対する法線則を満たし、かつ非共軸性を有することより、散逸曲面には尖り角 $\beta$ で表される尖り点が形成され、 $\mathbf{D}^{p'}$  の向きは尖り点を中心とする円錐の母線方向となる。この場合、尖り角 $\beta$ と応力-塑性変形速度のなす角 $\delta$ の間には、

$$\delta + \beta = \pi/2 \quad (4.69)$$

という関係が成り立つ。また、応力-応力速度のなす角 $\alpha$ は次式のように定義される。

$$\cos \alpha \equiv \frac{\mathbf{T}' \cdot \mathbf{T}'^{\vee}}{\sqrt{\mathbf{T}' \cdot \mathbf{T}'} \sqrt{\mathbf{T}'^{\vee} \cdot \mathbf{T}'^{\vee}}} \quad (4.70)$$

さらに、 $3\mathbf{T}' \cdot \mathbf{T}'^{\vee} = 2\bar{\sigma}\dot{\bar{\sigma}}$  となることを考慮して、式(4.68)を式(4.70)に代入すれば、

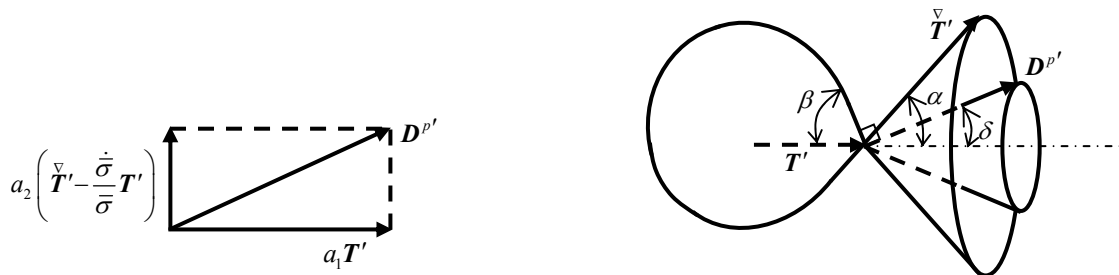


Fig.4.1 Orthogonal decomposition of  $\mathbf{D}^{p'}$

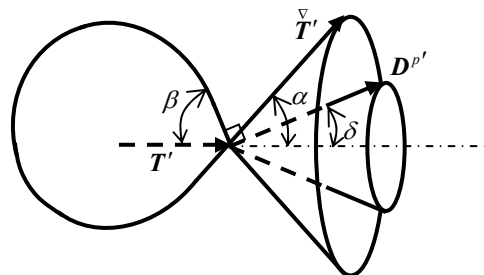


Fig.4.2 Vertex on dissipation surface

$$\cos \alpha = \dot{\bar{\sigma}} / \bar{\sigma} \quad (4.71)$$

となる。以上をふまえ、式(4.65)を以下のような尖り点構成式として一般化する。

$$\mathbf{D}^{p'} = \dot{\bar{\epsilon}}^p \{(\cos \delta) \mathbf{m}' + (\sin \delta) \mathbf{l}'\} \quad (4.72)$$

ここで、応力方向テンソル  $\mathbf{m}'$ 、および応力に垂直な方向テンソル  $\mathbf{l}'$  はそれぞれ、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{m}' &= \frac{3}{2} \frac{\mathbf{T}'}{\bar{\sigma}} \\ \mathbf{l}' &= \frac{3}{2} \frac{1}{\bar{\sigma} \sin \alpha} \left( \overset{\nabla}{\mathbf{T}'} - \frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}} \mathbf{T}' \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.73)$$

と定義される。また、相当粘塑性ひずみ速度  $\dot{\bar{\epsilon}}^p (= \bar{\dot{\epsilon}}^p)$  は

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{D}^{p'} \cdot \mathbf{D}^{p'}} \quad (4.74)$$

である。式(4.72)において、 $\dot{\bar{\epsilon}}^p = 0$  のとき、 $\mathbf{D}^{p'} = 0$  となるため、負荷から弾性除荷への構成式の連続的な遷移が可能となる。したがって、除荷・負荷判定は不要である。また、流れ則に基づいているため、非比例負荷状態への適用も可能である。さらに式(4.72)において、 $\dot{\bar{\epsilon}}^p$  は実験により同定されるひずみ速度硬化則から決定されるため、未知係数は応力-塑性変形速度  $\delta$  のみになる。したがって、本理論は従来のコーナ理論と比較して材料定数の数が少なく同定も容易である。

一方、変形理論による非共軸構成式:

$$\mathbf{D}^{p'} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^p}{\bar{\sigma}} \mathbf{T}' + \frac{3}{2} \frac{1}{H_s} \left( \overset{\nabla}{\mathbf{T}'} - \frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}} \mathbf{T}' \right) \quad (4.75)$$

の両辺を自乗すれば、

$$\dot{\bar{\epsilon}}^{p2} = \dot{\bar{\epsilon}}^{p2} + \left( \frac{1}{H_s} \right)^2 (\bar{\sigma}^2 - \dot{\bar{\sigma}}^2) \quad (4.76)$$

となり、両辺の大きさが一致しない。ここで、

$$H_s \equiv \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\bar{\epsilon}}^p} \quad (4.77)$$

である。コーナ理論による構成式においても、両辺の大きさは一致しない。したがって従来の非共軸構成式は数学的に矛盾していることがわかる。また  $\dot{\bar{\epsilon}}^p = 0$  のとき、変形理論あるいはコーナ理論においても割線係数  $H_s$  の存在により  $\mathbf{D}^{p'} = 0$  となるため、負荷から弾性除荷への構成式の連続的な遷移は不可能であり、除荷・負荷判定が必要になる。さらに、流れ則に基づいていないため非比例負荷状態への適用も不可能である。これに対してここで得られた構成式(4.72)にはこのような数学的矛盾は存在しない。

ここで、式(4.72)は2つの未知係数  $\cos \delta$  および  $\sin \delta$  を含む。そこで、次のような仮定に基づいて  $\sin \delta$  を角  $\alpha$  の簡単な関数で表し、構成式的具体化を試みる。図4.3より、 $0 \leq \alpha \leq \pi/2$  では、 $\mathbf{D}^{p'}$  が  $\overset{\nabla}{\mathbf{T}'}$  に引っ張られ、 $\delta$  は単調増加し、 $\alpha = \pi/2$  では  $\delta = \delta_{\max}$ 、 $\beta = \beta_{\max}$  となる。また、 $\pi/2 \leq \alpha \leq \alpha_n$  では  $\mathbf{D}^{p'}$  は  $\overset{\nabla}{\mathbf{T}'}$  とは逆方向に引っ張られ、 $\delta$  は単調減少する。材料のひずみ速度感度が小さいほどせん断帯形成が早まることも考慮すれば、非共軸パラメータ  $k$  を用いて  $\sin \delta$  を次のようにモデル化できる。



$$\sin \delta = k(m) \sin \alpha \tag{4.78}$$

$$k(m) = \begin{cases} p_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{m}{p_2}\right) & \text{for } 0 \leq m \leq p_2 \\ p_1 [\tanh\{-p_3(m - p_2)\} + 1] & \text{for } p_2 \leq m \end{cases} \tag{4.79}$$

ここで、 $p_1$  はひずみ速度感度指数  $m$  に対する  $\sin \delta$  の最大値、 $p_2$  はそのときのひずみ速度感度指数であり、 $p_3$  は  $m \geq p_2$  において  $k$  が零に漸近する速度を支配するパラメータである。式(4.79)は、構成式の非共軸性はポリマのように  $m$  が大きい場合には小さく、金属のように  $m$  が小さい場合には大きい、 $m$  が完全に零の理想状態においては消失するということを表現したものである。式(4.79)における各係数の値を  $p_1 = \sin(\pi/8)$ 、 $p_2 = 0.0001$ 、および  $p_3 = 10$  として図示すれば図 4.4 のようになる。これらの値は繰り返し数値解析を行うことによって試行錯誤的に決定されたものである<sup>(1.81)</sup>。

式(4.78)より、式(4.72)は次式のように具体化される。

$$\mathbf{D}^p = \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}^p}{\dot{\sigma}} \mathbf{T}' \sqrt{1 - (k(m) \sin \alpha)^2} + \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}^p}{\dot{\sigma}} k \left( \frac{\nabla}{\dot{\sigma}} \mathbf{T}' - \frac{\dot{\sigma}}{\dot{\sigma}} \mathbf{T}' \right) \tag{4.80}$$

ここで、粘塑性構成式の等方部分は、次式のように表すことができる。

$$d_m^p = \dot{\epsilon}_m^p \tag{4.81}$$

さらに全粘塑性変形速度は偏差部分と等方部分の和として、 $\mathbf{D}^p = \mathbf{D}^{p'} + d_m^p \mathbf{I}$  と表されるので本来ならば式(4.80)と式(4.81)より非共軸粘塑性構成式は

$$\mathbf{D}^p = \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}^p}{\dot{\sigma}} \mathbf{T}' \cos \delta + \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}^p}{\dot{\sigma}} k \left( \frac{\nabla}{\dot{\sigma}} \mathbf{T}' - \frac{\dot{\sigma}}{\dot{\sigma}} \mathbf{T}' \right) + \dot{\epsilon}_m^p \mathbf{I} \tag{4.82}$$

とされるべきであるが、粘塑性変形速度の偏差部分は等方部分よりはるかに大きいことが実験から知られているので、以降では式(4.80)で示されるような粘塑性変形速度の偏差部分をもって全粘塑性変形速度

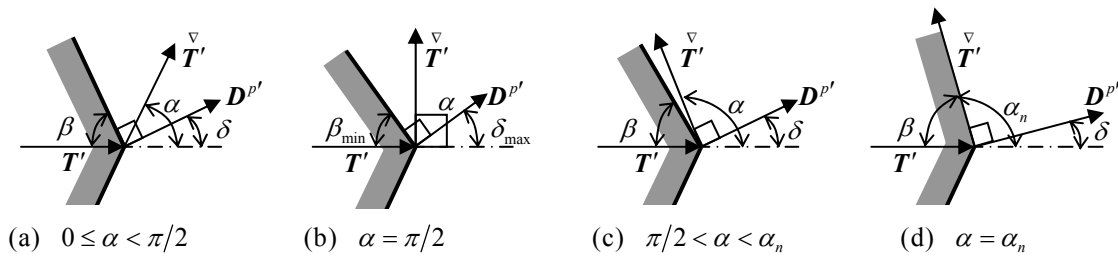


Fig.4.3 Continuous transition from loading to unloading

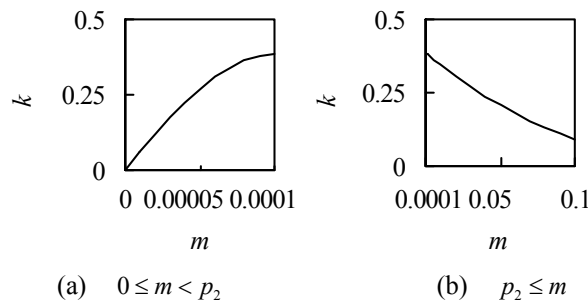


Fig.4.4 Relationship between non-coaxial parameter  $k$  and strain rate sensitivity exponent  $m$

とする。よって全粘塑性変形速度は次のように書ける。

$$\mathbf{D}^p = \frac{3}{2} \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^p}{\bar{\sigma}} \mathbf{T}' \cos \delta + \frac{3}{2} \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^p}{\bar{\sigma}} k \left( \frac{\nabla}{\bar{\sigma}} \mathbf{T}' - \frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}} \mathbf{T}' \right) \quad (4.83)$$

## 4.6 弾粘塑性構成式

全変形速度は弾性部分と粘塑性部分の和によって次のように表される。

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p \quad (4.84)$$

したがって、弾粘塑性構成式は

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{1-\omega} \mathbf{T} &= (1-\omega) \mathbf{C}^e : \mathbf{D}^e - \frac{\dot{\omega}}{1-\omega} \mathbf{T} \\ &= (1-\omega) \mathbf{C}^e : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) - \frac{\dot{\omega}}{1-\omega} \mathbf{T} \end{aligned} \quad (4.85)$$

と書ける。式(4.85)に式(4.83)を代入し、指標表示すれば、

$$\frac{\nabla}{1-\omega} T_{ij} = (1-\omega) C_{ijkl}^e D_{kl} - 2\mu \frac{3}{2} (1-\omega) \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^p}{\bar{\sigma}} T'_{ij} (\cos \delta) - 2\mu k (1-\omega) \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^p}{\bar{\sigma}} \left( \frac{3}{2} \frac{\nabla}{\bar{\sigma}} T'_{ij} - \frac{3}{2} \frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}} T'_{ij} \right) - \frac{\dot{\omega}}{1-\omega} T_{ij} \quad (4.86)$$

となる。ここで応力速度の偏差部分を、全応力速度および応力速度の静水圧部分で表現する。

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{1-\omega} T'_{ij} &= \frac{\nabla}{1-\omega} T_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\nabla}{1-\omega} T_{mm} \delta_{ij} \\ &= \frac{\nabla}{1-\omega} T_{ij} - \frac{1}{3} (1-\omega) (3\lambda + 2\mu) \delta_{ij} \delta_{kl} D_{kl} + \frac{\dot{\omega}}{1-\omega} \frac{1}{3} T_{mm} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (4.87)$$

式(4.86)に応力方向テンソル  $m_{ij}$  を内積すれば

$$\frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}} = 3\mu (1-\omega) \frac{T'_{kl}}{\bar{\sigma}} D_{kl} - 3\mu (1-\omega) \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^p}{\bar{\sigma}} (\cos \delta) - \frac{\dot{\omega}}{1-\omega} \bar{\sigma} \quad (4.88)$$

となる。さらに、式(4.86)に式(4.87)、(4.88)を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{1-\omega} T_{ij} &= (1-\omega) C_{ijkl}^e D_{kl} - 3\mu (1-\omega) \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^p}{\bar{\sigma}} T'_{ij} (\cos \delta) \\ &\quad - 3\mu (1-\omega) \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^p}{\bar{\sigma}} k \left\{ \frac{\nabla}{1-\omega} T_{ij} - \frac{1}{3} (1-\omega) (3\lambda + 2\mu) \delta_{ij} \delta_{kl} D_{kl} + \frac{\dot{\omega}}{1-\omega} \frac{1}{3} T_{mm} \delta_{ij} \right\} \\ &\quad + 3\mu (1-\omega) \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^p}{\bar{\sigma}} k \frac{T'_{ij}}{\bar{\sigma}} \left\{ 3\mu (1-\omega) \frac{T'_{kl}}{\bar{\sigma}} D_{kl} - 3\mu (1-\omega) \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^p}{\bar{\sigma}} (\cos \delta) - \frac{\dot{\omega}}{1-\omega} \bar{\sigma} \right\} - \frac{\dot{\omega}}{1-\omega} T_{ij} \end{aligned} \quad (4.89)$$

となり、応力速度の項についてまとめると次のようになる。

$$\begin{aligned} \left\{ 1 + 3\mu (1-\omega) \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^p}{\bar{\sigma}} k \right\} \frac{\nabla}{1-\omega} T_{ij} &= (1-\omega) \left[ C_{ijkl}^e + 3\mu (1-\omega) \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^p}{\bar{\sigma}} k \left\{ \frac{1}{3} (3\lambda + 2\mu) \delta_{ij} \delta_{kl} + 3\mu \frac{T'_{ij} T'_{kl}}{\bar{\sigma}^2} \right\} \right] D_{kl} \\ &\quad - 3\mu (1-\omega) \frac{T'_{ij}}{\bar{\sigma}} \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^p}{\bar{\sigma}} (\cos \delta) \left\{ 1 + 3\mu (1-\omega) \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^p}{\bar{\sigma}} k \right\} - 3\mu \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^p}{\bar{\sigma}} \dot{\omega} k \left( \frac{1}{3} T_{mm} \delta_{ij} + T'_{ij} \right) - \frac{\dot{\omega}}{1-\omega} T_{ij} \end{aligned} \quad (4.90)$$

したがって、クレーズ依存性を考慮した弾粘塑性構成式が次のような表現で得られる。

$$\overset{\nabla}{T}_{ij} = C_{ijkl}^{\nabla} D_{kl} - P'_{ij} \dot{\bar{\varepsilon}}^p (\cos \delta) - \frac{\dot{\omega}}{1-\omega} T_{ij} \quad (4.91)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{ijkl}^{\nabla} &\equiv \frac{(1-\omega)H_{\omega}}{H_{\omega} + 3\omega} \left[ C_{ijkl}^e + \frac{3\mu}{H_{\omega}} \left\{ \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)\delta_{ij}\delta_{kl} + 3\mu \frac{T'_{ij}T'_{kl}}{\bar{\sigma}^2} \right\} \right] \\ P'_{ij} &\equiv C_{ijkl}^{\nabla} m'_{kl} = 3\mu(1-\omega) \frac{T'_{ij}}{\bar{\sigma}} \\ H_{\omega} &\equiv \frac{1}{(1-\omega)k} \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\bar{\varepsilon}}^p} \end{aligned} \right\} \quad (4.92)$$

変形理論による弾粘塑性構成式では、式(4.91)中の  $\cos \delta$  が1, また式(4.92)における4階のテンソル  $C^{\nabla}$  中の  $\dot{\bar{\varepsilon}}^p k / \bar{\sigma}$  が  $1/H_s$  となっている. 変形理論では、この  $1/H_s$  が原因で  $\dot{\bar{\varepsilon}}^p \rightarrow 0$  の場合、構成式が弾性構成式に帰着しない. すなわち負荷から除荷への遷移が連続的に表現できない. 一方、本理論では  $\dot{\bar{\varepsilon}}^p \rightarrow 0$  の場合、構成式は弾性構成式に帰着するため、負荷から除荷への遷移が連続的に表現でき、除荷・負荷判定が不要になる.

## 4.7 熱力学的ポテンシャルと熱力学的力の関係

中間配置  $\beta_{(m)}$  に戻した構成式(4.91)および式(4.60)を散逸関数の表式(4.21)に代入すれば、

$$\begin{aligned} \Phi &= \left[ \bar{\sigma} \cos \delta + \bar{\sigma} \zeta_0' (\cos \delta) - \bar{\sigma} \zeta_0' k \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + \bar{\sigma} \zeta_1' \left\{ (\cos \delta) - k (\cos \alpha) + k \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\bar{\sigma}^2}{\bar{\sigma}} \zeta_1' (\cos \delta - k \cos \alpha) \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right] \dot{\bar{\varepsilon}}^p + \left[ \bar{\sigma} \zeta_0' \cos \delta + \bar{\sigma} \zeta_1' \left( \cos \delta + k \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \right) \right] \ddot{\bar{\varepsilon}}^p \\ &\quad + 3\sigma_m \dot{\varepsilon}_m^p + 3\zeta_m \dot{\varepsilon}_m^p + Y^d \dot{\omega} \\ &\equiv f_1(\bar{\sigma}, \dot{\bar{\sigma}}) \dot{\bar{\varepsilon}}^p + f_2(\bar{\sigma}, \ddot{\bar{\sigma}}) \ddot{\bar{\varepsilon}}^p + 3\sigma_m \dot{\varepsilon}_m^p + 3\zeta_m \dot{\varepsilon}_m^p + Y^d \dot{\omega} \end{aligned} \quad (4.93)$$

のように散逸関数  $\Phi$  をスカラー量のみで表すことができる. ここで、式(4.68)<sub>2</sub> および  $\bar{\sigma} \equiv \dot{\bar{\sigma}} / \cos \alpha$  を考慮している. さらに、散逸関数が全自由エネルギー速度の散逸部分  $\dot{\bar{\Psi}}^d$  に等しいことを考慮すれば、負荷過程のみを対象とした場合の  $\bar{\Psi}^d$  の全微分  $d\bar{\Psi}^d$  は式(4.93)より

$$d\bar{\Psi}^d = f_1(\bar{\sigma}, \dot{\bar{\sigma}}) d\bar{\varepsilon}^p + f_2(\bar{\sigma}, \ddot{\bar{\sigma}}) d\dot{\bar{\varepsilon}}^p + 3\sigma_m d\varepsilon_m^p + 3\zeta_m d\dot{\varepsilon}_m^p + Y^d d\omega \quad (4.94)$$

のようになる. これより、熱力学的ポテンシャル  $\bar{\Psi}^d$  と熱力学的力  $\bar{\sigma}, \dot{\bar{\sigma}}, \sigma_m, \zeta_m$  および  $Y^d$  の関数形は、次のように制限される.

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Psi}^d &= \bar{\Psi}^d(\bar{\varepsilon}^p, \dot{\bar{\varepsilon}}^p, \varepsilon_m^p, \dot{\varepsilon}_m^p, \omega) \\ \bar{\sigma} &= \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^p, \dot{\bar{\varepsilon}}^p, \varepsilon_m^p, \dot{\varepsilon}_m^p, \omega) \\ \dot{\bar{\sigma}} &= \dot{\bar{\sigma}}(\bar{\varepsilon}^p, \dot{\bar{\varepsilon}}^p, \varepsilon_m^p, \dot{\varepsilon}_m^p, \omega) \\ \sigma_m &= \sigma_m(\bar{\varepsilon}^p, \dot{\bar{\varepsilon}}^p, \varepsilon_m^p, \dot{\varepsilon}_m^p, \omega) \\ \zeta_m &= \zeta_m(\bar{\varepsilon}^p, \dot{\bar{\varepsilon}}^p, \varepsilon_m^p, \dot{\varepsilon}_m^p, \omega) \\ Y^d &= Y^d(\bar{\varepsilon}^p, \dot{\bar{\varepsilon}}^p, \varepsilon_m^p, \dot{\varepsilon}_m^p, \omega) \end{aligned} \right\} \quad (4.95)$$

## 4章の参考文献

(4.1) 北川浩, “塑性力学の基礎”, (1979), 日刊工業新聞社.

(4.2) Eringen, A.C., “Continuum Physics”, Vol.2, (1975), pp.136, Academic Press.

## 第5章

### 静水圧依存形ひずみ速度硬化則

本章では、村上ら<sup>(1.81)</sup>によるひずみ速度硬化則に静水圧依存性を導入する。まず、ひずみ速度硬化則の引数を制限することで、熱力学的理論体系に矛盾することなくひずみ速度硬化則の引数に静水圧応力を導入する。次に、村上らによるひずみ速度硬化則を利用しながらも、応力一定部分を表現する係数に静水圧依存性を導入し、単軸引張と単軸圧縮とで異なる真応力-真ひずみ関係を再現できることを確認する。なお、本研究における静水圧依存性は、単軸引張における真応力-真ひずみ関係と単軸圧縮におけるそれとの差を表現するためだけに最も簡単な形で導入することとし、純粋せん断、等2軸引張および等2軸圧縮の再現は今後の課題としたい。

## 5.1 硬化則の引数の制限

塑性平均垂直ひずみ  $\varepsilon_m^p$  について式(4.95)<sub>4</sub>を解けば、次式を得る。

$$\bar{\varepsilon}_m^p = \bar{\varepsilon}_m^p(\bar{\varepsilon}^p, \dot{\bar{\varepsilon}}^p, \sigma_m, \dot{\varepsilon}_m^p, \omega) \quad (5.1)$$

ここで、式(5.1)を式(4.95)<sub>2</sub>に代入すれば、

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^p, \dot{\bar{\varepsilon}}^p, \sigma_m, \dot{\varepsilon}_m^p, \omega) \quad (5.2)$$

のようになる。式(5.2)を  $\dot{\bar{\varepsilon}}^p$  について解けば、次のようになる。

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\bar{\varepsilon}}^p(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p, \sigma_m, \dot{\varepsilon}_m^p, \omega) \quad (5.3)$$

いま、擬似無損傷配置で議論していることを考慮すれば、上式で  $\omega$  を無視することができる。さらに、4章と同様に  $\dot{\varepsilon}_m^p$  の依存性を無視すれば、相当塑性ひずみ速度の引数は次のように表現できる。

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\bar{\varepsilon}}^p(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p, \sigma_m) \quad (5.4)$$

ポリマの力学的応答に静水圧依存性があることは良く知られており、Sanomura<sup>(1.79)</sup>の実験によれば、単軸引張試験で得られる真応力-真ひずみ関係は単軸圧縮試験で得られるそれと大きく異なり、真ひずみ0.1において単軸圧縮における応力が単軸引張におけるそれに比べて40%の大きい(図5.1)。このような静水圧依存性を熱力学的理論体系に矛盾することなく導入できることを式(5.4)は示している。

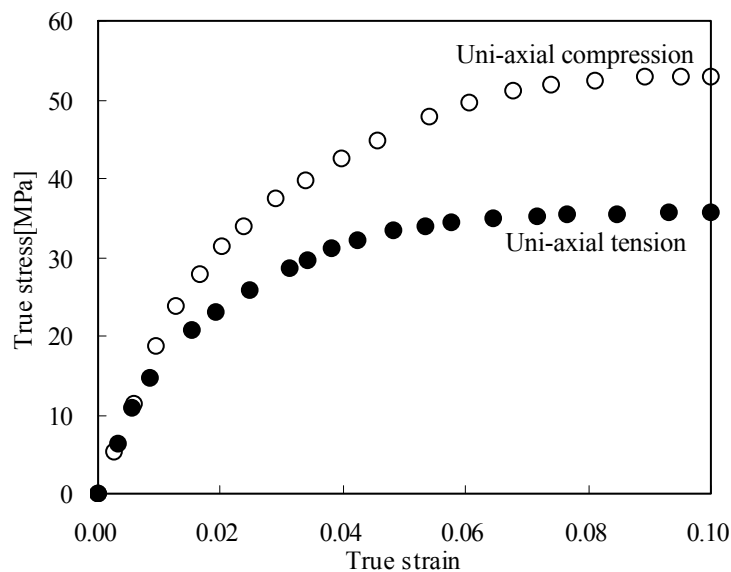


Fig. 5.1 True stress versus true strain curves under uni-axial tension and uni-axial compression<sup>(1.79)</sup>

## 5.2 静水圧依存形ひずみ速度硬化則の具体化

村上らによる Pan-Rice<sup>(5.1)</sup> 形のひずみ速度硬化則を、式(5.4)における引数に含まれる静水圧応力を利用して、次のように静水圧依存性に拡張する。

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \dot{\epsilon}_r \left( \frac{\bar{\sigma}}{g(\bar{\epsilon}^p)} \right)^{1/m} \tag{5.5}$$

$$g(\bar{\epsilon}^p) = \sigma_r \left[ k_0 \tanh(k_1 \bar{\epsilon}^p) + k_2'(\sigma_m) + H_e(\bar{\epsilon}^p - \epsilon_h) k_3 (\exp \bar{\epsilon}^p - \exp \epsilon_h) \right] \tag{5.6}$$

ここで  $\dot{\epsilon}_r$  は参照ひずみ速度、 $\epsilon_h$  は再硬化ひずみ、 $\sigma_r$  は参照応力、 $\sigma_r k_2' \equiv \sigma_y$  は  $\dot{\bar{\epsilon}}^p = \dot{\epsilon}_r$  のときの初期降伏応力であり、 $g$  は流れ応力である。また、 $k_0$ 、 $k_1$ 、 $k_2'$  および  $k_3$  は無次元材料定数であり、 $H_e(x)$  は単位ステップ関数である。本研究では、流れ応力の静水圧依存性を最も簡単な次の形で表現する。

$$k_2'(\sigma_m) = k_2 + k_4 \left[ 1 + \tanh(k_5 \sigma_m / \bar{\sigma}) \right] \tag{5.7}$$

ここで、 $k_2$ 、 $k_4$  および  $k_5$  は無次元材料定数であり、 $k_4 = 0$  のときには村上らの流れ則に一致する。式(5.6) および式(5.7)において、 $k_0 = 1.0$ 、 $k_1 = 100$ 、 $k_2 = 1.85$ 、 $k_3 = 2.37$ 、 $k_4 = 0$ 、 $\sigma_r = 11.0\text{MPa}$  および  $\epsilon_h = 0.175$  としたときの流れ応力の曲線を図 5.2 に示す。なお、高純度 PP では降伏直後に球晶が破壊するため、ひずみ軟化が起こるが、構造材料として広く用いられているゴムを添加した PP の場合には降伏後にも球晶が完全には破壊されないため、図 5.2 のように降伏後から再硬化まではレベル応力[補足 E.1]になるものとしてモデル化している。一般に、塑性変形は、弾性限界(elastic limit)後も継続して変形を与えた場合に生じるものとして知られており、塑性変形が開始した後に除荷すれば塑性ひずみが残留する。なお、比例限界(proportional limit)は弾性限界と同じかそれより狭い範囲の、Hooke の法則に従う領域の限界のことである。また、降伏点は、ひずみが増加し続けているにもかかわらず応力が低下し始める点のことであり、塑性変形開始後に見られる。これらをまとめれば図 5.3(a)のようになる。一方で本論文においては同図(b)に示すように、図 5.2 の流れ応力において弾性限界を比例限界と等しいとしたうえで、数値解析を安定的に進めることを目的に降伏点も弾性限界に等しいとしている。弾性限界に等しい降伏点において塑性変形が開始するとしているので、本論文では弾性限界後においてクレーズ発生条件式に従っ

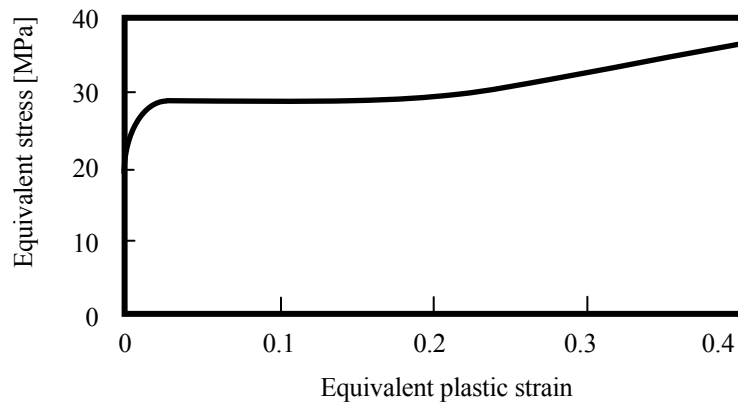


Fig.5.2 Flow stress of strain rate hardening rule

てクレーズが発生するものとする．なお，クレーズ発生条件式は6.4節にて提案する．

実現象では，図5.3(a)の降伏点(引張強さ)より前でクレーズ発生が開始するので，降伏と同時にクレーズが発生するとしている本モデルは実際と不整合のように感じられる．しかしながら，本モデルにおける降伏点は同図(b)のように比例限であるため，引張強さを迎える前にクレーズ発生が開始するので，その意味で実現象に整合していると言える．

また，式(5.7)の定数 $k_2$ は $\dot{\epsilon}^p = \dot{\epsilon}_r$ のときの単軸引張における初期降伏応力 $\sigma_y^{tension} \equiv k_2 \sigma_r$ を表現し，定数 $k_4$ は単軸圧縮における初期降伏応力の単軸引張のそれに対する増加分を $\sigma_y^{tension} + 2k_4 \sigma_r = (k_2 + 2k_4) \sigma_r$ により示している．また， $\sigma_m / \bar{\sigma}$ は応力三軸度という無次元数として知られており，単軸引張では $\sigma_m / \bar{\sigma} = 1/3$ であり，単軸圧縮では $\sigma_m / \bar{\sigma} = -1/3$ となる．関数 $k'_2(\sigma_m)$ と $\sigma_m / \bar{\sigma}$ の関係を図5.4に示す．

式(5.7)における各係数を， $k_2 = 1.0$ ， $k_4 = 0.685$ および $k_5 = -10$ とした場合， $k_2 = 1.0$ ， $k_4 = 0.685$ および $k_5 = -4$ とした場合，さらに $k_2 = 1.0$ ， $k_4 = 1.0$ および $k_5 = -10$ とした場合の $k'_2(\sigma_m)$ を図示すれば，図

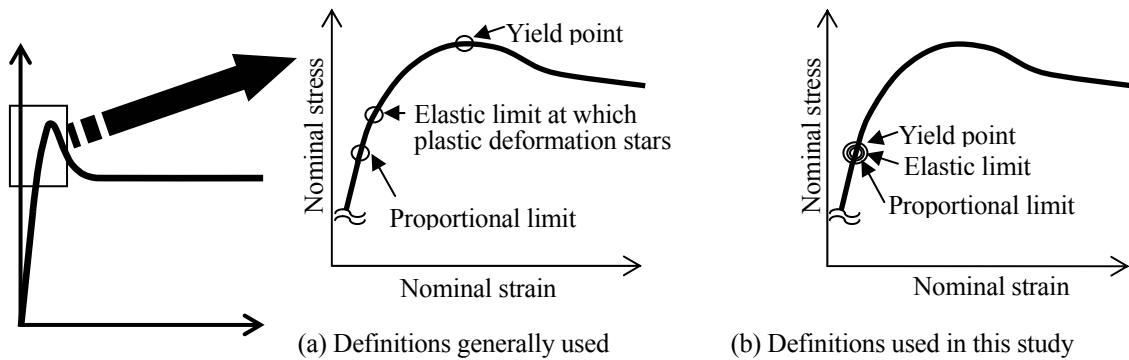


Fig.5.3 Proportional limit, elastic limit and yield point

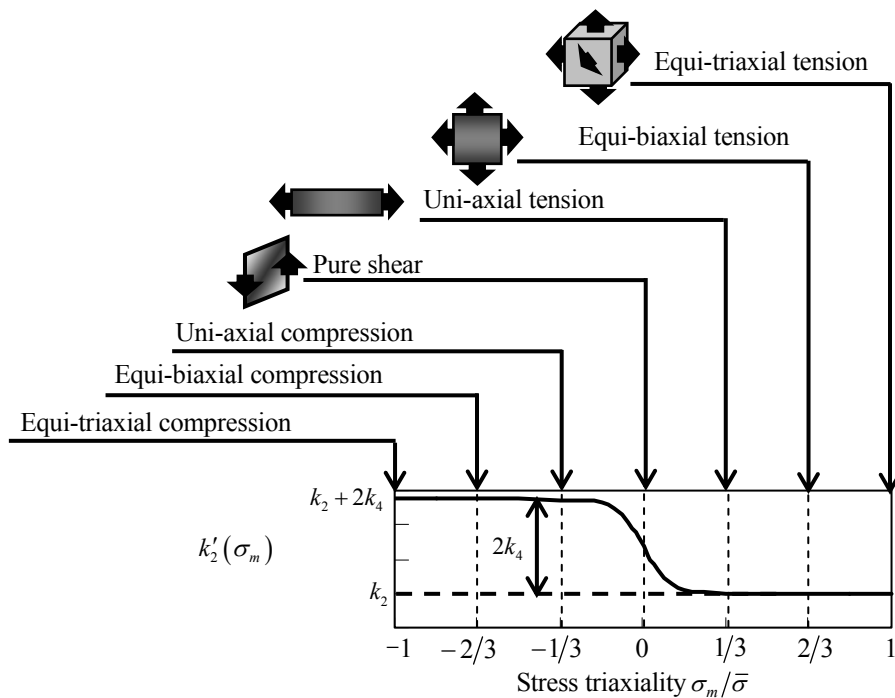


Fig.5.4 Relationship between stress triaxiality and function  $k'_2(\sigma_m)$



5.5 のようになる. 図 5.5 から, 係数  $k_4$  は単軸引張状態に対する単軸圧縮状態における  $k'_2(\sigma_m)$  の増分を示しており, 係数  $k_5$  が単軸引張状態から単軸圧縮状態までの  $k'_2(\sigma_m)$  の増加の鋭さを表現していることがわかる.

さらに, 縦弾性係数を 2200 MPa とし, 式(5.5), 式(5.6)および式(5.7)の材料定数を  $m = 0.04$ ,  $\dot{\epsilon}_r = 1.0 \text{ s}^{-1}$ ,  $\sigma_r = 11.1 \text{ MPa}$ ,  $k_0 = 2.2$ ,  $k_1 = 57$ ,  $k_2 = 1.0$ ,  $k_3 = 2.37$ ,  $k_4 = 0.685$ ,  $k_5 = -10$  および  $\epsilon_h = 0.175$  とし, 真応力-真ひずみ関係を  $\dot{\epsilon}^p = \dot{\epsilon}_r$  の条件で図示すれば図 5.6 のようになる. 図 5.4 の実線は単軸引張状態における真応力-真ひずみ曲線で, 点線は単軸圧縮状態におけるそれであるが, 単軸引張の曲線と比較するために単軸圧縮の応力を正の値で示している. 図 5.6 において単軸圧縮の応力履歴が単軸引張のそれに比べて高い値で推移していることから, 式(5.5), 式(5.6)および式(5.7)により単軸引張と単軸圧縮についての静水圧依存性が考慮できるといえる. なお, 本研究における静水圧依存性は, 図 5.6 に示すような単軸引張と単軸圧縮の差を表現することを目的に最も簡単な形で導入されている. 純粹せん断, 等 2 軸引張および等 2 軸圧縮の再現を目的とした更なる高精度化は, 今後の課題としたい.

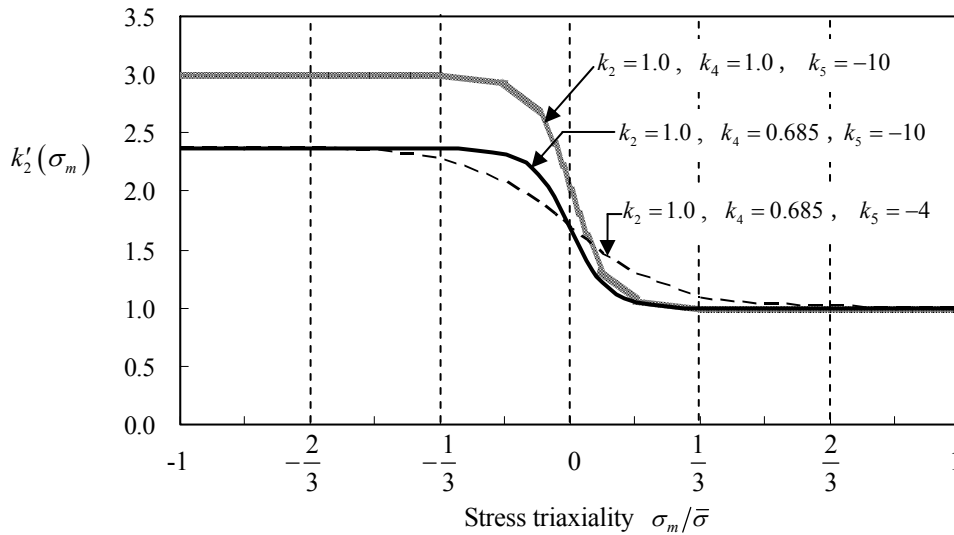


Fig.5.5 Relationship between stress triaxiality and function  $k'_2(\sigma_m)$  with various  $k_4$  and  $k_5$

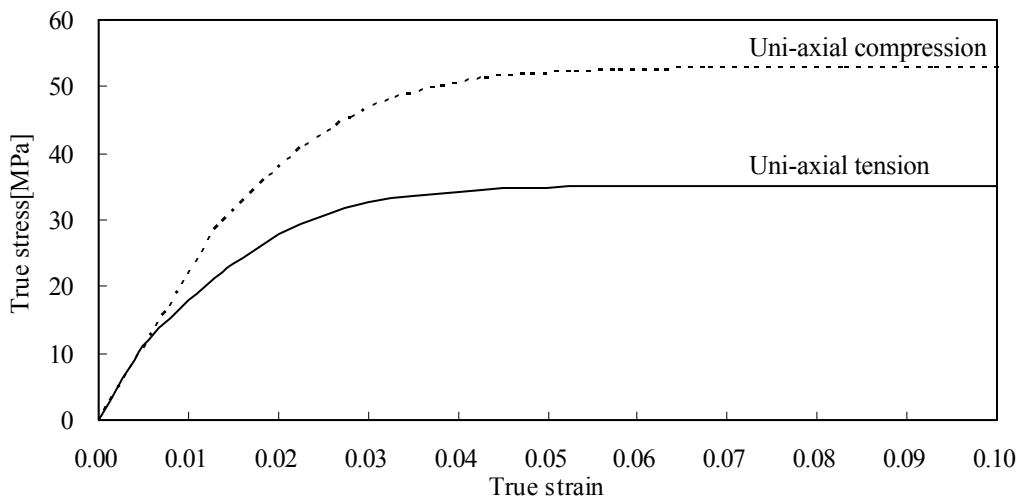


Fig. 5.6 True stress versus true strain curves under uni-axial tension and uni-axial compression at  $\dot{\epsilon}^p = \dot{\epsilon}_r$

## 5章の参考文献

- (5.1) 村上大介, 小林誠一, 鳥垣俊和, 志澤一之, “ポリマの粘塑性大変形挙動に関する熱・力学的モデリングとシミュレーション (第2報, 流れ則に基づく尖り点モデルとその FEM 解析)”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 68, No.668 (2002), pp.682-689.
- (5.2) Sanomura, Y., “Constitutive Equation for Plastic Behavior of Hydrostatic-Pressure-Dependent Polymers”, *Materials Science Research International*, Vol.9, No.4 (2003), pp.243-247.
- (5.3) Pan, J. and Rice, J. R., “Rate Sensitivity of Plastic Flow and Implications for Yield-Surface Vertices”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.19, No.11 (1983), pp.973-987.

## 第6章

# クレーズ挙動のモデリング

本章では、クレーズ挙動のモデリングを行う。まず、熱力学的議論を通じて制限されたクレーズ速度の引数のうち、クレーズの発生および伝ばが相当塑性ひずみの増加と塑性平均垂直ひずみの増加にともない進展すること、および配向硬化にともないクレーズが停止することに基づいて重要な引数として相当塑性ひずみ、相当塑性ひずみ速度、クレーズ密度、塑性平均垂直ひずみの速度をクレーズ発展式の引数に選び、クレーズ発展式を構築する。このとき、クレーズの体積分率と面積分率の関係について言及し、両分率を関係づける式も提案する。さらに、クレーズ伝ば項の係数の相当塑性ひずみ速度依存性と相当塑性ひずみ依存性を関数で表現する。一方で、塑性平均垂直ひずみの発展式の関数形を、ポイドを有する立方体ポリマブロックにより決定し、その係数を同定する。さらに、クレーズ発生条件式にひずみ速度依存性を導入する。最後に、クレーズ発展式を広ひずみ速度域に対応すべく拡張する。

## 6.1 クレーズ発展式の表現

クレーズ密度にエネルギー共役な  $Y^d$  の関数形を  $\omega$  について解けば、式(4.95)<sub>6</sub>より  $\omega$  の引数は以下のように表現できる。

$$\omega = \omega(\bar{\varepsilon}^p, \dot{\bar{\varepsilon}}^p, \varepsilon_m^p, \dot{\varepsilon}_m^p, Y^d) \quad (6.1)$$

式(6.1)の物質時間微分をとれば、

$$\dot{\omega} = \dot{\omega}(\bar{\varepsilon}^p, \dot{\bar{\varepsilon}}^p, \ddot{\bar{\varepsilon}}^p, \varepsilon_m^p, \dot{\varepsilon}_m^p, \ddot{\varepsilon}_m^p, Y^d, \dot{Y}^d) \quad (6.2)$$

となる。式(6.2)の  $Y^d$  に式(4.95)<sub>6</sub>を適用すれば、 $\dot{\omega}$  の関数形は

$$\dot{\omega} = \dot{\omega}(\bar{\varepsilon}^p, \dot{\bar{\varepsilon}}^p, \ddot{\bar{\varepsilon}}^p, \varepsilon_m^p, \dot{\varepsilon}_m^p, \ddot{\varepsilon}_m^p, \omega, \dot{Y}^d) \quad (6.3)$$

のように決まる。このうち、クレーズ密度の発展に大きく寄与すると考えられる引数を残すと次式のようなになる。

$$\dot{\omega} \approx \dot{\omega}(\bar{\varepsilon}^p, \dot{\bar{\varepsilon}}^p, \dot{\varepsilon}_m^p, \omega) \quad (6.4)$$

ここで、北川・川越<sup>(6.1)</sup>は、実験および観察を通じてクレーズの連続的な発生と成長はポリマの塑性変形と関連があるとしている。また、古口・堀<sup>(1.21)</sup>はクレーズは塑性変形的一种であるとしており、井上・山本<sup>(1.5)</sup>はクレーズが非弾性変形すなわち塑性変形の進行とともに生じているとしている。よって、クレーズの発生および成長は、相当塑性ひずみ  $\bar{\varepsilon}^p$  の増加にともない生じると考えるのが妥当である。一方でクレーズはフィブリルとポイドで構成されていることから、ポイドが塑性平均垂直ひずみの増加にともない成長することを考慮すれば、クレーズの等方成長は塑性平均垂直ひずみ  $\varepsilon_m^p$  の増加にともない生じると考えることができる。以上の考察に基づき、式(6.4)の引数によりクレーズ発展式を表現すれば、次のような形になる。

$$\dot{\omega} = C_{pr}(\bar{\varepsilon}^p, \dot{\bar{\varepsilon}}^p) \dot{\varepsilon}_m^p + C_{ig}(\omega) \langle \dot{\varepsilon}_m^p \rangle \quad (6.5)$$

ただし、 $\hat{\omega}$ はクレーズの体積分率であり、面積分率 $\omega$ と $\hat{\omega} = \xi\omega^{3/2}$ の関係がある[補足 F.1]。なお本研究では、簡単のため $\xi=1$ とする。式(6.5)の右辺第1項は、クレーズ密度の増加が塑性ひずみ $\bar{\varepsilon}^p$ の増加にともない生じることを表しており、クレーズ伝ば項と呼ぶ。一方で右辺第2項は、塑性平均垂直ひずみ $\varepsilon_m^p$ の増加に起因して生じるクレーズ密度の増加を表しており、クレーズの等方成長項と呼ぶ。クレーズの伝ば項および等方成長項における係数 $C_{pr}$ および $C_{ig}$ は、 $\bar{\varepsilon}^p$ および $\varepsilon_m^p$ の増加に対するクレーズ密度の増加率をそれぞれ表現している。なお、 $\langle \rangle$ はMacauleyの括弧である。

ここで、2章では $\varepsilon_m^p$ が $\bar{\varepsilon}^p$ に比べて十分小さいとして $\varepsilon_m^p$ を無視した。しかし式(6.5)においては、 $\bar{\varepsilon}^p$ と $\varepsilon_m^p$ の各項に異なる係数が存在するので、両項の大きさを単純には比較できないこと、ならびに $\varepsilon_m^p$ がボイドを有するクレーズの等方成長に必ず寄与することから、一つの式中に $\bar{\varepsilon}^p$ と $\varepsilon_m^p$ を共存させている。

なお、引張負荷を加えた後に除荷し、その後さらに圧縮負荷を与えるような特別な条件においては、引張りによって生じたクレーズ中のボイドが圧縮過程で潰れる影響により、クレーズ密度が減少することもありうる。また、ボイド部分が完全に潰れてしまえば、圧潰にともない材料の再硬化が始まることも考えられる。ただし、負の静水圧が作用する条件ではクレーズは発生しない。このような圧縮状態に対する精密化は今後の課題とするが、このような力学的条件が生じることはまれであるから、本節におけるクレーズのモデル化で十分であるといえる。

## 6.2 クレーズ発展式的具体化

北川・川越<sup>(1.7)</sup>は、高ひずみ速度で変形した場合には、クレーズ先端に塑性域が形成されることでクレーズ進展が阻止されるとしている。このことから、クレーズの進展は低ひずみ速度ほど大きいと考えられ、クレーズ進展にひずみ速度依存性があるといえる。一方で、小口・堀<sup>(1.21)(6.2)(1.8)</sup>は分子鎖配向領域ではクレーズの成長が停止していることを報告している。塑性変形の進展にともない分子鎖が配向することを考慮すれば、クレーズの成長停止は塑性ひずみに依存すると考えられる。そこで、式(6.4)中の引数から相当塑性ひずみ $\bar{\varepsilon}^p$ および相当塑性ひずみ速度 $\dot{\bar{\varepsilon}}^p$ を選び、式(6.5)のクレーズの伝ば項における係数 $C_{pr}$ が $\bar{\varepsilon}^p$ と $\dot{\bar{\varepsilon}}^p$ に依存することを関数 $f(\bar{\varepsilon}^p, \dot{\bar{\varepsilon}}^p)$ および係数 $A$ を用いれば、次のように表現できる。

$$C_{pr} \equiv Af(\bar{\varepsilon}^p, \dot{\bar{\varepsilon}}^p) \quad (6.6)$$

次に、クレーズ進展のひずみ速度依存性およびクレーズの成長停止という2つの特徴を表現するために、関数 $f(\bar{\varepsilon}^p, \dot{\bar{\varepsilon}}^p)$ を零から1の値をとる2つの関数 $f_1$ および $f_2$ の積で表現し、以下のように具体化する。

$$\left. \begin{aligned} f(\bar{\varepsilon}^p, \dot{\bar{\varepsilon}}^p) &= f_1(\dot{\bar{\varepsilon}}^p) f_2(\bar{\varepsilon}^p) \\ f_1(\dot{\bar{\varepsilon}}^p) &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \tanh \left\{ -D_1 \left( \ln \left( \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^p}{\dot{\varepsilon}_r} \right) + D_2 \right) \right\} \right] \\ f_2(\bar{\varepsilon}^p) &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \tanh \left\{ -D_3 (\bar{\varepsilon}^p - \varepsilon_c) \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

ここで、 $D_1$ 、 $D_2$ および $D_3$ は無次元係数である。

関数  $f_1$  は、クレーズの進展が低ひずみ速度ほど大きいというひずみ速度依存性を考慮し、かつ比較的  
低ひずみ速度において広範囲でクレーズ発生を再現するために、塑性ひずみ速度の対数関数の双曲線正  
接関数によって表現している。なお、衝撃破壊が生じる時のような高ひずみ速度領域におけるクレーズ  
のひずみ速度依存性も含めたクレーズ挙動に対するモデル化は、6.5 節で行う。また、塑性発熱に起因す  
る軟化と高ひずみ速度による硬化というような温度依存性とひずみ速度依存性の相互作用を考慮したモ  
デル化については今後の課題にしたい。いま、 $\dot{\epsilon}_p = 1 \text{ s}^{-1}$  として、 $f_1$  と塑性ひずみ速度の関係を図 6.1 に  
示す。この図を見ると、 $D_1$  の値が大きいほどひずみ速度依存性が強くなり、 $D_1 = 1$  (太線) に比べて  
 $D_1 = 2$  (細線) の方が  $\dot{\epsilon}^p = 1$  の付近で急激に  $f_1$  の値が 1 から零に変化している。また、 $D_2 = 0$  (太線) と  
 $D_2 = 1$  (破線) を比較すれば、 $D_2$  が大きいほど曲線が右側すなわち高ひずみ速度側にシフトすること  
がわかる。

一方で関数  $f_2$  は、分子鎖配向領域ではクレーズの成長が停止しているという特徴を考慮して、塑性ひ  
ずみの双曲線正接関数で表現している。なお、 $\epsilon_c$  は成長停止ひずみである。ここで、 $\epsilon_c = 0.175$  として、  
 $f_2$  と塑性ひずみの関係を図示すれば図 6.2 のようになる。図 6.2 からわかるように、 $D_3$  の値が大きいほ  
ど  $\epsilon_c$  近傍で急激に  $f_2$  の値が 1 から零に変化し、このときクレーズの成長が停止する。

さらに、式(6.5)の右辺第 2 項のクレーズ等方成長項における係数  $C_{ig}$  は、小林らの手法<sup>(1.82)</sup> にならない  
Gurson のポイド発展式<sup>(1.83)</sup> を参考すれば、係数  $B$  と  $\hat{\omega}$  を用いて次のように表現できる。

$$C_{ig} \equiv B(1 - \hat{\omega}) \quad (6.8)$$

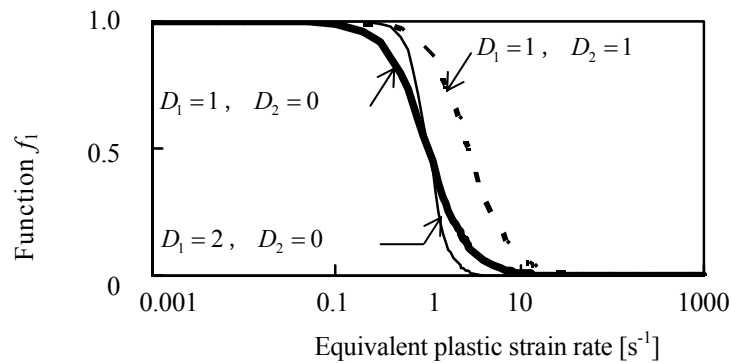


Fig.6.1 Relationship between  $f_1$  and equivalent plastic strain rate

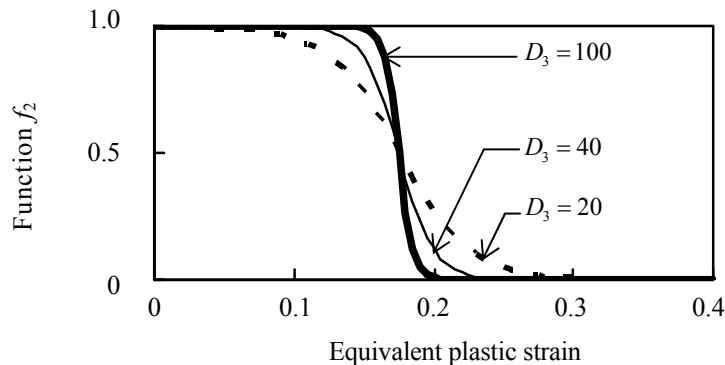


Fig.6.2 Relationship between  $f_2$  and equivalent plastic strain

式(6.6)および式(6.8)を式(6.5)に代入すれば、クレーズ発展式が次のように具体化できる。

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\omega}} &= C_{pr} \dot{\hat{\epsilon}}^p + C_{ig} \langle \dot{\hat{\epsilon}}_m^p \rangle \\ &= Af(\bar{\epsilon}^p, \dot{\hat{\epsilon}}^p) \dot{\hat{\epsilon}}^p + B(1-\hat{\omega}) \langle \dot{\hat{\epsilon}}_m^p \rangle \end{aligned} \quad (6.9)$$

式(6.9)の右辺第1項は小林らによるクレーズの生成・消滅を表す項<sup>(1,82)</sup>と全く異なる表現になっている[補足F.2]。一方で式(6.9)の右辺第2項はクレーズの等方成長項であり、小林らと同様の表現<sup>(1,82)</sup>ではあるが、次節で述べるように立方体ポリマブロックの数値解析を通じて  $\dot{\hat{\epsilon}}_m^p$  の発展式が新たに同定される点異なる。

### 6.3 塑性平均垂直ひずみの発展式の同定

塑性平均垂直ひずみ  $\dot{\hat{\epsilon}}_m^p$  の発展式を同定するために、図 6.3 に示す立方体ポリマブロックに対して汎用構造解析ソルバ RADIOSS を用いた弾塑性数値実験を行い、等 3 軸引張時の全体積変化と静水圧応力変化を同時に得る。このとき、体積変化に依存しない  $J_2$  流れ理論に基づく塑性構成式を用いることにより、ポイドをもたない無損傷モデル[図 6.3 (a)]からは平均弾性垂直ひずみ  $\dot{\hat{\epsilon}}_m^e$  のみが、一方、ポイドをもつ損傷モデル[図 6.3 (b)]からは全平均垂直ひずみ  $\dot{\hat{\epsilon}}_m$  が得られる。 $\dot{\hat{\epsilon}}_m$  と  $\dot{\hat{\epsilon}}_m^e$  との差を計算することにより  $\dot{\hat{\epsilon}}_m^p$  を求めることができる。

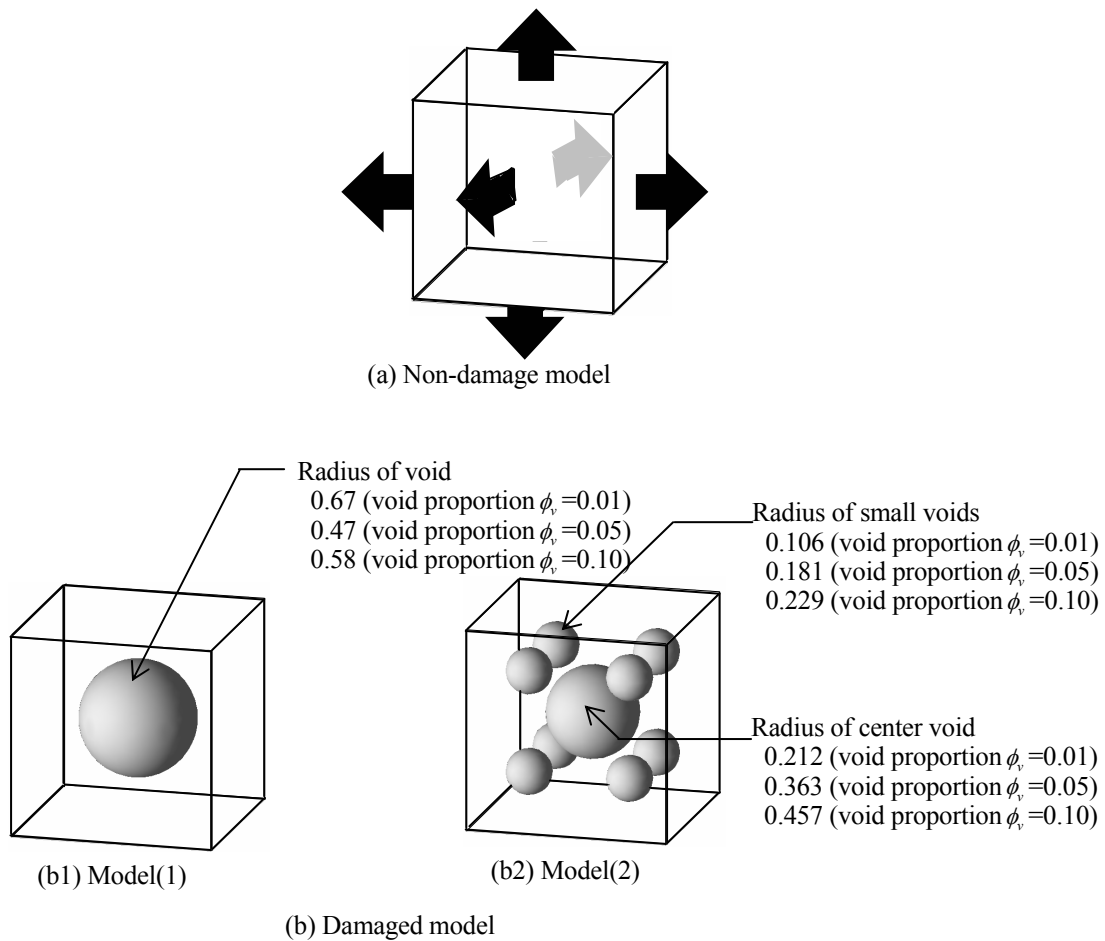


Fig.6.3 Polymer cube with sphere void under isotropic tension for numerical experiment

損傷モデルとして、2種類のモデルをとりあげることとし、単純にボイド1個を有する立方体ポリマブロックをモデル(1)とする[図 6.3(b1)]. 一方、複数のボイドを有するブロックをモデル(2)とする[図 6.3(b2)]. モデル(2)は、中心ボイドの1/2の半径を有する小ボイド8個をもち、9個のボイド体積の合計がモデル(1)のボイド1個の体積と等しくなるようにする.

解析対象は、図 6.4 のように対称性を考慮して全モデルの1/8部分のみとする. 解析対象の立方体の各辺は単位長さとし、原点を含む3面に対して対称境界条件を与え、その他の3面には引張率が同じになるように強制速度を与える. 損傷モデルのボイド率 $\phi_v$ には0.01, 0.05 および0.1を選び、各モデルのボイド半径は図 6.3 に示すとおりである. ここで、ポリマブロックの物性にはゴム充填率5%のPP材を採用し、縦弾性係数を $E = 1.8 \text{ GPa}$ , ポアソン比を $\nu = 0.33$ , ひずみ速度硬化則[式(5.5)および式(5.6)]の各定数を $m = 0.041$ ,  $\dot{\epsilon}_r = 0.893 \text{ s}^{-1}$ ,  $k_0 = 1.0$ ,  $k_1 = 100$ ,  $k_2 = 1.85$ ,  $k_3 = 2.37$ ,  $\sigma_r = 11.0 \text{ MPa}$  および $\epsilon_h = 0.175$

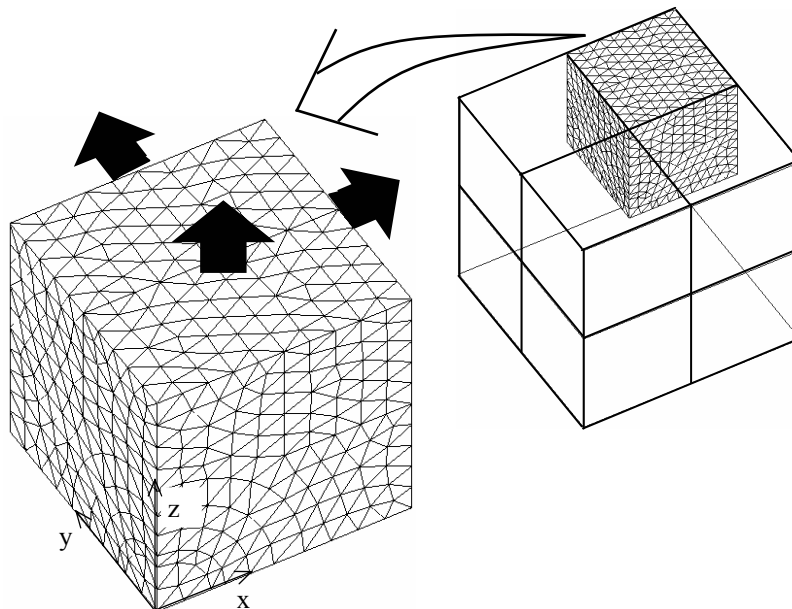


Fig.6.4 Finite element mesh of 1/8 part for numerical experiment

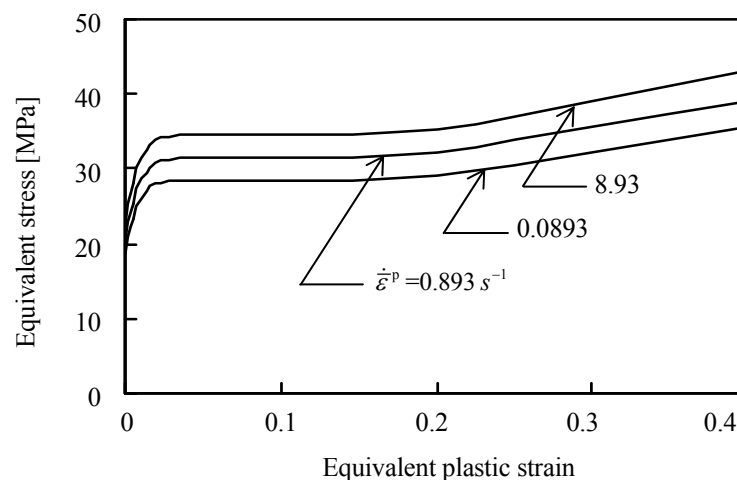


Fig.6.5 Hardening curves of polypropylene



とする。このときの、相当応力-相当塑性ひずみ関係を図示すれば図 6.5 のようになる。ここで、本数値実験では、簡単のため応力-ひずみ関係のひずみ速度依存性は考慮せず、ひずみ速度が式(5.5)の参照ひずみ速度  $\dot{\epsilon}_r = 0.893 \text{ s}^{-1}$  と等しい場合の硬化則[式(5.6)]を用いるとともに、静水圧依存性も考慮しないこととし、式(5.7)において  $k_4 = 0$  を与える。

数値実験の結果を、体積ひずみ-静水圧応力関係として図 6.6 に示す。無損傷モデルは、線形応答を示していることから非弾性ひずみが零であり、その体積ひずみが  $\epsilon_m^e$  に相当することがわかる。一方で損傷モデルは、ある応力値で急激に体積ひずみが上昇する顕著な非線形応答をもち、これらの体積ひずみが  $\epsilon_m^e$  と  $\epsilon_m^p$  の和であることも確認できる。

各損傷モデルにおいて  $\epsilon_m^p$  を計算し、静水圧応力をレベル応力  $\sigma_L$  で除して無次元化すれば図 6.7 のプロットを得る。ここでレベル応力とは、図 6.5 の硬化曲線における再硬化直前の応力一定部分<sup>(1,81)</sup>に相当する応力値であり、図 6.5 の場合には  $\dot{\epsilon}^p = \dot{\epsilon}_r$  のとき  $\sigma_L = 31.3 \text{ MPa}$  である。いずれの損傷率でもモデル(2)の  $\epsilon_m^p$  の急増がモデル(1)に比べてやや右側へシフトしている以外は両モデルの傾向が一致しているため、両損傷モデルの結果を同じ関数で同定できると考えられる。そこで  $\epsilon_m^p$  を  $\sigma_m$  の双曲線余弦関数および  $\phi_v$  の指数関数で表せば、時間発展形式で次式のようなになる。

$$\dot{\epsilon}_m^p = \frac{D}{Dt} \left[ q_1 \phi_v^{q_2} \left\{ \cosh \left( \frac{(q_3 \phi_v + q_4) \sigma_m}{\sigma_L} \right) - 1 \right\} \right] \quad (6.10)$$

ここで、 $q_1 \sim q_4$  は材料定数である。同定された各定数は表 6.1 に示すとおりであり、同定した曲線を図 6.7 の実線[モデル(1)]および破線[モデル(2)]に示す。ここでは、フィブリルの存在を無視して、クレーズの成長をボイドの成長と同様に扱うことにより過酷側でクレーズの成長を評価する。また、本材料モデルを製品設計に供する際に安全側で設計ができるようにするために、モデル(1)を採用する。

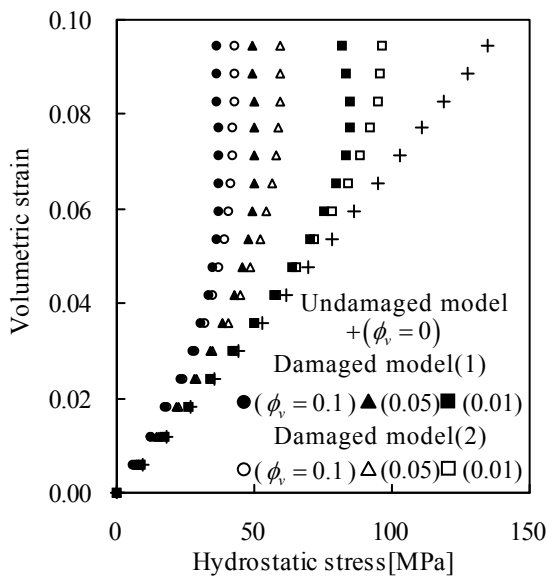


Fig.6.6 Relationship between volumetric strain and hydrostatic stress in numerical experiment

Table 6.1 Identified material constants

Material constants	Model(1)	Model(2)
$q_1$	$1.0 \times 10^{-5}$	$6.0 \times 10^{-5}$
$q_2$	0.1	0.5
$q_3$	35	22
$q_4$	2.4	2.4

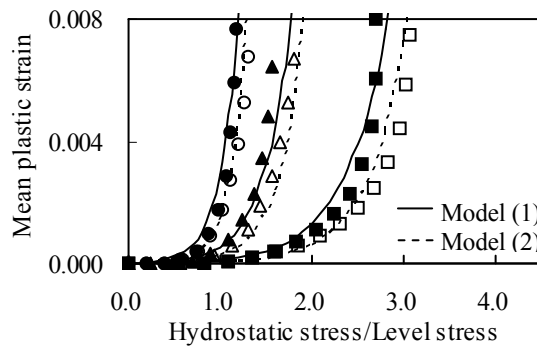


Fig.6.7 Relationship between mean plastic strain and non-dimensional stress with identified

そこで、レベル応力の速度依存性も考慮した上で、クレーズ密度  $\hat{\omega}$  を用いて式(6.10)を以下のように書き改める。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_m^p &= \frac{D}{Dt} \left\{ q_1 \hat{\omega}^{q_2} \left[ \cosh \left( \frac{(q_3 \hat{\omega} + q_4) \sigma_m}{\sigma_L} \right) - 1 \right] \right\} \\ \sigma_L &= \sigma_r \left[ \tanh(k_1 \varepsilon_h) + k_2 \right] \left( \frac{\dot{\varepsilon}^p}{\dot{\varepsilon}_r} \right)^m \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

式(6.11)<sub>1</sub>は小林らの  $\varepsilon_m^p$  の発展式<sup>(1.82)</sup>と同様に双曲線余弦関数の係数部分に  $\hat{\omega}$  をもつ。しかしながら、クレーズ進展にともなう  $\varepsilon_m^p$  の増加を、小林らは最も簡単な  $\hat{\omega}$  に対する線形関係で表現しているが、式(6.11)<sub>1</sub>には非線形性も表現できるように指数  $q_2$  が導入されている。また小林らの  $\varepsilon_m^p$  に対する発展式<sup>(1.82)</sup>では、双曲線余弦関数の変数部分が最も簡単な無次元応力  $\sigma_m/\sigma_y$  の定数倍になっており、無次元応力の増加にともなう  $\varepsilon_m^p$  が双曲線余弦曲線の形で増加するとしているが、式(6.11)<sub>1</sub>では  $\hat{\omega}$  とともに無次元応力  $\sigma_m/\sigma_L$  の係数部分の値が大きくなるので、 $\hat{\omega}$  の増加にともない  $\varepsilon_m^p$  がより顕著に増加することも表現できる。さらに、小林らによる図 6.7 の曲線が原点を通らないという不具合も改善されている。

一方、式 (6.11)<sub>2</sub> で表されるレベル応力のひずみ速度依存性は、図 6.5 でレベル応力値がひずみ速度の上昇にともなう大きくなることに対応するので、式(6.11)<sub>2</sub> はひずみ速度硬化則[式(5.5)、式(5.6)および式(5.7)]の一部で表現されている。なお、小林ら<sup>(1.82)</sup>が考慮していないレベル応力のひずみ速度依存性を  $\varepsilon_m^p$  の発展式に導入することで、 $\varepsilon_m^p$  をより精度よく計算できると考えられる。

## 6.4 ひずみ速度依存形クレーズ発生条件式

Kawagoe-Kitagawa<sup>(1.84)</sup>は、静水圧応力によって分子の運動性が高まり、ある限界値でポイドを発生しつつ分子鎖が最大主応力方向に配向する結果、ポイドとフィブリルで構成されるクレーズが発生すると考え、静水圧応力条件式を定式化している。しかしながら、この条件式には、低速変形ほど低応力状態でクレーズが発生する<sup>(1.1)</sup>というクレーズのひずみ速度依存性が考慮されていないので、この効果を新たに導入する必要がある。ここで、ひずみ速度依存性をもつ降伏応力がクレーズ発生に関与していると考えれば、ひずみ速度依存形クレーズ発生条件式を次式のように表現できる。

$$\sigma_b \geq A_1 + (B_1/3\sigma_m) + C_1\sigma_y \quad (6.12)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_b &= \sigma_1 - \nu\sigma_2 - \nu\sigma_3 \\ \sigma_y &= k_2\sigma_r \left( \frac{\dot{\varepsilon}^p}{\dot{\varepsilon}_r} \right)^m \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

である。ここで  $A_1$ 、 $B_1$  および  $C_1$  は材料定数であり、 $\sigma_b$  はフィブリルの配向に必要な応力、 $\sigma_y$  は降伏応力、 $\sigma_1 \sim \sigma_3$  は主応力、 $\nu$  はポアソン比である。式(6.12)の右辺第3項が拡張された項であり、図 6.5 における  $\sigma_y$  すなわち  $\dot{\varepsilon}^p = 0$  における応力値にひずみ速度依存性が認められることから、ひずみ速度硬化則[式(5.5)、式(5.6)および式(5.7)]を参照して式(6.13)<sub>2</sub>のように  $\sigma_y$  をモデル化している。

## 6.5 広ひずみ速度域に対応したクレーズ発展式への拡張

Imai-Brown<sup>(6.3)</sup>は、低ひずみ速度においては少数のクレーズの長さが大きく成長[図 6.8(a)]するが、高ひずみ速度においては小さなクレーズが多数発生[図 6.8(b)]して数密度が増加する傾向を観察に基づき報告している．ここで、クレーズ長さの成長とは、クレーズを3次元の楕円体の損傷と考えた場合でも、2次元の楕円の損傷と考えた場合でも、同様に長軸が長くなることに対応している．なお、クレーズを線状の1次元の損傷ととらえていないことに注意されたい．Imai-Brown の観察結果を参考にすれば、クレーズ伝ぱ項におけるひずみ速度依存性は、クレーズの発生およびクレーズの成長という2つの異なる挙動に分離した形で表現する必要がある．ただし、低ひずみ速度および高ひずみ速度のいずれにおいても、クレーズの発生および成長は分子鎖配向領域では停止する．なお、2.1節で述べたように、本論文ではクレーズを等方的なスカラー量として扱うため、クレーズの長さが大きく成長することは等方的な球形クレーズの直径が大きくなることに対応する．ここで、式(6.5)の右辺第1項の $C_{pr}$ をクレーズの発生およびクレーズの成長を表す係数 $C_{ge}$  および $C_{gr}$  の和により、次式のように表現する．

$$C_{pr} = C_{ge} + C_{gr} \quad (6.14)$$

したがって、低ひずみ速度から高ひずみ速度までの広ひずみ速度域に対応できるように、式(6.5)は次式のように拡張される．

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= (C_{ge} + C_{gr}) \dot{\varepsilon}^p + C_{ig} \langle \dot{\varepsilon}_m^p \rangle \\ &= C_{ge} \dot{\varepsilon}^p + C_{gr} \dot{\varepsilon}^p + C_{ig} \langle \dot{\varepsilon}_m^p \rangle \end{aligned} \quad (6.15)$$

ここで、式(6.15)の右辺第1項はクレーズの発生項、右辺第2項はクレーズの成長項であり、右辺第3項は式(6.5)と同じクレーズの等方成長項である．次に、クレーズの発生項および成長項を具体化する．クレーズの発生項および成長項において、6.3節と同様に塑性ひずみの増加にともないクレーズが増加するとしうえて、上述の相反するひずみ速度依存性を関数 $f_1^{ge}(\dot{\varepsilon}^p)$  および $f_1^{gr}(\dot{\varepsilon}^p)$  を与えてクレーズの増加率の速度依存性を表現し、さらに塑性ひずみに依存するクレーズ成長停止を表現する関数 $f_2(\dot{\varepsilon}^p)$  を

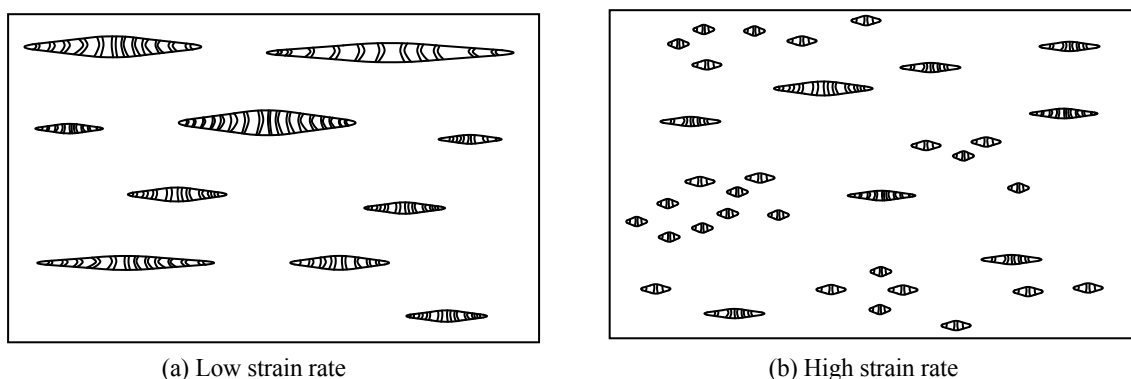


Fig.6.8 Schematic distribution and morphology of craze

乗ずれば、次のよう表現できる.

$$\left. \begin{aligned} C_{ge} &= f_1^{ge}(\dot{\bar{\varepsilon}}^p) f_2(\bar{\varepsilon}^p) \\ C_{gr} &= f_1^{gr}(\dot{\bar{\varepsilon}}^p) f_2(\bar{\varepsilon}^p) \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

ここで、関数  $f_1^{ge}(\dot{\bar{\varepsilon}}^p)$ ,  $f_1^{gr}(\dot{\bar{\varepsilon}}^p)$  および  $f_2(\bar{\varepsilon}^p)$  を Imai-Brown の観察事実に整合するように具体化すれば、次のようになる.

$$f_1^{ge}(\dot{\bar{\varepsilon}}^p) = \frac{A_{ge}}{2} \left\{ D_1 + \tanh \left[ -D_2 \left( \log_{10} \left( \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^p}{\dot{\varepsilon}_r} \right) + D_3 \right) \right] \right\} \quad (6.17)$$

$$f_1^{gr}(\dot{\bar{\varepsilon}}^p) = A_{gr} \hat{\omega}_{ge} \left( \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^p}{\dot{\varepsilon}_r} \right)^{-n_g} \quad (6.18)$$

$$f_2(\bar{\varepsilon}^p) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \tanh \left[ -D_4 (\bar{\varepsilon}^p - \varepsilon_c) \right] \right\} \quad (6.19)$$

ここで、 $A_{ge}$ ,  $A_{gr}$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$ ,  $D_4$  および  $n_g$  は、係数および指数である. また、 $\hat{\omega}_{ge}$  は体積分率としてのクレーズ発生密度であり、 $C_{ge} \dot{\bar{\varepsilon}}^p$  の時間積分値として算出される. なお、 $\varepsilon_c$  は成長停止ひずみである. 高ひずみ速度において小さなクレーズが多数発生して数密度が増加することを表現するために、塑性ひずみ速度の対数関数の双曲線正接関数によって式(6.7)<sub>2</sub>と同様な形で関数  $f_1^{ge}(\dot{\bar{\varepsilon}}^p)$  を表現する. ただし、零から1の値をとる6.3節の関数とは異なり、係数  $A_{ge}$  および  $D_1$  の導入により、関数  $f_1^{ge}(\dot{\bar{\varepsilon}}^p)$  は幅広い値をとることができるように構築し直されている. また、降伏応力や破断応力のようなポリマの力学的特性は、ひずみ速度の桁の変化にともなって変化することが多く、降伏応力のひずみ速度依存性が常用対数を利用して記述できる<sup>(6.4)</sup>ことを参考に、関数  $f_1^{ge}(\dot{\bar{\varepsilon}}^p)$  では常用対数関数を採用している. ここで  $A_{ge} = 4.0$  として、 $D_1 = 1.3$ ,  $D_2 = -10$  および  $D_3 = -2.2$  とした場合と  $D_1 = 2.0$ ,  $D_2 = -10$  および  $D_3 = -2.2$  とした場合、さらに  $A_{ge} = 8.0$  として、 $D_1 = 1.3$ ,  $D_2 = -10$  および  $D_3 = -2.2$  とした場合、 $D_1 = 1.3$ ,  $D_2 = -30$  および  $D_3 = -2.2$  とした場合と  $D_1 = 1.3$ ,  $D_2 = -8$  および  $D_3 = -2.0$  とした場合の関数  $f_1^{ge}(\dot{\bar{\varepsilon}}^p)$  を

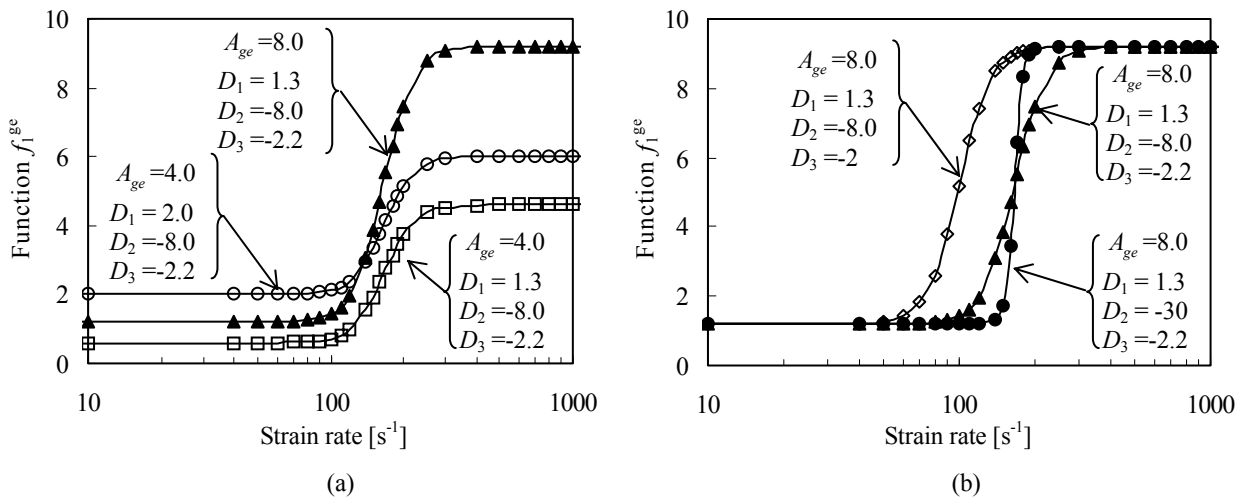


Fig. 6.9 Relationship between strain rate and function  $f_1^{ge}$

図示すれば図 6.9 のようになる. 同図(a)を見れば, 係数  $A_{ge}$  は関数  $f_1^{se}(\dot{\epsilon}^p)$  の低ひずみ速度側における漸近値と高ひずみ速度側のそれとの差を, 係数  $D_1$  は  $A_{ge}(D_1-1)/2$  を介して低速側の漸近値を表現していることがわかる. さらに図 6.9(b)を見れば, 係数  $D_2$  は関数  $f_1^{se}(\dot{\epsilon}^p)$  の値の急増し易さを表現しており, 係数  $D_3$  は, 関数  $f_1^{se}(\dot{\epsilon}^p)$  が低い値から高い値に遷移するひずみ速度に対応する係数で, 係数  $D_3$  の値が小さいほど高い値への遷移が高速側に, すなわち図 6.9(b)において右側に移動することがわかる. 低ひずみ速度において少数のクレーズの長さが大きく成長する傾向を表現する関数  $f_1^{gr}(\dot{\epsilon}^p)$  は, 式(5.5)のひずみ速度硬化則などで一般的に用いられているべき乗則により, ひずみ速度値の桁に依存する形で表現している. ここで,  $\hat{\omega}_{ge}=0.01$  のときに  $n_g=0.30$  として,  $A_{gr}=2.0$ ,  $A_{gr}=4.0$  および  $A_{gr}=10$  とした場合を図示すれば図 6.10(a) のようになる. さらに,  $\hat{\omega}_{ge}=0.1$  のときに  $A_{gr}=4.0$  として,  $n_g=0.20$ ,  $n_g=0.30$  および  $n_g=0.50$  とした場合を図示すれば図 6.10(b) のようになる. 同図を見れば, 係数  $A_{gr}$  および  $n_g$  が同じ値の場合には, 関数  $f_1^{gr}(\dot{\epsilon}^p)$  の値は  $\hat{\omega}_{ge}$  に比例して大きくなること, 係数  $A_{gr}$  および  $n_g$  の値が大きいほど低ひずみ速度側で関数  $f_1^{gr}(\dot{\epsilon}^p)$  の値が大きくなること, 特に  $n_g$  の値の上昇にともない低ひずみ速度側の関数  $f_1^{gr}(\dot{\epsilon}^p)$  の値が急増することがわかる. ここで, クリープのような低応力状態で極めて変形速度が小さい場合でも, クレーズが長く成長することが観察されていることから, 図 6.10 に示す関数  $f_1^{gr}(\dot{\epsilon}^p)$  の値は低速側ほど高く, 容易にクレーズが成長するように与えている. ただし, 極めて低速の変形では関数  $f_1^{gr}(\dot{\epsilon}^p)$  の値が無大になることなく, ある程度の大きさに漸近し, 速度依存性が小さくなるようにする方が望ましいが, その議論は今後の課題とし, ここでは式(6.18)が  $\dot{\epsilon}^p \geq 10^{-3}$  で成り立つものとして用いる. 一方, 高速変形においてはクレーズが長く成長しない観察事実に基づき, 高ひずみ速度側における関数  $f_1^{gr}(\dot{\epsilon}^p)$  の値は小さくなるものとしてモデル化している. なお, 分子鎖配向領域ではクレーズの成長が停止しているという特徴を表現する関数  $f_2(\dot{\epsilon}^p)$  には, 6.3 節の式(6.7)<sub>3</sub> の形をそのまま用いることとし,  $\epsilon_m^p$  の発展式は 6.3 節の式(6.11)を利用する.

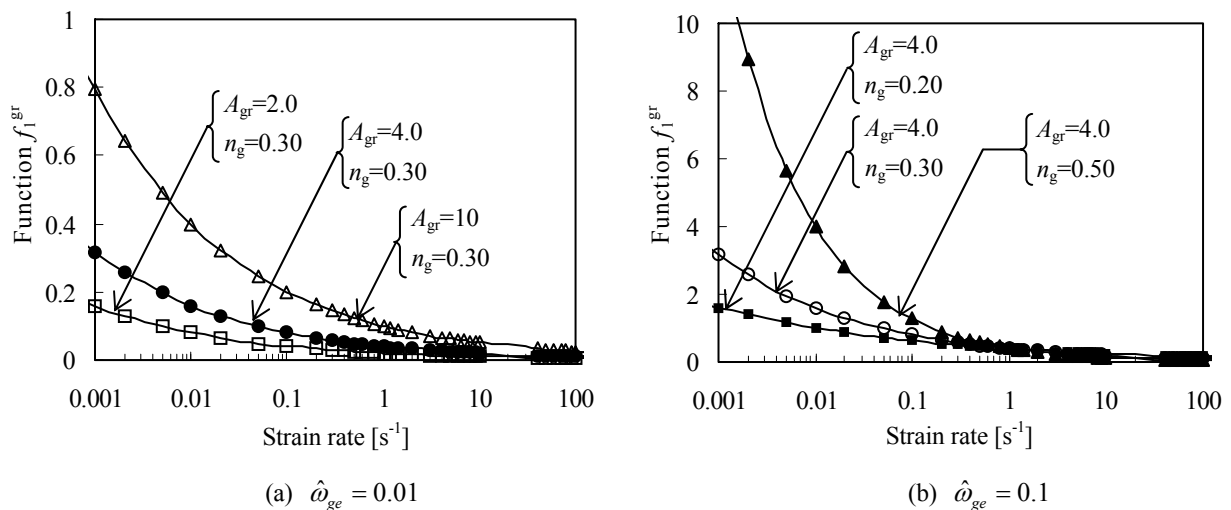


Fig.6.10 Relationship between strain rate and function  $f_1^{gr}$

## 6.6 クレーズ密度に基づく破断予測の手法

ポリマにき裂が生じる時のクレーズ密度は次のように推測できる. まず, 鋼材のき裂がボイド率約 0.15 で生じること<sup>(6.5)</sup>を参考にしつつ, さらにクレーズ中のボイドの周囲にはフィブリルが存在し, クレーズ内部のフィブリル体積分率は概ね 0.5 であること<sup>(1.8)</sup>を考慮すれば, 鋼材のボイド率の 2 倍( $\omega=0.3$ )前後と仮定できる. ここで, フィルムの引張りを対象とした観察結果の中で, 武野ら<sup>(6.6)</sup>はクレーズ密度の最大値を 0.35 と報告している. そこで本論文では, ポリマのクレーズ密度が  $\omega=0.2\sim 0.4$  に達し, その部位の実応力がフィブリル強度を超えれば, フィブリルが切断されてマイクロクラックが結合してポリマ部材が破断<sup>(6.7)</sup>に至ると予測する. なお, 実応力とは式(2.6)<sub>1</sub>で  $\sigma=\bar{\sigma}$  とおいて計算される量である. ここで, 分子鎖配向領域ではクレーズの成長が停止している<sup>(1.8)</sup>ので, クレーズ密度が十分に高くないまま, 再硬化にともない相当応力が上昇して実応力が高くなるだけであることから, 実応力がフィブリル強度を超えても部材の切断には至らないと考える. なお, ここで示した実応力に基づく破断予測は損傷力学の立場で提案しており, 破壊力学における応力拡大係数などを用いた破壊基準とは異なることに注意されたい.

## 6章の参考文献

- (6.1) 北川正義, 川越誠, “クレーズ発生と成長の統計的研究”, 材料, Vol.27, No.301 (1978), pp.995-1000.
- (6.2) 古口日出男, 堀幸夫, “高分子材料のクレーズの発生・成長に関する研究(第3報, クレーズの成長と停止について)”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.53, No.491(1987), pp.1151-1156.
- (6.3) Imai, Y. and Brown, N., “The Effect of Strain Rate on Craze Yielding, Shear Yielding, and Brittle Fracture of Polymers at 77°K”, *Journal of Polymer Science*, Vol.14, (1976), pp.723-739.
- (6.4) Povolo, F. and Hermida, E., “Phenomenological Description of Strain Rate and Temperature-Dependent Yield Stress of PMMA”, *Journal of Applied Polymer Science*, Vol.58, (1995), pp.55-68.
- (6.5) Tvergaard, V., “Necking in tensile bars with rectangular cross-section”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 103(1993), pp.273-290.
- (6.6) 武野明義・鏡織恵・内藤圭史・三輪實, “クレーズフィルム構造と気体透過性”, 繊維学会誌, Vol.68, No.7 (2012), pp.198-204.
- (6.7) Sugimoto, M., Ishikawa, M. and Hatada, K., “Toughness of Polypropylene”, *Polymer*, Vol.36, No.19 (1995), pp.3675-3682.





## 第7章

# PP を対象とした単軸引張試験

本章では、FEM シミュレーションの比較対象として必要な PP の単軸引張試験について述べる。まず、実験方法について述べ、本研究におけるひずみ速度の推算方法を紹介する。次に、本実験で得られた結果を示す。このとき、PP 材の高ひずみ速度側における著しいひずみ速度依存性、すなわち公称応力-公称ひずみ曲線で高ひずみ速度ほど応力が高い値で推移すること、ならびに破断ひずみが小さくなる傾向を確認する。さらに、引張試験後の試験片において平行部が白色に変色していることから、平行部においてクレーズが発生していることを確認する。最後に、PP の単軸引張試験に関する課題に触れておく。

## 7.1 実験方法

図 7.1 に示すダンベル形の試験片を用いて単軸引張試験を室温 23°C で実施する。形状は ASME-D638 にて規定されている IV 型であり、市販の PP ペレット ("Novatec PP", grade: BC03B, Japan Polypropylene Corporation 提供) を用いて射出成型により製作する。初期つかみ具間距離は 64 mm とし、下側のつかみ具を固定したうえで上側のつかみ具に対して強制速度を油圧サーボ制御によりを与える。なお、本実験では、試験片の平行部の長さ 33 mm を初期長さ  $L_0$  として公称ひずみを算出する。本実験では、図 7.2 に示す引張試験機(株式会社島津製作所製ハイドロショット HITS-T10)を用いる。この引張試験機は所定のピストン速度に達してからつかみ具に速度が伝わるように工夫された機構を有するため[補足 G1]、極めて短い時間でつかみ具速度をゼロから設定したつかみ具速度に上昇させることができる。上側つかみ具に与える強制速度  $\dot{U}$  には、33 mm/s、330 mm/s および 3.3 m/s を選ぶ。このとき、ひずみ速度を  $\dot{U}/L_0$  により算出すれば、各つかみ具速度はひずみ速度  $1 \text{ s}^{-1}$ 、 $10 \text{ s}^{-1}$  および  $100 \text{ s}^{-1}$  にそれぞれ対応する。

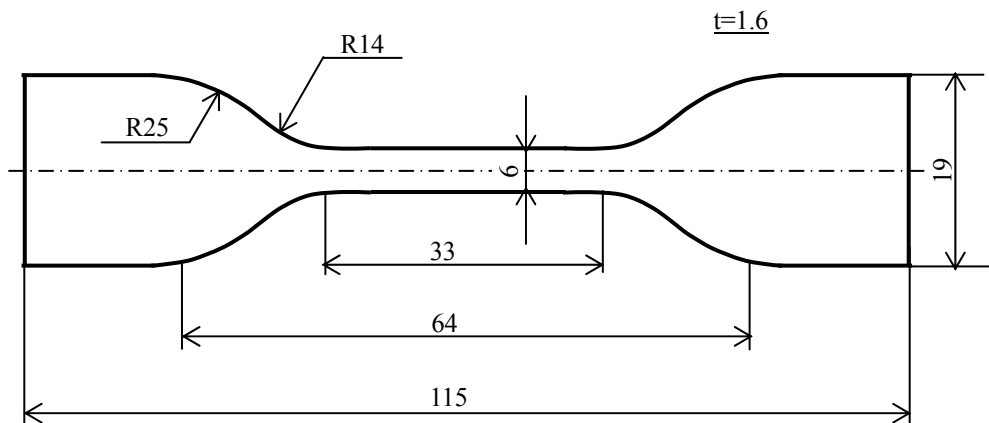


Fig. 7.1 Type IV specimen dimensions specified in ASTM-D638 (mm)

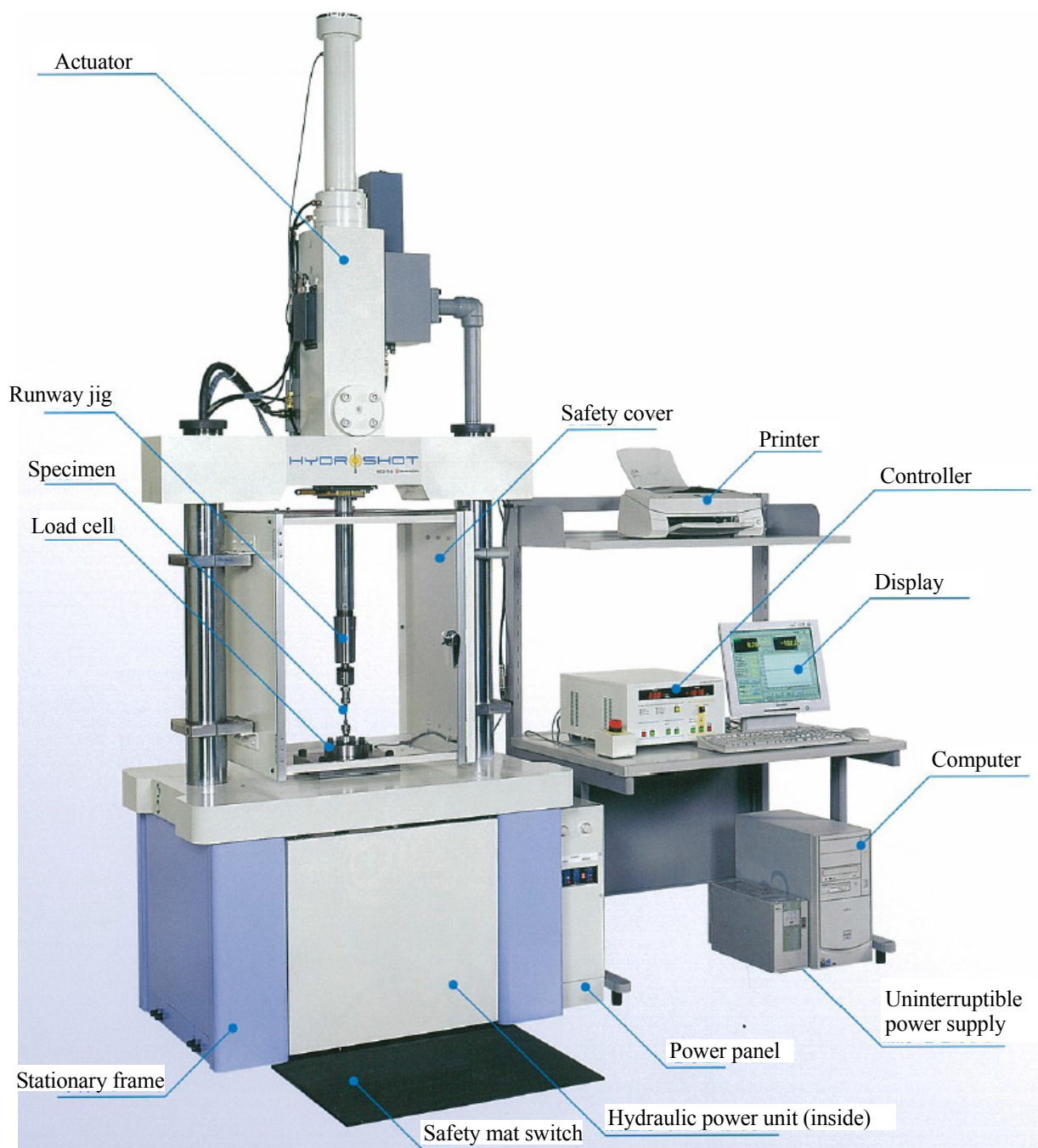


Fig. 7.2 High speed tensile testing machine<sup>(7.1)</sup>

## 7.2 実験結果

実験で得られた荷重-変位関係を初期断面積  $9.6 \text{ mm}^2$  と  $L_0=33 \text{ mm}$  を用いて公称応力-公称ひずみ関係に変換した結果を図 7.3 に示す. 図 7.3 では, 室温において顕著なひずみ速度依存性を確認できる. すなわち, ひずみ速度が大きいほど, 公称応力-公称ひずみ関係が図 7.3 の上方にシフトしている. 一方で破断時の公称ひずみ (以降, 破断ひずみと呼ぶ) については, ひずみ速度が大きいほど図 7.3 で左側, すなわち破断ひずみが小さくなるというひずみ速度依存性を有することも確認できる.

さらに, 図 7.4 に示す実験後の試験片の写真を見れば, つかみ具に挟まれた部位の色が半透明であるのに対して平行部は白色であることから, 試験前には半透明であった平行部が引張試験終了までに白化したと考えられる. このような白化は, クレーズの生成により引き起こされている. さらに, 引張試験における破断部位は平行部の中央ではなく, 平行部の端部であることが確認できる.

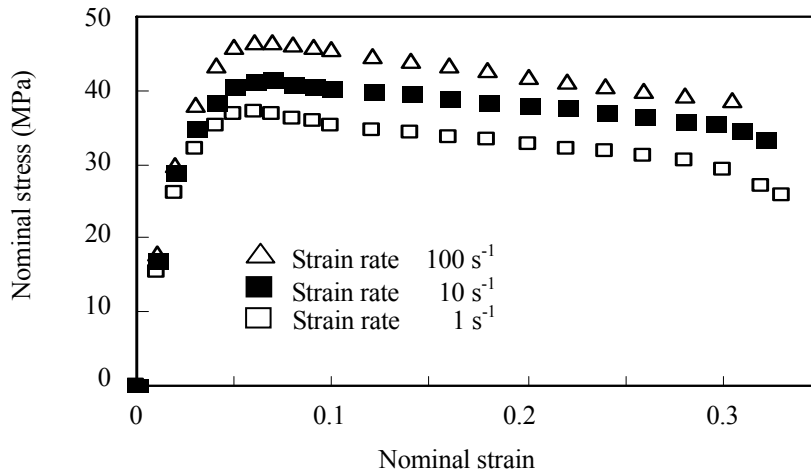


Fig. 7.3 Nominal stress versus nominal strain curves obtained from experimental tensile test

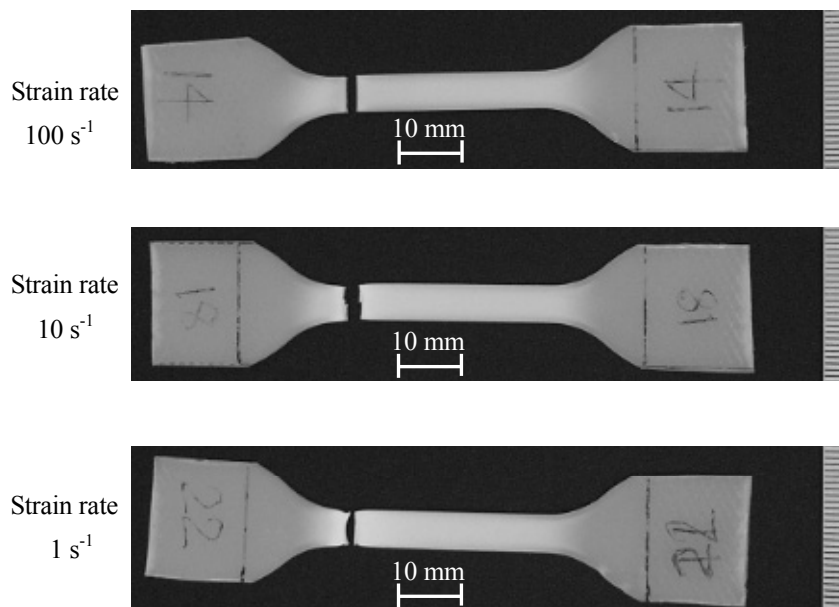


Fig. 7.4 Specimens after tensile tests at various strain rates

### 7.3 ポリマを対象とした引張試験の課題

PPを対象とした高ひずみ速度側の実験結果は、ほとんどの場合、7.2節で示したように、低ひずみ速度条件ほど破断ひずみが大きい傾向が認められる。一方で、低ひずみ速度側では、2つの傾向がある。1つは、高ひずみ速度側から引き続き、低ひずみ速度条件ほど破断ひずみが大きい傾向であり、Mae-Kishimotoの報告<sup>(7.2)</sup>およびSahin-Yayla<sup>(7.3)</sup>の報告が例に挙げられる。これは、低ひずみ速度側におけるPPの引張試験では、数時間という長い時間にわたり塑性発熱が継続するため、蓄積した試験片内部の熱の影響で低ひずみ速度ほど破断ひずみが大きくなっているものと推測することができる。一方で低ひずみ速度条件ほど破断ひずみが小さい傾向も認められおり、小林・岡田の報告<sup>(1.4)</sup>および文献<sup>(7.4)</sup>を例に挙げられる(図7.5)。このように低ひずみ速度側においてPPの引張特性に違いが出る要因として、工業用PPの多くはエラストマやタルクを含有しており、それらの種類、粒子径<sup>(7.5)</sup>および配合割合が多種多様で同じPPの中でも大きく異なること、さらに引張試験において実施される一般的な温度制御は室温のような環境温度であり、試験片温度の上昇<sup>(7.6)</sup>は含まれるエラストマやタルクにより異なること、を挙げることができる。さらに、温度制御について詳説されていない実験データもあるため、熱伝達率を変更するなどして試験片温度を一定に保つ温度制御を実験で実施している場合もありうる。本論文はPP材を対象としているが、そのクレーズ進展のモデル化およびシミュレーションに着眼点をおくこととし、上述の実験に関する詳細な議論には立ち入らずにPPの単軸引張試験をひずみ速度 $100\sim 1\text{ s}^{-1}$ の比較的高ひずみ速度側のみで実施している。

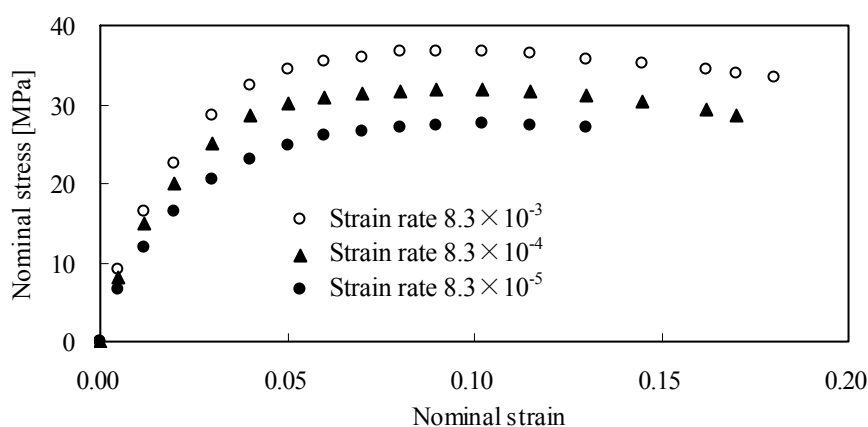


Fig. 7.5 Nominal stress versus nominal strain curves at low strain rate conditions<sup>(7.4)</sup>

## 7章の参考文献

- (7.1) 株式会社島津製作所 製品カタログ, “高速衝撃試験機ハイドロショット HITS シリーズ”, pp.6.
- (7.2) Mae, H., Kishimoto, K., “Modeling and simulation of impact failure characteristic of PP by Elastoviscoplastic Constitutive law”, *Journal of Solid Mechanics and Materials Engineering*, Vol.1, No.1 (2007), pp.35-46.
- (7.3) Sahin, S., Yayla, P., “Effect of Testing Parameters on The Mechanical Properties of Polypropylene Random Copolymer”, *Polymer Testing*, Vol.24, (2005), pp.613-619.
- (7.4) Brostow, W., Corneliussen, D. R., “Failure of Plastics”, (1986), pp.39-43, Hanser Publishers.
- (7.5) Mae, H., Omiya, M., Kishimoto, K., “Material Ductility and Toughening Mechanism of Polypropylene Blended with Bimodal Distributed Particle Size of SEBS Triblock Copolymer at high strain rate”, *Journal of Applied Polymer Science*, Vol.110, (2008), pp.3941-3953.
- (7.6) 山下勝久, 丹下章男, 野々村千里, 仲井朝美, 山田敏郎, “プラスチック成形品のネック伝ば解析(2) ポリブチレンテレフタレート成形品のネック挙動のひずみ速度依存性”, *成形加工*, Vol.16, No.10 (2004), pp.666-672.

## 第8章

# 商用 FEM プログラムにおける クレーズを考慮した大変形解析

本章では、2章から6章までの議論を通じて構築したクレーズ挙動を考慮した材料モデルを用いて PP 平板の単軸引張シミュレーションを行い、得られた結果について検討する。まず、本材料モデルをユーザーサブルーチンを介して商用 FEM プログラムに組み込む。次に、ひずみ速度  $1 \text{ s}^{-1}$  の条件で、6.2 節のクレーズ発展式を採用した単軸引張シミュレーションを行い、クレーズ密度が高く、かつ実応力がフィブリル強度を超えているくびれ端部が結晶性ポリマの破壊部位と一致することを示す。このとき、小林ら<sup>(1,82)</sup>が作成した FEM 解析コードで得られたくびれ端部においてクレーズ密度が高くなる現象を、本材料モデルが組み込まれた商用 FEM プログラムによるシミュレーションでも再現できることを確認するとともに、計算安定性の面でも本材料モデルが実用的であることに触れる。続いて、ひずみ速度を  $0.01 \text{ s}^{-1}$  から  $100 \text{ s}^{-1}$  までの 5 水準で与える条件で 6.5 節のクレーズ発展式を採用した単軸引張シミュレーションを行い、本材料モデルが広いひずみ速度域においてクレーズの分布を再現できることを確認するとともに、クレーズ密度が高く、かつ実応力がフィブリル強度を超えることに基づいて予測された破断部位が実験における破断傾向と一致することを示す。さらに、本シミュレーションにより予測される破断ひずみのひずみ速度依存性が一般的な熱可塑性ポリマの特徴を再現できることを確認し、広いひずみ速度域において利用可能であることに基づき本材料モデルの有用性を示す。さらに、本材料モデルを利用して、立方体 PP ブロックを対象とした単軸引張・圧縮シミュレーションを実施し、本材料モデルが静水圧依存性を再現できることに言及する。最後に、第7章において得た 3 水準のひずみ速度における単軸引張試験の結果に対して公称応力-公称ひずみ関係、破断ひずみの速度依存性および破断部位が再現できることを通じて、本材料モデルの実用性を評価する。

## 8.1 本材料モデルの商用 FEM プログラムへの組み込み

商用 FEM プログラムの多くは、ユーザーが記述したユーザーサブルーチンプログラムを介して、ユーザーが必要とする機能をユーザー自身で付加できるように構成されている。したがって、ユーザーが開発した材料モデルを、ポリマ製品あるいは自動車のフルカーモデルを対象とした商用 FEM プログラムの衝突シミュレーションで利用する場合には、ユーザーサブルーチンを介して材料モデルを商用 FEM プログラムに組み込めばよい。ただし、一般ユーザーに許されているのはユーザーサブルーチンの中でのプログラムの記述のみであり、商用 FEM プログラムのメインプログラムに手を加えることはできない。そこで、メインプログラムからユーザーサブルーチンに引き渡される変数を駆使して、ユーザーはユーザーサブルーチンプログラムを作成することになる。ユーザーサブルーチンプログラムは、ほとんどの場合 Fortran 言語で記述される。

本材料モデルの計算手順の概略は図 8.1 に示すとおりである。すなわち、

- 1) ソルバーから現ステップの全変形速度  $\mathbf{D}$  を、また前ステップの  $\mathbf{T}$ ,  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\sigma}^p$ ,  $\bar{\varepsilon}^p$ ,  $\dot{\varepsilon}^p$ ,  $\omega$ ,  $\dot{\omega}$  および  $\cos \delta$  を読み込む。
- 2) 応力速度  $\dot{\mathbf{T}}$  を弾粘塑性構成式[式(4.91)および式(4.92)]より計算し、応力  $\mathbf{T}$  を更新する。
- 3) 各量の定義式に基づいて  $\bar{\sigma}$ ,  $\sigma_m$ ,  $\mathbf{T}'$ ,  $\dot{\bar{\sigma}}$ ,  $\dot{\bar{\sigma}}^p$ ,  $\dot{\mathbf{T}}'$  および  $\cos \alpha$  を計算する。
- 4) 式(4.78)および式(4.79)により  $\sin \delta$  を計算する



- 5) ひずみ速度硬化則[式(5.5), 式(5.6)および式(5.7)]より相当塑性ひずみ速度  $\dot{\bar{\epsilon}}^p$  を計算し, 相当塑性ひずみ  $\bar{\epsilon}^p$  を更新する.
  - 6) 塑性平均垂直ひずみの発展式(6.11)により塑性平均垂直ひずみ速度  $\dot{\epsilon}_m^p$  を計算する.
  - 7) クレーズ発生条件式(6.12)が満たされるとき, クレーズ発展式(6.5)によりクレーズ速度  $\dot{\omega}$  を計算し, クレーズ密度  $\omega$  を更新する.
  - 8) 応力  $\mathbf{T}$  および更新された諸量を保存し, 次のステップに受け渡す.
- のように計算を進める.

なお作成したユーザーサブルーチンは, Fortran コンパイラを用いてコンパイルされた後, メインプログラム群とコンパイルリンクしたうえで実行モジュールに変換され, 材料モデルが商用 FEM プログラムで利用可能となる. このとき, 各商用 FEM プログラムが指定した Fortran コンパイラの指定したバージョンが必要となるうえ, バイナリファイルでのメインプログラム群および適切なリンクコマンドも必須である. したがってユーザーサブルーチンプログラムの利用に際しては, 材料モデルについて熟知していることはもちろん, 利用している計算機 (ハードウェア) およびオペレーティングシステムに適合するコンパイラを稼動させるスキルが要求されるうえ, 商用 FEM プログラム開発元と緊密な連携が必要となる.

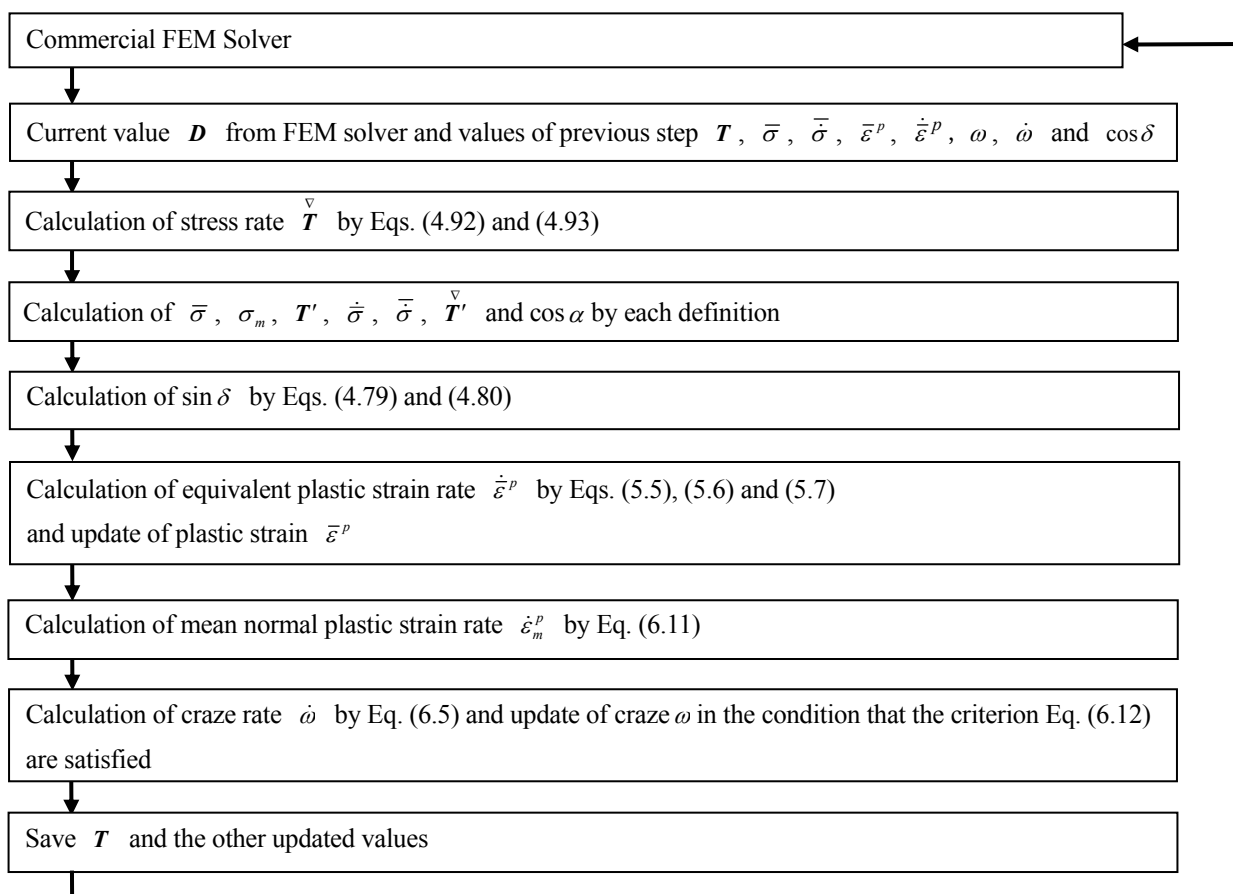


Fig.8.1 Numerical procedure in user subroutine of commercial solver

## 8.2 ひずみ速度 $1 \text{ s}^{-1}$ における単軸引張解析および検討

2章から6章までの議論を通じてモデル化された弾粘塑性構成式(4.91), ひずみ速度硬化則[式(5.5)~(5.7)], クレーズ発展式(6.5), クレーズ発生条件式(6.12), および塑性平均垂直ひずみの発展式(6.11)を, 前節にて説明した方法に基づきユーザーサブルーチンを通じて汎用構造解析ソルバ RADIOSS に組み込み, 単軸引張シミュレーションを行う. 解析モデルは図 8.2 に示す平板で, モデルの対称性を考慮して解析領域は 1/8 部分のみとして引張方向に 48 分割, 幅方向に 16 分割, 板厚方向に 3 分割する. ここで本論文では, 8 節点 6 面体ソリッド要素に選択低減積分を施して解析に利用している[補足 H.1]. なお, 幅方向には Tvergaard ら<sup>(8.1)</sup>の初期不整  $\Delta w$  を与える. また,  $x_1 = 0$  において  $x_2x_3$  面,  $x_2 = 0$  において  $x_3x_1$  面および  $x_3 = 0$  において  $x_1x_2$  面をそれぞれ  $x_1$  方向,  $x_2$  方向および  $x_3$  方向にのみ拘束し, 平板端部( $x_1 = L$ )をせん断自由として強制変位速度  $(\dot{U}/L)/\dot{\epsilon}_r = 1.0$  を与える.

対象材料はゴム充填率 5% の PP とし, 式(5.5)~(5.7)における材料定数には小林ら<sup>(1.82)</sup>が用いたものと同じ値, すなわち  $p_1 = \sin(\pi/8)$ ,  $p_2 = 1 \times 10^{-4}$ ,  $p_3 = 10$ ,  $m = 0.04$ ,  $\dot{\epsilon}_r = 1.0 \text{ s}^{-1}$ ,  $k_1 = 100$ ,  $k_2 = 1.85$ ,  $k_3 = 2.37$ ,  $\sigma_r = 11 \text{ MPa}$ ,  $\epsilon_h = 0.18$  を用いる. ただし, ひずみ速度硬化則における流れ応力の関数形が小林らが用いたものと同じになるように, 式(5.6)における  $k_0$  を 1.0 とし, 式(5.7)における  $k_4$  を零とする. なお, 流れ応力は, 解析対象とする材料が同じ PP であっても異なる関数形が必要になることがある[補足 H.2]. また, クレーズ発展式における式(6.6)の係数を  $A = 2.2$ , 式(6.8)の係数を  $B = 0.1$ , 式(6.7)の係数を  $D_1 = 1.74$ ,  $D_2 = -0.23$ ,  $D_3 = 100$  および  $\epsilon_c = 0.175$  とする. これらの値は, PP 材の破断に関する実験結果に一致するように, 数値解析を繰り返すことで決定されている. なお, 塑性平均垂直ひずみの発展式(6.11)の材料定数は表 6.1 のモデル(1)の値, すなわち  $q_1 = 1 \times 10^{-5}$ ,  $q_2 = 0.1$ ,  $q_3 = 35$  および  $q_4 = 2.4$  を用いる. さらに, クレーズ発生条件式の材料定数は  $A_1 = 2.5 \text{ MPa}$ ,  $B_2 = 54 \text{ MPa}^2$ ,  $C_1 = 0.8$  とする. これらの値は, PMMA に対する測定値<sup>(1.84)</sup>を参考にしながら, 本研究における数値解析によって試行錯誤的に決定された PP に対する値である.

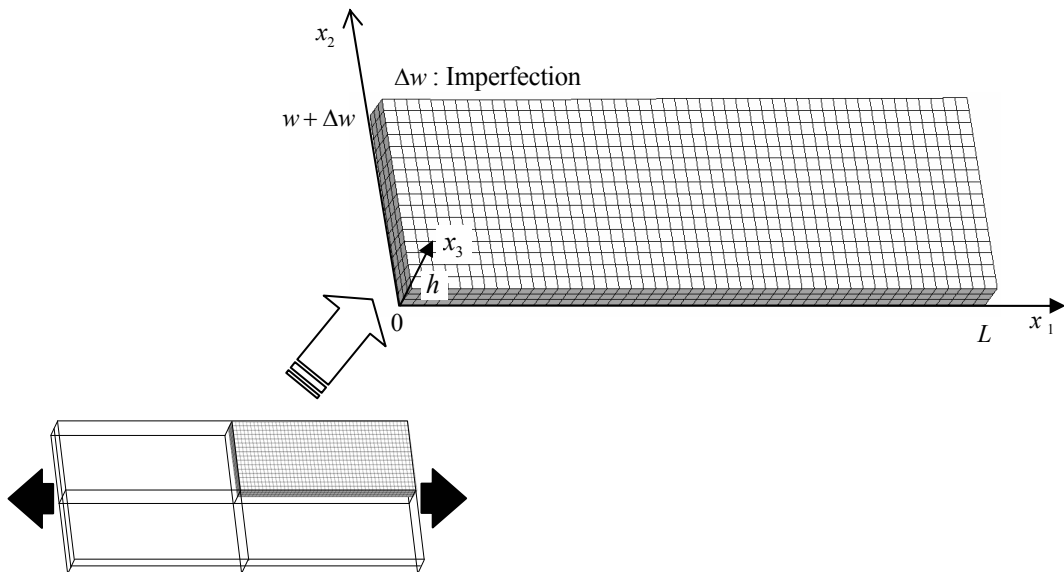


Fig.8.2 Finite element mesh under uniaxial tension for validation of present material model

本解析で得られた公称応力-公称ひずみ曲線を、小林らが参照した実験結果<sup>(1.82)</sup>とあわせて図 8.3 に示す。本材料モデルを用いた解析結果が実験結果をよく再現していることから、本材料モデルの信頼性を確認できる[補足 H.3]。次にくびれの発生および伝ば、ならびにクレーズ進展の特徴を顕著に表現するために、ひずみ速度感度指数を  $m = 0.01$  に変更し、式(6.6)の係数の一つを  $A = 3$ 、式(6.12)の係数の一つを  $C_1 = 1$  として解析を実施する。得られた結果を図 8.4~8.10 に示す。なお図 8.4 は、図 8.2 の原点を中心として  $x_1x_2$  面、 $x_2x_3$  面および  $x_3x_1$  面に対して対称に解析結果を複写することで表示した平板全体であり、 $x_3$  軸上方から  $x_3 = h$  における  $x_1x_2$  面を見た図である(図 8.5~8.14 も同様)。

相当塑性ひずみ  $\bar{\epsilon}^p$  は、引張強さを迎えた直後の伸び率  $U/L = 0.07$  において比較的値の大きな領域が平板中央で X 形せん断帯状に分布し、その後は変形の進行にともない、徐々にくびれ領域で値が上昇している(図 8.4)。

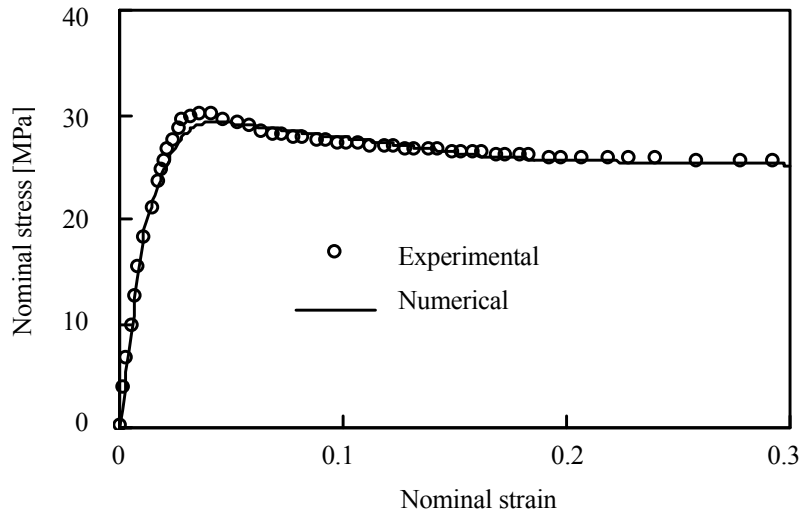


Fig.8.3 Nominal stress versus strain curves

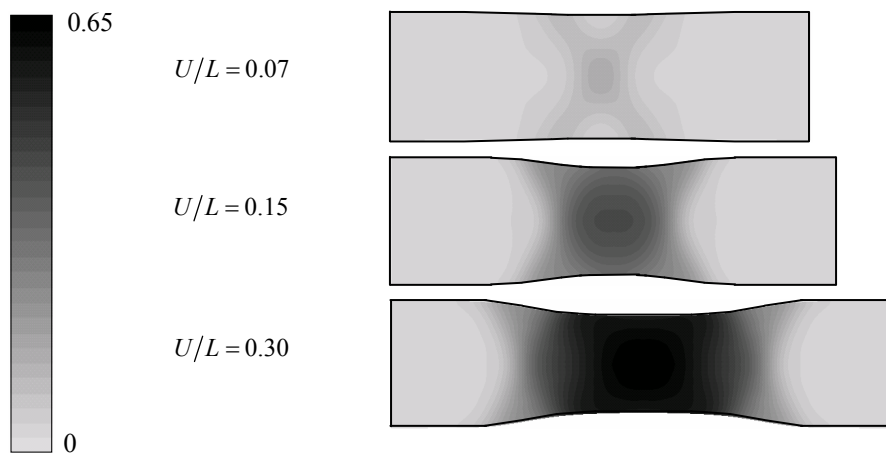


Fig.8.4 Distributions of equivalent plastic strain

相当塑性ひずみ速度  $\dot{\epsilon}^p$  については、 $U/L=0.07$  において平板中央で生じた X 形せん断帯状の高ひずみ速度領域が、変形の進行にともない徐々に値を下げながらくびれとともに引張方向に伝ばしている(図 8.5)。微視的に見るとくびれ領域では分子鎖が配向し、配向部位が再硬化するために未配向領域に変形集中部位が移り、配向硬化領域が伝ばすることでくびれが安定的に伝ばする。これが、図 8.5 の高ひずみ速度領域の移動として再現されている。

クレーズ密度  $\omega$  は、分子鎖の配向-未配向境界領域であるくびれ進行端部で値が高く、くびれの伝ばとともに値を上げながら引張方向へ伝ばしている(図 8.6)。なお、図 8.6 では面積分率としてのクレーズ密度を表示している。 $U/L=0.07$  では、X 形せん断帯状に分布する相当塑性ひずみの大きい領域の周囲で値が高くなり、次に  $U/L=0.15$  ではくびれ端部にクレーズ集中域が形成され、さらに変形が進み  $U/L=0.3$  となるまでくびれの伝ばとともに値を上げながら高クレーズ密度領域が引張方向へ伝ばする。ここで  $U/L=0.15$  から  $U/L=0.3$  にかけて分子鎖配向領域であるくびれ中央部ではクレーズ密度が変化しておらず、この領域におけるクレーズの成長停止が再現されている。なお、ここでは具体的には示さないが、本解析では  $U/L=0.0179$  において初めてクレーズが発生しているのに対して、別途実施した  $(\dot{U}/L)/\dot{\epsilon}_r = 0.01$  および  $10$  の解析ではそれぞれ  $U/L=0.0178$  および  $0.0180$  でクレーズが発生しており、クレーズ発生のみずみ速度依存性が表現できることを確認している。

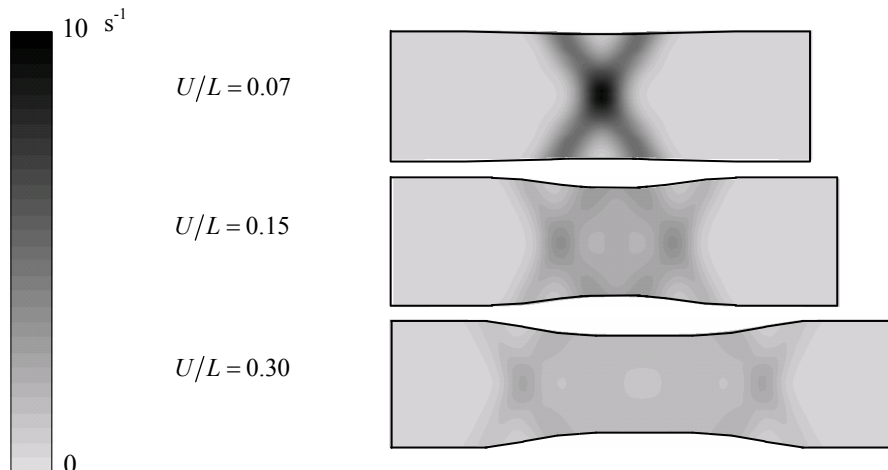


Fig.8.5 Distributions of equivalent plastic strain rate

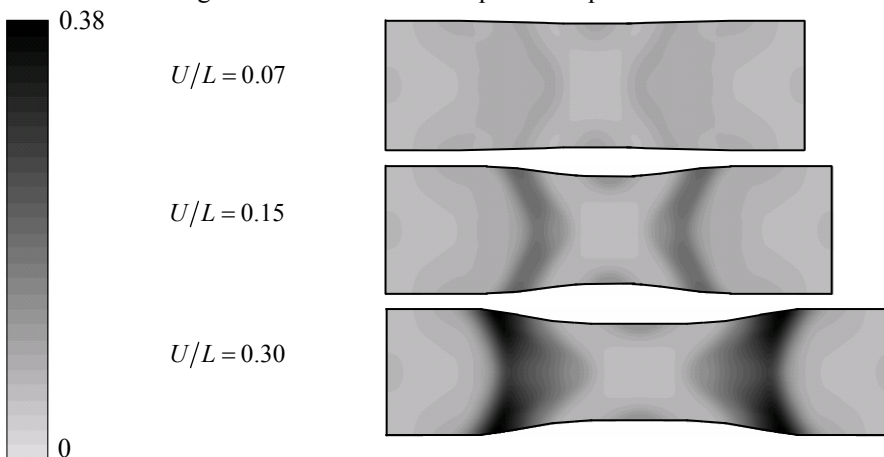


Fig.8.6 Distributions of craze density

クレーズ速度  $\dot{\omega}$  は、分子鎖の配向-未配向境界領域で常に高い値を保ちながら伝ばしており、この領域でクレーズが集中的に発生・成長していることが再現されている(図 8.7). 特に、くびれの伝ば時には、上述のように  $\dot{\epsilon}^p$  は値を下げながら伝ばしているのに対し、クレーズ速度は値を上げながら伝ばしている. これはクレーズ発展式(6.7)における関数  $f_1$  により、ひずみ速度が低いほどクレーズが生成しやすいという特徴を考慮したことによる. このようなクレーズ速度分布が得られるとともに、安定して解析が実行できる要因として、小林ら<sup>(1.82)</sup>が採用した変化の激しいひずみ加速度  $\ddot{\epsilon}^p$  を、本クレーズ発展式における式(6.5)に用いていないことが挙げられる.

図 8.8 に示す擬似無損傷配置の相当応力  $\bar{\sigma}$  は、 $U/L=0.15$  において平板中央で値が高くなり、 $U/L=0.3$  では同様な分布のまま値がさらに上昇する. これに対して図 8.9 に示す実応力  $\sigma^*$  は、式(2.6)<sub>1</sub> で  $\sigma = \bar{\sigma}$  とおいて計算されるため、高クレーズ密度領域であるくびれ進行端部においても値が大きく、その値は  $U/L=0.3$  においてフィブリル強度<sup>(6.7)</sup>の 45 MPa を超えている. ここで、クレーズ停止部位では  $\omega$  が 10%に達しない程度に小さく、かつ再硬化が進んでいるため、そのような部位ではフィブリルが切断されても部材の切断には至らないと考えられる. そこで、クレーズ停止部位を除いて  $\sigma^* \geq 45$  MPa の領域を図示すれば図 8.10 のようになる. このとき、くび

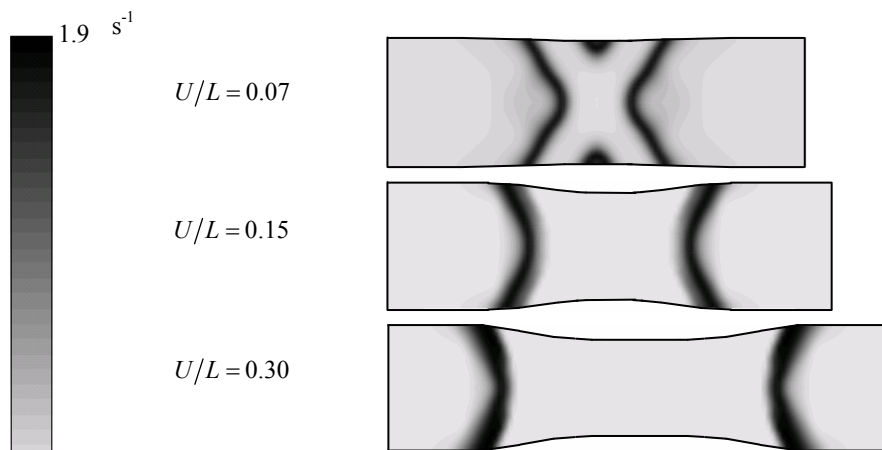


Fig.8.7 Distributions of craze rate

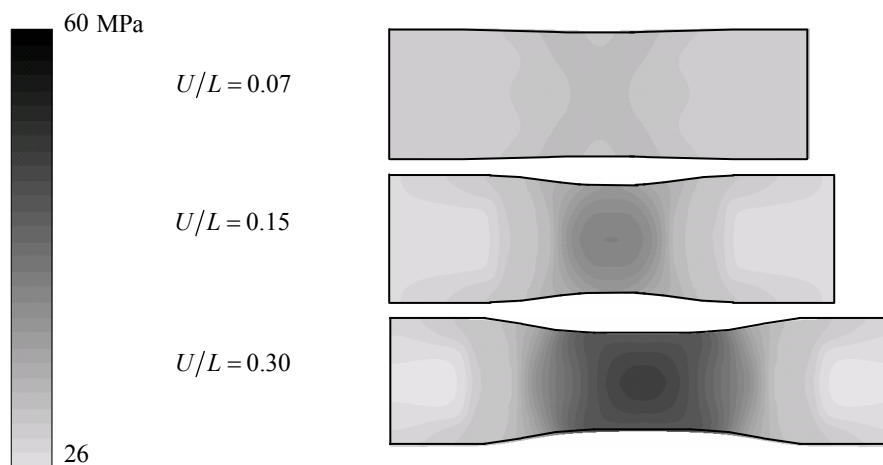


Fig.8.8 Distributions of equivalent stress

れ進行端部において、部材が破断すると予測できる[補足 H.4]。この破断予測部位と、結晶性ポリマの延性破壊がくびれの伝ば後にくびれ進行端部で発生するという事実とが一致することから、本材料モデルは妥当であるといえる。

以上では、せん断帯の伝ば挙動を顕著に示すため、ひずみ速度感度指数を  $m=0.01$  に変更した場合の解析結果に基づいて議論してきたが、以降では実在の PP の値である  $m=0.04$  を用いても同様に破断予測が行えることに触れておく。そこで、ひずみ速度感度指数を  $m=0.04$  に高め、式(6.6)の係数の一つを  $A=2.2$  に、また式(6.12)

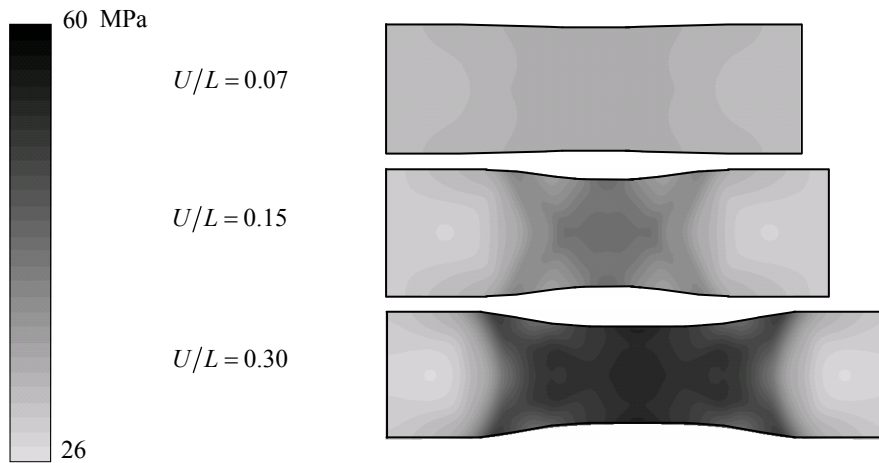


Fig.8.9 Distributions of effective stress

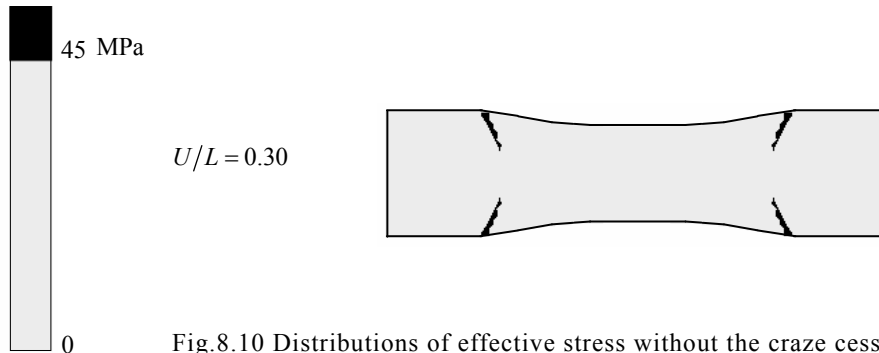


Fig.8.10 Distributions of effective stress without the craze cessation region

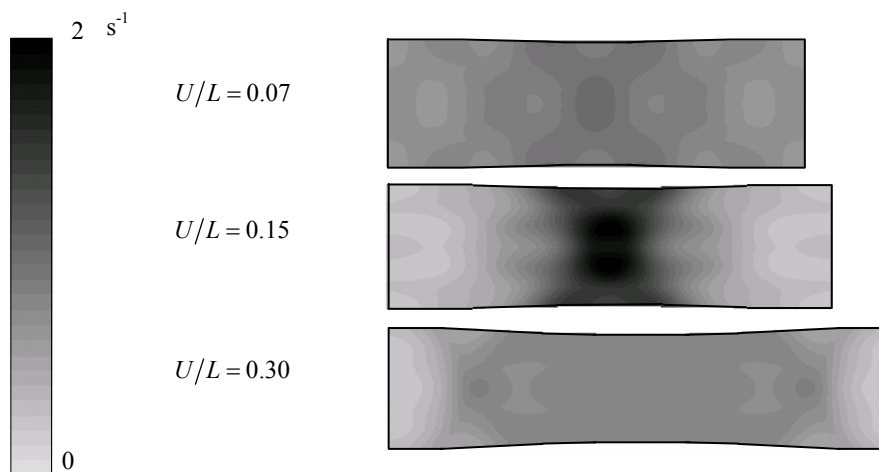


Fig.8.11 Distributions of equivalent plastic strain rate ( $m=0.04$ )

の係数の一つを  $C_1 = 0.8$  に戻した場合の解析結果を図8.11~8.14に示す. これらの図は  $m = 0.01$  の場合の図8.5, 8.6, 8.9 および図 8.10 にそれぞれ対応する. 図 8.11~8.14 における諸量の分布は  $m = 0.01$  の解析結果のように明瞭な分布は示さないが, いずれの図においても傾向は  $m = 0.01$  の結果と同様であることが確認できる. また, 7章で行った引張試験の試験後の試験片(図 7.4)を見れば, ダンベル形試験片の平行部の中央ではなく端部で破断していること, さらに別途実施した実験[補足 H.2]では平行部中心から端部へ向かって 60%離れた部位で破断を観察できることから, 図 8.14 に示した破断予測部位はこの観察結果とほぼ一致している. このことから, 本材料モデルは実在の PP の破断予測にも使用可能といえる.

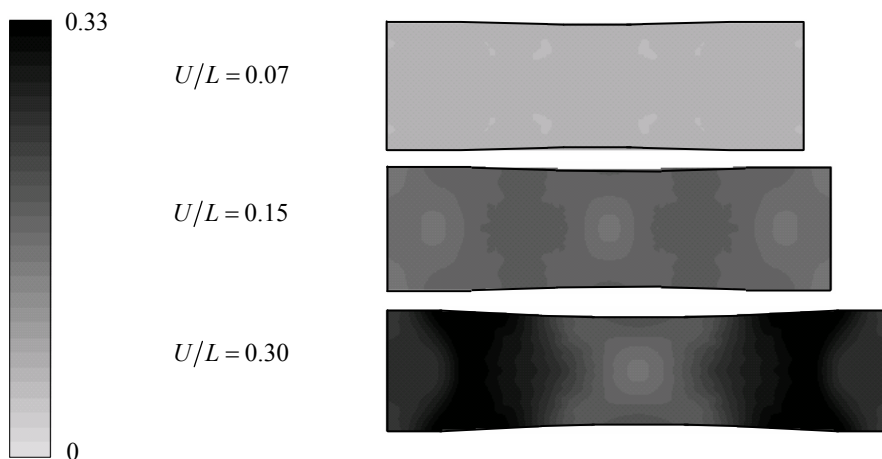


Fig.8.12 Distributions of craze density ( $m=0.04$ )

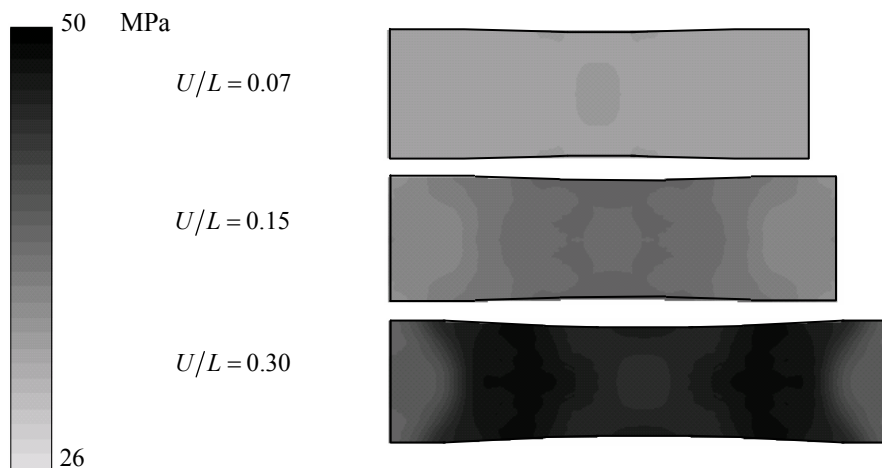


Fig.8.13 Distributions of effective stress ( $m=0.04$ )

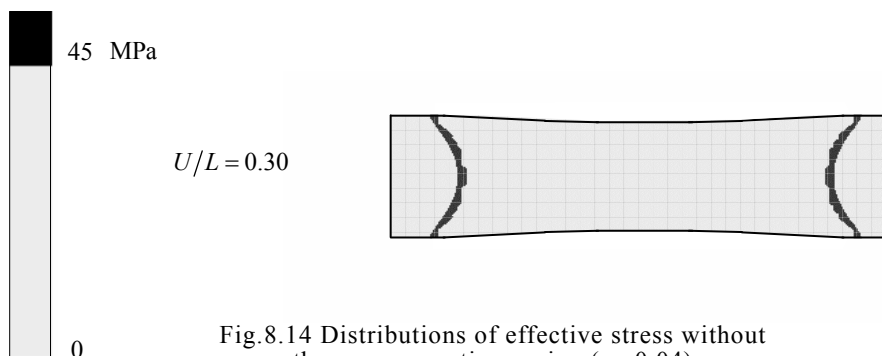


Fig.8.14 Distributions of effective stress without the craze cessation region ( $m=0.04$ )

### 8.3 広ひずみ速度領域における単軸引張解析および検討

前節では、新たに構築し直したクレーズ発展式およびクレーズ発生条件式を用いた単軸引張シミュレーションを通じて、くびれ進行端部における破断の予測が可能であることを示した。しかし、対象としている引張条件が  $1 \text{ s}^{-1}$  程度のひずみ速度に限られており、ひずみ速度が  $0.1 \text{ s}^{-1}$  あるいは  $0.01 \text{ s}^{-1}$  のような低速側および  $10 \text{ s}^{-1}$  あるいは  $100 \text{ s}^{-1}$  のような高速側を対象としたシミュレーションは実施されていない。そこで本節では、広ひずみ速度領域に対応するクレーズ発展式(6.15)を採用した材料モデルを商用 FEM プログラム LS-DYNA に組み込み、5 水準の引張速度を与える単軸引張シミュレーションを実施して、広ひずみ速度領域における本材料モデルのクレーズ挙動の再現性を確認する。なお、ユーザーサブルーチンのプログラム方法は 8.1 節で述べたとおりである。ここで、構造用 PP は何らかの添加物を含むのが通常であり、その種類や含有率の違いによって様々な力学的物性を有する。本節では、ある特定の PP に対象を限定することなく、種々の PP に適用できるクレーズ挙動に立脚した破壊予測方法の提案を行うことに主眼を置くこととする。

本節でも解析モデルには 8.2 節の図 8.2 に示される平板を用い、幅方向には Tvergaard ら<sup>(8.1)</sup>の初期不整  $\Delta w$  を与え、 $x_1 = 0$  において  $x_2x_3$  面、 $x_2 = 0$  において  $x_3x_1$  面および  $x_3 = 0$  において  $x_1x_2$  面をそれぞれ  $x_1$  方向、 $x_2$  方向および  $x_3$  方向にのみ拘束し、平板端部( $x_1 = L$ )をせん断自由として強制変位速度を与える。式(5.5)~(5.7)における材料定数には 8.2 節で示したゴム充填率 5% の PP に対応する値、すなわち  $p_1 = \sin(\pi/8)$ 、 $p_2 = 1 \times 10^{-4}$ 、 $p_3 = 10$ 、 $m = 0.04$ 、 $\dot{\epsilon}_r = 1.0 \text{ s}^{-1}$ 、 $k_0 = 1.0$ 、 $k_1 = 100$ 、 $k_2 = 1.85$ 、 $k_3 = 2.37$ 、 $k_4 = 0$ 、 $k_5 = -10$ 、 $\sigma_r = 11 \text{ MPa}$ 、 $\epsilon_h = 0.18$ 、 $A_1 = 2.5 \text{ MPa}$ 、 $B_2 = 54 \text{ MPa}^2$ 、 $C_1 = 1$ 、 $q_1 = 1 \times 10^{-5}$ 、 $q_2 = 0.1$ 、 $q_3 = 35$  および  $q_4 = 2.4$  を用いる。

図 6.11 および図 6.12 に示すように、高ひずみ速度域においてクレーズが多数発生すること、ならびに低ひずみ速度において少数のクレーズ長さが大きく成長することを FEM 解析において定性的に確認することを目的として、式(6.17)の係数を  $A_{ge} = 8.0$ 、 $D_1 = 1.3$ 、 $D_2 = -30$  および  $D_3 = -2.2$ 、ならびに式(6.18)の係数を  $A_{gr} = 4.0$  および  $n_g = 0.3$  とする。ここで係数  $A_{ge}$  は 8.2 節における係数  $A$  と同じオーダーとしており、ひずみ速度依存性を表現する係数  $D_1$ 、 $D_2$ 、 $D_3$  および  $n_g$  は解析安定性を考慮して決めている。なお、これら式(6.17)および式(6.18)の係数の値は FEM 解析においてクレーズ発展式の効果の確認するために決めたものであり、特定の PP に対してこれらの係数を決める場合には、ひずみ速度を変化させた引張試験を実施して得られた応力-ひずみ曲線に整合するように係数同定を実施すればよい。ただし、同定された係数の妥当性は圧縮やせん断などの異なる荷重条件における FEM 解析を通じて定量的に評価する必要がある。ここで、式(6.5)の右辺第 2 項の  $C_{ig}$  に含まれる係数  $B$  および式(6.19)の係数には 8.2 節で、用いた値である  $B = 0.10$ 、 $D_4 = 100$  および  $\epsilon_c = 0.18$  を採用する。

まず、強制変位速度  $\dot{U}$  が  $(\dot{U}/L)/\dot{\epsilon}_r = 1$  の場合に対して FEM 解析を実施し、本解析で得られた公称応力-公称ひずみ曲線を 8.2 節で参照した実験結果<sup>(1.82)</sup>とあわせて図 8.15 に示す。本材料モデルによる計算結果が実験データをよく再現していることから、拡張したクレーズ発展式を含む本材料モデルの信頼性を確認できる。

次に、くびれの発生および伝ば、ならびにせん断帯状のクレーズ集中領域の進展特徴を顕著に表現し、破壊の危険部位を視覚的に予測しやすくするために、ひずみ速度感度指数を  $m = 0.01$  に変更して FEM 解析を実施する。このとき  $\dot{U}$  は  $(\dot{U}/L)/\dot{\epsilon}_r = 0.01$ 、 $0.1$ 、 $1$ 、 $10$  および  $100$  となるように 5 通りに変化させて与える。得られた公称応力-公称ひずみ曲線を図 8.16 に示す。図 8.16 における×印は、再硬化が進んでいない領域において式(2.6)<sub>1</sub>



で  $\sigma = \bar{\sigma}$  とおいて計算される実応力  $\sigma^*$  の値がフィブリル強度(クレーズ強度)を超えたことを示している. 後述するように, このとき部材が破断すると予測されるので, ×印において解析を終了させている. ここで図 8.16 において, ひずみ速度条件  $(\dot{U}/L)/\dot{\epsilon}_r = 1$  よりも高ひずみ速度側, ならびに低ひずみ速度側において, ×印が付された公称ひずみ, すなわち破断ひずみが小さくなっている. PP の引張試験においても高ひずみ速度側でひずみ速度が高いほど破断ひずみが小さい傾向<sup>(7.2)</sup>が報告されている. また, 同一の PP を対象とした実験ではないが, 低ひずみ速度側でひずみ速度が低いほど破断ひずみが小さい傾向<sup>(7.4)</sup>も示されている[補足 H.5]. このような傾向は, 図 8.17 に示す PMMA に対して広ひずみ速度域で実施された引張試験のデータ<sup>(1.1)</sup>でも認められるポリマに特徴的な性質であることから, 本材料モデルによる解析は破断ひずみの傾向を定性的に予測できるといえる. なお図 8.17 には, 広ひずみ速度域で実施した引張試験の結果として, 非晶性ポリマである PMMA の 7 桁にわたるひずみ速度域で得られた応力-ひずみ曲線を, 結晶性ポリマも含めた一般的な熱可塑性ポリマに特徴的な性質として示している[補足 H.6].

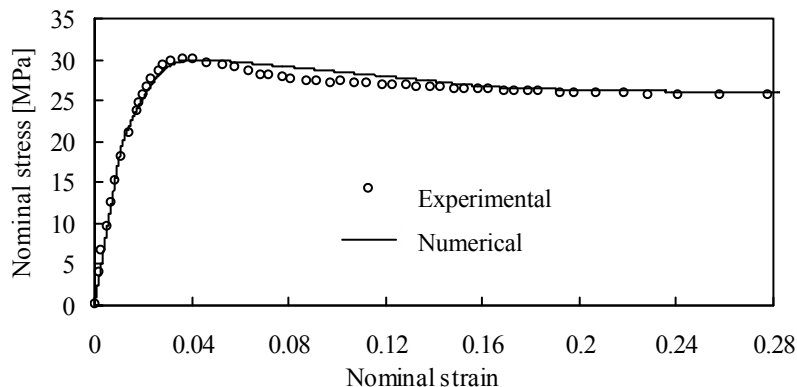


Fig. 8.15 Stress-strain curve obtained from FEM simulation with parameter  $m=0.04$

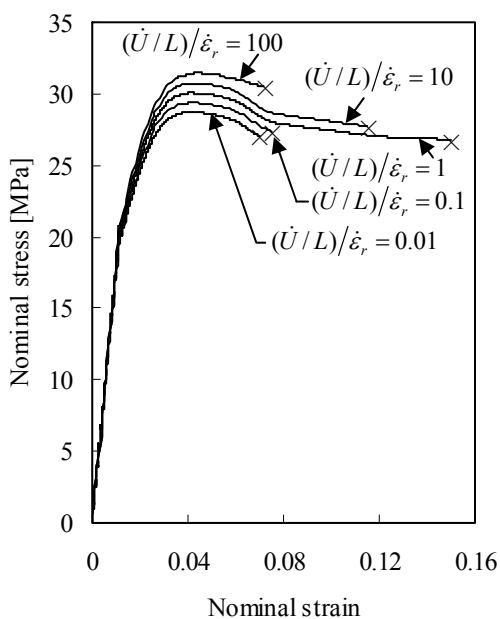


Fig. 8.16 Stress-strain curves obtained from FEM simulation with parameter  $m=0.01$

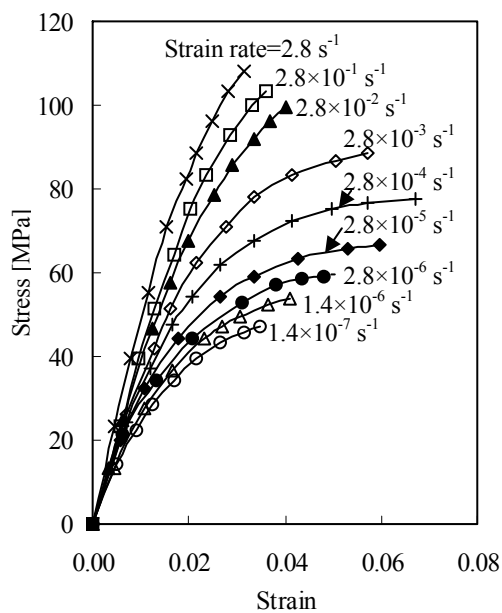


Fig. 8.17 Stress-strain curves of PMMA<sup>(1.1)</sup>

次に、条件  $(\dot{U}/L)/\dot{\epsilon}_r = 1$  で実施した解析で得られた相当塑性ひずみ速度を図 8.18 の左側に、クレーズ密度分布を右側に示す。なお図 8.18 は、8.2 節と同様に、図 8.2 の原点を中心として  $x_1x_2$  面、 $x_2x_3$  面および  $x_3x_1$  面に対して対称に解析結果を複写することで表示した平板全体であり、 $x_3$  軸上方から  $x_3 = h$  における  $x_1x_2$  面を見た図である(図 8.19~28 も同様)。まず降伏直後の伸び率  $U/L = 0.060 \sim 0.070$  において、X 形せん断帯状に相当塑性ひずみ速度の高い領域が平板中央で生じる。その後  $U/L = 0.080 \sim 0.11$  において、相当塑性ひずみ速度の高い領域は変形の進行にともないくびれの内側へ進行するものと外側へ進行するものとに分裂し、前者はくびれの中心まで伝ばした後に消滅する一方で、後者は  $U/L = 0.15$  においてもくびれとともに引張方向に伝ばする。このような相当塑性ひずみ速度の挙動は、X 形せん断帯状にひずみ速度が集中した後にくびれ領域では分子鎖が配向して再硬化すること、配向硬化領域が端面側へ進展してくびれが安定的に伝ばすることに対応している。クレーズ密度は、 $U/L = 0.060 \sim 0.080$  における高ひずみ速度領域で X 形せん断帯状に値が高くなった後、 $U/L = 0.090 \sim 0.11$  においてその周囲で次第に値が大きくなり、 $U/L = 0.15$  で試験片中央部よりもくびれ進行端部において値が最も高くなる。このようなクレーズ分布挙動は、まず変形の集中領域における相当塑性ひずみ速度の値が高い領域でクレーズが集中的に発生すること、その後、変形が集中した領域では分子鎖配向が進むことでクレーズ成長が停止すること、変形の進行にともなうくびれの伝ばとともに配向-未配向境界領域であるくびれ進行端部でクレーズの値が最も高くなることを再現している。

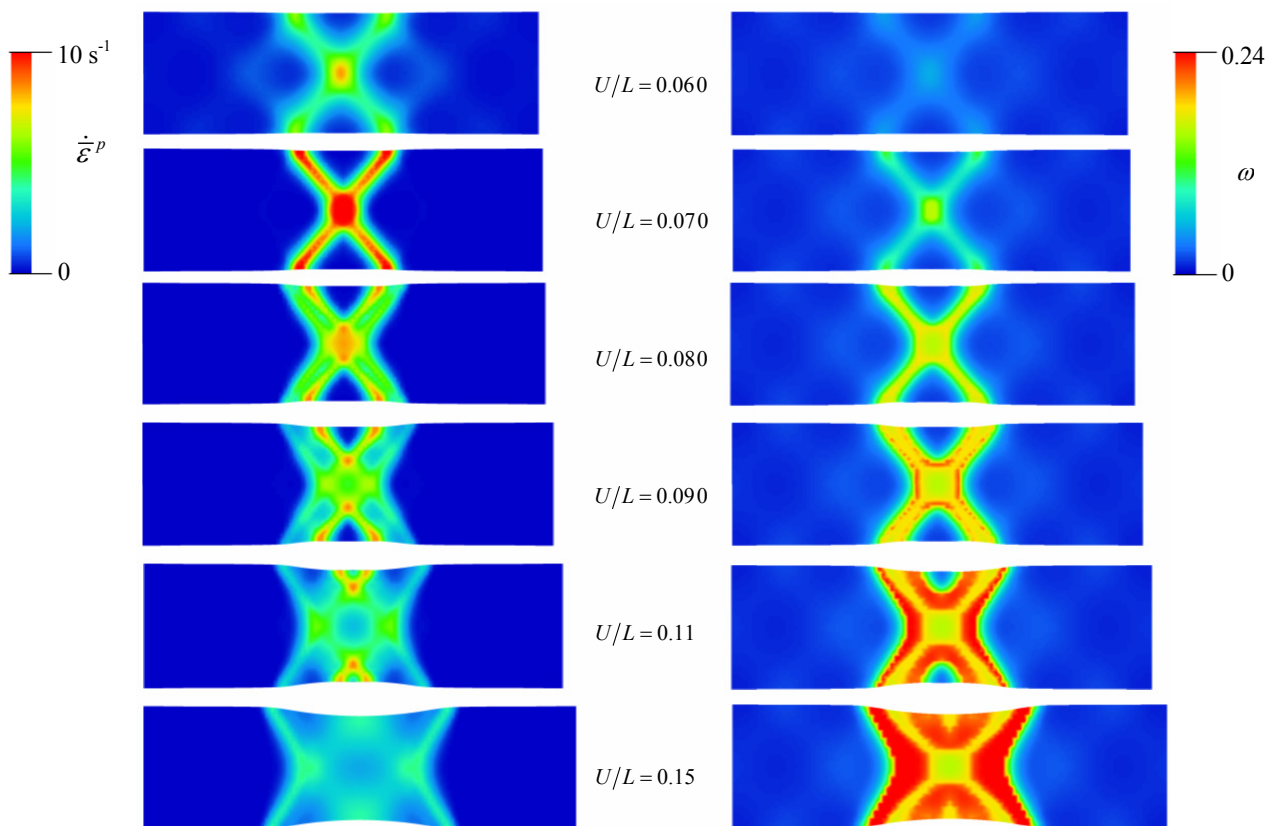


Fig.8.18 Distributions of equivalent plastic strain rate (left side) and craze density (right side) at tensile condition  $(\dot{U}/L)/\dot{\epsilon}_r = 1.0$

また、 $U/L=0.070$  における相当塑性ひずみ速度の値に比べて  $U/L=0.15$  でのそれは十分小さいにも関わらず、クレーズ密度が上昇していることから、低ひずみ速度においてクレーズが多く(実際は長く)成長することが式(6.18)により表現できることが確認される。ここで、鋼材のき裂がポイド率約 0.15 で生じること<sup>(6.5)</sup>、ならびにクレーズにはポイドの周囲にフィブリルが存在し、クレーズ内部のフィブリル体積分率は概ね 0.5 であること<sup>(1.8)</sup>を考慮すれば、ポリマにき裂が生じる時のクレーズ密度は鋼材のポイド率の 2 倍( $\omega=0.3$ )前後と仮定できる。また、フィルムの引張りを対象とした観察結果の中で、武野ら<sup>(6.6)</sup>はクレーズ密度の最大値を 0.35 と報告している。そこで 8.3 節では、ポリマのクレーズ密度が  $\omega=0.2\sim 0.4$  に達し、その部位の実応力がフィブリル強度を超える場合に、部材が破断すると予測できるものとする。

次に、条件  $(\dot{U}/L)/\dot{\epsilon}_r = 10$  で行った解析で得られた相当塑性ひずみ速度およびクレーズ密度分布を図 8.19 に示す。相当塑性ひずみ速度は、図 8.18 に示す条件  $(\dot{U}/L)/\dot{\epsilon}_r = 1$  での解析結果に比べて 10 倍程度の値をもち、図 8.18 と同様に値の高い領域が X 形せん断帯状に平板中央で生じてから変形の進行にともないくびれの内側と外側に分かれて伝ばしている。一方でクレーズ密度は、 $U/L=0.070$  において X 形せん断帯状に値が高くなり、その中で相当塑性ひずみ速度が特に高い X 形バンドの交点で局部的に値が高くなる。その後  $U/L=0.12$  において、図 8.18 と同様にくびれ端部のクレーズ密度が上昇する。なお繰り返しとなるが、本研究では後述するように実応力の値がフィブリル強度より大きくなることに基づいて破断を予測するため、条件  $(\dot{U}/L)/\dot{\epsilon}_r = 1$  での解析は  $U/L=0.15$  まで実施しているのに対して、条件  $(\dot{U}/L)/\dot{\epsilon}_r = 10$  での解析は  $U/L=0.12$  で終了させている。

さらに条件  $(\dot{U}/L)/\dot{\epsilon}_r = 100$  で実施した解析結果(図 8.20)では、X 形せん断帯状に相当ひずみ速度が高い試験片中央で、特にひずみ速度の大きい試験片側面においてクレーズ密度が大きくなっている。これらのことから、ひずみ速度が高い場合に小さなクレーズが多数発生することが式(6.17)により表現できているといえる。

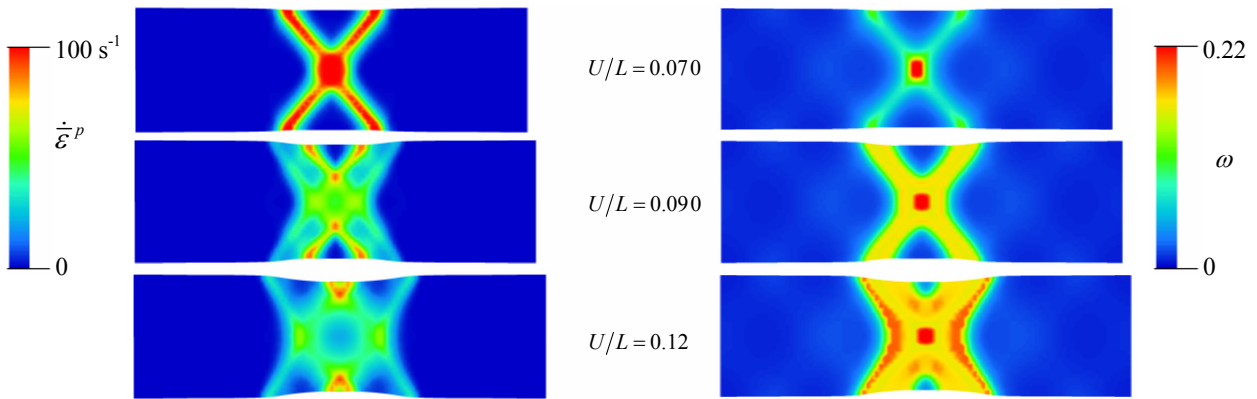


Fig.8.19 Distributions of equivalent plastic strain rate (left side) and craze density (right side) at tensile condition  $(\dot{U}/L)/\dot{\epsilon}_r = 10$

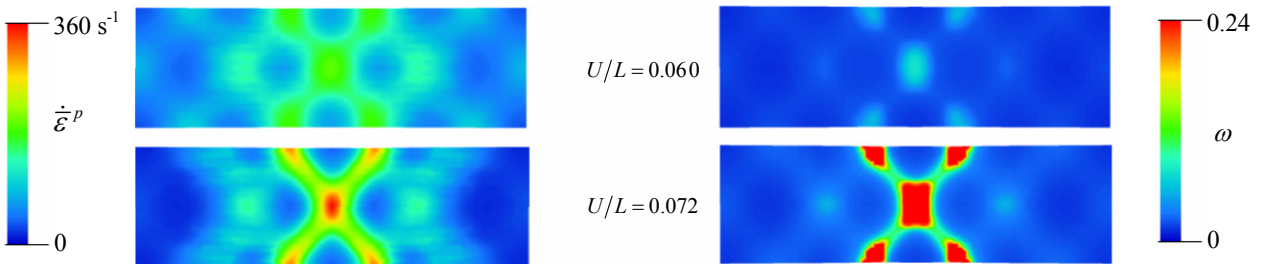


Fig.8.20 Distributions of equivalent plastic strain rate (left side) and craze density (right side) at tensile condition  $(\dot{U}/L)/\dot{\epsilon}_r = 100$

一方、条件  $(\dot{U}/L)/\dot{\epsilon}_r = 0.1$  および  $0.01$  で実施した解析結果(図 8.21 および図 8.22)では、条件  $(\dot{U}/L)/\dot{\epsilon}_r = 1$  で実施した解析結果に比べて相当塑性ひずみ速度が  $1/10$  および  $1/100$  に低下している。ただし、いずれの条件でも  $U/L = 0.070$  において、X 形せん断帯状にクレーズ密度が局部的に高くなり、その値は図 8.18 の値と同程度である。このように、低速側の引張条件では条件  $(\dot{U}/L)/\dot{\epsilon}_r = 1$  で実施した解析に比べて小さな  $U/L$  においてクレーズ密度が高くなることから、低ひずみ速度においてクレーズが多く成長することが式(6.18)により表現されているといえる。なお図 8.18~8.22 のクレーズ分布をいずれも明瞭に表示するために、図 8.19 でのみクレーズ密度の最大値を  $0.22$  としている。

次に、条件  $(\dot{U}/L)/\dot{\epsilon}_r = 1$  の解析で得られた擬似無損傷配置の相当応力を図 8.23 左側に、実応力を右側に示す。同様に条件  $(\dot{U}/L)/\dot{\epsilon}_r = 10, 100, 0.1$  および  $0.01$  で実施した解析結果を、それぞれ図 8.24, 図 8.25, 図 8.26 お

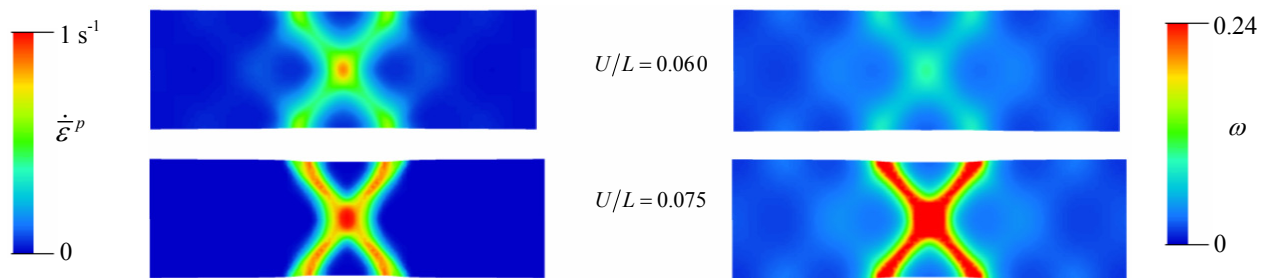


Fig.8.21 Distributions of equivalent plastic strain rate (left side) and craze density (right side) at tensile condition  $(\dot{U}/L)/\dot{\epsilon}_r = 0.1$

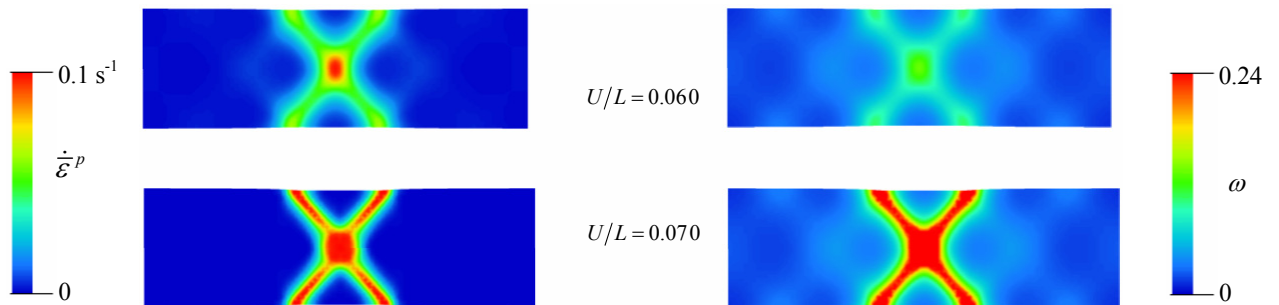


Fig.8.22 Distributions of equivalent plastic strain rate (left side) and craze density (right side) at tensile condition  $(\dot{U}/L)/\dot{\epsilon}_r = 0.01$

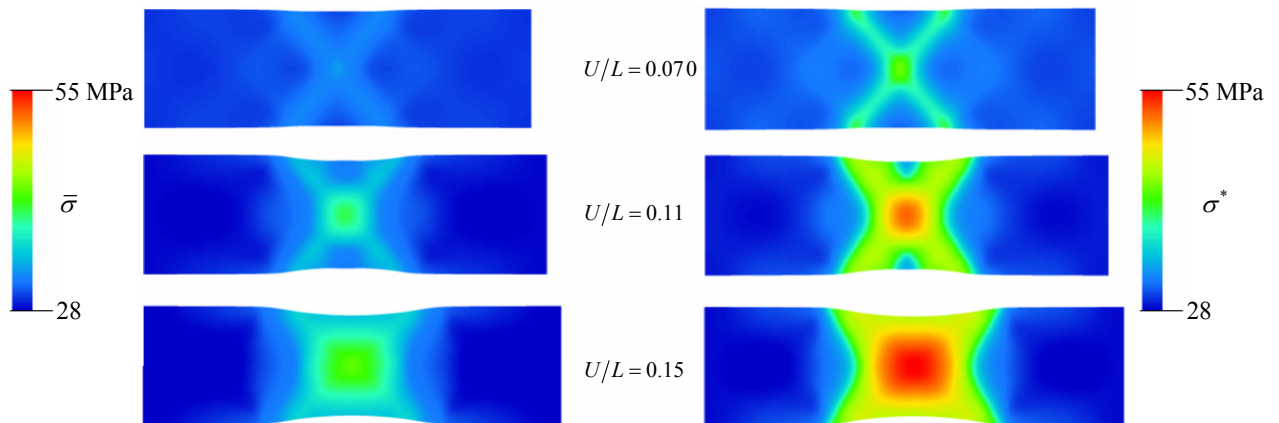


Fig.8.23 Distributions of equivalent stress (left side) and effective stress (right side) at tensile condition  $(\dot{U}/L)/\dot{\epsilon}_r = 1.0$

よび図 8.27 に示す．相当応力は，いずれの引張条件においても降伏直後の  $U/L = 0.070$  付近で平板中央において X 形せん断帯状に値がわずかに高くなり，その後も解析を継続させている条件  $(\dot{U}/L)/\dot{\epsilon}_r = 1$  および 10 では  $U/L = 0.11$  付近で平板中央において値の高い領域が広がる．条件  $(\dot{U}/L)/\dot{\epsilon}_r = 1$  で実施した解析では， $U/L = 0.15$  において値の高い領域がさらに拡張している．

一方，実応力は式(2.6)<sub>1</sub> で計算されるため，降伏直後の  $U/L = 0.070$  付近から X 形せん断帯状の高クレーズ密度領域で擬似無損傷配置の相当応力よりも高い値を示している．さらに解析を継続させている条件  $(\dot{U}/L)/\dot{\epsilon}_r = 1$  および 10 では，その後の変形の進行にともない高クレーズ密度領域であるくびれ進行端部でも値が大きくなるため，実応力はくびれ部の広い範囲で高い値を示している．実応力  $\sigma^*$  がフィブリル強度を超えれば，フィブリルが切断されるのでポリマは破断する<sup>(6,7)</sup>と予測される．しかし，分子鎖配向領域ではクレーズの成長が停止している<sup>(1,8)</sup>ので，クレーズ密度が十分に高くないまま，再硬化にともない相当応力が上昇して実応力が高くなるだけである．したがって，実応力がフィブリル強度を超えても部材の切断には至らない．

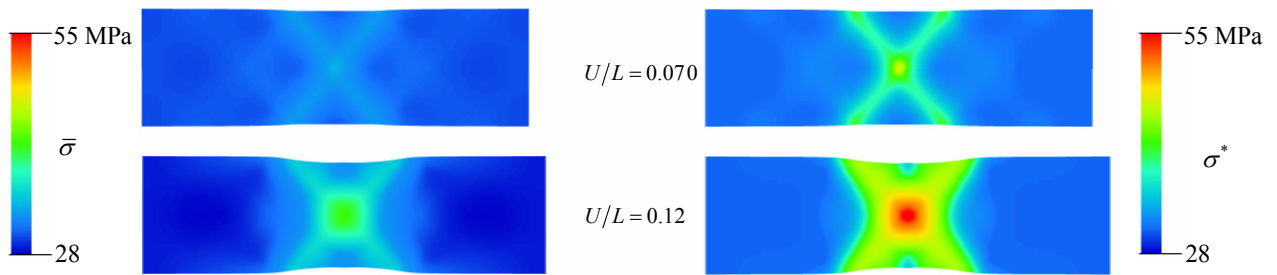


Fig.8.24 Distributions of equivalent stress (left side) and effective stress (right side) at tensile condition  $(\dot{U}/L)/\dot{\epsilon}_r = 10$

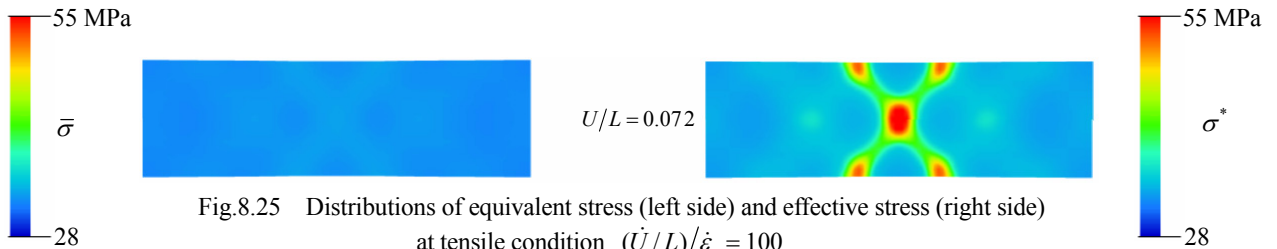


Fig.8.25 Distributions of equivalent stress (left side) and effective stress (right side) at tensile condition  $(\dot{U}/L)/\dot{\epsilon}_r = 100$

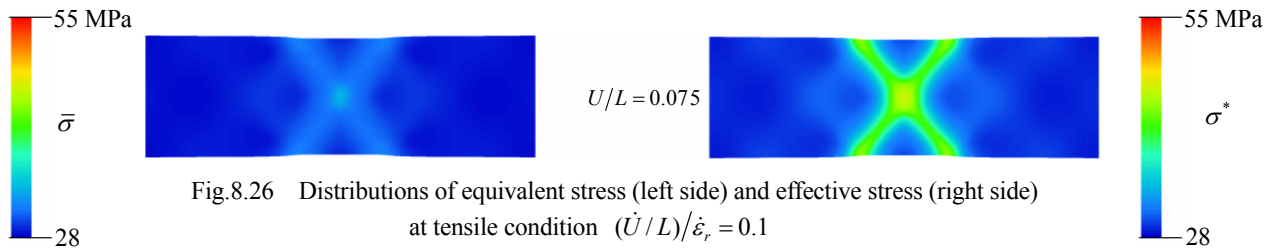


Fig.8.26 Distributions of equivalent stress (left side) and effective stress (right side) at tensile condition  $(\dot{U}/L)/\dot{\epsilon}_r = 0.1$

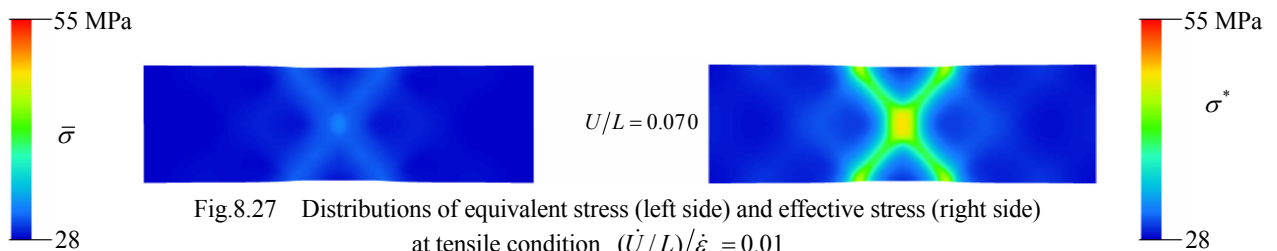


Fig.8.27 Distributions of equivalent stress (left side) and effective stress (right side) at tensile condition  $(\dot{U}/L)/\dot{\epsilon}_r = 0.01$

そこで、クレーズ停止部を除いた領域において、クレーズ密度が 0.2~0.4 程度と十分大きく、かつ Sugimoto<sup>(6,7)</sup> が得た PP のフィブリル強度 40~43 MPa の中で最も低い 40 MPa より実応力が大きい場合に、ポリマにマイクロクラックが発生すると、ここでは考えることとする。さらに、 $\sigma^* \geq 40$  MPa となる領域が連続的に連なったときマイクロクラックが結合してポリマ部材が破断に至ると予測する。なお、これまで述べてきたような実応力に基づく破断予測は損傷力学の立場で提案しており、破壊力学における応力拡大係数などを用いた破壊基準とは異なることに注意されたい。ここで、クレーズ停止部を除いて  $\sigma^* \geq 40$  MPa となる領域が、連続的に連なる最も小さな  $U/L$  を探せば、条件  $(\dot{U}/L)/\dot{\epsilon}_r = 100, 10, 1, 0.1$  および  $0.01$  で実施した解析で、それぞれ  $U/L=0.072, 0.12, 0.15, 0.075$  および  $0.070$  となる。このとき、上述の判定方法に基づいてマイクロクラック発生箇所を図示すれば図 8.28 のようになり、赤色の部分で部材が破断すると予測できる。前述のように、破断ひずみに関するこのような速度依存性は、図 8.17 に示す実験で得られた応力-ひずみ曲線で認められるポリマに特有の特徴である。なお、低ひずみ速度における PP の引張試験では塑性発熱が長時間にわたり継続するため、蓄積した試験片内部の熱の影響で低ひずみ速度ほど破断ひずみが大きくなる場合もあるが、変形にともなう PP 内部の塑性発熱および熱伝導、ならびに PP 表面における熱伝達を考慮できるように構成式を拡張するとともにクレーズ発展式を温度依存形に構築し直したうえで単軸引張シミュレーションを実施すれば、このような現象も再現可能であると考えられる。ただし図 6.10 において、例えば  $A_{gr} = 4.0$  および  $n_g = 0.2$  に変更して低速域のクレーズ成長が小さいものとして表現すれば、伝熱計算をしなくても、このような現象を本材料モデルのみで簡便に再現することもできる。また、図 8.28 における赤色の部分はくびれの中央ではなく、いずれの速度においてもくびれ進行端部であり、よく知られている引張試験後のポリマ試験片の破断部位と定性的に一致することから、本材料モデルで予測された破断部位は妥当といえる。以上のことから本材料モデルは、広ひずみ速度域における PP の延性破壊の傾向を再現できるといえる。

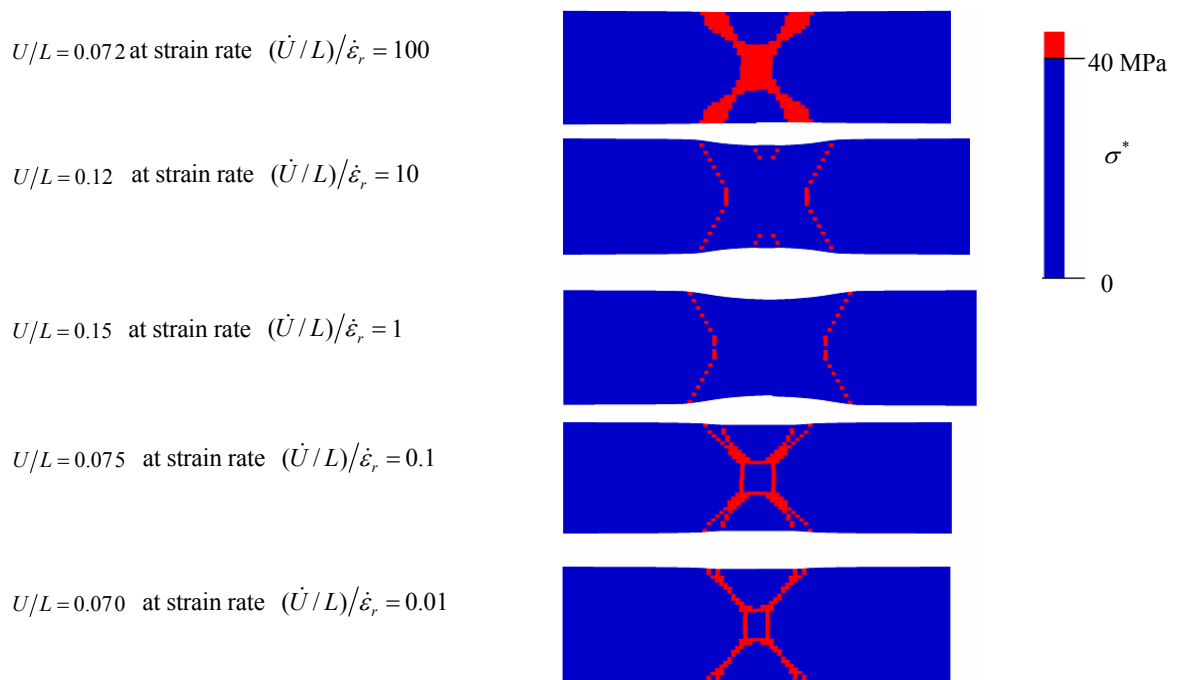


Fig.8.28 Distributions of effective stress without craze cessation region

### 8.4 圧縮および引張試験の再現シミュレーション

本材料モデルに導入された静水圧依存性が機能することを確認するために、立方体形状の PP ブロックを用いたシミュレーションを商用 FEM プログラム LS-DYNA で実施する。なお、ユーザーサブルーチンのプログラム方法は 8.1 節で述べたとおりである。立方体の 1/8 部分としての、原点を節点の 1 つにもち、各辺が 1 m の 3 次元 BRICK 要素 1 つを解析対象とし、 $x_1 = 0$  において  $x_2x_3$  面、 $x_2 = 0$  において  $x_3x_1$  面および  $x_3 = 0$  において  $x_1x_2$  面をそれぞれ  $x_1$  方向、 $x_2$  方向および  $x_3$  方向にのみ拘束したうえで、 $x_1 = 1$  において  $x_2x_3$  面に対して  $x_1$  方向に強制変位を与える。強制変位は引張方向および圧縮方向に与えることとし、それぞれ公称ひずみ 0.1 となった時点で解析は終了させる。なお、本検討はひずみ速度硬化則に導入された静水圧依存性が機能することのみを確認するため、クレーズの発生は考慮しないこととする。ひずみ速度硬化則[式(5.5)、式(5.6)および式(5.7)]には、5.2 節に示した材料定数を用いる。なお、式(4.79)の材料定数には  $p_1 = \sin(\pi/8)$ 、 $p_2 = 0.0001$  および  $p_3 = 10$  を前節同様に用いることとする。

解析で得られた公称応力-公称ひずみ曲線を、佐野村による実験結果<sup>(1.79)</sup>とあわせて図 8.29 に示す。黒丸シンボルが単軸引張試験結果、白丸シンボルが単軸圧縮試験結果、実線が単軸引張解析結果で、点線が単軸圧縮解析結果である。ただし、図 8.29 では引張応力と比較しやすくするため、圧縮応力を正の値として図示している。単軸引張状態および、単軸圧縮状態で解析結果が実験結果とよく一致していることから、本材料モデルが組み込まれた商用 FEM プログラムが正確に静水圧依存性を表現できることが確認できる。なお、等 2 軸あるいは純粋せん断に近い応力状態も表現することを目的としたひずみ速度硬化則における静水圧依存性の精密化、およびこのひずみ速度硬化則を利用した種々の応力状態が混在するポリマ板材の打ち抜き実験を対象とするシミュレーション[補足 H.7]におけるクレーズ挙動の再現性の評価は、今後の課題としたい。

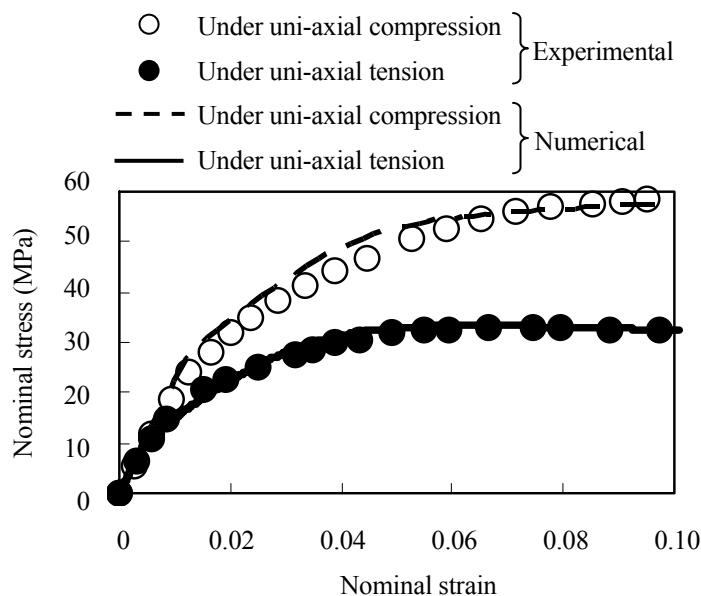


Fig.8.29 Numerical nominal stress versus nominal strain curves of specimen subject to tensile and compressive loads with experimental results<sup>(1.77)</sup>

次に、単軸引張シミュレーションを実施する。前節では、一般的な結晶性ポリマの破断傾向が示せることを示したが、ここでは第7章で紹介した単軸引張試験の結果に対する整合性を確認することで、本材料モデルの実験に対する再現性を確認する。ここで、図 8.30 に示すように、引張試験片の平行部における単軸引張状態を模擬するため、本解析においても解析モデルには 8.2 節の図 8.2 に示すものと同じ平板を用いる。本材料モデルは、ひずみが局在化したせん断帯をとまなくびれの伝ばを再現できることを特徴としているため、せん断帯状にひずみが集中することを表現できるのに十分な解像度が必要となる。引張試験の平行部を模擬した解析モデルでは、幅方向に 20~30 分割することが望ましい。このため本解析モデルでは、幅 6 mm の引張試験片の平行部を 32 分割しており、要素サイズを 0.19 mm としている[補足 H.8]。なお、幅方向には Tvergaard ら<sup>(8.1)</sup>の初期不整  $\Delta w$  を与え、 $x_1 = 0$  において  $x_2x_3$  面、 $x_2 = 0$  において  $x_3x_1$  面および  $x_3 = 0$  において  $x_1x_2$  面をそれぞれ  $x_1$  方向、 $x_2$  方向および  $x_3$  方向にのみ拘束し、平板端部 ( $x_1 = L$ ) をせん断自由として強制変位速度  $\dot{U}$  を  $(\dot{U}/L)/\dot{\epsilon}_r = 1, 10$  および  $100$  となるように与える。また、ひずみ速度硬化則ならびに流れ応力の材料定数として、第7章の PP 材に対して同定した値である、 $m = 5.5 \times 10^{-2}$ 、 $\dot{\epsilon}_r = 1.0 s^{-1}$ 、 $\sigma_r = 11 \text{ MPa}$ 、 $k_0 = 1.0$ 、 $k_1 = 60$ 、 $k_2 = 2.62$ 、 $k_3 = 2.5$ 、 $k_4 = 0$ 、 $k_5 = -10$  および  $\epsilon_h = 0.22$  を用いる。また、拡張したクレーズ発展式に対して、式(6.17)の材料定数には  $A_{ge} = 1.0$ 、 $D_1 = 1.3$ 、 $D_2 = -0.1$  および  $D_3 = -1.0$  を、式(6.18)の材料定数には  $A_{gr} = 14$  および  $n_g = 0.33$  を、式(6.19)の材料定数には  $D_4 = 100$  および  $\epsilon_c = 0.22$  を、式(6.8)の係数を  $B = 0.1$ 、式(6.11)の材料定数には  $q_1 = 1.0 \times 10^{-5}$ 、 $q_2 = 0.1$ 、 $q_3 = 35$  および  $q_4 = 2.4$  を、そして式(6.12)の材料定数には  $A_1 = 3 \text{ MPa}$ 、 $B_1 = 54 \text{ MPa}^2$  および  $C_1 = 1$  を用いる。これらの値は、第7章の PP 材の引張試験を参照して、数値解析を繰り返すことで決定される。まず、 $\dot{\epsilon}^p = \dot{\epsilon}_r$  の条件で数値解析を実施し、実験で得られる公称応力-公称ひずみ曲線の形状に基づき、ひずみ速度硬化則の材料定数  $k_0 \sim k_3$  および  $\sigma_r$  を決める。次に、高ひずみ速度側の条件で数値解析を実施し、材料定数  $m$  を決める。最後に、破断ひずみのひずみ速度依存性および破断部位が再現できるようにクレーズ発展式の材料定数を決める[補足 H.9]。なお、式(4.79)の材料定数には  $p_1 = \sin(\pi/8)$ 、 $p_2 = 1 \times 10^{-4}$  および  $p_3 = 10$  を用いる。

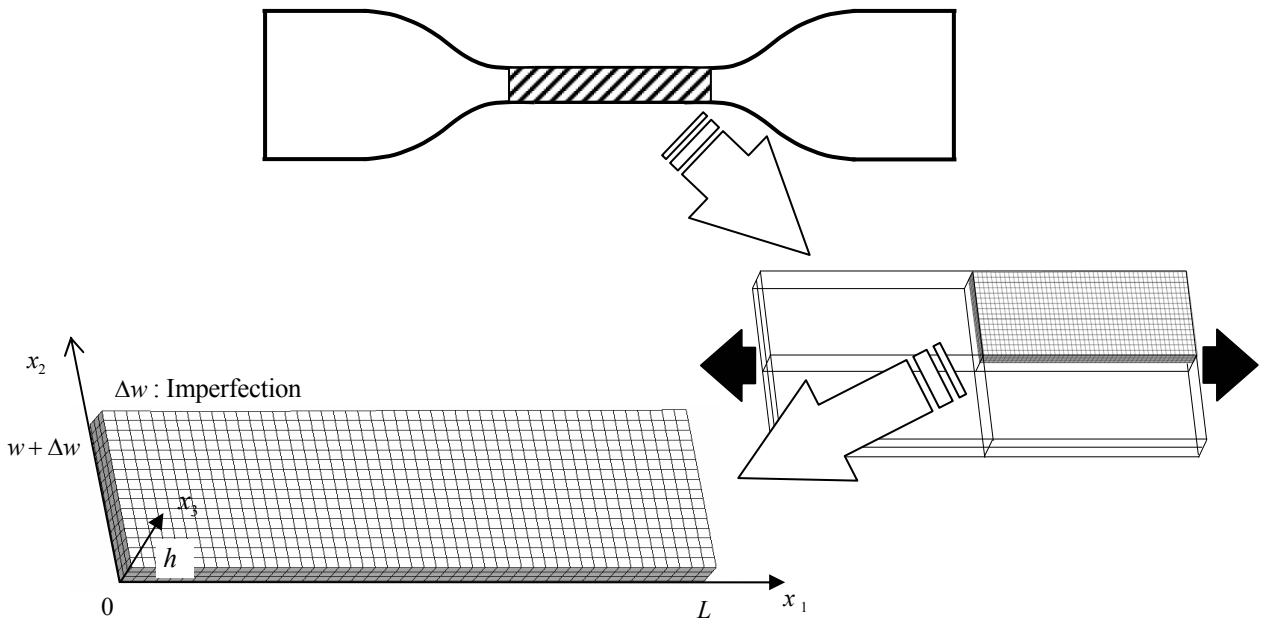


Fig.8.30 Finite element mesh under uniaxial tension for validation of present material model



本解析で得られた公称応力-公称ひずみ曲線を第7章の実験結果とあわせて図 8.31 に示す。図 8.31 における☆印は、再硬化が進んでいない領域において式(2.6)<sub>1</sub>で $\sigma = \bar{\sigma}$ とにおいて計算される実応力の値がフィブリング強度(クレーズ強度)を超えたことを示している。8.3 節で述べたように、このとき部材が破断すると予測されるので、☆印において解析を終了させている。図 8.31 を見れば、引張条件において高いひずみ速度を与えるほど破断ひずみが小さい傾向が確認できるので、実験結果とよく一致している。したがって、本材料モデルは高ひずみ速度領域において、破断ひずみの速度依存性の傾向を正確に再現できるといえる。

次に、引張条件( $\dot{U}/L$ )/ $\dot{\epsilon}_r = 1$  で実施した解析で得られた相当塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}^p$ の $U/L = 0.16, 0.28, 0.30$  および $0.34$  における分布を図 8.32 に示す。これまでと同様に、図 8.32 は図 8.30 の原点を中心として $x_1x_2$  面、 $x_2x_3$  面および $x_3x_1$  面に対して対称に解析結果を複写することで表示した平板全体であり、 $x_3$  軸上方から $x_3 = h$  における $x_1x_2$  面を見た図である。図 8.32 を見れば、実際の PP に対して同定した材料定数を用いた本解析においても、平板中央部で X 形せん断帯状に相当塑性ひずみ速度の高い領域が生じていることがわかる。その後、くびれの伝ばとともに相当塑性ひずみ速度の高い領域は引張方向に移動することも確認できる[補足 H.10]。ただし、本解析は実際の PP が有するひずみ感度指数 $m = 5.5 \times 10^{-2}$  を用いているため、8.2 節および 8.3 節で示した $m = 0.01$  を用いて解析した場合に比べれば相当塑性ひずみ速度の移動がはっきりしていない。

次に図 8.33 にクレーズ密度分布を、引張条件( $\dot{U}/L$ )/ $\dot{\epsilon}_r = 1, 10$  および $100$  について、それぞれ $U/L = 0.34, 0.32$  および $0.30$  において示す。いずれの引張速度条件においても、配向-未配向境界部であるくびれ進行端部においてクレーズ密度が高くなっており、実際の PP に対して同定した材料定数を用いた本解析においても、8.2 節および 8.3 節で述べてきたようなクレーズ挙動の再現性が確認できる。

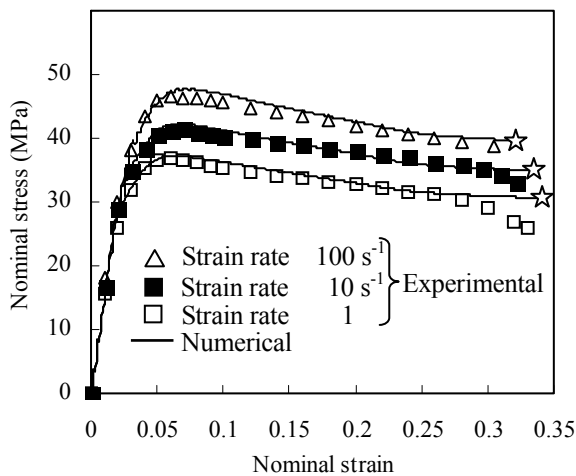


Fig.8.31 Numerical nominal stress versus nominal strain curves at three levels of strain rate condition

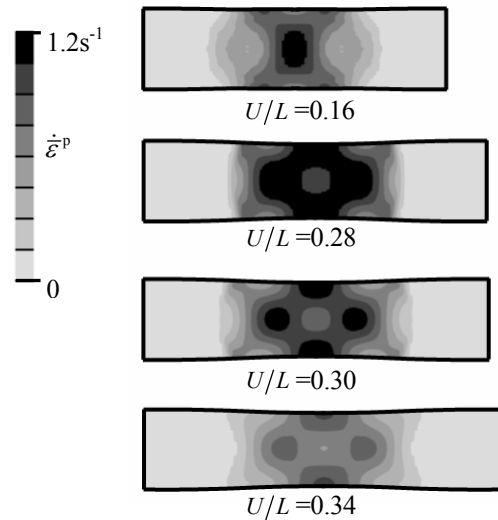


Fig.8.32 Distributions of equivalent plastic strain rate at applied strain rate  $1 \text{ s}^{-1}$

次に図 8.34 に擬似無損傷配置の相当応力を，さらに図 8.35 に実応力を，引張条件 $(\dot{U}/L)/\dot{\epsilon}_t = 1, 10$  および 100 について，それぞれ $U/L=0.34, 0.32$  および  $0.30$  において示す．相当応力は，いずれの引張条件においてもくびれ中央部において高い値をとる．一方で実応力はくびれ中央部だけでなく，高クレーズ密度領域であるくびれ進行端部においても高い値を示しており，その値は相当応力よりも高く，58 MPa を超えている．

ところで，Sugimoto ら<sup>(6,7)</sup>はフィブリル強度の実測を試みているが，得られた 5 種類の PP のフィブリル強度は 40 MPa から 43 MPa の間の値であり，同一ではない．したがって，PP の種類が異なる場合には，フィブリル強度も異なるものと推定される．ここで，Sugimoto らが得たフィブリル強度の 43 MPa の被測定材 PP の単軸引張試験で得られる公称応力-公称ひずみ関係は図 7.3 と大きく異なる．Sugimoto らが用いた PP 材は，ひずみ 0.1 において初期降伏で公称応力 33 MPa をとった後に徐々に応力が低下して公称ひずみ 0.2 において公称応力 32 MPa となり，その後ひずみ増加 0.01 において急激に公称応力 24 MPa まで低下し，その後破断まで公称応力がほぼ一定となっている．そこで，第 7 章の実験で用いた PP のフィブリル強度は，上述のような急激な応力低下がない分だけフィブリル強度が高いと推定すれば， $(43 \text{ MPa}) \times 32/24 = 58 \text{ MPa}$  と推算できる．

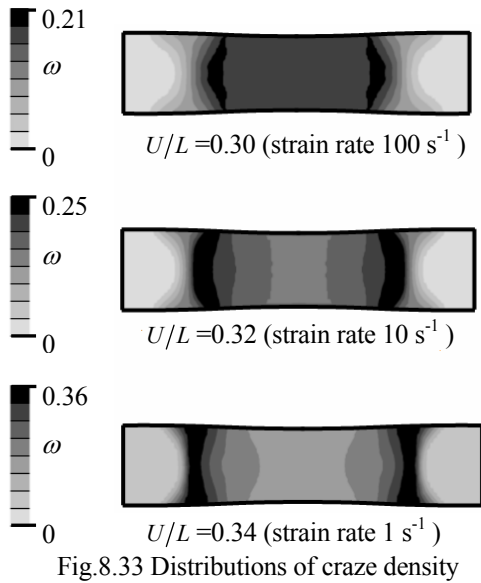


Fig.8.33 Distributions of craze density

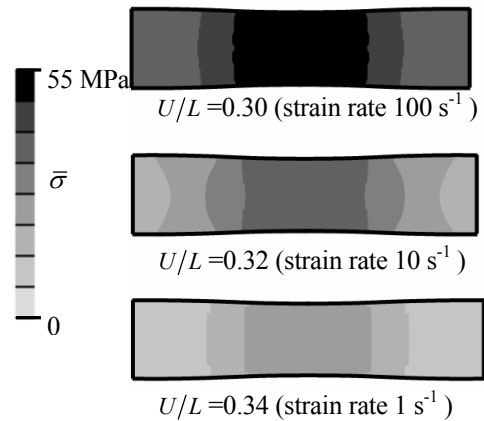


Fig.8.34 Distributions of equivalent stress

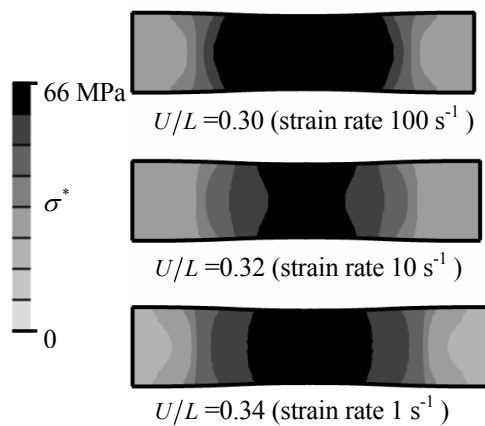


Fig.8.35 Distributions of effective stress

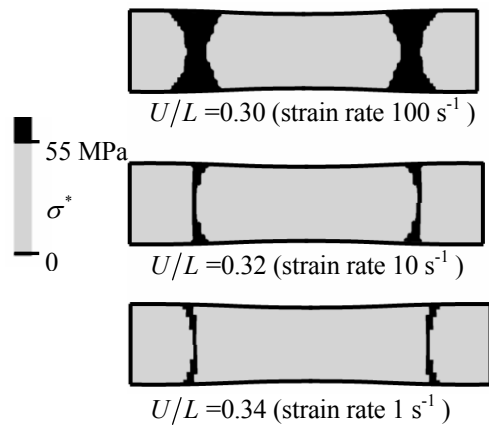


Fig.8.36 Distributions of effective stress without oriented regions

また、クレーズ停止領域では、クレーズ密度が他の領域よりも低く、さらに分子鎖の配向にともない再硬化が進んでいるため、クレーズ中のフィブリルが少々切断したとしても破断には至らないと考えることができる。そこで、クレーズ停止領域を除いて実応力  $\sigma^* \geq 58 \text{ MPa}$  となる部分のみ表示すれば図 8.36 のようになる。図 8.36 ではくびれ伝ばの進行端部における破断が予想されており、この部位と図 7.4 に示す実験後の破断部位の傾向が一致している。なお、低ひずみ速度条件における実際の PP を対象とした破壊も、これまで述べてきた手法を用いて予想できること、ならびに文献の実験結果<sup>(7,4)</sup>に対して図 8.37 に示すように良い対応が示せることを付記しておく。以上の検討を通じて、本材料モデルは実用的であると評価できる。

ここで、本節では 1 種類の PP の引張試験結果に対する再現性の確認を通じて、本材料モデルの実用性を評価している。しかし、検証に供した実験は 1 例だけであることから、誤差の重なり合いによる偶然の一致が起きている可能性は残されている。このことを避けるためには、数種類の PP に対して引張試験を実施して、応力-ひずみ関係や破断部位および破断ひずみのひずみ速度依存性の傾向が異なる実験結果を比較対象として、シミュレーションの再現性を確認すればよい。また、クレーズ分布の可視化およびクレーズ密度の定量化に関する研究成果は現時点でみあたらないが、これらが実験・観察の専門家の有する高度な技術により可能になれば、本研究において予想したクレーズ密度の値の妥当性を評価できる。以上のような複数の PP の引張試験結果に対する再現性確認や可視化により可能となった実測のクレーズ密度との比較を通じて誤差が判明した場合には、クレーズ挙動のモデル化あるいは予測手法を修正する必要があるが、このような高精度化は今後の課題としたい。このような課題も残されているが、ある程度汎用的に利用可能な理論の構築ができたものといえる。

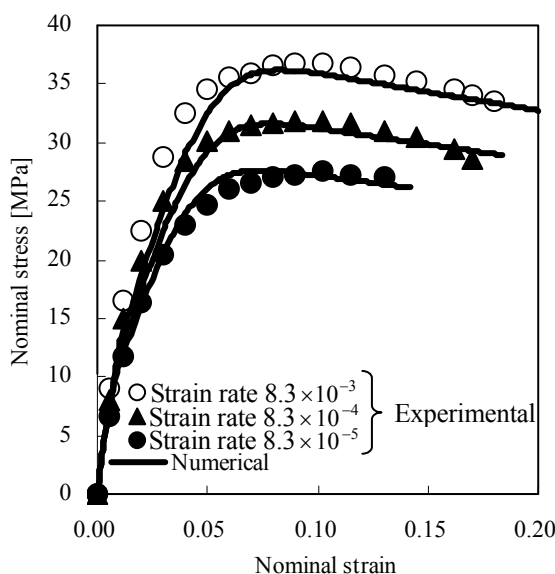


Fig. 8.37 Numerical nominal stress - nominal strain curves under low strain rate condition with experimental data of PP<sup>(7,4)</sup>

## 8章の参考文献

- (8.1) Tvergaard, V., "Necking in tensile bars with rectangular cross-section", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.103, (1993), pp.273-290.

# 第9章 結 言

## 9.1 本論文の結言

本研究では、クレーズの影響を考慮した弾粘塑性構成式を熱力学的理論体系に整合する形で導出し、諸発展式の引数に対して熱力学的検討を加えた。さらに、相当ひずみ速度の発展式の引数に静水圧応力が含まれることを示し、熱力学的理論体系に矛盾することなくひずみ速度硬化則に静水圧依存性を導入した。

次に、クレーズ密度の増加が塑性ひずみの増加にともない生じることを表すクレーズ伝ば項と、塑性平均垂直ひずみの増加に起因するクレーズ等方成長項の和により、クレーズ発展式を新たな表現で構築した。さらに、低ひずみ速度ではクレーズが成長しやすく、分子鎖配向領域ではクレーズの成長が停止しているという報告事実に基づきクレーズ挙動をモデル化するために、相当塑性ひずみおよびその速度に依存する形でクレーズ伝ば項を関数化することで、クレーズ伝ば項を具体化した。一方で、Gursonのボイド発展式を参考にクレーズ等方成長項を表現しつつ、クレーズに含まれるボイドの成長がクレーズの等方成長に強く関係することを考慮して、ボイドの成長に寄与する塑性平均垂直ひずみの発展式を球形ボイドを有する3次元立方体モデルによる数値実験により新たに同定した。また、従来のクレーズ発生条件式に速度依存性を導入して予測精度を高めた。加えて、広ひずみ速度に対応したクレーズ挙動を再現するために、クレーズ発展式を拡張した。具体的には、高ひずみ速度において小さなクレーズが多数発生する傾向と低ひずみ速度においてはクレーズの長さが大きく成長する傾向をクレーズの発生項とクレーズの成長項として表現し、両項の和によってクレーズ伝ば項を表現した。

また、シミュレーション結果に対する比較対象を得るために、ひずみ速度  $1 \text{ s}^{-1}$  以上の速度域でPPを対象とした単軸引張試験を実施した。

さらに、上述のクレーズの影響を考慮した弾粘塑性構成式、ひずみ速度硬化則、クレーズ発展式、塑性平均垂直ひずみの発展式およびクレーズ発生条件式からなる本材料モデルを商用FEMプログラムに組み込み、単軸引張シミュレーションを実施した。このとき、新たな形式で構築したクレーズ発展式を利用してくびれ端部でクレーズ密度および実応力が高くなることの再現性を確認した。次に、ひずみ速度  $0.01 \text{ s}^{-1}$  から  $100 \text{ s}^{-1}$  までの5水準の速度を与えてクレーズ密度と実応力に基づいてPPの延性破壊が広ひずみ速度領域において再現可能であることを示し、最後に、破断ひずみのひずみ速度依存性と予測される破断部位がPPの引張試験結果をよく再現できていることから本材料モデルの妥当性を評価した結果、以下の結論を得た。

- (1) クレーズ発展式は、クレーズの進展が相当塑性ひずみおよび塑性平均垂直ひずみの増加にともなって生じるものとして表現できる。また、相当塑性ひずみの増加に対するクレーズ密度の増加率を相当塑性ひずみ速度および相当塑性ひずみの関数として具体化すれば、クレーズ伝ばのひずみ速度依存性と分子鎖配向領域におけるクレーズの停止を表現できる。さらにクレーズの伝ばを表す項を、クレーズ数密度のひずみ速度依存性を表現するクレーズ生成項とクレーズの長さのひずみ速度依存性を表現するクレーズ成長項の和で表現すれば、クレーズ挙動を低速から高速まで幅広いひずみ速度範囲で再現可能となる。

- (2) 本材料モデルを組み込んだ商用FEMプログラムで実施したひずみ速度  $1 \text{ s}^{-1}$  における単軸引張シミュレーションの結果から、くびれの発生・伝ば、および高クレーズ密度領域の引張方向への伝ばならびにくびれ進行端部でクレーズ密度および実応力の値が高くなることが表現できる。
- (3) ひずみ速度  $0.01 \sim 100 \text{ s}^{-1}$  の条件で実施した単軸引張シミュレーションの結果から、上記に加えて高ひずみ速度および低ひずみ速度では高クレーズ密度領域が降伏直後に X 形せん断帯状に集中して発生することを表現できる。また、クレーズ密度が十分高く、かつ実応力がフィブリング強度を超えることに基づいて予測される破断ひずみのひずみ速度依存性は一般的な熱可塑性ポリマの特徴を再現でき、かつ破断部位は実験における破断傾向と一致する。
- (4) PP の単軸圧縮試験結果との比較を通じて本材料モデルが静水圧依存性を考慮できることを確認できる。また、実験を模擬して実施したひずみ速度  $1 \sim 100 \text{ s}^{-1}$  の単軸引張シミュレーションで、上述の基準に基づいて予測された破断部位ならびに破断ひずみのひずみ速度依存性が実験結果と定量的に整合することから、構築した結晶性ポリマの破断予測スキームは実用的と評価できる。

## 9.2 今後の課題と展開

本研究では、実験・観察結果に基づきクレーズ挙動をモデル化し、結晶性ポリマの破壊予測を可能とする材料モデルを構築した。本節では、本材料モデルに残されている課題について述べるとともに、今後の展開に触れることとする。

### 9.2.1 除荷時の変形応答

除荷時に単純な弾性除荷を示す金属とは異なり、図 9.1 に示すようにポリマは粘弾性効果による非線形性を有する顕著なひずみ回復が生じる。このため、PP 製バンパーフェースの衝突実験を行うと、衝突時に比べて衝突後では著しく変形が小さいことが多い。非共軸粘塑性構成式への非線形ひずみ回復の導入も試みられているが[補足 I.1]、非線形ひずみ回復の再現性ならびに解析安定性の向上に課題がある。課題が解決され、本材料モデルと融合させ、商用 FEM ソルバにおいて非線形ひずみ回復のシミュレーションが実施可能となることが期待される。

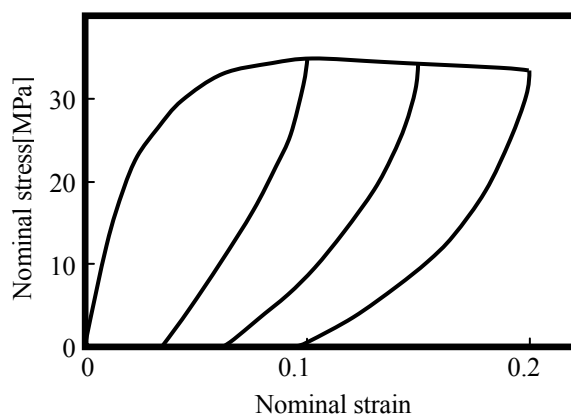


Fig 9.1 Schematic nominal stress versus nominal strain curves of PP with unloading process

## 9.2.2 異方性の導入

クレーズは主応力方向と垂直に進展することから、クレーズの進展には異方性[補足 I.2]があることが知られている。また、射出成型により製作された板材からダンベル型試験片を種々の方向に切削加工し、流れ方向の試験片を用いて単軸引張試験を行うと、流れに垂直方向の試験片を用いた場合よりも高い応力で応力-ひずみ曲線が推移することも知られている。さらに、ポリマは引張時に分子鎖が引張方向に配向するため、初期において等方性とみなせる材料であっても分子鎖配向領域では変形にともない異方性をもつようになり、引張方向の縦弾性係数や強度などの機械的性質は著しく向上する。変形にともない発現する異方性は変形誘起異方性と呼ばれ、強い異方性を示す分子鎖配向領域と分子鎖未配向領域の境界が広義の異種材料接合部となりうるため応力が集中し、クレーズの発生を助長する要因の一つと考えることができる。以上のような成型時の異方性、変形誘起異方性およびクレーズ進展の異方性の導入により、本材料モデルの更なる高精度化が期待される。

## 9.2.3 塑性発熱および熱伝導現象の導入

ポリマの塑性変形において、内部発熱が顕著に生じるのはくびれ領域である。本材料モデルはくびれの伝ばならびにくびれ端部におけるクレーズの蓄積を再現できるものの、くびれ領域に現れる内部発熱、材料内部での熱伝導および周囲環境との熱伝達が考慮されておらず、熱の移動が生じるような非平衡状態における応力緩和を再現できるモデルではない。ポリマには顕著な温度依存性があることは古くから知られており、温度依存性が考慮できることが望ましい。富田らは変形の局所化に及ぼす熱発生の影響を考慮し、多くの解析例を示しているが、内部発熱および熱伝導・熱伝達の影響を考慮した硬化応答を実験から得ることは困難であるため、これらの研究はあくまで数値解析的な予測にとどまっている。今後は、内部発熱と熱伝導・伝達に関するより精密なモデル化[補足 I.3]が必要といえる。

## 9.2.4 打抜き試験に対する再現シミュレーション

打抜き試験は、ダートインパクト試験ともよばれ、ポリマの耐衝撃性を評価する試験の一つであり、単軸引張試験とは異なる応力状態(等2軸およびせん断応力状態)が変形過程で生じる。このような、実際のポリマ製品の耐衝撃性試験の応力状態に近い実験を対象としたシミュレーションを通じて、本材料モデルの精度向上や各係数の確度の高い同定が期待できる。

以上に挙げたような課題を解決し、ポリマの大変形時の微視的損傷および分子鎖の配向挙動が及ぼす影響が考慮された材料モデルに拡張することで、ポリマ製品の設計で本材料モデルがより一層活用されることが期待される。



# 謝 辭

本研究は、著者が慶應義塾大学大学院理工学研究科総合デザイン工学専攻に在学中に、本塾大学院理工学研究科 総合デザイン工学専攻 マルチディシプリナリ・デザイン科学専修 志澤一之教授のご指導の下で行ったものであり、著者が高橋・志澤研究室に所属して研究活動を始めた学部4年の1993年4月から現在に至るまで20年以上にわたり同教授に賜りました熱心なご指導、御鞭撻に対して厚く御礼申し上げます。1996年4月に就職してからも度々研究室に立ち寄らせていただき、2004年4月からは共同研究という枠組みで再び研究について議論を重ねることができたのは、著者にとって大変幸運でした。

本論文の作成に当たり、御査読いただき、また有益な御討論ならびに貴重な御助言を賜りました本塾大学院理工学研究科 開放環境科学専攻 空間・環境デザイン工学専修 高野直樹教授、同専攻 環境・資源・エネルギー科学専修の堀田篤准教授および同研究科 総合デザイン工学専攻 マルチディシプリナリ・デザイン科学専修の澤田達男教授ならびに同専修の大宮正毅准教授に深謝いたします。

社会人である著者が本塾大学院において研究を進めることを快諾され、励ましのお言葉を度々頂戴した旭化成株式会社 角南俊克顧問および岡田尚記執行役員、同社生産技術本部技術企画グループ後藤慎二グループ長、旭化成エンジニアリング株式会社総務人事部 関口二郎部長に深く御礼申し上げます。また、CAE 技術部に異動になった2002年以来、10年以上にわたり著者の業務に対して身に余るサポートとご理解を頂戴し、さらに本塾大学志澤一之教授との共同研究の開始にご尽力され、現在も的確な方向付けと研究ビジョンを常にご提示いただいている旭化成株式会社 生産技術本部 生産技術センター CAE 技術部 山本敏治部長に心から感謝の意を表します。また、本研究に関わる業務を担当され、有意義な討論の機会を多くいただいた同部の難裕統氏をはじめ、先輩・同僚の皆様のご配慮に深謝いたします。

本研究を進めるにあたり、大変参考になる研究を進め、多くの成果をあげられた日産自動車株式会社 村上大介氏および小林誠一氏に最大限の敬意を表するとともに深謝いたします。さらに、クレーズ発展式の開発に携わった当時本塾大学院理工学研究科総合デザイン工学専攻の Maël Stephan 氏をはじめ志澤研究室のポリマチームの皆様のご献身的な努力に敬意を表するとともに感謝いたします。

最後に、著者の研究を暖かく見守ってくれた家族に感謝します。

2013年7月 矢上台の研究室にて 著者

高橋 順一

## 定期刊行誌掲載論文および口頭発表論文

### 定期刊行誌掲載論文(主論文に関する原著論文)

- (1) Takahashi, J., Yamamoto, T. and Shizawa, K., “Modeling and Simulation for Ductile Fracture Prediction of Crystalline Polymer Based on Craze Behavior”, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 52-2, (2010), pp.266-276.
- (2) 高橋順一, 山本敏治, 志澤一之, “広ひずみ速度域に対応したクレーズ挙動のモデル化とその結晶性ポリマの破壊予測シミュレーションへの応用”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 79, No. 800 (2013), pp.380-394.

### 国際会議発表

- (1) Takahashi, J., Yamamoto, T. and Shizawa, K., “A 3D-Simulation for Fracture Prediction of Ductile Polymer Based on Accumulation of Craze Using a Commercial FEM Solver”, *Abstracts of APCOM'07-EPMESEC XI*, (2007), pp.327.
- (2) Takahashi, J., Yamamoto, T. and Shizawa, K., “A Simulation for Fracture Prediction Based on Craze Behavior of Crystalline Polymer in High Strain Rates”, *Proceedings of the SPE ASIATEC 2011*, (2011), Paper No. asiatec201101.
- (3) Takahashi, J., Yamamoto, T. and Shizawa, K., “A Model of Craze Evolution Covering Wide Range of Strain Rate and Its Simulation for Ductile Fracture of Crystalline Polymer”, *The 5th International Symposium on Designing, Processing and Properties of Advanced Engineering Materials (ISAEM-2012)*, (2012), pp.39.

### 国内学会発表

- (1) 高橋順一, 山本敏治, 志澤一之, “汎用ソルバによるクレーズ挙動を考慮したポリマの破壊予測 3D シミュレーション”, 日本機械学会第 19 回計算力学講演会講演論文集, (2006), pp.391-392.
- (2) 高橋順一, 山本敏治, 志澤一之, “2 次くびれを伴う PP 材の硬化則と汎用ソルバによるクレーズ進展の 3D-FEM 解析”, 日本機械学会第 20 回計算力学講演会講演論文集, (2007), pp. 211-212.
- (3) 三根啓吾, 大森崇裕, 高橋順一, 志澤一之, “結晶性ポリマのクレーズ進展に基づく高ひずみ速度領域における破断予測シミュレーション”, 日本機械学会第 22 回計算力学講演会, (2009), pp.631-632.
- (4) 三根啓吾, 大森崇裕, 高橋順一, 志澤一之, “結晶性ポリマのクレーズ進展に基づく高ひずみ速度領域における破断予測シミュレーション”, 日本学術会議第 59 回理論応用力学連合講演会講演論文集, (2010), pp.255-256.
- (5) 能條和成, 三根啓吾, 高橋順一, 志澤一之, “結晶性ポリマにおける除荷時の非線形ひずみ回復を考慮した大変形 FEM 解析”, 日本機械学会第 24 回計算力学講演会論文集, (2011), pp.168-169.
- (6) 中村亮介, 能條和成, 高橋順一, 志澤一之, “結晶性ポリマにおける除荷時の非線形ひずみ回復を考慮した非共軸弾粘塑性構成式のモデリング”, 日本機械学会第 25 回計算力学講演会論文集, (2012), pp.668-669.



補足 A  
(第1章の補足)

## A.1 ポリマ

多くの化合物の分子量が 500 以下であるのに対して、分子量が 10 000 以上の分子を高分子または巨大分子と呼び、その化合物を高分子化合物という。高分子化合物は、その組織や分子構造により有機高分子化合物および無機高分子化合物、あるいは天然高分子化合物および合成高分子化合物に分類される。綿、絹、天然ゴム、木材は天然有機高分子であり、石英やガラスは無機天然高分子に属する<sup>(1.1)</sup>。天然高分子化合物の分子は、小さな構成単位が繰り返し多数結合した構造をしており、合成高分子化合物は 1 種類またはそれ以上の種類の小さな高分子を多数結合させて作られている。この小さな分子を単量体またはモノマという。ポリマとは、モノマが次々に結合する反応である重合により生成する高分子のことであり、重合体とも呼ばれる。モノマ単位の繰り返し数を重合度といい、重合度から分子量が決定される。付加重合では、モノマの炭素原子間の二重結合が開いて付加し、長い鎖ができあがる。一方で縮合重合は、2 つ以上のモノマ種を含む逐次分子間化学反応による高分子の形成のことであり、通常水のような副生成物が生じる<sup>(1.2)</sup>。

## A.2 ポリマの特徴

ポリマは、石油を原料として安価に製造でき、軽量でかつ成形性、透明性、電気絶縁性、吸音性などに富み、他材料にない有用な性質をもつため、日常生活に不可欠な材料として広く用いられている。型成形法はプラスチックの成形において最も一般的な方法であり、射出成形、押出成形、ブロー成形、圧縮成形などがある。熱可塑性材料を成形するのに最も広く用いられている射出成形は、1 サイクルが数十秒間で成形完了するため、量産成形が可能である<sup>(1.2)</sup>。またポリマは、優れた光学特性を有するものもあり、透明ではあるが比重の大きいガラスの代替材として利用されることも多い。光透過性が重要となる用途では PS(ポリスチレン)や PMMA(ポリメタクリル酸メチル)が用いられることが多い。一方で、電気絶縁性を利用してプリント基板にもポリマは利用されている。これは、ポリマの分子結合は共有結合であるため、金属結合のように電子が自由に移動しないため、電気を伝えにくいからである。ところで、ポリマに導電性を付与することも可能であり、導電性フィラーを混合充填する手法により得られる導電性ポリマは、静電気・電磁波防止シート、太陽電池、タッチパネルなどに利用されている。エラストマあるいは発泡材ポリマは高い吸音性を有するため、防音材に用いられる。

## A.3 熱可塑性ポリマ

熱可塑性ポリマは、線状の分子により構成されているため、ガラス転移温度以上の温度では延性を示すようになり、様々な形に成形できる。一方でガラス転移温度以下では脆性的になる。このように可逆的な変化を生じるのは、温度変化によって分子構造が化学的な変化を起こさず、物理的にのみ変化するためである。より過酷な熱的・力学的条件で用いられるエンジニアリングプラスチックの多くは熱可塑性ポリマである。エンジニアリングプラスチックとは、一般に 100°C 以上でも強度を失わないプラスチックの総称であり<sup>(付1)</sup>、自動車の軽量化に大きく寄与している。また、150°C 以上でも強度を失わないものはスーパーエンプラと呼ばれる。

## A.4 熱硬化性ポリマ

熱硬化性ポリマの成形品は、モノマ、プレポリマ、オリゴマなどと呼ばれるポリマよりも分子量の小さい化合物を原料として、金型中で重合反応を生じさせて完成させる。このように成形と同時に高分子化が起るため、重合反応は隣同士のモノマだけでなく上にも下にも進展し、立体的網目状構造が生じる。このような構造だと、加熱しても分子が自由に動き回ることができない。このため、熱硬化性ポリマは耐熱性が高い<sup>(付2)</sup>。したがって、熱硬化性ポリマではいったん網目状に高分子構造が結合されると、再び過熱しても軟らかくならない非可逆変化を示す。これは、分子構造変化、すなわち化学変化が生じたためである。熱硬化性ポリマの例として、フェノール樹脂、アミノ樹脂、エポキシ樹脂が挙げられ、一般に硬くて耐熱性が良いことから食器、電気機器などの家庭用途から化学プロセスにおける防食用ライニング材のような産業用途まで、幅広く用いられている。

## A.5 ポリプロピレンの分類と分析

ポリプロピレンをタクチシティーにより分類すれば、iPP (isotactic polypropylene), sPP (syndiotactic polypropylene) および aPP (atactic polypropylene) のように分けられる。タクチシティーとは立体規則性のことであり、FTIR (Fourier Transform Infrared Spectroscopy : フーリエ変換赤外分光法) 等により同定可能である。また、タクチシティーはポリマの結晶化度に影響を与える。結晶化度はガラス転移点とともに DSC (Differential scanning calorimeter : 示差走査熱量測定) により分析が可能な量であり、球晶は偏光顕微鏡により観察できる。なお、ポリマの分子量は GPC (Gel Permeation Chromatography : ゲル浸透クロマトグラフィー) により測定が可能である。一般に入手可能な PP 系ポリマの製品を検討の対象とする場合、立体規則性やガラス転移点などの物理量を調査して PP 系ポリマの正体を知る必要があれば、上述の方法で各物理量を測定すればよい。

## A.6 破断と破壊

本論文では、試験片が切断され分離する様子を「破断」、試験片以外の一般的な構造物が壊れる様子を「破壊」と表現している。クレーズもミクロスケールにおいては破壊の一種であるものの、本論文ではマクロスケールにおける破壊予測を対象としているため、クレーズの形成は破壊とは呼ばない。

## A.7 再結晶温度

加工硬化した金属あるいは合金を加熱すると軟化して加工前の状態に戻る。これは、変形した結晶粒の内部あるいは粒界において加熱により新しい結晶の核が生じ、時間とともに成長して新しい結晶粒が形成されることで起る。このような現象を再結晶という。再結晶の開始する温度を再結晶温度といい、軟鋼の再結晶温度は約 500°C である<sup>(付3)</sup>。一般に金属材料について熱間あるいは冷間とは、その材料の再結晶温度を基準として、それより上あるいは下の温度領域をいう。

## A.8 クレーズの消滅

クレーズに分子鎖が充填されることでクレーズが消滅するという報告は見られないが、sPPについては、変形により発生したクレーズが、更なる変形途上でラメラの分離・屈曲にともない消失<sup>(付4)</sup>することは報告されている。ただし、一度発生したiPPのクレーズは消失しない。



補足 B  
(第2章の補足)

## B.1 第1中間配置

第1中間配置は、弾性除荷された配置で、永久変形によるひずみは残されており、応力開放配置ともよばれる。

## B.2 極分解

任意の正則なテンソルは、直交テンソル  $\mathbf{R}$  と正の対称テンソル  $\mathbf{U}$  あるいは  $\mathbf{V}$  の積に一意に分解でき、この分解を極分解と呼ぶ。ここで、 $\mathbf{R}\mathbf{U}$  および  $\mathbf{V}\mathbf{R}$  への分解は、それぞれ右極分解、左極分解とよばれる。

## B.3 客観速度

ここでは式(2.3)の導出過程を示す。まず、 $\mathbf{A}_{(m)} = \dot{\boldsymbol{\chi}}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\chi}$  の両辺で物質時間微分をとれば、次のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}}_{(m)} &= \dot{\boldsymbol{\chi}}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\chi} + \boldsymbol{\chi}^T \dot{\mathbf{A}} \boldsymbol{\chi} + \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\chi}} \\ &= \boldsymbol{\chi}^T \boldsymbol{\chi} \dot{\boldsymbol{\chi}}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\chi} + \boldsymbol{\chi}^T \dot{\mathbf{A}} \boldsymbol{\chi} + \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\chi} \dot{\boldsymbol{\chi}}^T \boldsymbol{\chi} \\ &= \boldsymbol{\chi}^T \left( \boldsymbol{\chi} \dot{\boldsymbol{\chi}}^T \mathbf{A} + \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{A} \boldsymbol{\chi} \dot{\boldsymbol{\chi}}^T \right) \boldsymbol{\chi} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

ここで、 $\boldsymbol{\chi} \boldsymbol{\chi}^T = \mathbf{I}$  なので、 $\boldsymbol{\chi} \dot{\boldsymbol{\chi}}^T + \dot{\boldsymbol{\chi}} \boldsymbol{\chi}^T = \mathbf{0}$  であることから、

$$\boldsymbol{\chi} \dot{\boldsymbol{\chi}}^T = -\dot{\boldsymbol{\chi}} \boldsymbol{\chi}^T = -\boldsymbol{\Omega} \quad (\text{B.2})$$

となる。式(B.2)を式(B.1)に代入すれば、次のように式(2.3)を得る。

$$\dot{\mathbf{A}}_{(m)} = \dot{\boldsymbol{\chi}}^T \left( -\boldsymbol{\Omega} \mathbf{A} + \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{A} \boldsymbol{\Omega} \right) \boldsymbol{\chi} = \dot{\boldsymbol{\chi}}^T \overset{\nabla}{\mathbf{A}} \boldsymbol{\chi}$$

## B.4 損傷配置と擬似無損傷配置における応力と弾性率の関係

ここでは、式(2.6)の導出過程を示す。損傷が存在する観察面に  $F$  という力をかければ、損傷配置における応力は、

$$\sigma^* = \frac{F}{S^*} = \frac{F}{(1-\omega)S} = \frac{\sigma}{(1-\omega)} \quad (\text{B.3})$$

のように擬似無損傷配置の応力と関係づけられる。なお、 $\sigma = F/S$  を用いている。さらに、擬似無損傷配置における弾性ひずみを  $\varepsilon^e$ 、損傷配置における弾性ひずみを  $\varepsilon^{e*}$  とすれば、次のように表現できる。

$$\varepsilon^e = \frac{\sigma}{E} \quad (\text{B.4})$$

$$\varepsilon^{e*} = \frac{\sigma^*}{E_0} = \frac{\sigma}{(1-\omega)E_0} \quad (\text{B.5})$$

擬似無損傷配置の弾性ひずみと損傷配置の弾性ひずみとは等しいという Lemaitre のひずみ等価配置の考えに基づけば、式(B.4)と式(B.5)の右辺は等しくなり、 $\sigma/E = \sigma/(1-\omega)E_0$  となることから次式を得る。

$$E = (1-\omega)E_0 \quad (\text{B.6})$$

補足 C  
(第3章の補足)

## C.1 内力のなす仮想仕事率に関する変形

ここでは、式(3.11) の計算過程を詳細に示す。式(3.10) おける仮想変形速度  $\check{\mathbf{D}}$  は、速度こう配  $\mathbf{L}$  の対称部分の仮想量であるから、次のように置き換えることができる。

$$\check{\mathbf{D}} = \check{\mathbf{L}} - \check{\mathbf{W}} \quad (\text{C.1})$$

また、仮想速度こう配  $\check{\mathbf{L}}$  およびその反対称テンソル  $\check{\mathbf{W}}$  は次のように表せる。

$$\left. \begin{aligned} \check{\mathbf{L}} &= \text{grad} \check{\mathbf{v}} \\ \check{\mathbf{W}} &= \mathbf{I} \times \check{\mathbf{w}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.2})$$

式(C.1)および式(C.2)を式(3.10)に代入すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{P}} &= \mathbf{T} \cdot \check{\mathbf{D}} \\ &= \mathbf{T} \cdot (\check{\mathbf{L}} - \check{\mathbf{W}}) \\ &= \mathbf{T} \cdot (\text{grad} \check{\mathbf{v}} - \mathbf{I} \times \check{\mathbf{w}}) \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

ここで、次の指標表示から得る、2つの関係式を利用する。

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \text{grad} \check{\mathbf{v}} &\rightarrow T_{ij} \check{v}_{i,j} = (T_{ij} \check{v}_i)_{,j} - T_{ij,j} \check{v}_i \\ &\rightarrow \text{div}(\mathbf{T}^T \check{\mathbf{v}}) - (\text{div} \mathbf{T}) \cdot \check{\mathbf{v}} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot (\mathbf{I} \times \check{\mathbf{w}}) &\rightarrow T_{ij} e_{jkl} \delta_{ik} \check{w}_l = e_{jkl} T_{ij} \delta_{ik} \check{w}_l \\ &= e_{ijk} \delta_{ki} T_{ij} \check{w}_l \\ &= e_{ijk} T_{kj} \check{w}_l \\ &\rightarrow (\mathbf{e} \cdot \mathbf{T}) \cdot \check{\mathbf{w}} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

式(C.4)、(C.5) を式(C.3) に代入して式(3.11) を得る。

## 補足 D

(第4章の補足)

## D.1 構成式

構成式とは、物質特性を表す関係式のことであり、熱力学的に共役な量である応力とひずみ、または熱流束と温度こう配、あるいは磁束密度と磁場などの間で成立する関係式のことを指す。構成式の研究では現象の原因を微視的な材料の構造に求めつつも、巨視的に測定しうる量の間関係の定式化を追及する<sup>(4,11)</sup>。構成式の形を数理的に決定していくための基礎として、Truesdell-Nollによる有理連続体力学の中で提唱された次の3つの原理(1), (2)および(3)と、連続体力学における熱・力学的理論体系からの原理(4)および(5)が知られている。

- (1) 応力決定の原理(Principle of determinism for stress) : 物体中の応力は物体の運動履歴によって決定される。
- (2) 局所作用の原理(Principle of local action) : 物質点の応力の決定においては、その点の近傍の運動のみが関与し、その外の物質点の運動は無視できる。
- (3) 物質客観性の原理(Principle of material objectivity or principle of material frame indifference) : 構成式は観測者すなわち標構の違いに依存しない。この原理は標構無差別性の原理とも呼ばれる。
- (4) エントロピー増大則(Principle of increase of entropy) : 構成式の可逆部分(または保存部分)はエントロピーが常に増大するように決定される。
- (5) 最大散逸速度の原理(Principle of maximal entropy production rate) : 構成式の非可逆部分(または散逸部分)は内部エントロピー生成速度が最大になるように決定される。

補足 E  
(第5章の補足)

## E.1 レベル応力

レベル応力(水平応力)の仮定とは、小林・岡田による硬化データの作成方法の一つであり、くびれが伝ばする段階において、真応力を一定とする仮定である。すなわち、真応力-真ひずみ線図における一定応力の開始点と後続硬化の開始点を定め、その間の応力を公称ひずみから体積一定則により変換された真応力を参照せずに一定とする。図 5.2 においても、初期降伏後の応力は、相当塑性ひずみ 0.175 までは一定になっていることがわかる。



補足 F  
(第6章の補足)

## F.1 クレーズ密度の体積分率と面積分率

ここでは、クレーズの体積分率 $\hat{\omega}$ と面積分率 $\omega$ の関係を、図F.2に示すようなボイド状の損傷を有する立方体モデルを用いて考察する。一辺 $L'$ の立方体の中心に半径 $r'$ の球形ボイドが1個存在する場合、損傷の体積分率 $\omega_v$ は次式にて表される。

$$\omega_v = \frac{4\pi}{3} \left( \frac{r'}{L'} \right)^3 \quad (\text{F.1})$$

一方で、球の大円を含む面で切断したとき、正方形の中に円孔ボイドが存在することになるが、その損傷の面積分率 $\omega_a$ は

$$\omega_a = \pi \left( \frac{r'}{L'} \right)^2 \quad (\text{F.2})$$

となる。式(F.2)を $\frac{r'}{L'}$ について解いて式(F.1)に代入すれば、

$$\omega_v = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \omega_a^{3/2} \quad (\text{F.3})$$

を得る。次に、球形を一般化することを目的として3軸の長さが $2a'$ 、 $2b'$ および $2c'$ である楕円体状ボイド(図F.3)に置き換えれば、 $\omega_v$ および $\omega_a$ は次のように表現できる。

$$\omega_v = \frac{4\pi}{3} \frac{a'b'c'}{L'^3} \quad (\text{F.4})$$

$$\omega_a = \frac{\pi a'b'}{L'^2} \quad (\text{F.5})$$

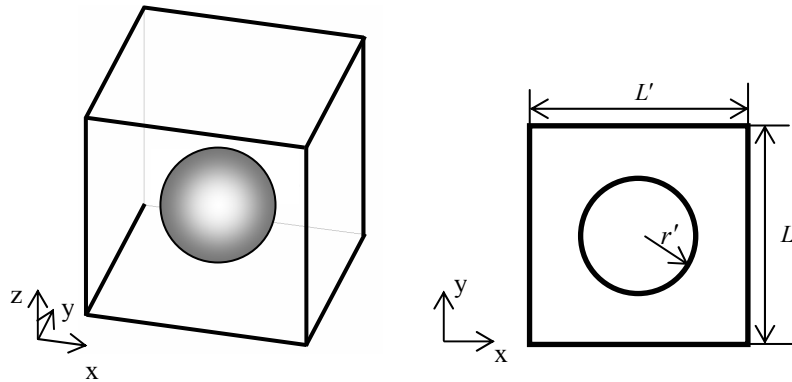


Fig. F.2 Shape of craze modeled as sphere

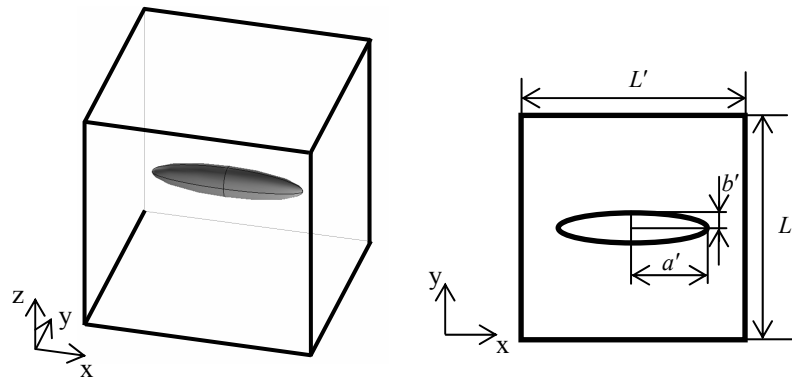


Fig. F.3 Shape of craze modeled as ellipsoid

式(F.4)と式(F.5)から  $L'$  を消去すれば,  $\omega_v$  と  $\omega_a$  の関係が次のように得られる.

$$\omega_v = \frac{4c'}{3\sqrt{\pi a'b'}} \omega_a^{3/2} \quad (\text{F.6})$$

ここで, 式(F.6)において  $a' = b' = c' = r'$  のときには, 式(F.6)は式(F.3)に帰着する. よって,  $\omega_v$  と  $\omega_a$  の関係は次の形で表現することができる.

$$\omega_v = \xi \omega_a^{3/2} \quad (\text{F.7})$$

なお, ボイド形状が球形の場合  $\xi = 0.75$  となり,  $a' = 50b'$  かつ  $b' = c'$  のときには  $\xi = 0.1$ ,  $a' = 1000b'$  かつ  $b' = c'$  のときには  $\xi = 0.024$  となる.

クレーズは細長い楕円体とみなせるため, 本研究では, クレーズの体積分率  $\hat{\omega}$  と面積分率  $\omega$  を次のように関係づけることとする.

$$\hat{\omega} = \xi \omega^{3/2} \quad (\text{F.8})$$

ここで, 本論文では簡単のため  $\xi = 1$  としており, 面積分率としてのクレーズ密度の値は, 体積分率のその値と表 F.1 に示す関係にある.

Table F.1 Relationship between area and volume fractions of craze

Area fraction $\omega$	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
Volume fraction $\hat{\omega}$	0.001	0.011	0.032	0.089	0.16	0.25	0.35

## F.2 従来のクレーズ発展式の不安定性

小林ら<sup>(1.82)</sup>によるクレーズ発展式は, 簡単のためクレーズの等方成長項を省略すれば, 次のように表現できる.

$$\dot{\hat{\omega}} = C_{pr} \frac{\ddot{\hat{\epsilon}}^p}{\hat{\epsilon}^p} \quad (\text{F.9})$$

上式の形を見れば,  $\dot{\hat{\omega}}$  が相当塑性ひずみ速度  $\dot{\hat{\epsilon}}^p$  に反比例し, 正負両方の値をとりうる相当塑性加速度  $\ddot{\hat{\epsilon}}^p$  に比例していることがわかる. 仮に  $\ddot{\hat{\epsilon}}^p$  が正の一定値をとるならば,  $\dot{\hat{\omega}}$  は  $\dot{\hat{\epsilon}}^p$  が小さいほど大きくなる. しかし,  $\ddot{\hat{\epsilon}}^p$  は刻一刻と変化するうえ正負両方の値をとりうるため, このような単純化はできない. 実際には,  $\dot{\hat{\epsilon}}^p$  が小さく零に近い速度域では, 大きな値をとる傾向のある  $\dot{\hat{\omega}}$  の正負が反転しやすくなる. このため, 計算が不安定化する. これに対して本論文で提案しているクレーズ発展式は, クレーズの発生・伝ば項で  $\ddot{\hat{\epsilon}}^p$  を用いずに  $\dot{\hat{\epsilon}}^p$  に比例する形で表現されており, また従来のモデルで分母に存在した  $\hat{\epsilon}^p$  の効果が発展式の係数部分に組み込まれる形で考慮されている. この点で従来の発展式とは大きく異なっている.



# 補足 G

## (第7章の補足)

## G.1 つかみ具の速度

準静的な引張試験装置ではネジ式の昇降装置が用いられており、つかみ具と昇降装置が締結された状態で実験が開始される。したがって、つかみ具の静止状態から所定の速度に達するまでの時間ではつかみ具の速度は上昇しており、一定の速度とはいえない。しかしながら低速の場合は、つかみ具速度が一定でない時間はきわめて短いため、ほとんど問題にならない。例えば、設定速度 600 mm/min を与えるために 0.1 s かかったとしても、その間のチャックの移動距離は数 mm であるため、チャックの締め付けのガタ程度の誤差となる。しかし、1 m/s 程度の高速をチャックに与える場合には誤差と見過ごせなくなる。なぜなら、0.1 s で数十 cm チャックが進んでしまうためであり、チャック速度を所定の速度に上げるまでに試験片が破断してしまう。そこで、空走距離をもつピストン(図 G.1(a))に油圧により瞬時に高速変位を与えて加速し(図 G.1(b))、このピストンとつかみ具ユニットを適切な方法で接触させ(図 G.1(c))、つかみ具ユニットに瞬時に所定速度を与える手法がとられる。このとき、つかみ具をチタン製にするなどしてつかみ具ユニットは軽量化されているものの、ピストンとつかみ具ユニットの接触時にロードセルに共振荷重によるノイズが入ることが多いので、データ評価には注意が必要になる。

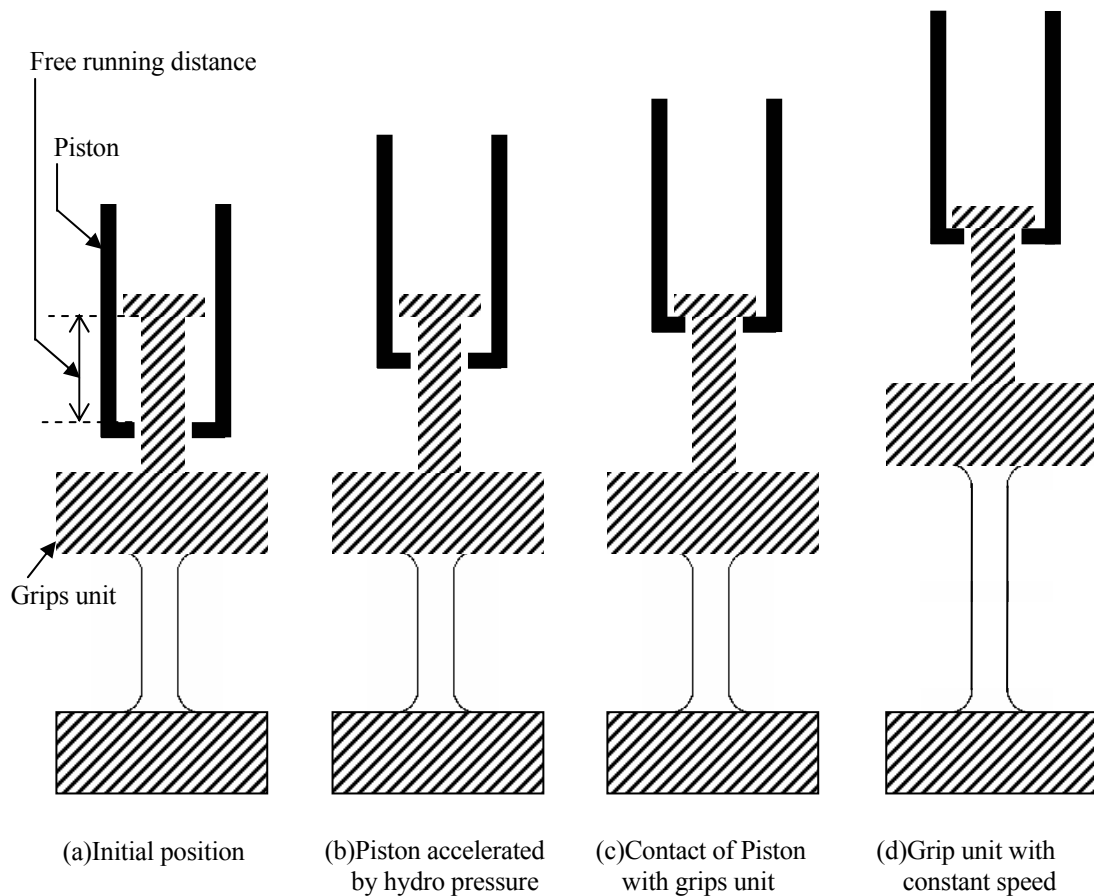


Fig.G.1 Mechanism of grips with high speed tensile test

# 補足 H

## (第8章の補足)

## H.1 本材料モデルが利用可能な要素

本論文では、材料モデルの評価を目的としているため、平面応力状態を仮定したシェル要素を用いずに、8 節点 6 面体ソリッド要素(eight node hexahedral brick element)に選択低減積分を施して解析に利用している。ただし、本材料モデルを利用したシェル要素や SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics)要素による大変形解析が可能であることは、別途実施した商用 FEM プログラムによる解析で確認済みである。

## H.2 単軸引張試験における 2 次くびれの再現シミュレーション

### H.2.1 シミュレーションの目的

結晶性ポリマでは、せん断帯状の高ひずみ速度領域の伝ばに伴って高クレーズ密度領域が伝ばし、さらに2次くびれが発生・伝ばする場合がある。ここでは、まず2次くびれを表現できる硬化則を示し、それをクレーズ依存性構成則とともに汎用ソルバRADIOSSに組み込んでPP材の引張問題に対する3D-FEM解析を実施し、クレーズ挙動に基づく破断予測を試みる

### H.2.2 材料モデル

クレーズの影響を含む非共軸弾粘塑性構成式には式(4.91)および式(4.92)を、クレーズ発生条件式には式(6.12)および式(6.13)を用いる。クレーズ発展式には式(6.9)の形を用いるが、クレーズの進展割合を表現する関数  $f(\bar{\varepsilon}^p, \dot{\varepsilon}^p)$  には次式を利用する。

$$\left. \begin{aligned} f(\bar{\varepsilon}^p, \dot{\varepsilon}^p) &= f_1(\dot{\varepsilon}^p) f_2(\bar{\varepsilon}^p) \\ f_1(\dot{\varepsilon}^p) &= D_{11} \dot{\varepsilon}^p \quad (0 < D_{11} < 1) \\ f_2(\bar{\varepsilon}^p) &= 0.5 \left[ 1 + \tanh \left\{ -D_{12} (\bar{\varepsilon}^p - \varepsilon_c) \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{H.1})$$

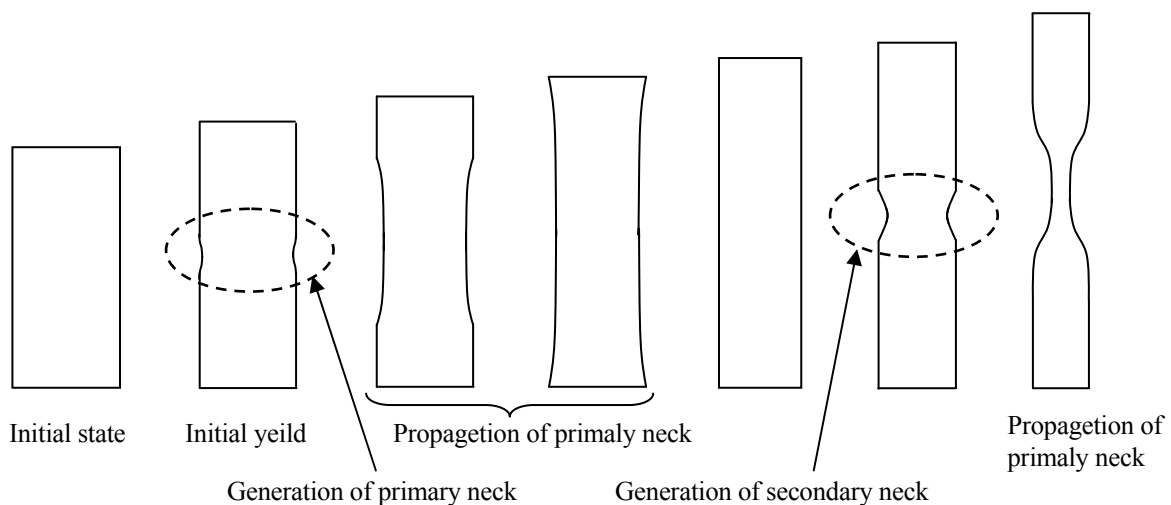


Fig. H.1 Schematic process of generation of secondary neck



ここで、 $D_{11}$  および  $D_{12}$  は無次元係数で、 $\varepsilon_c$  は成長停止ひずみ値(再硬化値)である。面積分率としてのクレーズ  $\omega$  と体積分率としてのクレーズ密度  $\hat{\omega}$  の関係式  $\hat{\omega} = \xi \omega^{3/2}$  における係数は、簡単のため  $\xi = 1$  を選ぶ。関数  $f_1$  はクレーズの進展が低ひずみ速度ほど大きいというひずみ速度依存性を表現し、 $f_2$  は分子鎖配向領域ではクレーズの成長が停止するという特徴を式(6.7)と同じ形で表現している。

なお、クレーズ等方成長項の塑性平均垂直ひずみ  $\varepsilon_m^p$  に対する発展式には次式を用いる。

$$\dot{\varepsilon}_m^p = \left\{ q_1 \omega \cosh \left( \frac{(q_2 \omega + q_3) \sigma_m}{\sigma_y} \right) \right\} \tag{H.2}$$

ここで  $\sigma_y$  は降伏応力、 $q_1$ 、 $q_2$  および  $q_3$  は材料定数である。

### H.2.3 PP を対象とした単軸引張試験

次に、材料試験協会 ASTM の規格 D1708 に基づく形状の引張試験片を、厚さ 2 mm の PP シートから機械加工により製作し、PP 材の単軸引張試験を実施する。試験片形状を図 H.2 に示す。単軸引張試験は、初期チャック間距離  $L_0$  を 22 mm として、チャック速度  $\dot{U}$  に 220 mm/s、22 mm/s、5.5 mm/s の 3 種類を選ぶ。ひずみ速度を  $\dot{U}/L_0$  により概算すれば、各チャック速度はそれぞれ、ひずみ速度  $10 \text{ s}^{-1}$ 、 $1 \text{ s}^{-1}$ 、 $0.25 \text{ s}^{-1}$  に相当する。得られた公称応力  $\sigma_n$  と公称ひずみ  $\varepsilon_n$  との関係を図 H.3 に示す。いずれの引張速度においても、初期降伏後にひずみの増加に伴い公称応力が低下する傾向が認められるが、このとき 1 次くびれが発生すると考えられる。また、ひずみ速度  $1 \text{ s}^{-1}$  および  $0.25 \text{ s}^{-1}$  については、公称ひずみ 0.5 付近で応力低下の傾きが大きくなる。

ここで、図 H.4(B) に示すひずみ速度  $1 \text{ s}^{-1}$  の破断後試験片を見れば、この 2 段階目の応力低下時に 2 次くびれが発生することがわかる。さらに図 H.4(C) に示すひずみ速度  $0.25 \text{ s}^{-1}$  の試験片を見れば、2 次くびれ発生後くびれが安定的に伝播することがわかる。

### H.2.4 2 次くびれを伴う PP の硬化則

流れ応力を同定するために、 $\sigma_t = \sigma_n(1 + \varepsilon_n)$  および  $\varepsilon_t = \ln(1 + \varepsilon_n)$  を用いて、公称応力-公称ひずみ関係を、真応力  $\sigma_t$ -真ひずみ  $\varepsilon_t$  関係に変換する。得られた真応力-真ひずみ関係から、新たな流れ応力  $g(\bar{\varepsilon}^p)$

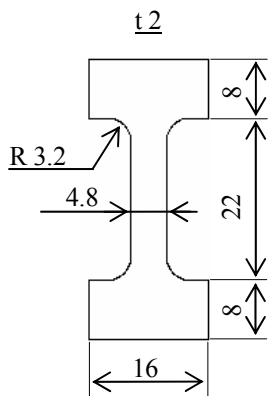


Fig.H.2 Microtensile specimen

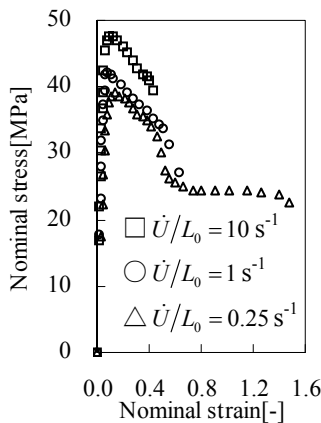
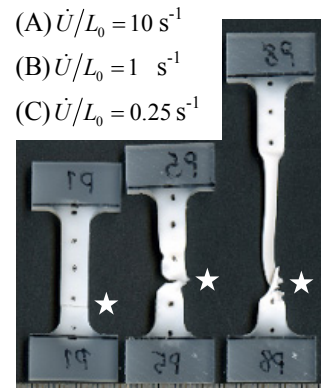


Fig.H.3 Experimental results



(A)  $\dot{U}/L_0 = 10 \text{ s}^{-1}$   
 (B)  $\dot{U}/L_0 = 1 \text{ s}^{-1}$   
 (C)  $\dot{U}/L_0 = 0.25 \text{ s}^{-1}$   
 ☆: Break Position  
 Fig.H.4 Broken specimens

の関数形を決定すれば、式(H.3)および式(H.4)のような硬化則を得る.

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\varepsilon}_r \left| \frac{\bar{\sigma}}{g(\bar{\varepsilon}^p)} \right|^{1/m} \quad (\text{H.3})$$

$$\left. \begin{aligned} g(\bar{\varepsilon}^p) &= \sigma_r \left\{ \tanh(k_1 \bar{\varepsilon}^p) + k_2 + k_4 \bar{\varepsilon}^p \right\} & [\bar{\varepsilon}^p < \varepsilon_{r2}] \\ g(\bar{\varepsilon}^p) &= \sigma_r \left\{ \tanh(k_1 \bar{\varepsilon}^p) + k_2 + k_4 \bar{\varepsilon}^p - k_5 (\bar{\varepsilon}^p - \varepsilon_{r2}) \right\} & [\varepsilon_{r2} \leq \bar{\varepsilon}^p \leq \varepsilon_r] \\ g(\bar{\varepsilon}^p) &= \sigma_r \left\{ \tanh(k_1 \bar{\varepsilon}^p) + k_2 + k_4 \bar{\varepsilon}^p - k_5 (\varepsilon_r - \varepsilon_{r2}) + k_3 (\exp \bar{\varepsilon}^p - \exp \varepsilon_r) \right\} & [\bar{\varepsilon}^p > \varepsilon_r] \end{aligned} \right\} \quad (\text{H.4})$$

ここで  $\dot{\varepsilon}_r$  は参照ひずみ速度,  $\varepsilon_r$  は再硬化ひずみ,  $m$  はひずみ速度感度指数,  $\sigma_r$  は参照応力であり, 同定された各定数はそれぞれ,  $\dot{\varepsilon}_r = 0.25 \text{ s}^{-1}$ ,  $m = 0.05$ ,  $\sigma_r = 15.5 \text{ Mpa}$ ,  $\varepsilon_r = 0.45$ ,  $\varepsilon_{r2} = 0.33$ ,  $k_1 = 30$ ,  $k_2 = 1.7$ ,  $k_3 = 1.5$ ,  $k_4 = 1.3$  および  $k_5 = 4.5$  である. 実験データと, 同定された硬化則とを真応力-真ひずみ関係で比較して図 H.5 に示す. 式(H.4)<sub>1</sub> の  $k_4 \bar{\varepsilon}^p$  の項は初期降伏後の真応力の緩やかな増加を表現しており, 式(H.4)<sub>2</sub> の  $-k_5 (\bar{\varepsilon}^p - \varepsilon_{r2})$  の項は 2 次くびれ発生時の応力低下を表現している. なお, 流れ応力のひずみ速度依存性は式(H.3)の指数則で, 2 次くびれ発生後の再硬化は式(H.4)<sub>3</sub> の  $k_3 (\exp \bar{\varepsilon}^p - \exp \varepsilon_r)$  を用いて表現している.

## H.2.5 FEM 解析および検討

H1.2 にて示した材料モデルを, ユーザーサブルーチンを通じて RADIOSS に組み込み, PP 材の引張問題に対する 3D-FEM 解析を実施する. なお式(6.9), (H.1)および式(H.2)における材料定数を  $A = 0.5$ ,  $B = 10^{-6}$ ,  $D_1 = 0.8$ ,  $D_2 = 100$ ,  $\varepsilon_c = 0.6$ ,  $A_1 = 2.5$ ,  $B_1 = 540$ ,  $C_1 = 0$ ,  $q_1 = 0.018$ ,  $q_2 = 0$  および  $q_3 = 1.5$  とする. 解析モデルは, 引張試験片平行部のみを対象とした 1/8 モデルとし, 変形の対称性を仮定する. 要素分割は幅方向に 16 分割, 長手方向に 48 分割, 厚さ方向に 4 分割とし, 1 点積分 3D ソリッド要素を用いる. 板幅方向には Tvergaard らによる初期不整を与え, 引張端部をせん断自由として強制速度  $\dot{U}$  を与える.

解析で得られた荷重  $W$  と変位  $U$  の関係を公称応力-公称ひずみ関係に変換し, 3 種類のひずみ速度に対して実験と比較した結果を図 H.6 に示す. ただし本解析では, 式(H.4)の定数  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_{r2}$  および  $k_5$  をそれ

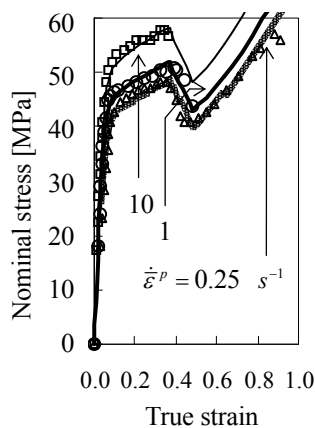


Fig.H.5 Identified hardening

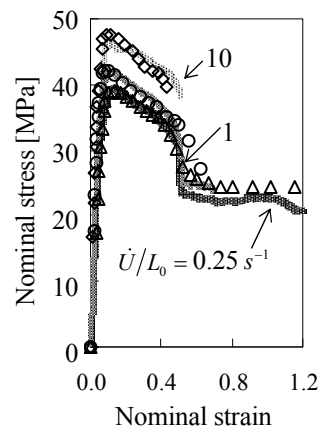


Fig.H.6 FE simulation results

ぞれ 0.75, 0.55 および 3.5 に変更してある. いずれのひずみ速度においても初期降伏後の公称応力の低下が再現されており, やや傾きが急であるものの 2 次的な応力低下もよく再現されている.

また,  $\dot{U}/L_0$  が  $1\text{ s}^{-1}$  および  $0.25\text{ s}^{-1}$  の場合のクレーズ分布ならびに相当塑性ひずみ速度分布を図 H.7 に示す. 図 H.7(A)の  $U/L_0 = 0.4$  における変形を見ると, この変位までは極めて小さな 1 次くびれが平行部全体に伝ばしたと考えられる.  $U/L_0 = 0.4$  以降では, いずれの速度条件でも 2 次くびれが発生し, 2 次くびれが高ひずみ速度領域の伝ばに伴い伝ばすることが再現されている. さらに, 高クレーズ密度領域が実験の破断部位と一致している. 以上の検討を通じて, 本材料モデルによるシミュレーションは 2 次くびれの挙動を再現できることが確認された. ただし, 実応力がフィブリン強度を越えることに基づく破断予測まで至っておらず, 今後の課題としたい.

### H.3 公称応力-公称ひずみ関係におけるクレーズ考慮の影響について

小林ら<sup>(1.82)</sup>は, 解析でクレーズを考慮した場合と, 考慮しない場合とで応力-ひずみ図 H.8 のように比較しており, クレーズを考慮した場合には降伏後の下に凸の曲率がよく再現できることを報告している.

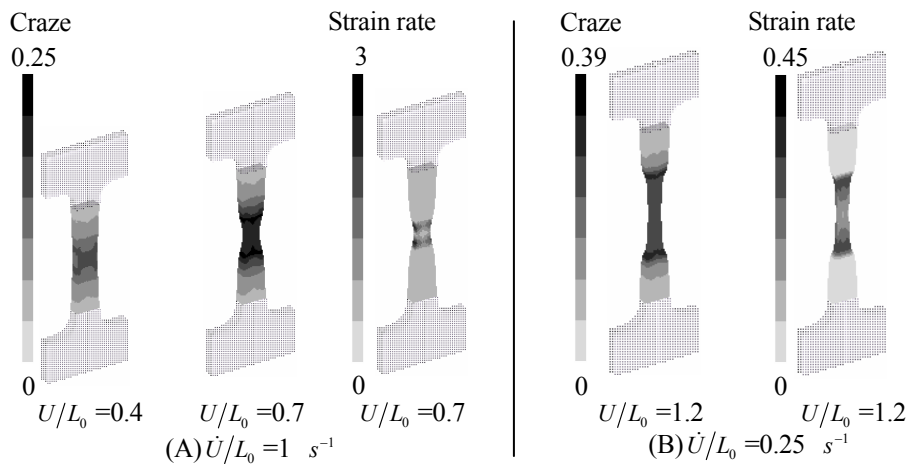


Fig. H.7 Distribution of craze and strain rate

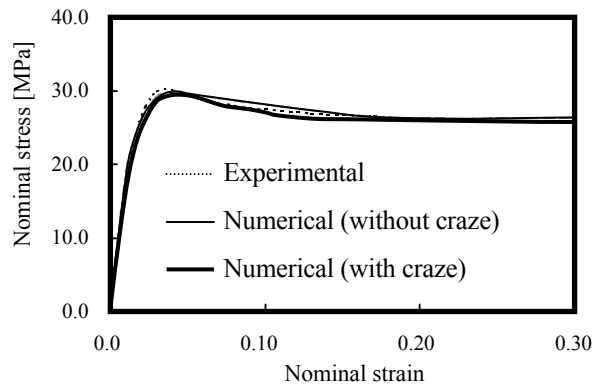


Fig. H.8 Nominal stress versus nominal strain curves of experimental result and numerical results with and without craze effects<sup>(1.82)</sup>

## H.4 破断予測と破壊過程の再現

本論文では、実応力がフィブリル強度を越えることに基づき予測される破断部位を表示しているが、実応力がフィブリル強度を超えた要素を削除したり、このような要素とその回りの要素との共有節点を分離する手法を用いれば、ポリマ製品に生じる破壊過程を再現することも可能である。

## H.5 低ひずみ速度側の実験データ

本論文にて参照している Brostow-Corneliusen の著書には、どのような PP を対象としているのか、どのような条件における引張試験かについて詳細な記載は見られない。PP としては破断ひずみが小さいものの、本論文では、文献の実験が破断まで実行されたものとみなして参考としている。

## H.6 破断ひずみのひずみ速度依存性

Brostow-Corneliusen あるいは小林・岡田による PP の引張試験データでは、破断ひずみがひずみ速度が低いほど小さい傾向が認められる。これらの低ひずみ速度側で破断ひずみが小さい PP 系ポリマを著しい高ひずみ速度域で実験した場合を予想すれば、中程度のひずみ速度における引張試験に比べて、破断ひずみが小さくなることが推測される。そこで特定の PP を対象として定めずに、広い範囲の PP 系ポリマのいずれかで、破断ひずみのひずみ速度依存性にブーメランシェイプが現れるものと推測している。なお、ここでは、非晶性ポリマの PMMA に認められる破断ひずみのひずみ速度依存性と、本材料モデルによるシミュレーション結果の同一性を主張しているわけでないことに注意されたい。

## H.7 打抜き試験の再現シミュレーション

### H.7.1 シミュレーションの目的

PP 板材の打抜き試験では、変形が最も大きな部位ではなく、その周囲で円環状に破壊が生じる。H.2 にて検討した PP 試験片と同じ種類の PP の板材の打抜き試験を実施したうえで、このような破壊形態のクレーズを考慮した材料モデルによる再現を試みる。ただし、単軸引張以外の変形に対しても本材料モデルが利用可能であることのみを示すものとし、単軸引張と等2軸引張との両方で成り立つ厳密なパラメータフィッティングや、衝突物とポリマ製品との間の摩擦係数の値を十分吟味した検討などは今後の課題とする。

### H.7.2 材料モデル

H.2 において述べたように、対象とする PP 材は2次くびれを生じる性質を持つが、打抜きシミュレーションにおける解析安定性を確保するために、PP のひずみ速度硬化則には、レベル応力の仮定が考慮された式(5.5)、式(5.6)および式(5.7)を利用する。クレーズの影響を含む非共軸弾粘塑性構成式には式(4.91)

および式(4.92)を, クレーズ発生条件式には式(6.12)および式(6.13)を用いる. クレーズ発展式には式(H.1)を, 塑性平均垂直ひずみ  $\epsilon_m^p$  に対する発展式には式(H.2)を用いる.

### H.7.3 PP を対象とした打抜き試験

米国材料試験協会 ASTM の規格 D3763 を参考に, 図 H.9 に示すポリプロピレン(PP)材の打ち抜き試験を実施する. すなわち内径 25.4 mm の鋼製リングで上下から 2 mm 厚の PP 板材を締め付けて固定し, 先端形状が直径 12.7 mm の半球形インパクトを速度 1 m/s で PP 板材に衝突させて, インパクトが受ける荷重とインパクト先端の変位の関係を得る. 実験後の試験片の写真を図 H.10 に, 実験で得られた荷重-変位関係を図 H.11 に示す.

### H.7.4 打抜き試験の再現シミュレーション

式(5.5), (5.6)および式(5.7)に対して同定された各定数はそれぞれ,  $\dot{\epsilon}_r = 1.0 \text{ s}^{-1}$ ,  $m = 0.04$ ,  $\sigma_r = 17 \text{ MPa}$ ,  $\epsilon_r = 0.05$ ,  $k_0 = 1$ ,  $k_1 = 25$ ,  $k_2 = 1.85$ ,  $k_3 = 0.6$  および  $k_4 = 0$  である. 得られた硬化カーブを実験データとあわせて図 H.12 に示す. ただし実験データの白ヌキシンボルは 2 次くびれが発生した領域であり, 本節における定数同定に際しては参考程度としている. なお式(H.1)および式(H.2)における材料定数を  $A = 0.5$ ,  $B = 10^{-6}$ ,  $D_1 = 0.99$ ,  $D_2 = 100$ ,  $\epsilon_c = 0.6$ ,  $A_1 = 2.5$ ,  $B_1 = 540$ ,  $C_1 = 0$ ,  $q_1 = 0.018$ ,  $q_2 = 0.0$ ,  $q_3 = 1.5$  とする. 解析モデルは変形の対称性を仮定した図 H.11 に示すような 1/4 モデルであり, 1 点積分 3D ソリッド要素を用いた 19833 節点 17200 要素のモデルである. 鋼製リングによる試験片の拘束は, 締め付け部の下面を完全固定し, 上面を上方変位のみ拘束する(図 H.13). インパクトは直径 12.7 mm の剛壁球とし, 強制速度 1 m/s を与える.

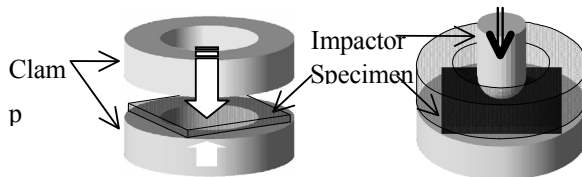


Fig.H.9 Method for puncture test

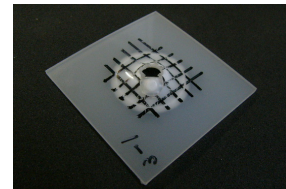


Fig. H.10 Specimen after puncture test

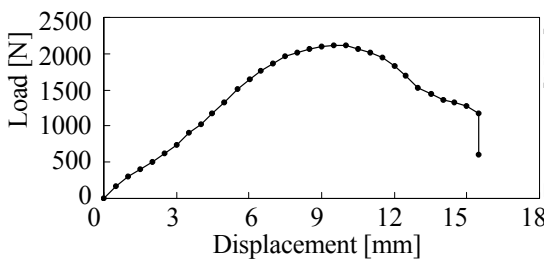


Fig.H.11 Load versus displacement diagram obtained from experimental puncture test

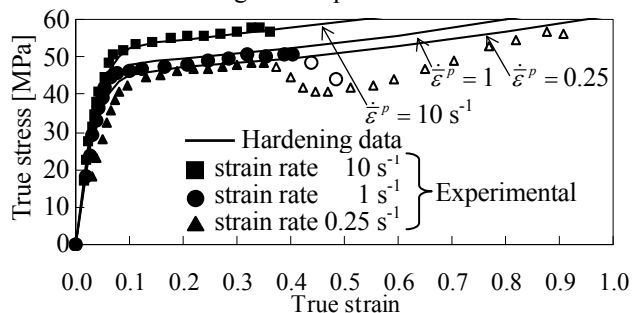
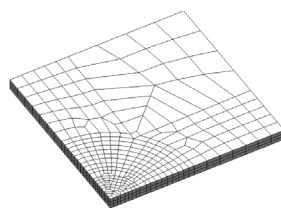
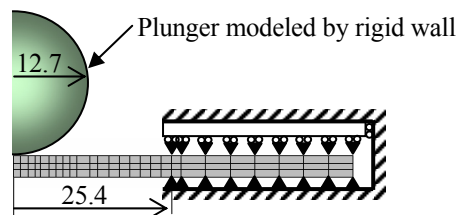


Fig.H.12 Stress-strain curves



(a) FE mesh of a quarter part



(b) Boundary conditions

Fig.H.13 Computational model for puncture test

変形の履歴を図 H.14 に、最大荷重を超えたインパクト変位 10 mm における相当塑性ひずみ分布とクレーズ密度分布をそれぞれ図 H.15, 図 H.16 に示す. 相当塑性ひずみは最も変形が大きい試験片中央において最大で, 外周に向かって徐々に小さくなる. これに対して高クレーズ密度領域は試験片中央部でなく, その周辺で円環状に分布しており, 図 H.10 に示す実験の破断部位とよく一致する.

またインパクトの荷重-変位関係について実験と解析の結果を比較すると, 図 H.17 に示すように本材料モデルによる解析結果は実験結果とよく整合する. なお, 解析は実験に比べて荷重最大となる変位が 1mm 程度小さいが, これは硬化則同定の際に, 引張試験で生じた 2 次くびれの影響を組み込んでいないこと, および静水圧依存性が考慮されていないことなどが原因と考えられる. このような引張試験に対する詳細な検討や新たな硬化則の開発は今後の課題としたい. なお, 本材料モデルを用いた解析の CPU 時間は, 汎用ソルバの弾塑性材料則を用いた場合に比べて, わずか 30% 増にすぎない. このことから本材料モデルは解析時間についても十分実用的であり, 以上の検討を通じて本材料モデルの有用性が確認されたといえる.

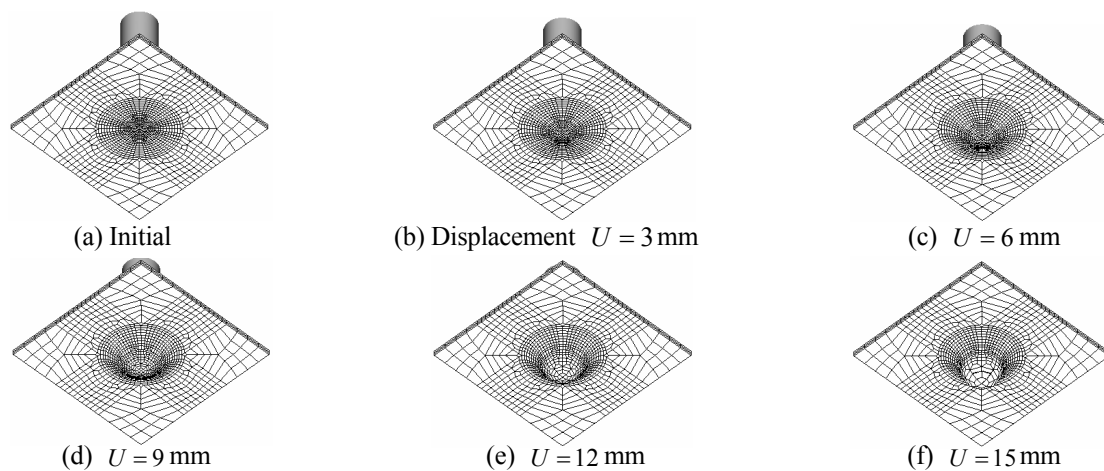


Fig.14 Deformed meshes of polypropylene sheet



Fig.H.15 Distribution of equivalent strain

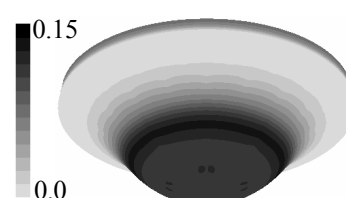


Fig.H.16 Distribution of craze

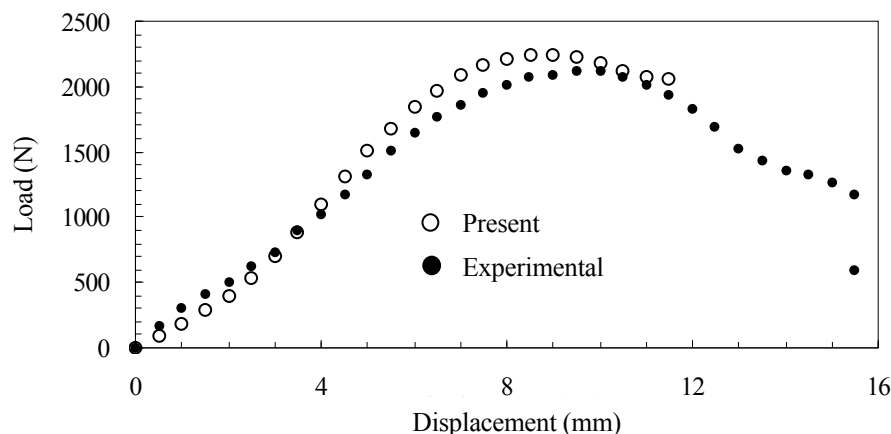


Fig. H.17 Puncture experimental result and results of FE analysis

## H.8 解析モデルと解析時間

ひずみ速度硬化則にひずみこう配項<sup>(付5)</sup>を導入すれば、幅方向の分割数をより少なくできるが、このような材料モデルの精密化は今後の課題としたい。ところで、本論文で利用した解析モデルでひずみ速度  $1 \text{ s}^{-1}$  の解析を行うと、2013年現在の一般的ワークステーション(例えばインテル<sup>®</sup>Xeon<sup>®</sup>プロセッサ；4コア/2.8 GHz/10 MB および 4 GB メモリで構成される計算機)において数時間の解析時間を要する。非常にひずみ速度が小さい解析であっても、理論上は解析を実行することができる。しかし、解析担当者は、計算コストを考慮して解析条件、すなわちひずみ速度条件を決めればよい。なお、本研究では、ひずみ速度  $0.01 \text{ s}^{-1}$  の解析に要する時間が数日間であったため、これ以上の低速変形を陽解法ソルバで解析することは、現時点では現実的ではないと判断した。

## H.9 各材料係数の決定方法

以下に示す手順により本材料モデルのパラメータフィッティングを進めることができる。

**【STEP1】** 単軸引張シミュレーションを通じて、ひずみ速度硬化則の材料定数  $k_0 \sim k_3$ 、 $\sigma_r$  および  $m$  を決める。

1. 単軸引張試験で得られる公称応力-公称ひずみ曲線の形状に基づき、 $\dot{\epsilon}^p = \dot{\epsilon}_r$  においてひずみ速度硬化則の材料定数  $k_0 \sim k_3$  および  $\sigma_r$  を決める。

2. 高ひずみ速度ほど応力の値が大きい傾向が反映できるように、材料定数  $m$  を決める。

注1) 単軸引張シミュレーションを実施する際に、非共軸弾粘塑性構成式で必要となるひずみ速度感度指数  $k$  の係数  $p_1$ 、 $p_2$ 、 $p_3$  は、村上ら<sup>(1.81)</sup>による従来の研究で提案された値 ( $p_1 = \sin(\pi/8)$ 、 $p_2 = 1 \times 10^{-4}$ 、 $p_3 = 10$ )をそのまま用いてよい。

注2) STEP1 では、破断ひずみを無視してよく、実験において破断した後も引張が継続するものとして係数を同定する。

注3) STEP1 では、クレーズの影響を無視して係数同定を実施してよい。すなわち、クレーズ発展式[式(6.5)]の係数  $C_{pr}$  および  $C_{ig}$  をゼロと仮定してよい。

**【STEP2】** 単軸引張シミュレーションを通じて、単軸引張試験で得られた公称応力-公称ひずみ関係および実験後の破断部位に基づき、クレーズ発展式の材料定数を決める。

1. クレーズ密度が 20% を超え、かつ実応力がフィブリン強度を超える公称ひずみが実験における破断時の公称ひずみと整合するように、クレーズ発展式[式(6.17)および式(6.18)]の係数  $A_{ge}$ 、 $A_{gr}$ 、 $D_1$ 、 $D_2$ 、 $D_3$  および  $n_g$  を決める。このとき、高ひずみ速度側について検討する場合には、式(6.16)の速度感度指数  $n_g$  の初期値をゼロとおけば最適な係数の組を求めやすい。式(6.19)の係数  $D_3$  を 100 と仮定し、クレーズ成長停止ひずみ  $\epsilon_c$  を再硬化ひずみとし、式(6.8)の係数  $B$  を 0.1、式(6.9)の係数を  $q_1 = 1 \times 10^{-5}$ 、 $q_2 = 0.1$ 、 $q_3 = 35$  および  $q_4 = 2.4$  とする。

2. クレーズ発生条件式[(6.12),(6.13)]の係数を  $A_1 = 2.5 \text{ MPa}$ 、 $B_1 = 54 \text{ MPa}^2$  と仮定し、 $C_1$  の初期値を 1.0 とする。必要に応じて  $C_1$  を数十%の範囲で変更すれば、破断ひずみの速度依存性の再現性が良くなる。

単軸引張試験結果に基づく本材料モデルの係数の同定の完了

なお、STEP2 のクレーズ発展式の係数同定は最適化システムにより可能であり、STEP1 も含めた最適化も SA (Simulated Annealing) などにより可能である。なお、単軸引張試験の結果から決まらないパラメータは以下の4項目である。

- 1) 非共軸パラメータ  $k$ [式(4.80)]の係数  $p_1$ ,  $p_2$  および  $p_3$
- 2) クレーズの発生項における関数  $f_2(\bar{\varepsilon}^p)$ [式(6.19)]の係数  $D_4$  および  $\varepsilon_c$
- 3) 塑性平均垂直ひずみの発展式[式(6.11)]の係数  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  および  $q_4$
- 4) クレーズ発生条件式[式(6.12)]の係数  $A_1$ ,  $B_1$  および  $C_1$

## H.10 変形の進行にともなうくびれの幅について

本解析結果をみると、くびれ発生後は変形がくびれ端部に移るため、くびれ部の幅方向の変形は小さく、ほとんど細くなっていない。ここで、ポリマの変形においてはくびれ部の幅が全く変化しないことも観察されることもある。このような変形モードを再現するためには、ひずみ速度硬化則における後続硬化のカーブの鋭さを与える係数  $k_5$ 、非共軸パラメータ  $k$  の最大値を与える係数  $p_1$  および解析モデルの幅方向の初期不整の与え方を修正すればよい。このような変形モードに関する課題は、クレーズの発生・伝ばと分けて考察することも可能なので、村上ら<sup>(1,81)</sup>による従来の研究を参考にできる。



# 補足 I

## (第9章の補足)

## 1.1 非線形ひずみ回復の導入

非共軸粘塑性構成式への非線形ひずみ回復の導入は、能條<sup>(付 6)</sup>により検討されている。ただし、商用 FEM プログラムにおける再現性や解析安定性の検討はなされていない。このため、能條の検討内容を本材料モデルに融合することにより、商用 FEM プログラムにおいて非線形ひずみ回復のシミュレーションを実施可能とすることを今後予定している。

## 1.2 クレーズ密度テンソルとその構成式

田中<sup>(付 7)</sup>は、散逸関数を塑性散逸ポテンシャルとする流れ則の形で、クレーズの方向を決定できる異方性クレーズ密度に対する構成式を次式のように提案している。

$$\overset{\vee}{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\dot{\bar{\omega}}}{\bar{\sigma}'} \boldsymbol{T} \quad (\text{I.1})$$

ここで、 $\boldsymbol{\Omega}$  は異方性クレーズ密度テンソル、 $\dot{\bar{\omega}} = \sqrt{1/3 \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{(m)} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{(m)}}$  は相当クレーズ速度、 $\bar{\sigma}'$  は  $\bar{\sigma}' = \sqrt{1/3 \boldsymbol{T}_{(m)} \cdot \boldsymbol{T}_{(m)}}$  により定義される相当応力である。クレーズの異方性を考慮するためには、式(I.1)のようなテンソル表示のクレーズ密度を弾・粘塑性構成式に導入するとともに、異方性を考慮したクレーズ発展式の提案および商用 FEM プログラムにおいてシミュレーションが安定的に実施できるか否かを確認する必要がある。

## 1.3 熱伝導現象の測定

山下ら<sup>(7.5)</sup>は、引張過程におけるポリブチレンテレフタレート試験片の表面温度を赤外線放射温度計により計測し、くびれ発生部で約 30°C の局所的な温度上昇を実験で確認している。このような実験を通じて熱伝導現象を測定することで、PP の内部発熱と熱伝導・伝達に関するモデル化を進めることを今後予定している。

## 補足の参考文献

- (付1) 井上俊英, エンジニアリングプラスチック, (2004), 共立出版.
- (付2) 佐藤功, はじめてのプラスチック, (1999), 工業調査会.
- (付3) 後藤學, 塑性学, (1982), コロナ社.
- (付4) Harasawa, J., Uehara, H., Yamanobe, T., Komoto, T. and Terano, M., “Morphology of Drawn Syndiotactic Polyethylene Films”, *Journal of Molecular Structure*, Vol.610 (2002), pp.133-142.
- (付5) 富田佳宏, “種々の階層における塑性理論の発展 6.ひずみ勾配依存性構成式と塑性不安定解析”, 材料, Vol.48, No.10 (1999), pp.1207-1213.
- (付6) 能條和成, “除荷時の非線形ひずみ回復およびクレーズを考慮した結晶性ポリマの非共軸弾粘塑性構成式およびクレーズ進展に基づく破壊予測シミュレーション”, 修士論文, 慶應義塾大学大学院, (2013).
- (付7) 田中俊介, “非晶性ポリマに対するクレーズの伝ば・成長停止モデルと破断予測シミュレーション”, 修士論文, 慶應義塾大学大学院, (2004).