

Title	Multisymplectic geometry and geometric numerical integrator for variational problems
Sub Title	
Author	彭, 林玉(Peng, Linyu)
Publisher	
Publication year	2024
Jtitle	科学研究費補助金研究成果報告書 (2023.)
JaLC DOI	
Abstract	さまざまな視点から微分方程式と離散方程式の変分解析に深く入り込みました。Variational bicomplexを定義することで、マルティシンプレクティック構造、対称性、保存則など、基本的な幾何学および代数的特性を座標に依存せずに研究することができました。また、modified formal Lagrangian formulationを導入して、任意な微分方程式において保存則や変分的積分法の系統的な構築が可能になりました。 In the current project, we have delved into the variational analysis of differential and discrete equations from various perspectives. For variational differential equations, we have developed a discrete counterpart of the variational bicomplex structure. This framework aids in understanding fundamental geometric and algebraic features, such as multisymplectic structure, symmetries, and conservation laws. For nonvariational problems, we have defined a modified formal Lagrangian formulation (MFLF), enabling the treatment of any differential equations. Specifically, this approach facilitates the systematic construction of conservation laws using Noether's Theorem and variational integration even for nonvariational equations.
Notes	研究種目：若手研究 研究期間：2020～2023 課題番号：20K14365 研究分野：応用数学
Genre	Research Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_20K14365seika

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the Keio Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

令和 6 年 5 月 8 日現在

機関番号：32612

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2023

課題番号：20K14365

研究課題名（和文）Multisymplectic Geometry and Geometric Numerical Integrator for Variational Problems

研究課題名（英文）Multisymplectic Geometry and Geometric Numerical Integrator for Variational Problems

研究代表者

彭 林玉 (Peng, Linyu)

慶應義塾大学・理工学部（矢上）・准教授

研究者番号：90725780

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,500,000 円

研究成果の概要（和文）：さまざまな視点から微分方程式と離散方程式の変分解析に深く入り込みました。Variational bicomplexを定義することで、マルティシンプレクティック構造、対称性、保存則など、基本的な幾何学および代数的特性を座標に依存せずに研究することができました。また、modified formal Lagrangian formulationを導入して、任意な微分方程式において保存則や変分的積分法の系統的な構築が可能になりました。

研究成果の学術的意義や社会的意義

離散variational bicomplexは、差分方程式や数値方法の幾何及び代数的な研究するための基本的なツールになっている。対称性、保存則、マルティシンプレクティック構造、逆問題などはvariational bicomplexのコホモロジー群に関係しています。また、非変分問題のためのmodified formal Lagrangian formulationが導入されており、Noetherの定理から保存則を導出し、変分積分法の構築を容易にしています。これらの革新的な構造と理論は、物理現象の理解と効率的な数値積分法の開発に期待されます。

研究成果の概要（英文）：In the current project, we have delved into the variational analysis of differential and discrete equations from various perspectives. For variational differential equations, we have developed a discrete counterpart of the variational bicomplex structure. This framework aids in understanding fundamental geometric and algebraic features, such as multisymplectic structure, symmetries, and conservation laws. For nonvariational problems, we have defined a modified formal Lagrangian formulation (MFLF), enabling the treatment of any differential equations. Specifically, this approach facilitates the systematic construction of conservation laws using Noether's Theorem and variational integration even for nonvariational equations.

研究分野：応用数学

キーワード：Multisymplectic geometry Geometric integration Variational calculus Symmetry Noether's theorem Conservation law Lagrangian

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

Variational problems are endemic throughout physics and engineering. Given a Lagrangian functional admitting a continuous symmetry group, conservation laws (CLs) for its relevant Euler-Lagrange equations can be achieved through Noether's theorem. For example, the conservation of energy is related with symmetries of time translation. On the other hand, with the fast development of computers, numerical methods have become more and more powerful in scientific research. However, the stability and effectiveness of numerical algorithms are still the key issues, which in return motivate various new numerical methods. Geometric integrator, discretisation inheriting structures of original systems, plays their unique roles in numerical methods for differential equations (DEs). In particular, variational integrators not only systematically preserve symplectic or multisymplectic structures but also admit good long-time energy behavior.

It is clear that symplectic structures can contribute to first integrals of variational ordinary differential equations (ODEs). It is superb that variational integrator, derived from discretisation of variational principles, preserve relevant symplectic forms. By extending symplectic geometry to infinite-dimensional spaces, it is possible to accommodate fluid mechanics and classical field theories such as electromagnetism or gravity, but the analysis is messy. Hence, since the late 1960's, there had been great efforts in developing a finite-dimensional geometry of classical fields. Using symplectic geometry as the prototype, investigators went from ODEs on a finite dimensional space to partial differential equations (PDEs) on an infinite-dimensional space with a natural multisymplectic structure. The idea of multisymplectic Hamiltonian PDEs was intensively investigated by Timothy Bridges and his collaborators and a great number of examples were uncovered, the Camassa-Holm equation, the KdV equation, the nonlinear Schrödinger equation, to name only a few. From the Lagrangian aspect, general approaches for multisymplectic structures of first-order and second-order Lagrangians had been considered. The methodology therein had difficulty to achieve a universal structure for cases of an arbitrary order, due to the case-by-case reasoning. Using multisymplectic geometry as a basis, a theoretical framework could be developed for generalising multisymplectic integrator to partial derivatives in time and space.

2. 研究の目的

This project aimed to figure out the following key scientific questions.

- (1) For Hamiltonian PDEs, multisymplectic integrator is hardly systematic;
- (2) while for variational DEs, until a better and general theoretic understanding for arbitrary order variational problems can be constructed, one is not able to provide a concrete explanation for the conservation of multisymplectic structures.

Firstly, we aimed to construct a unified theory for the conservation of both continuous and discrete multisymplectic structures for arbitrary order systems of PDEs, which is the generalisation of conservation of symplecticity for ODEs.

Secondly, the geometry of symplectic structures not only has facilitated powerful tools in applied mathematics, especially geometric numerical integration, but also has stimulated fundamental advances in pure mathematics, such as group representations and topological dynamics. For first-order variational problems, the fundamental symplectic (and multisymplectic) structures had been exploited for continuous and discrete mechanics (and field theories). However, generalisations to arbitrary orders had yet to be constructed due to the lack of a general treatment. To fill the gaps, this study also aimed to develop a systematical geometric-variational approach for arbitrary order variational problems as well as their discretisation.

3. 研究の方法

To solve such key scientific questions, we made use of the variational bicomplex, a double co-chain complex about the algebra of exterior differential forms on jet manifolds. As the name suggests, Lagrangians, variational DEs and Helmholtz condition (for inverse problems)

are defined as elements on the bicomplex. For Hamiltonian PDEs, a close relation between the variational bicomplex and multisymplectic forms has been uncovered, where multisymplectic forms are interpreted as higher-order conservation laws on the bicomplex. A discrete version of the bicomplex was constructed and extended during the project, which assisted us to understand the geometry of finite difference schemes.

4. 研究成果

We investigated theoretic foundation of arbitrary order variational problems and its applications to realistic systems from, for instance, mechanics, physics, and fluids. We also explored a systematic approach for the geometric understanding and construction of geometric integrator. In more details, we

- (1) obtained the relation between multisymplectic structures for first-order Lagrangian field theories and Hamiltonian PDEs, which generalises the symplecticity of ODEs;
- (2) developed a systematic methodology for the understanding of multisymplectic structures for arbitrary order variational problems;
- (3) constructed the conservation of discrete multisymplectic structures for arbitrary order geometric integrator, and verified its continuum consistency with the continuous picture;
- (4) defined the modified formal Lagrangian formulation that is applicable to non-variational problems;
- (5) investigated real simulations and analysis for systems from mechanics, molecular dynamics, field theories, fluids, etc.

These outcomes contribute to a deeper understanding of multisymplectic structures in variational problems and advance numerical methods for diverse scientific applications.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 10件／うち国際共著 5件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yusuke Ono, Linyu Peng	4. 巻 60
2. 論文標題 The Comparison of Riemannian Geometric Matrix-CFAR Signal Detectors	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems	6. 最初と最後の頁 1679～1691
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1109/TAES.2023.3339403	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 —
1. 著者名 Mamoru Gunji, Yusuke Ono, Linyu Peng	4. 巻 -
2. 論文標題 The effect of accuracy of initial velocity discretisations on discrete energy in variational integration	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Proceedings of the IUTAM Symposium on Nonlinear Dynamics for Design of Mechanical Systems Across Different Length/Time Scales	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 —
1. 著者名 Frederike Zufall, Rampei Kimura, Linyu Peng	4. 巻 -
2. 論文標題 Towards a simple mathematical model for the legal concept of balancing of interests	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Artificial Intelligence and Law	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10506-022-09338-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Yusuke Ono, Linyu Peng	4. 巻 201
2. 論文標題 Towards a median signal detector through the total Bregman divergence and its robustness analysis	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Signal Processing	6. 最初と最後の頁 108728～108728
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.sigpro.2022.108728	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 —

1. 著者名 Yaqing Liu, Linyu Peng	4. 巻 171
2. 論文標題 Some novel physical structures of a (2+1)-dimensional variable-coefficient Korteweg-de Vries system	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Chaos, Solitons & Fractals	6. 最初と最後の頁 113430~113430
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.chaos.2023.113430	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Linyu Peng	4. 巻 -
2. 論文標題 A modified formal Lagrangian formulation for general differential equations	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13160-022-00500-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 —

1. 著者名 Linyu Peng, Peter E. Hydon	4. 巻 478
2. 論文標題 Transformations, symmetries and Noether theorems for differential-difference equations	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences	6. 最初と最後の頁 20210944
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1098/rspa.2021.0944	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Linyu Peng, Noriyoshi Arai, Kenji Yasuoka	4. 巻 -
2. 論文標題 A stochastic Hamiltonian formulation applied to dissipative particle dynamics	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Applied Mathematics and Computation	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.amc.2022.127126	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 —

1. 著者名 Mingming Li, Huafei Sun, Linyu Peng	4. 巻 -
2. 論文標題 Fisher-Rao geometry and Jeffreys prior for Pareto distribution	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Communications in Statistics - Theory and Methods	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/03610926.2020.1771593	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

[学会発表] 計32件 (うち招待講演 13件／うち国際学会 16件)

1. 発表者名 Linyu Peng
2. 発表標題 Symmetry analysis of semi-discrete equations and their conservation laws
3. 学会等名 6th International Conference on Dynamics, Vibration and Control (ICDVC2022) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Mamoru Gunji, Yusuke Ono, Linyu Peng
2. 発表標題 The influence of accuracy of initial values on the discrete energy in variational integrator'
3. 学会等名 IUTAM Symposium on Nonlinear Dynamics for Design of Mechanical Systems across Different Length/Time Scales (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Hiroaki Yoshimura, Linyu Peng
2. 発表標題 A discretization of Dirac structures and Lagrange-Dirac dynamical systems
3. 学会等名 10th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM2023) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Linyu Peng
2. 発表標題 Noether's conservation laws based on the modified formal variational method
3. 学会等名 10th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM2023) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 彭林玉
2. 発表標題 The modified formal variational formulation for general differential equations and applications
3. 学会等名 早稲田大学 持続的環境エネルギー社会共創研究機構 研究所間交流会 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Linyu Peng
2. 発表標題 Discrete Lagrangian multiforms on the difference variational bicomplex
3. 学会等名 BIRS Workshop Lagrangian Multiform Theory and Pluri-Lagrangian Systems (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 富田繁, 彭林玉
2. 発表標題 Toda type latticeの対称性と群不変解
3. 学会等名 日本応用数理学会第20回研究部会連合発表会
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Jiongyi Wang, Linyu Peng
2. 発表標題 A finite difference algorithm for mean field games
3. 学会等名 日本応用数理学会若手の会 第9回学生研究発表会
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Toshihiko Sugiura, Koki Ochiai, Xuefeng Liu, Yuki Oikawa, Linyu Peng
2. 発表標題 Nonlinear Motions of a Self-adaptive Resonator
3. 学会等名 10th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC2022) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 大竹 桃子, 彭 林玉
2. 発表標題 変分的積分法を用いたベイジアンニューラルネットワークの応用
3. 学会等名 第35回計算力学講演会 (CMD2022)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 吉村 浩明, 彭 林玉
2. 発表標題 ディラック力学系のモデリングと離散の変分法による定式化
3. 学会等名 第35回計算力学講演会 (CMD2022)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 宮前 圭佑, 大竹 桃子, 小幡 研治, 彭 林玉
2. 発表標題 修正形式ラグランジアンのパーガース方程式への応用
3. 学会等名 第35回計算力学講演会 (CMD2022)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Linyu Peng
2. 発表標題 The difference variational bicomplex and discrete integrable systems
3. 学会等名 New Trends in Lagrangian and Hamiltonian Aspects of Integrable Systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Momoko Otake, Kenji Obata, Linyu Peng
2. 発表標題 Application of the modified formal variational formulation to the Burgers' equation
3. 学会等名 15th World Congress on Computational Mechanics (WCCM-XV) & 8th Asian Pacific Congress on Computational Mechanics (APCOM-VIII) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 彭 林玉, 荒井 規允, 泰岡 顕治
2. 発表標題 散逸粒子動力学のStormer-Verlet法
3. 学会等名 日本応用数理学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 彭 林玉
2. 発表標題 半離散方程式の対称性解析及びネーターの定理
3. 学会等名 研究集会「非線形波動から可積分系へ 2022」
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Linyu Peng
2. 発表標題 Numerical methods based on the modified formal Lagrangian formulation of differential equations
3. 学会等名 KSIAM 2022 Annual Meeting (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 彭 林玉
2. 発表標題 半離散方程式の対称性解析とその応用
3. 学会等名 ミニワークショップ「非線形現象の応用数理-モデリング, 解析と計算」(招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Linyu Peng
2. 発表標題 Symmetry analysis of semi-discrete equations and their conservation laws
3. 学会等名 6th International Conference on Dynamics, Vibration and Control (ICDVC2022+1) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Linyu Peng
2. 発表標題 The modified formal variational structure and variational integrator
3. 学会等名 26th International Conference on Difference Equations and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Linyu Peng, Peter E. Hydon
2. 発表標題 半離散力学系の連続対称性と保存則
3. 学会等名 日本応用数理学会2021年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Linyu Peng
2. 発表標題 Continuous symmetries of semi-discrete equations and conserved quantities
3. 学会等名 OCAMI Workshop 'ヘリシティと時空対称性, 古典場から量子場まで' (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Linyu Peng
2. 発表標題 Symmetries and Noether's conservation laws of semi-discrete equations
3. 学会等名 Moving Frames and their Modern Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Linyu Peng
2. 発表標題 半離散方程式の対称性から
3. 学会等名 ワークショップ 可積分系研究の最近の進展 --理論, シミュレーション, 応用-- (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Linyu Peng, Kenji Obata
2. 発表標題 Modified formal variational structures for general differential equations
3. 学会等名 日本応用数理学会2020年度年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Linyu Peng
2. 発表標題 The infinitesimal invariance criterion for statistical transformation models
3. 学会等名 International Conference on Mathematical Characterization, Analysis and Applications of Complex Information, Beijing Institute of Technology, China (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Linyu Peng
2. 発表標題 Conservation laws of general DEs: A modified formal Lagrangian formulation
3. 学会等名 Seminar at the Department of Mathematics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, China (招待講演)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

—

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 BIRS Workshop Lagrangian Multiform Theory and Pluri-Lagrangian Systems	開催年 2023年～2023年
--	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
英国	University of Kent	University of Leeds		
中国	北京信息科技大学	上海大学		