

Title	Lubin-Tate空間とガロワ表現
Sub Title	Lubin-Tate space and Galois representations
Author	津嶋, 貴弘(Tsushima, Takahiro)
Publisher	
Publication year	2025
Jtitle	科学研究費補助金研究成果報告書 (2024.)
JaLC DOI	
Abstract	整数論は日本において高木貞治氏の類体論の構築への貢献に始まる長い歴史を持つ。類体論とは、代数体と呼ばれる数論的に興味深い体のアーベル拡大がどれくらいあるかを記述する理論である。類体論を何らかの形で一般化しようという挑戦の中で整数論は発展してきた。それにより20世紀にはフェルマー予想が解決されたり、21世紀には佐藤・テイト予想が解決されるなどの輝かしい結果を得た。その背景には、ラングランズ対応と呼ばれる類体論の高次元化の定式化がある。類体論の精密化を明示的相互法則と呼ぶが、ラングランズ対応に対する明示的相互法則を目指し、様々な周辺の事柄について数論幾何的な手法を用いて研究を行ってきた。 Number theory has a long history in Japan, beginning with Teiji Takagi's contributions to the development of class field theory. Class field theory is a framework that describes how many abelian extensions there are of a number field--a field of arithmetic interest. Number theory has progressed through various attempts to generalize class field theory in some form. As a result, the 20th century saw the resolution of Fermat's Last Theorem, and the 21st century witnessed the proof of the Sato-Tate conjecture, among other remarkable achievements. Underlying these successes is the formulation of a higher-dimensional generalization of class field theory known as the Langlands correspondence. The refinement of class field theory is referred to as the explicit reciprocity law. In this research, we aim at an explicit reciprocity law for the Langlands correspondence, and study various related topics using arithmetic-geometric methods.
Notes	研究種目：基盤研究 (C) (一般) 研究期間：2020～2024 課題番号：20K03529 研究分野：数論幾何
Genre	Research Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_20K03529seika

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

令和 7 年 5 月 19 日現在

機関番号：32612

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2024

課題番号：20K03529

研究課題名（和文）Lubin--Tate空間とガロワ表現

研究課題名（英文）Lubin--Tate space and Galois representations

研究代表者

津嶋 貴弘 (TSUSHIMA, Takahiro)

慶應義塾大学・医学部（日吉）・教授

研究者番号：70583912

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,500,000円

研究成果の概要（和文）：整数論は日本において高木貞治氏の類体論の構築への貢献に始まる長い歴史を持つ。類体論とは、代数体と呼ばれる数論的に興味深い体のアーベル拡大がどれくらいあるかを記述する理論である。類体論を何らかの形で一般化しようという挑戦の中で整数論は発展してきた。それにより20世紀にはフェルマー予想が解決されたり、21世紀には佐藤・テイト予想が解決されるなどの輝かしい結果を得た。その背景には、ラングランズ対応と呼ばれる類体論の高次元化の定式化がある。類体論の精密化を明示的相互法則と呼ぶが、ラングランズ対応に対する明示的相互法則を目指し、様々な周辺の事柄について数論幾何的な手法を用いて研究を行ってきた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

上で述べたラングランズ対応には局所版と大域版があり、局所版のラングランズ対応を局所ラングランズ対応と呼ぶ。かなり一般の代数群に対して局所ラングランズ対応を考えることができるのだが、本研究では最も基本的な一般線形群の場合に、局所ラングランズ対応の相互法則の精密化としての明示的相互法則を目指して研究を行った。これは整数論の類体論と呼ばれる重要な理論の一つの一般化・精密化ということができる。このような研究を進展させることは整数論の研究において重要な意義をもつ。整数論の知識はますます現実社会に活用できるものばかりではないが、蓄積された知識は将来、人類に大きな利益を与える可能性を持つと考えている。

研究成果の概要（英文）：Number theory has a long history in Japan, beginning with Teiji Takagi's contributions to the development of class field theory. Class field theory is a framework that describes how many abelian extensions there are of a number field--a field of arithmetic interest. Number theory has progressed through various attempts to generalize class field theory in some form. As a result, the 20th century saw the resolution of Fermat's Last Theorem, and the 21st century witnessed the proof of the Sato-Tate conjecture, among other remarkable achievements. Underlying these successes is the formulation of a higher-dimensional generalization of class field theory known as the Langlands correspondence. The refinement of class field theory is referred to as the explicit reciprocity law. In this research, we aim at an explicit reciprocity law for the Langlands correspondence, and study various related topics using arithmetic-geometric methods.

研究分野：数論幾何

キーワード：局所ラングランズ対応 Lubin--Tate理論 還元 有限体上の代数多様体

1. 研究開始当初の背景

一般線形群に対する局所ラングランズ対応の明示的相互法則の研究は、Bushnell–Henniartによる代数的な手法が主流であり、幾何学的な研究はLubin–Tate空間のaffinoidを調べることで部分的な結果がいくつか知られている状況だった。そのようなaffinoidの還元としてどのような代数多様体が現れるのかは未解決の問題であった。(現在も未解決である)

2. 研究の目的

整数論において類体論は重要な理論の一つである。類体論を一般化する試みの中で整数論は発展を遂げてきた。類体論の非可換化・高次元化の試みの一つとして、ラングランズ対応があげられる。類体論の相互法則を明示化するものとして明示的相互法則がある。これのラングランズ対応版を研究する。

3. 研究の方法

Lubin–Tate空間の中のaffinoidを研究する。affinoidからは還元が定まり、その還元がスムーズな代数多様体であって、次元と同じ次数を持つコホモロジーが消えていない場合に興味がある。そのようなタイプのaffinoidを詳しく調べることでラングランズ対応に対する明示的相互法則を導く。

4. 研究成果

上のaffinoidを調べる上で、様々な有限群が作用している代数多様体の表現論的、数論的性質について理解を深める必要がある。そのような観点からLubin–Tate空間のaffinoidの還元と関連すると考えられる代数多様体を研究する成果を得た。以下にそれを述べる。

(1) Artin-Schreier型のアフィン代数多様体でハイゼンベルグ型の群が作用している状況に、特に興味を持って研究した。またそれについての研究論文を出版した。有限体上の一般線形群に付随するハイゼンベルグ群が作用するArtin-Schreier型多様体を、Deligne-Lusztig理論の類似で定義した。そのコホモロジーに一般線形群のWeil表現が現れることを観察した。またこの多様体の自己準同型射で二度合成するとフロベニウス自己準同型射になるものが存在する。そのコホモロジーへの作用を用いて、離散的なフーリエ変換を幾何学的に構成した。これらはHowe対応においても応用がある。

(2) 有限体上の代数曲線の有理点の個数についてはHasse-Weil評価が古来よりよく知られている。その評価の最大値を取る代数曲線を最大曲線と呼ぶ。最大曲線は代数幾何符号で用いられることもある。最大曲線がどのくらいあるか、また具体的な代数曲線が最大曲線かどうかは興味深い問題である。標数2の有限体上の鈴木曲線は鈴木群の表現を構成するときに用いられる。定義方程式を奇素数標数で考えたものを一般化された鈴木曲線と呼ぶ。その更なる一般化を考えて、底の拡大をした際の有理点の個数を決定した。その結果、考えている代数曲線が最大曲線になるかどうかの判定条件を与えた。この有限体上の一般化された鈴木曲線のゼータ関数を明示的に計算した。奇素数と標数2で状況と研究手法が異なるため2本の論文にまとめた。いずれの場合にも表現論的な考察と数論的な考察を上手く組み合わせることでフロベニウス固有値を決定することができた。

(3) 有限体上の加法多項式が与えられたとき、それを用いてハイゼンベルグ群が定義される。そのハイゼンベルグ群と整数環を加法群として見たときの半直積群をガロワ群に持つような局所

体のガロワ拡大を構成した. その構成を用いて局所体上のガロワ表現を構成した. その次元は与えられた加法多項式の次数に一致する. 群の表現が原始的とは, いかなる真の部分群の表現の誘導表現とも同型にならないことをいう. 上で構成したガロワ表現がいつ原始的になるかに関する判定条件を幾何学的に与えた. これについての結果を論文として出版した.

(4) 有限体上のユニタリー群が作用する有限体上のアフィン代数多様体を考えて, その中間コホモロジーをユニタリー群の表現として研究した. さらに変種として直交群が作用する類似のアフィン代数多様体を構成しその中間コホモロジーも研究した. いずれの場合にもHowe対応と関係があり, その関係を明らかにしている. これらに関する論文をまとめ出版した.

(5) 一般に, 標数が奇素数のときに, van der Geer-van der Vlugtの超特異代数曲線に関する結果の一般化を行なった. フロベニウス固有値の明示的な公式をガウス和などを用いて上手く表示することができたことは興味深い結果であると考えている. これは元々のvan der Geer-van der Vlugtの論文ではやられておらず, 手法も異なる. それによりいつ最大になるかのいくつかの簡明な判定法を得ることもできた.

(6) (4)の研究に基づいて次数が $p+1$ 次のフェルマー超曲面の $\text{mod } l$ コホモロジーの解析を行なった. 標数ゼロの代数閉体上の有限群の表現は半単純になるが, 正標数の代数閉体上の表現は半単純にならないので解析が複雑になることが多い. フェルマー超曲面の $\text{mod } l$ コホモロジーから生じる短完全列が分裂しないことを示した. このような解析に基づいてWeil表現の $\text{mod } l$ 表現を詳しく研究した. 一部複素数体上にフェルマー超曲面を持ち上げて超越的な方法で得られる結果と比較同型を使って解析するなど, $\text{mod } l$ 表現論の研究ではあまり使われていないテクニックも使われていて証明も興味深いものになっていると考えている.

(7) (4)で与えたユニタリー群に対するWeil表現の幾何学的な構成に基づいて, Weil表現の新谷リフトを構成することができた. これもWeil表現を幾何学的に構成できたことの応用の一つである. これは既に知られていた斜交群に対するHenniart—Wangによる新谷リフトの研究のユニタリー版であり, ユニタリー群の新谷リフトの例はあまり知られていないため新規性が高い. また証明も幾何学的で興味深い研究を行なったと考えている.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計17件（うち査読付論文 17件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 5件）

1. 著者名 Imai Naoki, Tsushima Takahiro	4. 巻 29
2. 論文標題 Mod 1 Weil representations and Deligne-Lusztig inductions for unitary groups	5. 発行年 2025年
3. 雑誌名 Representation Theory of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 35～59
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/ert/685	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 —

1. 著者名 Tsushima Takahiro	4. 巻 72
2. 論文標題 On cohomology and zeta functions of generalized Suzuki curves in characteristic two	5. 発行年 2025年
3. 雑誌名 Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici	6. 最初と最後の頁 23, 45
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.7169/facm/2170	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 —

1. 著者名 Tsushima Takahiro	4. 巻 52
2. 論文標題 Artin-Schreier varieties with actions of finite orthogonal groups and Weil representations	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Communications in Algebra	6. 最初と最後の頁 1771～1782
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/00927872.2023.2274472	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 —

1. 著者名 Imai Naoki, Tsushima Takahiro	4. 巻 326
2. 論文標題 Local Galois representations of Swan conductor one	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Pacific Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 37～83
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/pjm.2023.326.37	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 —

1. 著者名 Tsushima Takahiro	4. 巻 93
2. 論文標題 On cohomology of generalized Suzuki curves and exponential sums	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Finite Fields and Their Applications	6. 最初と最後の頁 102309～102309
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.ffa.2023.102309	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 —

1. 著者名 Tsushima Takahiro	4. 巻 638
2. 論文標題 Trace formulae for actions of finite unitary groups on cohomology of Artin-Schreier varieties	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 129～152
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jalgebra.2023.10.006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 —

1. 著者名 Takeuchi Daichi、Tsushima Takahiro	4. 巻 56
2. 論文標題 Gauss sums and Van der Geer-Van der Vlugt curves	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Bulletin of the London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 602～623
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1112/blms.12953	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 —

1. 著者名 Tsushima Takahiro	4. 巻 174
2. 論文標題 Local Galois representations associated to additive polynomials	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 manuscripta mathematica	6. 最初と最後の頁 1151～1182
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00229-024-01550-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 —

1. 著者名 Imai Naoki、Tsushima Takahiro	4. 巻 31
2. 論文標題 Shintani lifts for Weil representations of unitary groups over finite fields	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Mathematical Research Letters	6. 最初と最後の頁 1471～1491
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4310/mrl.241211044338	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 —

1. 著者名 Tsushima Takahiro	4. 巻 19
2. 論文標題 On affinoids in quotients of Fermat varieties and explicit formula for Jacobi sum Hecke characters	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 International Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 1589～1619
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/s1793042123500781	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 —

1. 著者名 Imai Naoki、Tsushima Takahiro	4. 巻 9
2. 論文標題 Geometric construction of Heisenberg-Weil representations for finite unitary groups and Howe correspondences	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 European Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 34 p
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40879-023-00620-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 —

1. 著者名 Imai Naoki、Tsushima Takahiro	4. 巻 58
2. 論文標題 Geometric Realization of the Local Langlands Correspondence for Representations of Conductor Three	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 49～77
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/prims/58-1-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 —

1. 著者名 Tsushima Takahiro	4. 巻 49
2. 論文標題 On character formulae for Weil representations for unitary groups over finite fields	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Communications in Algebra	6. 最初と最後の頁 4679～4686
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/00927872.2021.1926472	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 —

1. 著者名 Imai Naoki, Tsushima Takahiro	4. 巻 380
2. 論文標題 Affinoids in the Lubin-Tate perfectoid space and simple supercuspidal representations II: wild case	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 751～788
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00208-020-02106-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 —

1. 著者名 Naoki Imai and Takahiro Tsushima	4. 巻 22
2. 論文標題 Affinoids in the Lubin-Tate perfectoid space and simple supercuspidal representations. I. Tame case	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 8251, 8291
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rny229	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 —

1. 著者名 Takahiro Tsushima	4. 巻 214
2. 論文標題 Good reduction of affinoids in the Lubin-Tate curve in even equal characteristic. I	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 414, 439
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jnt.2020.03.004	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 —

1. 著者名 Takahiro Tsushima	4. 巻 559
2. 論文標題 On extended Weil representation for finite general linear group and Howe correspondence	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 129, 160
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2020.04.024	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 —

〔学会発表〕 計8件（うち招待講演 6件／うち国際学会 1件）

1. 発表者名 津嶋貴弘
2. 発表標題 局所ラングランズ対応周辺の有限体上の代数多様体
3. 学会等名 代数的整数論とその周辺（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2025年

1. 発表者名 津嶋貴弘
2. 発表標題 局所解析的ベクトルと相対 Sen 理論 (1)
3. 学会等名 金沢数論幾何集会（招待講演）
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 津嶋貴弘
2. 発表標題 有限体上の一般化された鈴木曲線のゼータ関数
3. 学会等名 プロジェクト研究集会2022（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 津嶋貴弘
2. 発表標題 有限体上の加法的多項式に付随する局所体上のガロワ表現に関して
3. 学会等名 談話会, 京都大学理学部数学教室 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 津嶋貴弘
2. 発表標題 Fontaine--Fargues曲線上のベクトル束
3. 学会等名 倉敷整数論集会 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 津嶋貴弘
2. 発表標題 局所体上の超幾何曲線の間コホモロジー の構造について
3. 学会等名 第二回 超ケーラー多様体のモジュライとその周辺
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 津嶋貴弘
2. 発表標題 加法的多項式に付随する局所ガロワ表現について
3. 学会等名 プロジェクト研究集会2021
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 津嶋 貴弘
2. 発表標題 局所体上の超幾何曲線の中間コホモロジーの構造について
3. 学会等名 プロジェクト研究集会2020（招待講演）
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

—

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------