

Title	劣拡散的なランダム媒質中の多次元拡散過程の漸近挙動と極限分布の研究
Sub Title	Study of asymptotic behavior multi-dimensional sub-diffusive diffusion processes in random environments
Author	高橋, 弘(Takahashi, Hiroshi)
Publisher	
Publication year	2025
Jtitle	科学研究費補助金研究成果報告書 (2024.)
JaLC DOI	
Abstract	本研究では，ランダム媒質の影響を受けて，劣拡散的な挙動を見せる確率過程が持つ性質について考察した。ランダム媒質のモデルは，Brown 運動に代表される自己相似確率過程，すなわち空間と時間に関して適切な変換の下では，その分布が不変となる確率過程を与える。また，ランダム媒質中の確率過程の性質を考察するために，確率過程論を用いる。本研究では，(i) 遅れを伴う確率微分方程式で表される多次元確率過程，(ii) 1次元に満たないフラクタル図形上のランダム媒質中の確率過程，(iii) 1次元の負側だけにランダム媒質が与えられている場合の極限過程，に関して複数の結果が得られた。 In the present period, we studied the properties of stochastic processes that exhibit sub-diffusive behavior under the influence of random environments. The model of random environments are given by selfsimilar stochastic processes, i.e., a stochastic process whose distribution is invariant under appropriate transformations with respect to space and time. A typical example is a Brownian motion on $\mathbb{R}$. To study limiting behaviors of such stochastic processes, we use the general theory of stochastic processes. In this study, we considered the following problems and obtained some results: (i) multi-dimensional stochastic processes represented by stochastic differential equations with random delays, (ii) stochastic processes in random environment on disconnected fractal sets, and (iii) limit processes when the random environment is given only on the negative-side on $\mathbb{R}$.
Notes	研究種目：基盤研究 (C) (一般) 研究期間：2018～2024 課題番号：18K03324 研究分野：確率過程論
Genre	Research Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_18K03324seika

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

令和 7 年 5 月 19 日現在

機関番号：32612

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2024

課題番号：18K03324

研究課題名 (和文) 劣拡散的なランダム媒質中の多次元拡散過程の漸近挙動と極限分布の研究

研究課題名 (英文) Study of asymptotic behavior multi-dimensional sub-diffusive diffusion processes in random environments

研究代表者

高橋 弘 (TAKAHASHI, Hiroshi)

慶應義塾大学・商学部 (日吉)・教授

研究者番号：30413826

交付決定額 (研究期間全体) : (直接経費) 3,500,000 円

研究成果の概要 (和文) : 本研究では、ランダム媒質の影響を受けて、劣拡散的な挙動を見せる確率過程が持つ性質について考察した。ランダム媒質のモデルは、Brown 運動に代表される自己相似確率過程、すなわち空間と時間に関して適切な変換の下では、その分布が不変となる確率過程を与える。また、ランダム媒質中の確率過程の性質を考察するために、確率過程論を用いる。本研究では、(i) 遅れを伴う確率微分方程式で表される多次元確率過程、(ii) 1次元に満たないフラクタル図形上のランダム媒質中の確率過程、(iii) 1次元の負側だけにランダム媒質が与えられている場合の極限過程、に関して複数の結果が得られた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ランダム媒質中の拡散過程は、現実の問題から抽象化された確率モデルの一つである。例えば、いくつかの土壌の層が水平に重なった農地での水分・養分の浸み込みの様子や異種金属間での電子の運動などが問題として挙げられる。このような確率モデルを考察する基礎研究は、実際の現象の問題解決に寄与しうる。また、基礎理論であるからこそ、アプローチが異なる研究で得られた知見を数学として一般化することに意義があると考えられる。

研究成果の概要 (英文) : In the present period, we studied the properties of stochastic processes that exhibit sub-diffusive behavior under the influence of random environments. The model of random environments are given by selfsimilar stochastic processes, i.e., a stochastic process whose distribution is invariant under appropriate transformations with respect to space and time. A typical example is a Brownian motion on $\mathbb{R}$. To study limiting behaviors of such stochastic processes, we use the general theory of stochastic processes.

In this study, we considered the following problems and obtained some results: (i) multi-dimensional stochastic processes represented by stochastic differential equations with random delays, (ii) stochastic processes in random environment on disconnected fractal sets, and (iii) limit processes when the random environment is given only on the negative-side on $\mathbb{R}$.

研究分野：確率過程論

キーワード：自己相似過程 ランダム媒質 1次元拡散過程

様式 C-19、F-19-1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

ランダム媒質中の拡散過程に関する研究は、数理物理学の分野で始まった。確率論の問題としての研究は、1970年代から始まり現在まで続いている。この研究では、1986年の Brox による結果がブレイクスルーであり、以後、1次元拡散過程に関する確率解析を用いることで様々な極限定理が得られている。一方で、その証明方法は、物理現象のモデル毎に異なることが多く、統一的な説明はつけられていない。

また、多次元のモデルについては、1次元の場合に比べて研究が進んでおらず、未解決問題が多く残されている。その理由としては、1次元拡散過程の挙動に関する精密な評価を得るための手法は、そのままでは多次元拡散過程に適用できないことが挙げられる。

2. 研究の目的

ランダム媒質中の拡散過程については、不均質な媒質の影響で拡散速度が極端に遅くなる劣拡散的な漸近挙動が見られることが知られている。また、媒質の限定された領域にいる状態である局在化の現象も観察される。確率論の問題として考察すると、漸近挙動に関する結果を精密化したものが局在化の問題である、といえる。

ランダム媒質のモデルとして、Brown 運動に代表される自己相似確率過程、すなわち空間と時間に関して適切な変換の下では、その分布が不変となる確率過程を与える。確率過程論の中で蓄積された研究結果を利用でき、複雑な問題を解決する技術的な利点も多い。

本研究は、ランダム媒質中の拡散過程の研究を行うことを目的としているが

- (i) ランダム媒質をモデル化として用いられる、自己相似確率過程に関する一般論
- (ii) ランダム媒質中の粒子の漸近挙動を調べるために用いられる、マルコフ過程に関する一般論という確率過程に関する既存の手法を拡張、もしくは新規の手法の開発を検討し、それらを用いてランダム媒質中の拡散過程の性質を調べる。問題解決のための新たな手法を模索することで、汎用性も高い定式化を図る、という目的もある。

3. 研究の方法

この研究は確率論の問題であるが、より現実に近いモデルを考察することは重要であると考ええる。本研究では、自己相似過程の理論をランダム媒質中の拡散過程の問題に還元している。このことにより、先行研究で扱われた場合よりも一般的な自己相似性を持つランダム媒質を扱うことができる。また、現実と近いモデルとして、複数の不均質性を持つランダム媒質を解析の対象とする。

多次元のモデルについては、1次元の拡散過程の直積で構成された多次元拡散過程を採用する。この漸近挙動の性質を調べるにあたり、既存の研究で行われているディリクレ形式による手法と併せ、一般化された1次元拡散過程の理論も用いる。これらの手法を用いて、多次元のモデルに関する未解決問題を調べる。

また、今までの研究では扱われていない、1次元に満たない場合のモデルについても考察する。扱うモデルは、非連結なフラクタル図形上にランダムな媒質を与えることで構築される。その中の拡散過程の漸近挙動を調べることによって、1. 図形の複雑さ 2. 媒質のランダムネス 3. 拡散過程のランダムネス から導かれる漸近挙動の異質さに注目して研究を進める。

4. 研究成果

(1) 1次元の負側だけにランダム媒質が与えられている場合の極限定理

従来のモデルではブラウン運動を媒質のモデルとしているが、本研究では安定過程を媒質のモデルとして、分散が存在しない場合も扱っている点で拡張された結果となっている。また、このモデルを解析するために新たな手法を導入し、1次元拡散過程の一般論についても既知の結果を含む、より広いクラスに対する極限定理を与えることができた。この成果は、国内の研究集会

で発表し、得られた結果の一部は[1]に掲載されている。

(2) 非連結なフラクタル上にランダムな媒質を与えたときの拡散過程の漸近挙動

1次元に満たないフラクタル図形上にブラウン運動に由来するランダム媒質を与え、その中で漸近挙動を考察した。極端に拡散のスピードが遅くなる挙動が、図形が持つ幾何的な次元に拠るスケーリングの下で得られることがわかった。このスケーリングは、従来の研究で得られた結果とは大きく異なる点が特徴的である。この成果は国際論文誌に投稿し、査読の結果出版された([2])。

上記の結果は、拡散過程にスケーリングを取ることで導かれる極限分布に関するものである。この問題の精密化についての研究にも着手した。ここでいう精密化とは、スケーリングを取らない拡散過程から得られる極限分布に関する問題の定式化のことで、ランダム媒質中の拡散過程の局在性を示す結果となる。得られた成果は国内の研究集会で発表し、得られた結果の一部は[3]に掲載されている。

(3) 従属性を持つ確率過程を媒質のモデルとした場合の極限定理

遅れを伴う確率微分方程式は、過去の影響が遅れて現れるような自然現象のモデルとして用いられる。これは通常確率微分方程式の一般化となっている。このような性質を持つ遅れを伴う確率微分方程式を用いて、従属性をもつランダム媒質中の多次元拡散過程のモデルを構築した。この確率微分方程式の解は、確率微分方程式の係数と初期データを含む遅れを表す関数について適切な条件を満たすときに一意性をもつ連続解が得られるが、過去の挙動に影響されることからマルコフ性を持つとは限らず、そのため、確率微分方程式の解の表現が煩雑なものになる。そこで、近似解とその評価について考察した。この成果は国際論文誌に投稿し、査読の結果出版された([4])。

<引用文献>

[1] 高橋 弘, 鈴木 由紀, 田村 要造,
Topics on diffusion processes in one-sided random environments,
統計数理研究所共同研究レポート, 2023, Volume 463: 67-73.

[2] Takahashi, Hiroshi and Tamura, Yozo,
Diffusion processes in Brownian environments on disconnected selfsimilar fractal sets in $\mathbb{R}$,
Statistics & Probability Letters, 2023, Volume 193: 109694.

[3] 高橋 弘, 田村 要造,
A limit theorem for diffusion processes in Brownian environments on disconnected fractal sets in $\mathbb{R}$,
統計数理研究所共同研究レポート, 2024, Volume 472: 83-88.

[4] Hashimoto Masataka, Takahashi Hiroshi,
On the rate of convergence of Euler-Maruyama approximate solutions of stochastic differential equations with multiple delays and their confidence interval estimations,
AIMS Mathematics, 2023, Volume 8, Issue 6: 13747-13763.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 3件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 5件）

1. 著者名 Takahashi, Hiroshi and Tamura, Yozo	4. 巻 472
2. 論文標題 A limit theorem for diffusion processes in Brownian environments on disconnected fractal sets in $\mathbb{R}$	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 統計数理研究所共同研究レポート	6. 最初と最後の頁 83-88
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 —

1. 著者名 Takahashi, Hiroshi and Tamura, Yozo	4. 巻 193
2. 論文標題 Diffusion processes in Brownian environments on disconnected selfsimilar fractal sets in $\mathbb{R}$	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Statistics & Probability Letters	6. 最初と最後の頁 109694-109694
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.spl.2022.109694	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 —

1. 著者名 Hashimoto Masataka, Takahashi Hiroshi	4. 巻 8
2. 論文標題 On the rate of convergence of Euler-Maruyama approximate solutions of stochastic differential equations with multiple delays and their confidence interval estimations	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 AIMS Mathematics	6. 最初と最後の頁 13747-13763
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3934/math.2023698	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 —

1. 著者名 Suzuki, Yuki, Takahashi, Hiroshi and Tamura, Yozo	4. 巻 463
2. 論文標題 Topics on diffusion processes in one-sided random environments	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 統計数理研究所共同研究レポート	6. 最初と最後の頁 67-73
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 —

1. 著者名 HASHIMOTO Masataka, TAKAHASHI Hiroshi	4. 巻 75
2. 論文標題 Interval estimations for Euler-Maruyama approximate solutions of stochastic differential equations with multiple delays	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Japan Society of Civil Engineers, Ser. A2 (Applied Mechanics (AM))	6. 最初と最後の頁 I_105-I_111
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2208/jscejam.75.2_I_105	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 —

1. 著者名 高橋 弘, 田村要造	4. 巻 418
2. 論文標題 Diffusion processes in random environments on disconnected self-similar fractal sets in $\mathbb{R}$	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 無限分解可能過程に関連する諸問題(23)	6. 最初と最後の頁 105-110
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 —

[学会発表] 計8件 (うち招待講演 4件／うち国際学会 0件)

1. 発表者名 高橋 弘
2. 発表標題 非連結なフラクタル図形におけるランダム媒質中の 拡散過程の局在化
3. 学会等名 無限分解可能過程に関連する諸問題
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 高橋 弘
2. 発表標題 Localization of diffusion processes in Brownian environments on disconnected fractal sets in $\mathbb{R}$
3. 学会等名 新潟確率論ワークショップ
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 高橋 弘
2. 発表標題 Brox-diffusion と bi-generalized diffusion process (サーベイトーク)
3. 学会等名 拡散過程セミナー (招待講演)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Hiroshi Takahashi
2. 発表標題 Diffusion processes in random environments on disconnected selfsimilar fractal sets in $\mathbb{R}$
3. 学会等名 BOSTON UNIVERSITY-KEIO UNIVERSITY-TSINGHUA WORKSHOP 2023 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 高橋 弘
2. 発表標題 1次元に満たない自己相似図形上のランダム媒質中の拡散過程の漸近挙動について
3. 学会等名 東京確率論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 高橋 弘
2. 発表標題 Brox's diffusion on disconnected selfsimilar fractal sets in $\mathbb{R}$
3. 学会等名 関西確率論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 高橋 弘
2. 発表標題 Brox ' s diffusion processes in disconnected self-similar fractal sets in $\mathbb{R}$
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 高橋 弘
2. 発表標題 Random processes on disconnected self-similar fractal sets in $\mathbb{R}$
3. 学会等名 無限分解可能過程に関連する諸問題
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

—

6. 研究組織			
	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------