

Title	準軸対称な質量分布を有する回転球殻の章動
Sub Title	Nutations of a sphere with a quasi-axisymmetric distribution of mass
Author	山崎, 優樹(Yamazaki, Yuki) 下村, 裕(Shimomura, Yutaka)
Publisher	慶應義塾大学日吉紀要刊行委員会
Publication year	2017
Jtitle	慶應義塾大学日吉紀要. 自然科学 (The Hiyoshi review of natural science). No.61 (2017. 3) ,p.37- 52
JaLC DOI	
Abstract	The nutations of a sphere with a quasi-axisymmetric distribution of mass are measured when spun slowly. It is found that the nutations have the qualitative features similar to those when not spun, but the period of nutation is longer and its center is lower than their counterparts when not spun.
Notes	研究ノート 挿表
Genre	Departmental Bulletin Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN10079809-20170331-0037

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

準軸対称な質量分布を有する回転球殻の章動

山崎優樹^{*1}・下村 裕^{*2}

Nutations of a sphere with a quasi-axisymmetric distribution of mass

Yuki YAMAZAKI and Yutaka SHIMOMURA

Summary—The nutations of a sphere with a quasi-axisymmetric distribution of mass are measured when spun slowly. It is found that the nutations have the qualitative features similar to those when not spun, but the period of nutation is longer and its center is lower than their counterparts when not spun.

1. 序論

2012 年、著者の一人（下村）は Cross から不思議な動きを見せる卵形物体を紹介された¹⁾。卵形の対称軸を鉛直にして 1 秒間に数回転程度でゆっくり自転させると、歳差運動しながらその対称軸が鉛直軸から水平方向にずれていき、そしてまた鉛直方向に戻る動きを繰り返すのである。章動という言葉で、鉛直軸と対称軸のなす角度の振動と広く定義すると、物体は回転しながら大きな振幅の章動を現わすといえる。その運動が病的な動きに見えるので、Cross はその卵形物体を“Pathological Egg”と呼んだ。この“Pathological Egg”は、卵形の殻でできていて、その底部におもりが埋め込まれており、それは物体の質量分布軸対称性を少し破っている。

コマに代表される軸対称物体でも章動が起きることはよく知られている²⁾。例えば、形も質量分布も軸対称な回転楕円体での章動も確認されている^{3,4)}。しかしながら、それらの章動振幅は“Pathological Egg”と比較するとかなり小さいものである。また、“Pathological Egg”は底部におもりが装着されているので、回転速度が遅い場合は章動を起こさず安定に鉛直回転

^{*1} 慶應義塾大学法学部政治学科 4 年

^{*2} 慶應義塾大学日吉物理学教室（〒 223-8521 神奈川県横浜市港北区日吉 4-1-1）Department of Physics, Hiyoshi Campus, Hiyoshi 4-4-1, Kouhokuku, Yokohama, Kanagawa 223-8521, Japan. [Received Oct. 18, 2016]

する。これらの事実を鑑みると、“Pathological Egg”が大きな振幅の章動を現わす原因は、非軸対称な質量分布にあると推測される。実際、「セルトの石」や「ラトルバック」と呼ばれる物体は、軸対称形物体のわずかな非軸対称質量分布によって、歳差回転の振動とも解釈できる運動を現わすことが知られている⁵⁾。

では、“Pathological Egg”の章動は、わずかに非軸対称（準軸対称）な質量分布によってどのような物理的機構から生じるのであろうか？ “Pathological Egg”の主要な質量分布はおなじみの玩具「起き上がり小法師」と同様なので、自転させずに対称軸を鉛直軸から傾け、手を放すだけで対称軸が上下に固有振動する。この振動に着目すると、“Pathological Egg”の非軸対称な質量分布によって鉛直回転の安定性が崩れ、自転しない場合の固有振動によって章動が生じるというシナリオが考えられる。

本研究では、上記シナリオを検証する一環として、最も基本的と思える準軸対称な質量分布を有する球殻について、自転させた場合の章動と無回転の場合の固有振動を計測する。本研究ノートにおいて、第2節で実験方法を説明し、第3節で実験結果を提示し、第4節で結果をまとめて結論する。なお、付録では、本研究で計測した球殻物体モデルの微小固有振動を、摩擦や空気抵抗を無視して解析する。

2. 実験方法

本研究では、準軸対称な質量分布の球殻に対し、自転を与えた場合に生じるその章動と自転を与えない無回転の場合の固有振動を以下の手順で計測する。

1. アクリル製球形カプセルの半球（以下半球 A とする）の大円上、その頂点から中心角 10° ほどの点にカラーサインペンでそれぞれ印をつける。
2. 半球 A の外表面の頂点から角度 α の位置に金属球のおもりをブルタックで固定する。これら金属球とブルタックの合計質量を m とする。
3. もう一方の球形カプセルの半球（以下半球 B とする）の内表面の頂点に金属球のおもりをブルタックで固定する。これら金属球とブルタックの合計質量を M とする。
4. 図 1 のように半球 A, B を接合して球殻を作る。
5. 半球 A, B の頂点を結ぶ軸を鉛直に向け、半球 A の頂点を上にして手動により低速度で回転させる。
6. 球形カプセルの回転の様子を、計測状態にしたストップウォッチと一緒に写るようにセットして、デジタルカメラの動画撮影機能で撮影する。
7. 手順 5 で撮影した動画を再生し、手順 1 で付けた印の一つが止まって見える時点でストップウォッチが示す時刻 t を記録して、球殻がその印に対応する角度 θ に傾いている時点とする。ここでは、目視の精度を考慮して、その印の止まり始める時点とその印が再び動き始める時点を負の傾きも含めて記録する。また、球殻が 10 回自転する時間を記録する。

8. 半球 A の頂点に爪楊枝を装着し、球殻が静止しているときの、半球 A, B の頂点を結ぶ軸と鉛直軸のなす鋭角 θ を分度器により計測する。
9. 球殻を傾けた後に手を放し、ストップウォッチを用いて、回転がない場合の固有振動周期 T を計測する。

実験では半径 $r = 4.95$ [cm], 重さ $m_0 = 54.15$ [g] の球殻を用い、おもり M , m , そして角度 α の値が異なる表 1 に記載した 12 のケースについて計測した。角度 θ と時刻 t は各ケー



図 1. 実際に使用した球殻

表 1. 実験番号

ケース番号	実験番号	M [g]	m [g]	α [°]
1	1, 2, 3	35.22	3.52	30
2	4, 5, 6	35.22	3.52	45
3	7, 8, 9	35.22	3.52	60
4	10, 11, 12	35.22	7.04	30
5	13, 14, 15	35.22	7.04	45
6	16, 17, 18	35.22	7.04	60
7	19, 20, 21	120.00	6.00	30
8	22, 23, 24	120.00	6.00	45
9	25, 26, 27	120.00	6.00	60
10	28, 29, 30	120.00	12.00	30
11	31, 32, 33	120.00	12.00	45
12	34, 35, 36	120.00	12.00	60

スそれぞれ3回ずつ計36回、角度 θ と固有周期 T は各ケースそれぞれ2回ずつ計24回の計測である。

3. 実験結果

実験方法で説明した計測により得られた実験結果は、表2のようにまとめることができる。この表において、章動の周期は3章動の所要時間を3で割って、自転の周期は10回自転の所要時間を10で割って、計測時間より求めた。

図2は、例として実験番号1, 4, 7のデータを、横軸を t 、縦軸を θ として直線で結んだもので、周期的に振動している様子がわかる。

表3は、表2における各ケース(同じ M, m, α)の3計測(実験番号1, 2, 3など)を平均した章動中心の角度 θ 、章動周期 T 、自転周期である。

表4は無回転の固有振動に対して計測された、静止角度 θ 、10周期所要時間(①と②)、平均の固有周期 T である。

図3と図4は、それぞれ角度 θ と周期 T を α に対してプロットしたもので、表3と表4、そして付録に記載された微小固有振動の解析結果を比較している。

表2. 実験結果

実験番号	1		2		3	
	θ [°]	t [s]	θ [°]	t [s]	θ [°]	t [s]
$M = 35.22$ [g] $m = 3.52$ [g] $\alpha = 30$ [°]	-20	0.00	-20	0.00	-20	0.00
	-20	0.06	-20	0.19	-20	0.08
	40	0.66	50	0.63	40	0.60
	40	0.94	50	1.03	40	0.94
	-20	1.44	-20	1.47	-20	1.27
	-20	1.61	-20	1.63	-20	1.50
	40	1.94	50	2.03	40	1.94
	40	2.42	50	2.47	40	2.27
	-20	2.89	-20	2.82	-20	2.81
	-20	3.00	-20	3.00	-20	2.90
	40	3.42	50	3.47	40	3.23
	40	3.73	50	3.81	40	3.73
	-20	4.06	-20	4.27	-20	4.21
	-20	4.32	-20	4.35	-20	4.34
章動の周期 [s]		1.35		1.42		1.40
自転の周期 [s]		0.44		0.34		0.38
自転計測開始時刻 [s]		8.08		27.74		52.31
10回自転計測終了時刻 [s]		12.48		31.11		56.14

実験番号	4		5		6	
	θ [°]	t [s]	θ [°]	t [s]	θ [°]	t [s]
$M = 35.22$ [g] $m = 3.52$ [g] $\alpha = 45$ [°]	0	0.00	-30	0.00	-20	0.00
	0	0.40	-30	0.13	-20	0.29
	20	0.56	50	0.46	40	0.65
	20	1.04	50	0.80	40	1.00
	0	1.40	-30	1.22	-20	1.40
	0	1.55	-30	1.46	-20	1.48
	20	1.76	50	1.74	40	2.00
	20	2.40	50	2.13	40	2.37
	0	2.72	-30	2.70	-20	2.72
	0	2.83	-30	2.80	-20	2.89
	20	3.04	50	3.13	40	3.36
	20	3.45	50	3.46	40	3.48
	0	3.79	-30	3.90	-20	4.00
	0	4.04	-30	4.00	-20	4.29
章動の周期 [s]		1.26		1.30		1.33
自転の周期 [s]		0.44		0.42		0.44
自転計測開始時刻 [s]		9.59		6.99		3.61
10 回自転計測終了時刻 [s]		13.99		11.20		7.98

実験番号	7		8		9	
	θ [°]	t [s]	θ [°]	t [s]	θ [°]	t [s]
$M = 35.22$ [g] $m = 3.52$ [g] $\alpha = 60$ [°]	-10	0.00	-10	0.00	-10	0.00
	-10	0.21	-10	0.12	-10	0.12
	30	0.60	40	0.41	40	0.62
	30	0.87	40	0.82	40	0.80
	-10	1.26	-10	1.09	-10	1.12
	-10	1.39	-10	1.25	-10	1.25
	30	1.70	40	1.60	40	1.57
	30	2.06	40	1.92	40	1.93
	-10	2.29	-10	2.32	-10	2.34
	-10	2.52	-10	2.41	-10	2.50
	30	2.82	40	2.69	40	2.77
	30	3.26	40	3.12	40	3.19
	-10	3.58	-10	3.41	-10	3.47
	-10	3.68	-10	3.59	-10	3.62
章動の周期 [s]		1.19		1.14		1.16
自転の周期 [s]		0.48		0.40		0.45
自転計測開始時刻 [s]		5.54		31.54		55.38
10 回自転計測終了時刻 [s]		10.30		35.51		59.88

実験番号	10		11		12	
	θ [°]	t [s]	θ [°]	t [s]	θ [°]	t [s]
$M = 35.22$ [g] $m = 7.04$ [g] $\alpha = 30$ [°]	-30	0.00	-30	0.00	-30	0.00
	-30	0.08	-30	0.10	-30	0.08
	40	0.34	50	0.35	50	0.34
	40	0.48	50	0.53	50	0.47
	-30	0.77	-30	0.73	-30	0.75
	-30	0.84	-30	0.79	-30	0.84
	40	1.06	50	1.03	50	1.07
	40	1.24	50	1.22	50	1.18
	-30	1.42	-30	1.44	-30	1.41
	-30	1.51	-30	1.53	-30	1.47
	40	1.77	50	1.79	50	1.65
	40	1.90	50	1.94	50	1.81
	-30	2.18	-30	2.16	-30	2.16
	-30	2.24	-30	2.24	-30	2.20
章動の周期 [s]		0.73		0.72		0.72
自転の周期 [s]		0.41		0.54		0.54
自転計測開始時刻 [s]		8.38		30.15		5.57
10回自転計測終了時刻 [s]		12.50		35.51		10.94

実験番号	13		14		15	
	θ [°]	t [s]	θ [°]	t [s]	θ [°]	t [s]
$M = 35.22$ [g] $m = 7.04$ [g] $\alpha = 45$ [°]	-10	0.00	-10	0.00	-10	0.00
	-10	0.16	-10	0.10	-10	0.05
	20	0.34	30	0.34	30	0.32
	20	0.59	30	0.54	30	0.50
	-10	0.74	-10	0.74	-10	0.56
	-10	0.84	-10	0.79	-10	0.70
	20	1.00	30	0.97	30	0.90
	20	1.20	30	1.19	30	1.10
	-10	1.44	-10	1.34	-10	1.25
	-10	1.49	-10	1.44	-10	1.40
	20	1.66	30	1.63	30	1.56
	20	1.84	30	1.84	30	1.76
	-10	2.00	-10	2.03	-10	2.00
	-10	2.16	-10	2.09	-10	2.10
章動の周期 [s]		0.67		0.68		0.67
自転の周期 [s]		0.42		0.40		0.44
自転計測開始時刻 [s]		4.25		18.85		3.54
10回自転計測終了時刻 [s]		8.40		22.85		7.95

実験番号	16		17		18	
	θ [°]	t [s]	θ [°]	t [s]	θ [°]	t [s]
$M = 35.22$ [g] $m = 7.04$ [g] $\alpha = 60$ [°]	-20	0.00	-20	0.00	-20	0.00
	-20	0.05	-20	0.07	-20	0.09
	40	0.21	40	0.21	50	0.40
	40	0.42	40	0.42	50	0.49
	-20	0.60	-20	0.63	-20	0.72
	-20	0.65	-20	0.66	-20	0.79
	40	0.76	40	0.91	50	0.93
	40	1.00	40	1.00	50	1.02
	-20	1.21	-20	1.21	-20	1.29
	-20	1.29	-20	1.32	-20	1.40
	40	1.48	40	1.50	50	1.59
	40	1.70	40	1.63	50	1.75
	-20	1.86	-20	1.84	-20	1.90
	-20	1.92	-20	1.91	-20	2.00
章動の周期 [s]		0.62		0.61		0.63
自転の周期 [s]		0.47		0.34		0.53
自転計測開始時刻 [s]		10.36		23.85		41.44
10 回自転計測終了時刻 [s]		15.01		27.23		46.78

実験番号	19		20		21	
	θ [°]	t [s]	θ [°]	t [s]	θ [°]	t [s]
$M = 120.00$ [g] $m = 6.00$ [g] $\alpha = 30$ [°]	-20	0.00	-10	0.00	-10	0.00
	-20	0.10	-10	0.14	-10	0.21
	50	0.81	50	0.63	50	0.64
	50	1.20	50	1.12	50	1.21
	-20	1.71	-10	1.72	-10	1.75
	-20	1.97	-10	1.94	-10	1.93
	50	2.37	50	2.41	50	2.43
	50	3.03	50	2.94	50	3.00
	-20	3.53	-10	3.50	-10	3.50
	-20	3.76	-10	3.68	-10	3.61
	50	4.13	50	4.22	50	4.17
	50	4.67	50	4.72	50	4.77
	-20	5.21	-10	5.29	-10	5.24
	-20	5.37	-10	5.43	-10	5.43
章動の周期 [s]		1.74		1.76		1.75
自転の周期 [s]		0.49		0.40		0.46
自転計測開始時刻 [s]		29.13		52.84		18.66
10 回自転計測終了時刻 [s]		34.03		56.84		23.22

実験番号	22		23		24	
	θ [°]	t [s]	θ [°]	t [s]	θ [°]	t [s]
$M = 120.00$ [g] $m = 6.00$ [g] $\alpha = 45$ [°]	-10	0.00	-10	0.00	-20	0.00
	-10	0.38	-10	0.05	-20	0.09
	40	0.79	40	0.35	50	0.62
	40	1.00	40	1.07	50	1.00
	-10	1.55	-10	1.52	-20	1.30
	-10	1.73	-10	1.61	-20	1.50
	40	1.97	40	1.85	50	1.84
	40	2.38	40	2.50	50	2.20
	-10	2.76	-10	2.89	-20	2.84
	-10	2.99	-10	3.00	-20	2.96
	40	3.39	40	3.29	50	3.21
	40	3.79	40	3.92	50	3.71
	-10	4.10	-10	4.29	-20	4.17
	-10	4.38	-10	4.39	-20	4.21
章動の周期 [s]		1.37		1.43		1.39
自転の周期 [s]		0.69		0.47		0.42
自転計測開始時刻 [s]		8.14		37.27		6.15
10 回自転計測終了時刻 [s]		15.00		41.92		10.37

実験番号	25		26		27	
	θ [°]	t [s]	θ [°]	t [s]	θ [°]	t [s]
$M = 120.00$ [g] $m = 6.00$ [g] $\alpha = 60$ [°]	-20	0.00	0	0.00	-10	0.00
	-20	0.10	0	0.16	-10	0.12
	70	0.56	40	0.53	40	0.47
	70	0.79	40	1.01	40	0.89
	-20	1.19	0	1.28	-10	1.15
	-20	1.35	0	1.40	-10	1.34
	70	1.62	40	1.72	40	1.58
	70	2.10	40	2.19	40	2.09
	-20	2.56	0	2.47	-10	2.44
	-20	2.63	0	2.69	-10	2.62
	70	3.04	40	3.03	40	2.94
	70	3.45	40	3.38	40	3.40
	-20	3.73	0	3.69	-10	3.68
	-20	3.89	0	3.85	-10	3.89
章動の周期 [s]		1.24		1.23		1.23
自転の周期 [s]		0.43		0.39		0.50
自転計測開始時刻 [s]		5.64		20.86		52.00
10 回自転計測終了時刻 [s]		9.90		24.80		57.02

実験番号	28		29		30	
	θ [°]	t [s]	θ [°]	t [s]	θ [°]	t [s]
$M = 120.00$ [g] $m = 12.00$ [g] $\alpha = 30$ [°]	-30	0.00	-30	0.00	-20	0.00
	-30	0.13	-30	0.16	-20	0.06
	50	0.31	50	0.37	50	0.40
	50	0.53	50	0.66	50	0.56
	-30	0.84	-30	0.93	-20	0.80
	-30	0.94	-30	1.01	-20	0.92
	50	1.16	50	1.27	50	1.29
	50	1.40	50	1.47	50	1.47
	-30	1.74	-30	1.74	-20	1.77
	-30	1.81	-30	1.81	-20	1.85
	50	2.03	50	2.06	50	2.10
	50	2.31	50	2.34	50	2.40
	-30	2.63	-30	2.66	-20	2.56
	-30	2.69	-30	2.72	-20	2.64
章動の周期 [s]		0.88		0.89		0.85
自転の周期 [s]		0.49		0.48		0.47
自転計測開始時刻 [s]		3.31		26.95		42.75
10 回自転計測終了時刻 [s]		8.18		31.70		47.40

実験番号	31		32		33	
	θ [°]	t [s]	θ [°]	t [s]	θ [°]	t [s]
$M = 120.00$ [g] $m = 12.00$ [g] $\alpha = 45$ [°]	-10	0.00	-10	0.00	0	0.00
	-10	0.10	-10	0.05	0	0.17
	40	0.29	50	0.26	30	0.36
	40	0.50	50	0.50	30	0.60
	-10	0.74	-10	0.66	0	0.79
	-10	0.87	-10	0.76	0	1.02
	40	1.10	50	1.00	30	1.12
	40	1.29	50	1.16	30	1.36
	-10	1.50	-10	1.48	0	1.63
	-10	1.66	-10	1.60	0	1.67
	40	1.85	50	1.76	30	1.86
	40	2.00	50	2.01	30	2.10
	-10	2.19	-10	2.26	0	2.29
	-10	2.37	-10	2.38	0	2.36
章動の周期 [s]		0.73		0.75		0.76
自転の周期 [s]		0.62		0.44		0.42
自転計測開始時刻 [s]		3.26		20.91		48.28
10 回自転計測終了時刻 [s]		9.44		25.35		52.50

実験番号	34		35		36	
	θ [°]	t [s]	θ [°]	t [s]	θ [°]	t [s]
$M = 120.00$ [g] $m = 12.00$ [g] 60 [°]	-10	0.00	-10	0.00	-20	0.00
	-10	0.08	-10	0.07	-20	0.11
	50	0.21	50	0.24	50	0.31
	50	0.44	50	0.40	50	0.44
	-10	0.63	-10	0.64	-10	0.71
	-10	0.71	-10	0.74	-10	0.73
	50	0.87	50	0.89	50	0.93
	50	1.08	50	1.09	50	1.14
	-10	1.28	-10	1.30	-10	1.37
	-10	1.37	-10	1.40	-10	1.44
	50	1.50	50	1.59	50	1.63
	50	1.68	50	1.74	50	1.78
	-10	2.00	-10	1.96	-10	2.00
	-10	2.08	-10	2.04	-10	2.08
章動の周期 [s]		0.67		0.65		0.67
自転の周期 [s]		0.49		0.50		0.49
自転計測開始時刻 [s]		11.07		55.18		25.68
10回自転計測終了時刻 [s]		15.94		60.20		30.60

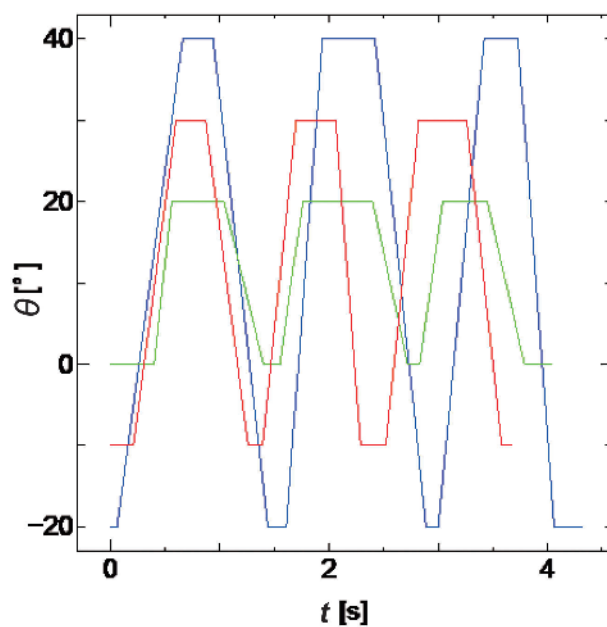
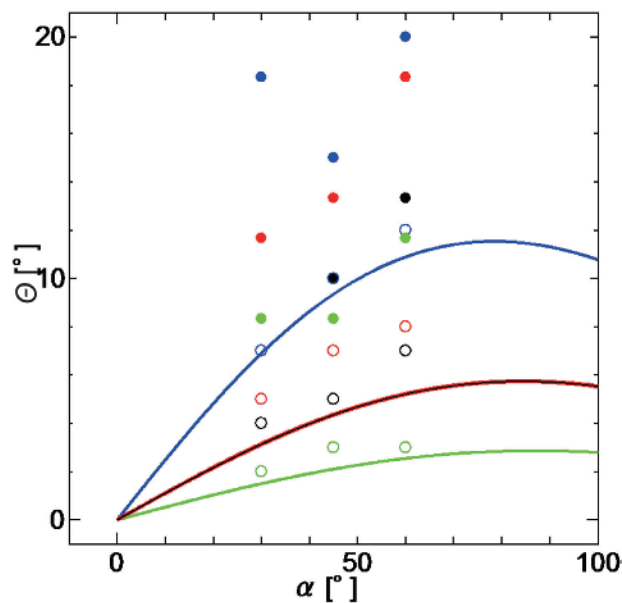
図 2. θ の時間変化 ($M = 35.22$ [g], $m = 3.52$ [g])— 実験番号 1 ($\alpha = 30$ [°]), — 実験番号 4 ($\alpha = 45$ [°]), — 実験番号 7 ($\alpha = 60$ [°])

表 3. 平均した章動中心の角度 θ , 章動周期 T , 自転周期

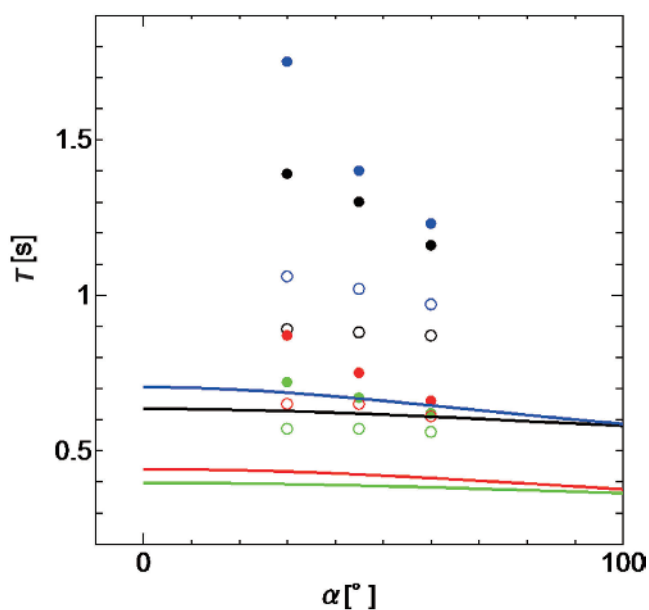
ケース番号	章動中心の角度 θ [°]	章動周期 T [s]	自転周期 [s]
1	11.67	1.39	0.39
2	10.00	1.30	0.43
3	13.33	1.16	0.44
4	18.33	1.75	0.47
5	15.00	1.40	0.53
6	20.00	1.23	0.44
7	8.33	0.72	0.50
8	8.33	0.67	0.42
9	11.67	0.62	0.46
10	11.67	0.87	0.48
11	13.33	0.75	0.49
12	18.33	0.66	0.49

表 4. 固有振動の静止角度 θ と固有周期 T

ケース番号	静止角度 θ [°]	10 周期 所要時間① [s]	10 周期 所要時間② [s]	固有周期 T (①と②の平均 / 10) [s]
1	4	8.92	8.91	0.89
2	5	8.76	8.75	0.88
3	7	8.69	8.63	0.87
4	7	10.60	10.50	1.06
5	10	10.25	10.22	1.02
6	12	9.76	9.71	0.97
7	2	5.75	5.71	0.57
8	3	5.67	5.62	0.57
9	3	5.61	5.60	0.56
10	5	6.50	6.53	0.65
11	7	6.47	6.43	0.65
12	8	6.13	6.12	0.61

図3. 振動中心角度 Θ の角度 α 依存性

黒：ケース 1, 2, 3, 青：ケース 4, 5, 6, 緑：ケース 7, 8, 9, 赤：ケース 10, 11, 12。曲線：微小振動理論，中空丸：固有振動，塗りつぶし丸：章動。(注) 黒線と赤線はほぼ重なっていて見分けにくい。)

図4. 周期 T の角度 α 依存性

黒：ケース 1, 2, 3, 青：ケース 4, 5, 6, 緑：ケース 7, 8, 9, 赤：ケース 10, 11, 12。曲線：微小振動理論，中空丸：固有振動，塗りつぶし丸：章動。

4. 結論

前節の図 3 より以下のことがわかる。

①固有振動の場合、実験した範囲では、角度 α が大きくなると静止角度 θ も大きくなり、定性的に微小振動の理論と同じ傾向を示す。計測値と理論値の定量的な不一致は、計測に用いた半球のおもりは有意な大きさがあること、計測時の振動振幅は微小ではなかったこと、そして静止摩擦が働くことによって生じたと思われる。

②章動の場合、章動中心の角度 θ は固有振動の静止角度に比べてかなり大きい。

また、前節の図 4 より以下のことがわかる。

③固有振動の場合、実験した範囲では、角度 α が大きくなると固有周期 T も小さくなり、定性的に微小振動の理論と同じ傾向を示す。定量的には、①に記載した理由により、計測値は理論値からずれている。

④章動の場合、固有振動と同じように、章動周期 T は角度 α が大きくなると小さくなる傾向が見られるが、固有振動の場合に比べてかなり大きい。

以上より、章動は固有振動と比べて章動中心の角度 θ も章動周期 T も有意に大きくなるので、非軸対称な質量分布によって生じる章動の物理的機構を単なる無回転時の固有振動だけで説明することはできないことが結論される。

5. 謝辞

本研究の主な計測は慶應義塾大学法学部 2015 年度授業「自然科学研究会 III・IV」において行なわれ、河野泰佑君、西村英莉君、森田貴紀君、梁川みつぎ君、原陽輔君の協力を受けた。ここに記して謝意を表する。

付録

図 A1 に示されている、非軸対称な質量分布を有する半径 r の球殻の平面内の微小振動を、摩擦や空気抵抗を無視して考える。中心を O とする質量 m_0 の球殻に質量 M と質量 m の質点が図のように装着されており、鉛直軸と直線 MO のなす角を θ 、直線 MO と直線 mO のなす角を α 、重力加速度を g とする。その結果、重心を G とすると OG の長さ h は

$$h = r \sqrt{M^2 + m^2 - 2Mm \cos \alpha} / (M + m + m_0) \quad (\text{A. 1})$$

と表わすことができる。

まず、この球殻の静止状態を与える角度を $\theta = \theta$ とすると、力のモーメントのつり合いより、

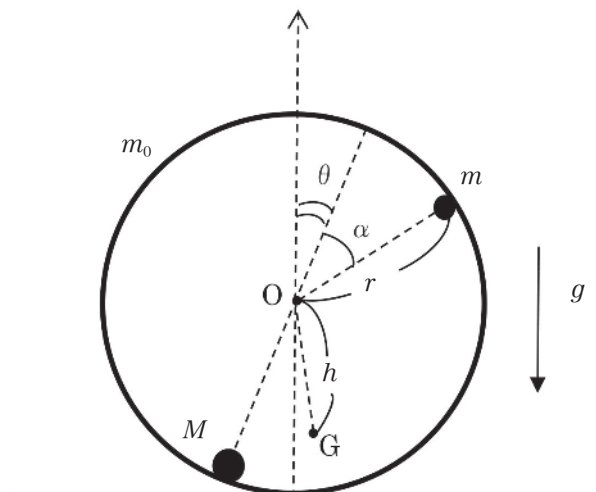


図 A1. 非軸対称な質量分布をもつ球殻

$$Mgr \sin \theta = mgr \sin(\theta + \alpha) \quad (\text{A. 2})$$

すなわち,

$$\theta = \tan^{-1}\{m \sin \alpha / (M - \cos \alpha)\} \quad (\text{A. 3})$$

であり, 図 A2 は本実験で計測された

$$M = 35.22[\text{g}], \quad m = 3.52, 7.04[\text{g}] \quad (\text{A. 4})$$

と

$$M = 120.00[\text{g}], \quad m = 6.00, 12.00[\text{g}] \quad (\text{A. 5})$$

の場合に対する θ の α 依存性を示している。

次に, 球殻の静止状態からの微小振動を仮定すると, 外力はすべて鉛直方向なので, 重心は不動と近似できる。そのため球殻に働く合力がゼロなので, 重心 G まわりの慣性モーメント I

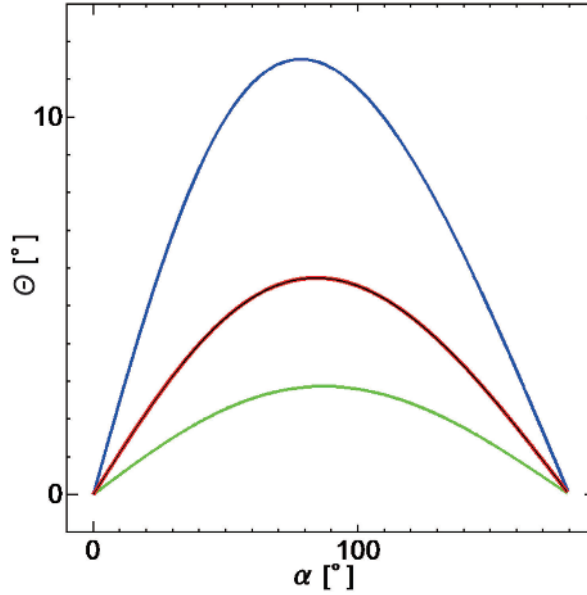
$$I = \left(M + m + \frac{2}{3} m_0 \right) r^2 - (M + m + m_0) h^2 \quad (\text{A. 6})$$

を用いると, 重心まわりの角運動量方程式は

$$I \ddot{\theta} = -Mgr \sin(\theta) + mgr \sin(\theta + \alpha) \quad (\text{A. 7})$$

となる。ここで,

$$\theta' = \theta - \theta \quad (\text{A. 8})$$

図 A2. 角度 Θ の角度 α 依存性

— $M = 35.22$ [g], $m = 3.52$ [g], — $M = 35.22$ [g], $m = 7.04$ [g],
 — $M = 120.00$ [g], $m = 6.00$ [g], — $M = 120.00$ [g], $m = 12.00$ [g].
 (注) 黒線と赤線はほぼ重なっていて見分けにくい。

と定義すると, $|\theta'| \ll 1$ の場合, (A. 2) と (A. 7) より

$$\ddot{\theta}' = -\omega^2 \sin \theta' \approx -\omega^2 \theta' \quad (\text{A. 9})$$

$$\omega = [gr\{M \cos \Theta - m \cos(\Theta + \alpha)\}/I]^{1/2} \quad (\text{A. 10})$$

と単振動の方程式を得る。(A. 3) より

$$M \cos \Theta - m \cos(\Theta + \alpha) = (M^2 + m^2 - 2Mm \cos \alpha)^{1/2} \quad (\text{A. 11})$$

なので, (A. 11) を (A. 10) に代入して

$$\omega = \sqrt{gr/I} (M^2 + m^2 - 2Mm \cos \alpha)^{1/4} \quad (\text{A. 12})$$

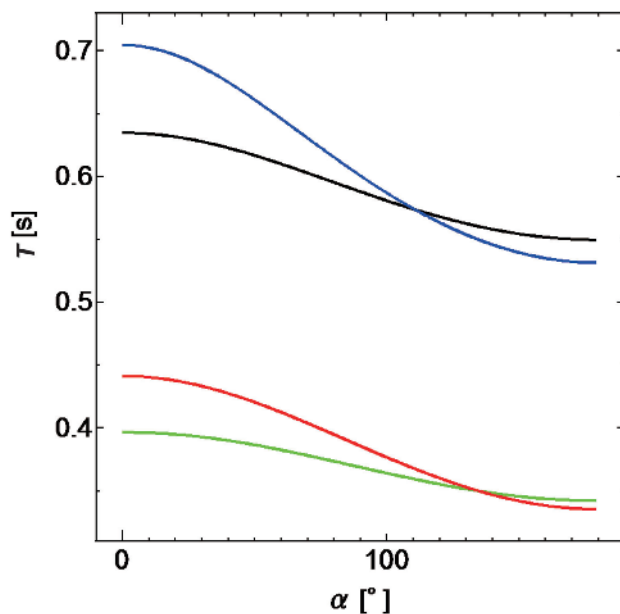
よって, 微小振動の周期 T は,

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{I/gr} (M^2 + m^2 - 2Mm \cos \alpha)^{-1/4} \quad (\text{A. 13})$$

となる。

図 A 3 は, $g = 980$ [cm/s²] として, 本実験で測定した球殻の物理量

$$r = 4.95[\text{cm}], \quad m_0 = 54.15[\text{g}] \quad (\text{A. 14})$$

図 A3. 周期 T の角度 α 依存性

— $M = 35.22$ [g], $m = 3.52$ [g], — $M = 35.22$ [g], $m = 7.04$ [g],
 — $M = 120.00$ [g], $m = 6.00$ [g], — $M = 120.00$ [g], $m = 12.00$ [g]。

と (A. 4), (A. 5) を用いた場合の周期 T を角度 α の関数として表示したものである。

参考文献

- 1) R. Cross: Private communication (2012).
- 2) 山内恭彦：『一般力学』増訂第3版，岩波書店（1959），p. 139.
- 3) Y. Shimomura, M. Branicki and H. K. Moffatt: “Dynamics of an axisymmetric body spinning on a horizontal surface. Part II: Self-induced jumping”, *Proc. Roy. Soc. A*, **461** (2005) 1753–1774.
- 4) T. Mitsui, K. Aihara, C. Terayama, H. Kobayashi and Y. Shimomura: “Can a spinning egg really jump?”, *Proc. Roy. Soc. A*, **462** (2006) 2897–2905.
- 5) H. K. Moffatt and T. Tokieda: “Celt reversals: a prototype of chiral dynamics”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **138A** (2008) 361–368.