

Title	4次元球面上の円作用により不変となる2次元結び目の研究
Sub Title	Study of 2-knots that are invariant under circle actions on the 4-sphere
Author	石川, 昌治(Ishikawa, Masaharu)
Publisher	慶應義塾大学
Publication year	2024
Jtitle	学事振興資金研究成果実績報告書 (2023.)
JaLC DOI	
Abstract	4次元ホモトピー球面上の円作用はMontgomery, YangおよびFintushelにより分類され、後にPaoによって、これらのホモトピー球面は標準的な球面であることが示されている。このような4次元球面上の円作用に対して不変となる2次元結び目をbranched twist spinという。Branched twist spinは3次元球面内の結び目Kおよび互いに素な整数(m,n)から定まる結び目で、$(m,n)=(0,1)$のときはスパン結び目、$(m,n)=(m,1)$のときはツイストスパン結び目と呼ばれる。スパン結び目補空間の基本群はKの補空間の基本群に一致することが知られている。一般のbranched twist spin補空間の基本群の表示はPlotnickにより与えられているが、それらの2次元結び目の具体的な分類は進められていない。本研究では、branched twist spin補空間の基本群に着目することで、3次元球面内の2つの結び目が同型でないときに、ある仮定のもとで、それらのbranched twist spinも同型でないことを示した。ここで述べた仮定とは、Kをorder mのramification locusとする軌道体(orbifold)の基本群の中心が自明であるという仮定である。トーラス結び目以外にこの仮定を満たさない結び目の例は把握してなく、この仮定が本質的に必要かどうかは今後の研究課題となる。証明の手法としては、基本群をその中心で割った商群が同型でないことを利用して、branched twist spinが同型でないことを導く。この商群は、上述の仮定のもと、Kをorder mのramification locusとする軌道体の基本群となることが分かり、2つの軌道体群が同型でないときに、Kも同型でないことが示せれば、問題が解けることになる。例えば、Kが素かつsufficiently largeのときは、軌道体群が異なることとKが同型でないことが同値であることから主張が従う。また、3次元球面のKに沿った巡回分岐被覆空間が双曲的であるときは、Mostow rigidityにより主張を得ることができる。 Circle actions on the 4-sphere are classified by Montgomery, Yang, Fintushel, and Pao. A 2-dimensional knot invariant under a circle action on the 4-dimensional sphere is called a branched twist spin. A branched twist spin is defined from a knot K in a 3-dimensional sphere equipped with a pair of coprime integers (m,n). When $(m,n)=(0,1)$, it is called a spun knot, and when $(m,n)=(m,1)$, it is called a twist spun knot. It is known that the fundamental group of the complement of a spun knot coincides with that of the complement of the corresponding 1-knot K. A presentation of the fundamental group of the complement of a branched twist spin is given by Plotnick. However, a classification of branched twist spins has not been studied until now. In this study, by focusing on the fundamental group of the complements of branched twist spins, we showed, under a certain assumption, that if two branched twist spins for fixed (m,n) are not equivalent then the corresponding 1-knots in the 3-dimensional sphere are also not equivalent. The assumption needed here is that the center of the fundamental group of the orbifold with ramification locus K of order m is trivial. We do not know any knots other than torus knots that do not satisfy this assumption, and whether this assumption is essential is a topic for future research. The proof is done by using the fact that the quotient group of the fundamental group by its center is the fundamental group of the orbifold with ramification locus K of order m under this assumption. If K is prime and sufficiently large, we can show that if the orbifold groups are not isomorphic, then their ramification loci are also not equivalent. If the cyclic branched covers of the 3-dimensional sphere along the knots are hyperbolic then we can get the same conclusion by the Mostow rigidity.
Notes	
Genre	Research Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=2023000010-20230137

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the Keio Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

2023年度 学事振興資金（個人研究）研究成果実績報告書

研究代表者	所属	経済学部	職名	教授	補助額	200千円 (B)
	氏名	石川 昌治	氏名 (英語)	Masaharu Ishikawa		
研究課題 (日本語)						
4次元球面上の円作用により不変となる2次元結び目の研究						
研究課題 (英訳)						
Study of 2-knots that are invariant under circle actions on the 4-sphere						
1. 研究成果実績の概要						
4次元ホモトピー球面上の円作用はMontgomery, Yang および Fintushel により分類され、後にPaoによって、これらのホモトピー球面は標準的な球面であることが示されている。このような4次元球面上の円作用に対して不変となる2次元結び目をbranched twist spinという。Branched twist spinは3次元球面内の結び目Kおよび互いに素な整数(m,n)から定まる結び目で、(m,n)=(0,1)のときはスパン結び目、(m,n)=(m,1)のときはツイストスパン結び目と呼ばれる。スパン結び目補空間の基本群はKの補空間の基本群に一致することが知られている。一般のbranched twist spin補空間の基本群の表示はPlotnickにより与えられているが、それらの2次元結び目の具体的な分類は進められていない。本研究では、branched twist spin補空間の基本群に着目することで、3次元球面内の2つの結び目が同型でないときに、ある仮定のもとで、それらのbranched twist spinも同型でないことを示した。ここで述べた仮定とは、Kをorder mのramification locusとする軌道体(orbifold)の基本群の中心が自明であるという仮定である。トーラス結び目以外にこの仮定を満たさない結び目の例は把握していなく、この仮定が本質的に必要かどうかは今後の研究課題となる。証明の手法としては、基本群をその中心で割った商群が同型でないことを利用して、branched twist spinが同型でないことを導く。この商群は、上述の仮定のもと、Kをorder mのramification locusとする軌道体の基本群となることが分かり、2つの軌道体群が同型でないときに、Kも同型でないことが示せれば、問題が解けることになる。例えば、Kが素かつsufficiently largeのときは、軌道体群が異なることとKが同型でないことが同値であることから主張が従う。また、3次元球面のKに沿った巡回分岐被覆空間が双曲的であるときは、Mostow rigidityにより主張を得ることができる。						
2. 研究成果実績の概要 (英訳)						
Circle actions on the 4-sphere are classified by Montgomery, Yang, Fintushel, and Pao. A 2-dimensional knot invariant under a circle action on the 4-dimensional sphere is called a branched twist spin. A branched twist spin is defined from a knot K in a 3-dimensional sphere equipped with a pair of coprime integers (m,n). When (m,n)=(0,1), it is called a spun knot, and when (m,n)=(m,1), it is called a twist spun knot. It is known that the fundamental group of the complement of a spun knot coincides with that of the complement of the corresponding 1-knot K. A presentation of the fundamental group of the complement of a branched twist spin is given by Plotnick. However, a classification of branched twist spins has not been studied until now. In this study, by focusing on the fundamental group of the complements of branched twist spins, we showed, under a certain assumption, that if two branched twist spins for fixed (m,n) are not equivalent then the corresponding 1-knots in the 3-dimensional sphere are also not equivalent. The assumption needed here is that the center of the fundamental group of the orbifold with ramification locus K of order m is trivial. We do not know any knots other than torus knots that do not satisfy this assumption, and whether this assumption is essential is a topic for future research. The proof is done by using the fact that the quotient group of the fundamental group by its center is the fundamental group of the orbifold with ramification locus K of order m under this assumption. If K is prime and sufficiently large, we can show that if the orbifold groups are not isomorphic, then their ramification loci are also not equivalent. If the cyclic branched covers of the 3-dimensional sphere along the knots are hyperbolic then we can get the same conclusion by the Mostow rigidity.						
3. 本研究課題に関する発表						
発表者氏名 (著者・講演者)	発表課題名 (著書名・演題)		発表学術誌名 (著書発行所・講演学会)		学術誌発行年月 (著書発行年月・講演年月)	
石川昌治	Circle actions on low-dimensional spheres		半田山・幾何・代数セミナー		2023年11月	
石川昌治	Circle actions on the 4-sphere and 3-orbifold groups		International Conference "Singularities and Algebraic Geometry"		2024年3月	