

Title	Millikanの油滴実験による素電荷測定の精度について
Sub Title	On the accuracy of the measurement of the elementary charge by the Millikan's oil-drop experiment
Author	山本, 裕樹(Yamamoto, Yuki)
Publisher	慶應義塾大学日吉紀要刊行委員会
Publication year	2008
Jtitle	慶應義塾大学日吉紀要. 自然科学 (The Hiyoshi review of the natural science). No.44 (2008. ) ,p.81- 97
JaLC DOI	
Abstract	We measure the charge on oil drops by the Millikan's oil-drop method and obtain the elementary charge. Applying the correction for slip in gases to the Stokes' law, we obtain the elementary charge $(1.60\pm 0.01)\times 10^{-19}$ C.
Notes	創立150年記念号：自然科学のエッセンス = 150th anniversary number : essence of natural sciences 研究ノート
Genre	Departmental Bulletin Paper
URL	<a href="https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN10079809-20080930-0081">https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN10079809-20080930-0081</a>

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

## Millikan の油滴実験による素電荷測定の精度について

山 本 裕 樹

On the Accuracy of the Measurement of the Elementary Charge by the Millikan's  
Oil-Drop Experiment

Yuki YAMAMOTO

Summary—We measure the charge on oil drops by the Millikan's oil-drop method and obtain the elementary charge. Applying the correction for slip in gases to the Stokes' law, we obtain the elementary charge  $(1.60 \pm 0.01) \times 10^{-19}$  C.

Key words: Millikan's oil-drop experiment.

### 1 序論

Millikan の油滴実験とは R. A. Millikan と H. Fletcher が1909年に行った油滴を利用した素電荷  $e$  の測定実験 [1, 2, 3] のことである。彼らが得た素電荷の値 [3] は  $e=1.592 \times 10^{-19}$  [C] で, CODATA 2006年推奨値  $e=1.602176487 \times 10^{-19}$  [C] と比べても非常に良い値である。Millikan はこの功績によりノーベル物理学賞を受賞した。

日吉物理学教室では2007年度に文系学生向けの物理学実験のテーマとして「素電荷の測定—ミリカンの実験」を導入した。この実験は原理が簡単で分かりやすく, 測定も簡単のため, 学生実験に適している。ここで得られた素電荷と, 別の学生実験テーマ「電子の電荷と質量の比」で求められる比電荷  $e/m_e$  により, 電子の質量  $m_e$  まで求めることも可能となった。

本論文では, 学生実験で導入したミリカン電気素量測定器を用いて素電荷を測定し, 補正を用いて精度を向上した。電荷の測定には, 油滴の自由落下と電場による上昇から求める方法と, 油滴を静止させるように印加電圧を調整し, その電圧から電荷を求める方法の二通りを行った。素電荷の精度を上げるため, Stokes の法則に対する補正を入れて素電荷を求めた。Millikan

---

慶應義塾大学日吉物理学教室 (〒 223-8521 横浜市港北区日吉 4-1-1) : Dept. of Phys. Keio Univ., 4-1-1 Hiyoshi, Kohoku-ku Yokohama 223-8521 Japan. [Received Apr. 14, 2008]

の実験についての実験例は多数存在するが、実際に補正を考慮した例は少ないため、本論文の実験は有用だと思われる。

本論文の構成は次の通りである。まず、第2節で実験の原理について述べる。第3では実験方法について簡単に述べる。それらに従った実験で得られたデータが第4節である。第5節で実験データを元に解析と考察を行った。第6節はまとめである。付録AはStokesの法則に対する補正について述べる。

## 2 実験の原理

初めに上下に平行に置いた2枚の極板を用意する(図1参照)。この極板間にスプレーで油滴を噴霧する。噴霧された油滴のほとんどは帯電せず、帯電してもその電荷量は小さい。極板間に電圧を印加すると、電場によりその帯電した油滴が運動する。電場により油滴に働く力は油滴の持つ電荷量に比例するため、その速度と油滴の大きさ(質量)を測定すれば、油滴の持つ電荷量を知ることが出来る。油滴の大きさは直接測定が難しいため、同じ油滴について印加電圧の大きさを変えて速度を測ることで求める。

この実験で油滴に働く力は、主に重力、空気抵抗、静電気力の3つである。空気による浮力もあるが、油滴に対しては重力の1000分の1ほどの強さしかないので、ここでは無視する。鉛直方向の座標は下向きを正に取った。

### 1. 重力

油滴に働く重力は

$$F_g = mg \quad (1)$$

である。ここで  $m$  は油滴の質量、 $g$  は重力加速度である。油滴が球状だとすると

$$m = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho \quad (2)$$

で与えられる。ここで  $r$  は油滴の半径、 $\rho$  は油滴の密度である。

### 2. 空気抵抗

Stokesの法則から

$$F_\eta = -6\pi\eta r v \quad (3)$$

で与えられる。ここで  $\eta$  は空気の粘性、 $v = dx/dt$  は油滴の速度である。油滴の半径が大きいほど空気抵抗は大きい。

### 3. 静電気力

下向きの電場  $E$  から受ける静電気力は

$$F_q = qE = q \frac{V}{d} \quad (4)$$

である。ここで  $q$  は油滴の持つ電荷、 $V$  は極板間の電圧、 $d$  は極板間の距離である。

以上、3つの力の組み合わせで油滴は運動する。

極板間に電圧を印加した場合の油滴の運動方程式は

$$m \frac{dv}{dt} = F_g + F_q + F_\eta \quad (5)$$

となる。この解は

$$v = v_t + ae^{-t/\tau} \quad (6)$$

$$v_t \equiv \frac{F_g + F_q}{m} \tau \quad (7)$$

$$\tau \equiv \frac{m}{6\pi\eta r} = \frac{2r^2\rho}{9\eta} \quad (8)$$

である。ここで  $v_t$  は終端速度、 $\tau$  は緩和時間、 $a$  は係数である。自由落下は  $V = 0$  ( $F_q = 0$ ) に対応する。我々の実験で用いる油滴の大きさでは  $\tau \sim 5 [\mu\text{s}]$  なので、我々の測定精度では瞬時に終端速度に達し、等速運動となると考えて良い。

油滴の大きさと電荷は、電圧を二通り印加したときの油滴の速度から知ることが出来る。電圧  $V_1$  を印加したときの油滴の速度  $v_1$  をとすると、式 (5) に式 (1), (2), (3), (4) を代入して

$$\begin{aligned} 0 &= F_g + F_q + F_\eta \\ &= \frac{4\pi}{3} r^3 \rho g + q \frac{V_1}{d} - 6\pi\eta r v_1 \end{aligned} \quad (9)$$

となる。同じ油滴について電圧を  $V_2$  ( $\neq V_1$ ) としたときの速度を  $v_2$  とすると

$$0 = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho g + q \frac{V_2}{d} - 6\pi\eta r v_2 \quad (10)$$

となる。式 (9), (10) から  $q$  を消去すると

$$r = 3 \sqrt{\frac{\eta}{2\rho g} \frac{V_1 v_2 - V_2 v_1}{V_1 - V_2}} \quad (11)$$

が得られる。これを式 (9) に代入して  $q$  について解くと

$$q = 6\pi\eta r d \frac{v_1 - v_2}{V_1 - V_2} \quad (12)$$

となる。よって、式 (11) より油滴の半径を求め、式 (12) より油滴の電荷を求めることができる。

本論文では電圧を 0 にした自由落下速度と、一定電圧を印可して油滴を上昇させたときの速度から電荷を求める方法を用いる。自由落下の場合、 $V_1 = 0$  なので落下速度を  $v_1 = v_g$  とすると式 (11) より

$$r = 3 \sqrt{\frac{\eta v_g}{2\rho g}} \quad (13)$$

となり、 $r$  は電圧に依らずに求まる。電圧  $V_2 = -V_u$  ( $V_u > 0$ ) を印加すると電場は上向きに

なり、油滴の電荷が正ならば油滴は上昇する。油滴の上昇速度を  $v_2 = -v_u$  とすれば式 (12) より

$$q = 6\pi\eta r d \frac{v_u + v_g}{V_u} \quad (14)$$

となる。上昇する油滴を選んで上昇速度を測れば、その油滴の電荷を求めることができる。

また、一定電圧を印可する代わりに、電圧を調整して油滴を静止状態にする方法でも測定した。静止状態 ( $v_2 = 0$ ) になるように電圧を調整して  $V_2 = -V_s$  になったとすると、式 (12) より

$$q = 6\pi\eta r d \frac{v_g}{V_s} \quad (15)$$

となる。式 (14), (15) より

$$V_s = \frac{V_u}{1 + v_u/v_g} \quad (16)$$

の関係があることも分かる。

様々な油滴について測定を行い、得られた  $q$  が連続的でなく離散的に分布していれば、 $q$  が素電荷  $e$  の整数倍になるものとして  $e$  を求めることができる。

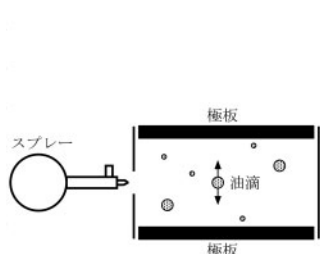


図1 電界槽の模式図

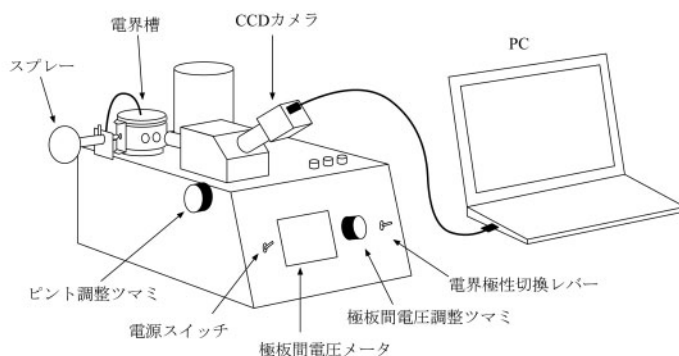


図2 実験装置

### 3 実験方法

測定装置は図2である。島津理化のミリカン電気素量測定器 MLD-20に CCD カメラと PC を接続している。図1のように電界槽内には2枚の極板で挟まれた空間があり、ここにスプレーで油滴を噴霧する。電界槽内部をランプで照らし、油滴で反射、回折した光を CCD カメラを通して PC ディスプレイ上で油滴の運動を観察する。

実験手順は主に以下の通りである。

1. 油滴を電界槽内に噴霧し、電圧を印可して上昇する油滴を選ぶ
2. 電圧を切って、油滴が自由落下で間隔  $L$  を通過する時間  $t_g$  を5回測定
3. 一定電圧を印可し、油滴の上昇で間隔  $L$  を通過する時間  $t_u$  を5回測定

#### 4. 電圧を調整して油滴を静止状態にしたときの電圧を測定

この手順をそれぞれの油滴について行った。

時間の測定にはストップウォッチを使用した。極板間電圧の測定には、MLD-20の極板から出ているコードにデジタルマルチメータを接続して極板間の電圧を測定した\*<sup>1</sup>。油滴測定中は電界槽を開けることができないため、電界槽内部の温度を測ることができない。実験開始直前と直後に電界槽を開け、電界槽内に温度計を差し入れて温度を測った。

### 4 実験結果

各実験で共通のデータは以下の通りである。

空気の粘性 $\eta$	$1.82 \times 10^{-5} \text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$
油の密度 $\rho$	$909 \text{kg}/\text{m}^3$
極板間距離 $d$	$5 \text{mm} (\pm 0.05 \text{mm})$

油の密度はメスシリンダーと電子天秤で測定した。空気の粘性は25°Cの値を理科年表 [4] より引用した。極板間距離は電界槽の構造上、精密に測ることが難しかったため、MLD-20の仕様書から引用した。

以下は各実験データである。10個の油滴の測定を4回行った。実験1, 3と実験2, 4の測定条件は測定距離と電圧が異なる。実験2, 4では意図的に重くて電荷が少ない油滴を選んだが、そのような油滴は落下速度が速く、電圧を印加しても上昇しにくくなるため、測定距離を2mm, 極板間電圧を400Vとした。

\*<sup>1</sup> 電圧計は内部抵抗が大きいものでないと電圧が下がってしまうため、デジタルマルチメータを使用した。

4.1 実験 1

実験日 2007年12月18日  
 実験装置 No. 1  
 気温 測定せず  
 気圧 998.7hPa (開始時), 1000.3hPa (終了時)  
 槽内温度 20.5°C (開始時), 27.5°C (終了時)  
 測定距離  $L$  1 mm  
 極板間電圧  $V_u$  300V

No.		1 回目	2 回目	3 回目	4 回目	5 回目	平均	標準偏差
1	$t_g$ [s]	19.53	20.97	19.97	20.79	19.94	20.24	0.55
	$t_u$ [s]	21.34	21.32	21.25	20.69	20.53	21.03	0.34
2	$t_g$	43.69	43.28	44.45	46.08	43.97	44.29	0.97
	$t_u$	19.65	18.21	18.43	18.49	19.36	18.83	0.57
3	$t_g$	29.26	30.32	27.14	28.95	28.31	28.80	1.05
	$t_u$	12.62	12.83	12.29	12.29	12.51	12.51	0.21
4	$t_g$	44.33	45.38	44.64	45.69	47.58	45.52	1.14
	$t_u$	20.85	21.17	19.08	21.26	19.92	20.46	0.84
5	$t_g$	13.29	13.28	13.64	13.28	13.54	13.41	0.15
	$t_u$	26.83	26.14	25.12	26.96	26.61	26.33	0.67
6	$t_g$	38.48	39.39	41.88	41.94	40.90	40.52	1.37
	$t_u$	21.62	23.73	22.99	22.37	23.63	22.87	0.79
7	$t_g$	29.34	28.96	27.43	30.27	27.25	28.65	1.15
	$t_u$	45.98	46.77	48.58	46.80	49.48	47.52	1.30
8	$t_g$	26.05	25.60	25.45	25.04	24.31	25.29	0.59
	$t_u$	15.49	15.44	14.98	15.43	14.96	15.26	0.24
9	$t_g$	21.37	21.26	20.64	20.79	20.38	20.89	0.37
	$t_u$	20.80	20.85	19.62	21.01	20.01	20.46	0.54
10	$t_g$	29.58	29.66	27.51	30.32	28.32	29.08	1.02
	$t_u$	42.63	44.36	42.00	44.85	44.99	43.77	1.22

表 1 a 自由落下時間と上昇時間

No.	$V_s$ [V]
1	153
2	85
3	93
4	98
5	203
6	100
7	187
8	111
9	150
10	178

表 1 b 静止時電圧

## 4.2 実験 2

実験日	2007年12月26日
実験装置	No. 1
気温	測定せず
気圧	1014.8hPa (開始時), 1016.8hPa (終了時)
槽内温度	19.4°C (開始時), 25.8°C (終了時)
測定距離 $L$	2 mm
極板間電圧 $V_u$	400V

No.		1 回目	2 回目	3 回目	4 回目	5 回目	平均	標準偏差
1	$t_g$ [s]	12.95	13.01	12.80	12.67	12.86	12.86	0.12
	$t_u$ [s]	46.53	47.83	45.83	46.82	46.86	46.77	0.64
2	$t_g$	9.70	9.76	9.72	9.63	9.78	9.72	0.05
	$t_u$	43.37	43.45	42.57	42.23	41.64	42.65	0.69
3	$t_g$	20.18	20.14	19.99	20.30	20.47	20.22	0.16
	$t_u$	73.77	73.05	73.26	72.36	72.07	72.90	0.61
4	$t_g$	9.02	8.89	8.87	8.94	8.83	8.91	0.07
	$t_u$	45.09	45.86	44.51	45.81	44.82	45.22	0.54
5	$t_g$	9.19	9.07	9.16	9.04	8.99	9.09	0.07
	$t_u$	18.70	18.46	18.60	18.71	18.60	18.61	0.09
6	$t_g$	8.84	8.79	8.87	8.89	8.93	8.86	0.05
	$t_u$	47.87	48.12	49.13	46.42	47.94	47.90	0.87
7	$t_g$	14.30	14.27	14.53	14.19	14.18	14.29	0.13
	$t_u$	19.97	19.76	19.47	19.71	19.71	19.72	0.16
8	$t_g$	12.54	12.58	12.23	12.56	12.20	12.42	0.17
	$t_u$	65.63	64.75	63.60	63.80	65.53	64.66	0.84
9	$t_g$	6.79	6.63	6.63	6.73	6.72	6.70	0.06
	$t_u$	46.35	47.39	46.83	46.58	47.30	46.89	0.40
10	$t_g$	14.37	14.44	14.28	14.47	14.40	14.39	0.07
	$t_u$	58.28	59.53	60.45	57.68	57.50	58.69	1.13

表 2 a 自由落下時間と上昇時間

No.	$V_s$ [V]
1	314
2	327
3	315
4	334
5	269
6	339
7	234
8	336
9	350
10	321

表 2 b 静止時電圧



## 4.3 実験 3

実験日	2008年2月9日
実験装置	No. 2
気温	16.4°C
気圧	1005.0hPa (開始時), 1005.6hPa (終了時)
槽内温度	18.5°C (開始時), 24.5°C (終了時)
測定距離 $L$	1 mm
極板間電圧 $V_u$	300V

No.		1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	平均	標準偏差
1	$t_g$ [s]	12.60	12.10	12.25	12.53	12.13	12.32	0.21
	$t_u$ [s]	15.18	15.19	14.99	15.51	15.34	15.24	0.17
2	$t_g$	18.13	19.22	18.25	18.17	18.56	18.47	0.41
	$t_u$	27.85	25.58	28.35	27.95	27.94	27.53	0.99
3	$t_g$	12.56	12.16	11.96	12.35	12.15	12.24	0.20
	$t_u$	15.27	15.21	15.41	15.90	15.66	15.49	0.26
4	$t_g$	37.91	40.61	38.43	36.16	38.72	38.37	1.43
	$t_u$	23.59	25.92	25.52	24.90	26.40	25.27	0.97
5	$t_g$	9.34	9.26	9.42	9.01	9.34	9.27	0.14
	$t_u$	9.53	9.25	9.69	9.15	9.48	9.42	0.20
6	$t_g$	2.92	2.78	2.82	2.80	2.90	2.84	0.06
	$t_u$	16.30	16.07	17.26	17.00	17.32	16.79	0.51
7	$t_g$	8.02	8.04	8.04	7.98	8.06	8.03	0.03
	$t_u$	54.75	56.18	57.89	58.32	59.03	57.23	1.56
8	$t_g$	44.67	49.01	49.14	48.40	47.01	47.65	1.67
	$t_u$	18.26	19.22	18.48	18.22	19.21	18.68	0.45
9	$t_g$	7.49	7.55	7.63	7.23	7.43	7.47	0.14
	$t_u$	9.57	9.64	9.66	9.73	9.78	9.68	0.07
10	$t_g$	11.19	10.52	10.45	10.90	10.47	10.71	0.29
	$t_u$	27.34	28.66	28.06	28.54	28.92	28.30	0.56

表 3 a 自由落下時間と上昇時間

No.	$V_s$ [V]
1	168
2	178
3	167
4	130
5	155
6	259
7	266
8	87
9	172
10	220

表 3 b 静止時電圧

## 4.4 実験 4

実験日	2008年2月14日
実験装置	No. 2
気温	17.5°C
気圧	997.5hPa (開始時), 999.2hPa (終了時)
槽内温度	16.7°C (開始時), 24.6°C (終了時)
測定距離 $L$	2 mm
極板間電圧 $V_u$	400V

No.		1 回目	2 回目	3 回目	4 回目	5 回目	平均	標準偏差
1	$t_g$ [s]	21.88	21.86	21.69	21.45	21.58	21.69	0.16
	$t_u$ [s]	21.96	21.68	21.86	21.98	22.03	21.90	0.12
2	$t_g$	10.61	10.58	10.39	10.23	10.30	10.42	0.15
	$t_u$	75.72	79.16	83.93	81.91	86.21	81.39	3.66
3	$t_g$	9.10	9.16	9.09	9.07	9.04	9.09	0.04
	$t_u$	57.30	57.26	57.03	60.01	60.13	58.35	1.41
4	$t_g$	8.97	8.87	8.96	8.91	8.90	8.92	0.04
	$t_u$	24.07	24.45	24.15	24.76	24.39	24.36	0.24
5	$t_g$	12.22	12.24	12.37	12.22	12.05	12.22	0.10
	$t_u$	20.15	20.10	20.31	20.13	20.66	20.27	0.21
6	$t_g$	10.34	10.29	10.19	10.27	10.11	10.24	0.08
	$t_u$	49.00	48.71	52.63	51.78	53.03	51.03	1.82
7	$t_g$	6.05	5.96	6.00	6.06	6.02	6.02	0.04
	$t_u$	28.28	28.39	28.71	29.06	30.11	28.91	0.66
8	$t_g$	15.06	15.02	15.05	14.94	14.91	15.00	0.06
	$t_u$	7.55	7.51	7.55	7.56	7.55	7.54	0.02
9	$t_g$	7.89	8.01	7.86	7.97	7.83	7.91	0.07
	$t_u$	36.22	36.64	36.81	37.20	37.71	36.92	0.51
10	$t_g$	12.60	12.52	12.45	12.35	12.24	12.43	0.13
	$t_u$	56.01	59.26	58.30	59.91	64.25	59.55	2.70

表 4a 自由落下時間と上昇時間

No.	$V_s$ [V]
1	200
2	357
3	350
4	297
5	252
6	337
7	333
8	137
9	332
10	334

表 4b 静止時電圧

## 5 解析と考察

## 5.1 解析

実験データより解析した油滴の半径と電荷の結果は、それぞれ表 5, 6, 7, 8 である。表中の  $v_g$  は自由落下速度,  $v_u$  は上昇速度で、それぞれ  $v_g = L/(t_g$  の平均値),  $v_u = L/(t_u$  平均値) より求めた。油滴の半径  $r$  は  $v_g$  より式 (13) を使って求めた。油滴の電荷  $q$  は  $v_g, v_u$  より式 (14) を使って求めた。 $n$  は推測した油滴の電荷数,  $e$  は  $e = q/n$  から求めた素電荷である。 $e_s$  は油滴を静止させたときの電圧  $V_s$  より式 (15) で求めた素電荷である。

図 3 は全てのデータの  $q$  を小さい順に並べた棒グラフである。縦軸は  $q$  を CODATA 推奨の素電荷  $1.60 \times 10^{-19} \text{C}$  で割ったものである。これは  $n$  の推測に用いた。棒グラフは階段状になっており、電荷が離散的になっているのが分かる。特に電荷が小さい所では素電荷の整数倍になっていることが確認できる。サンプル数が少ないこともあり、電荷が大きくなるにつれ本当に離散的になっているか分かりにくくなっている。

解析の結果、自由落下速度と上昇速度から得られた素電荷は

$$e = (1.75 \pm 0.01) \times 10^{-19} \text{ [C]} \quad (17)$$

であった。また、自由落下速度と静止状態の電圧から得られた素電荷は

$$e_s = (1.77 \pm 0.02) \times 10^{-19} \text{ [C]} \quad (18)$$

であった。

No.	$v_g$ [ $\mu\text{m/s}$ ]	$v_u$ [ $\mu\text{m/s}$ ]	$r$ [ $\mu\text{m}$ ]	$q$ [ $\times 10^{-19}\text{C}$ ]	$n$	$e$ [ $\times 10^{-19}\text{C}$ ]	$e_s$ [ $\times 10^{-19}\text{C}$ ]
1	49.4	47.6	0.674	3.73	2	1.87	1.87
2	22.6	53.1	0.456	1.97	1	1.97	2.08
3	34.7	79.9	0.565	3.70	2	1.85	1.81
4	22.0	48.9	0.450	1.82	1	1.82	1.73
5	74.6	38.0	0.828	5.32	3	1.77	1.74
6	24.7	43.7	0.477	1.86	1	1.86	2.02
7	34.9	21.0	0.567	1.81	1	1.81	1.81
8	39.5	65.5	0.603	3.62	2	1.81	1.84
9	47.9	48.9	0.664	3.67	2	1.84	1.82
10	34.4	22.8	0.562	1.84	1	1.84	1.86
平均						1.84	1.86

表 5 実験 1 の解析

No.	$v_g$ [ $\mu\text{m/s}$ ]	$v_u$ [ $\mu\text{m/s}$ ]	$r$ [ $\mu\text{m}$ ]	$q$ [ $\times 10^{-19}\text{C}$ ]	$n$	$e$ [ $\times 10^{-19}\text{C}$ ]	$e_s$ [ $\times 10^{-19}\text{C}$ ]
1	155.5	42.8	1.196	10.17	6	1.70	1.69
2	205.8	46.9	1.376	14.92	9	1.66	1.65
3	98.9	27.4	0.954	5.17	3	1.72	1.71
4	224.5	44.2	1.437	16.56	10	1.66	1.66
5	220.0	107.5	1.422	19.98	12	1.67	1.66
6	225.7	41.8	1.441	16.54	10	1.65	1.65
7	140.0	101.4	1.135	11.75	7	1.68	1.66
8	161.0	30.9	1.217	10.02	6	1.67	1.67
9	298.5	42.7	1.657	24.25	15	1.62	1.62
10	139.0	34.1	1.131	8.40	5	1.68	1.68
平均						1.67	1.67

表6 実験2の解析

No.	$v_g$ [ $\mu\text{m/s}$ ]	$v_u$ [ $\mu\text{m/s}$ ]	$r$ [ $\mu\text{m}$ ]	$q$ [ $\times 10^{-19}\text{C}$ ]	$n$	$e$ [ $\times 10^{-19}\text{C}$ ]	$e_s$ [ $\times 10^{-19}\text{C}$ ]
1	81.2	65.6	0.864	7.24	4	1.81	1.79
2	54.1	36.3	0.705	3.64	2	1.82	1.84
3	81.7	64.6	0.867	7.24	4	1.81	1.82
4	26.1	39.6	0.490	1.84	1	1.84	1.69
5	107.9	106.2	0.996	12.18	7	1.74	1.70
6	352.1	59.6	1.799	42.29	26	1.63	1.61
7	124.5	17.5	1.070	8.68	5	1.74	1.72
8	21.0	53.5	0.439	1.87	1	1.87	1.82
9	133.9	103.3	1.110	15.03	9	1.67	1.65
10	93.4	35.3	0.927	6.81	4	1.70	1.69
平均						1.76	1.73

表7 実験3の解析

No.	$v_g$ [ $\mu\text{m/s}$ ]	$v_u$ [ $\mu\text{m/s}$ ]	$r$ [ $\mu\text{m}$ ]	$q$ [ $\times 10^{-19}\text{C}$ ]	$n$	$e$ [ $\times 10^{-19}\text{C}$ ]	$e_s$ [ $\times 10^{-19}\text{C}$ ]
1	92.2	91.3	0.921	7.25	4	1.81	1.82
2	191.9	24.6	1.328	12.33	7	1.76	1.75
3	220.0	34.3	1.422	15.51	9	1.72	1.70
4	224.2	82.1	1.436	18.87	11	1.72	1.69
5	163.7	98.7	1.227	13.81	8	1.73	1.71
6	195.3	39.2	1.340	13.48	8	1.69	1.66
7	332.2	69.2	1.748	30.10	18	1.67	1.66
8	133.3	265.3	1.107	18.93	11	1.72	1.68
9	252.8	54.2	1.525	20.08	12	1.67	1.66
10	160.9	33.6	1.216	10.15	6	1.69	1.67
平均						1.72	1.70

表8 実験4の解析

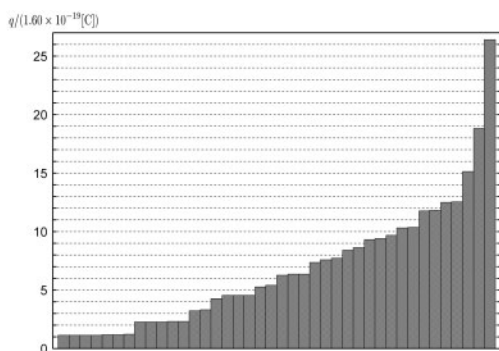
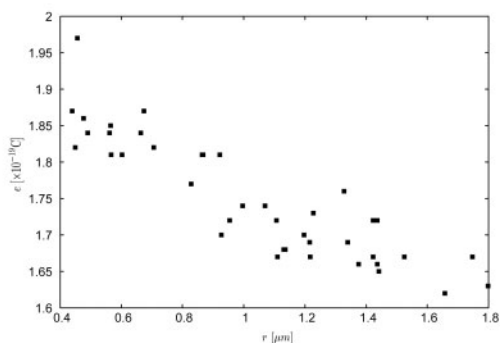


図3 油滴の電荷数分布

図4  $r$ と $e$ の散布図

## 5.2 考察

表1 a, 2 a, 3 a, 4 aを見ると, 同じ油滴に対して $t_u$ と $t_g$ はそれぞれかなりのばらつきがある。例えば自由落下で, 油滴はまっすぐ落下するのではなく, ふらつきながら落下していく。これは空気中の分子にぶつかってブラウン運動しているからである。ここでは1つの油滴につき5回の測定の平均を取ったが, より多くの測定を行うことが望ましい。もしくは, 気圧を低くしてブラウン運動の効果を減らすことも考えられる。

自由落下速度と上昇速度より求めた素電荷(式(17))と, 自由落下速度と静止状態の電圧より求めた素電荷(式(18))比べると, この2つの方法で得られた素電荷の間にはほとんど差がなかった。静止状態を使う方法は, 油滴の静止状態の見極めが難しく, 電圧の調整に時間がかかるため, 上昇速度を使う方法に比べてほとんどメリットが無いと言える。

測定から求められた $e$ はCODATA推奨値にかなり近いが, 誤差内にはCODATA推奨値は入っていない。各油滴から得られた素電荷(表5, 6, 7, 8)を見ると, 全てCODATA推奨値より大きな値になっている。また, 図4は $r$ と $e$ の散布図であるが,  $r$ と $e$ の間に明らか

に相関が認められる。素電荷  $e$  は油滴に依存しない物理量であるはずなので、 $e$  が  $r$  に依存するのは明らかにおかしい。これは装置や測定の精度が足りないのか、原理に何らかの修正が必要なかもしれない。

原理の修正としては Stokes の法則に対する補正が考えられる。補正の詳細は付録 A に述べる。補正を入れると

$$e^{2/3} = e_c^{2/3} \left( 1 + A \frac{l}{r_c} \right) \quad (19)$$

の関係より、補正された素電荷  $e_c$  が得られる。ここで  $l$  は空気の平均自由行程、 $r_c$  は補正された油滴半径である。 $l$  の計算には電界槽内の温度が必要であるが、油滴の観測中に電界槽は密閉されるので温度を測ることは難しい。電界槽内温度は開始時と終了時の温度を平均したものをを用いた。気圧  $P$  も開始時と終了時の気圧を平均したものをを用いた。 $r_c$  と  $l/r_c$  と  $e^{2/3}$  の計算結果は表 9, 10, 11, 12 である。表の  $e^{2/3}$  の単位は  $(10^{-19}\text{C})^{2/3}$  である。図 5 はこれを元に描いたグラフである。

最小 2 乗法で求めた直線 (図 5 の実線) より

$$e_c = (1.60 \pm 0.01) \times 10^{-19} \text{ [C]}, \quad A = 0.802 \pm 0.096 \quad (20)$$

が得られた。ここで  $A$  は補正係数である。 $e_c$  は CODATA 推奨値と有効数字 3 桁で一致した。

補正係数  $A$  は他の文献値 [5]  $A = 1.257$  とは異なる結果となった (図 5 の点線)。実験装置や測定の精度を考えてみたが、これほどの差を与えるものではなかった。なぜこれほどの差があるのかは、現在のところ原因は不明である。

No.	$r_c$ [ $\mu\text{m}$ ]	$l/r_c$	$e^{2/3}$
1	0.640	0.103	1.52
2	0.425	0.155	1.57
3	0.538	0.122	1.51
4	0.431	0.153	1.49
5	0.800	0.082	1.46
6	0.453	0.145	1.51
7	0.544	0.121	1.49
8	0.579	0.114	1.49
9	0.634	0.104	1.50
10	0.537	0.123	1.50

No.	$r_c$ [ $\mu\text{m}$ ]	$l/r_c$	$e^{2/3}$
1	1.173	0.055	1.42
2	1.360	0.047	1.40
3	0.931	0.069	1.44
4	1.421	0.045	1.40
5	1.404	0.046	1.41
6	1.425	0.045	1.40
7	1.117	0.058	1.41
8	1.200	0.054	1.41
9	1.651	0.039	1.38
10	1.113	0.058	1.41

表 9 実験 1 の補正用データ ( $l = 6.58 \times 10^{-2}$  [ $\mu\text{m}$ ]) 表 10 実験 2 の補正用データ ( $l = 6.43 \times 10^{-2}$  [ $\mu\text{m}$ ])

No.	$r_c$ [ $\mu\text{m}$ ]	$l/r_c$	$e^{2/3}$
1	0.829	0.078	1.49
2	0.675	0.096	1.49
3	0.832	0.078	1.49
4	0.468	0.139	1.50
5	0.968	0.067	1.45
6	1.789	0.036	1.39
7	1.041	0.062	1.45
8	0.417	0.156	1.52
9	1.094	0.059	1.41
10	0.907	0.072	1.42

No.	$r_c$ [ $\mu\text{m}$ ]	$l/r_c$	$e^{2/3}$
1	0.884	0.074	1.49
2	1.287	0.051	1.46
3	1.388	0.047	1.44
4	1.403	0.047	1.44
5	1.196	0.055	1.44
6	1.317	0.050	1.42
7	1.723	0.038	1.41
8	1.081	0.061	1.44
9	1.502	0.044	1.41
10	1.194	0.055	1.42

表11 実験3の補正用データ ( $l=6.50 \times 10^{-2}$  [ $\mu\text{m}$ ]) 表12 実験4の補正用データ ( $l=6.56 \times 10^{-2}$  [ $\mu\text{m}$ ])

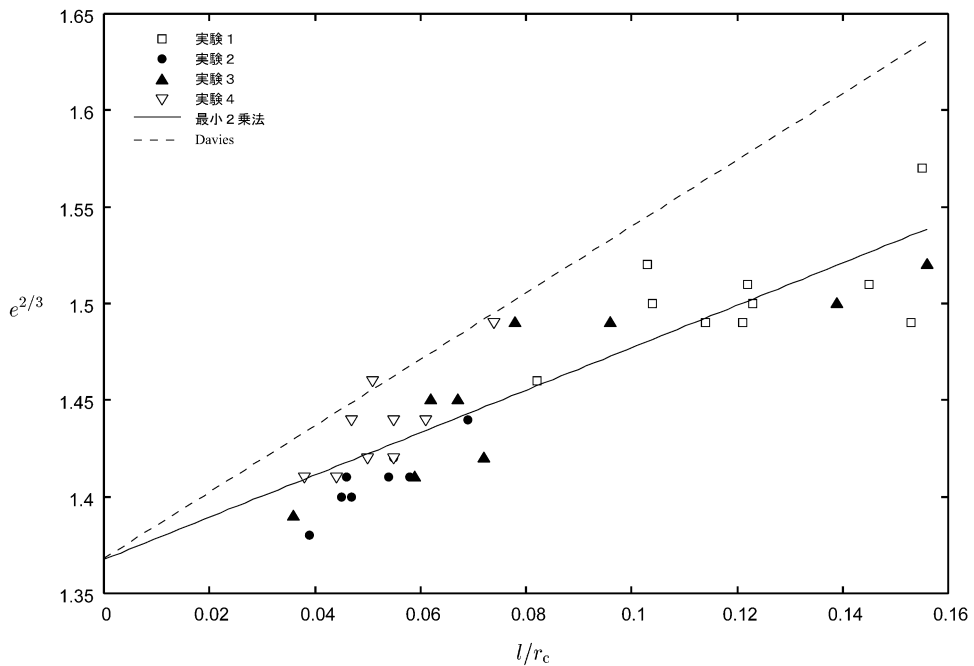


図5  $l/r_c$ と $e^{2/3}$ の関係

## 6 まとめ

Millikanの油滴実験により、素電荷を求めた。油滴の自由落下速度と電場による上昇速度より求められた素電荷は

$$e = (1.75 \pm 0.01) \times 10^{-19} \text{ [C]} \tag{21}$$

であった。これは、静止状態の電圧から求められた素電荷とほぼ同じであった。Stokesの定理に対する補正を考慮すると

$$e_c = (1.60 \pm 0.01) \times 10^{-19} \text{ [C]}, \quad A = 0.802 \pm 0.096 \quad (22)$$

となり、素電荷は CODATA 推奨値と有効数字 3 桁で一致した。我々の実験でも補正を考慮することで、十分な精度で素電荷を求めることができた。補正係数  $A$  は他の文献値と異なるが、原因は不明である。

また、文系学生向けの実験テーマとして考えると、補正まで考慮して素電荷を求める方法は面白いのだが、解析が複雑で時間もかかるため、補正をまともに扱うのは難しい。簡単に、我々が求めた  $A$  と油滴の平均的な半径を用いて計算した補正をあらかじめ与えておくということが考えられる。ただし、なぜこういう補正が必要なのかを説明しておく必要があるだろう。

### 謝辞

この実験に対する様々な提案と適切な指摘を行ってくれた青木健一郎氏に感謝します。この実験を学生実験用に改良・調整してくれた小林慶重氏と柴崎彬氏に感謝します。また、この研究に対する慶應義塾大学2007年度部門内調整費による補助に感謝します。

### 付録 A Stokes の法則の補正

油滴の大きさが大気中気体の平均自由行程ほどの大きさになると、粒子の表面で気体がスリップするために落下速度が変化し、Stokes の法則に対して補正が必要となることが知られている [6]。

この補正は式 (3) の Stokes の法則に補正因子  $C$  を導入することで行われる。

$$F_\eta = -\frac{6\pi\eta rv}{C} \quad (23)$$

$C$  は無次元量なので油滴の半径と平均自由行程の比に依存するように定義する。

$$C = 1 + A\frac{l}{r} \quad (24)$$

$l$  は空気の平均自由行程で、 $A$  は実験より決定される補正係数である。油滴が大きく、 $r/l \gg 1$  ならば  $C = 1$  となり、補正は効かない。

空気の平均自由行程  $l$  は

$$l = \frac{\eta}{0.499\sigma\bar{c}} \quad (25)$$

で定義する [7]。ここで  $\sigma$  は空気の密度、 $\bar{c}$  は気体分子の平均速度である。空気の密度  $\sigma$  は

$$\sigma = \frac{1.293}{1 + 0.00367 \times t \text{ [}^\circ\text{C]}} \frac{P \text{ [hPa]}}{1013} \text{ [kg/m}^3\text{]} \quad (26)$$

で与えられる。平均速度  $\bar{c}$  は Maxwell-Boltzmann の速度分布より



$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} \quad (27)$$

で与えられる。ここで  $k_B = 1.38 \times 10^{-23} [\text{J/K}]$  は Boltzmann 定数,  $m$  は気体分子の質量である。空気の78%は窒素なので, ここでは近似として窒素分子の質量

$$m_{N_2} = 4.65 \times 10^{-26} [\text{kg}] \quad (28)$$

を用いた。

$A$  は実験より決定しなくてはならない。式 (14) に式 (13) を代入して電荷  $q$  から  $r$  を消去すると

$$q = 18\pi\eta^{3/2} \sqrt{\frac{v_g}{2\rho g}} \frac{(v_u + v_g)d}{V_u} \quad (29)$$

となる。補正の式 (24) は  $\eta \rightarrow \eta / (1 + Al/r)$  とすることと同等なので, 補正を入れると

$$\begin{aligned} q_c &= 18\pi \left( \frac{\eta}{1 + Al/r} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{v_g}{2\rho g}} \frac{(v_u + v_g)d}{V_u} \\ &= \frac{q}{(1 + Al/r)^{3/2}} \end{aligned} \quad (30)$$

となる。ここで  $q_c$  は補正入りの油滴の電荷である。素電荷では

$$e_c = \frac{e}{(1 + Al/r)^{3/2}} \quad (31)$$

もしくは

$$e^{2/3} = e_c^{2/3} \left( 1 + A \frac{l}{r} \right) \quad (32)$$

となる。式 (32) では  $e^{2/3}$  と  $l/r$  は比例関係にあり, この直線の切片から  $e_c^{2/3}$ , 傾きから  $e_c^{2/3} A$  を同時に求めることができる。

$r$  の計算には補正の入っていない式 (13) は使えない。そこで, 式 (32) で用いる  $r$  は次のようにして求める。式 (9) と式 (10) から  $6\pi\eta r$  を消去した

$$\frac{v_g}{v_u} = \frac{4\pi r^3 \rho g / 3}{q V_u / d - 4\pi r^3 \rho g / 3} \quad (33)$$

を  $r$  について解くと

$$r = \left[ \frac{3q V_u}{4\pi d g \rho} \frac{v_g}{(v_u + v_g)} \right]^{1/3} \quad (34)$$

が得られる。この式には  $\eta$  が入っていないが,  $q$  を通じて補正が入ってくる。補正を入れると  $q \rightarrow q_c$  に変えるだけである。

$$r = \left[ \frac{3q_c V_u}{4\pi d g \rho} \frac{v_g}{(v_u + v_g)} \right]^{1/3} \equiv r_c \quad (35)$$

この式には求めるべき  $q_c$  が入っているが, 結果として得られる  $q_c$  と一致するように, あらかじめ与えて計算する。この  $r_c$  を使って

$$e^{2/3} = e_c^{2/3} \left( 1 + A \frac{l}{r_c} \right) \quad (36)$$

より  $e_c$  と  $A$  を求める。

#### 参考文献

- [1] R. A. Millikan, *Phil. Mag.* **19**, 209 (1910).
- [2] R. A. Millikan, *Phys. Rev. (Series I)* **32**, 349 (1911).
- [3] R. A. Millikan, *Phys. Rev.* **2**, 109 (1913).
- [4] 理科年表平成20年国立天文台編 (丸善株式会社, 2008).
- [5] C. N. Davies, *Proc. Phys. Soc.* **57**, 259 (1945).
- [6] E. Cunningham, *Proc. Roy. Soc.* **A83**, 357 (1910).
- [7] S. Chapman and T. G. Cowling, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases* (Cambridge University Press, Cambridge, 1970).

