

Title	インターネット望遠鏡の応用：衛星の観測による木星と土星の質量の測定
Sub Title	An application of the internet telescopes : mass of Jupiter and Saturn determined by the observations of those satellites
Author	山本, 裕樹(Yamamoto, Yuki) 表, 實(Omote, Minoru)
Publisher	慶應義塾大学日吉紀要刊行委員会
Publication year	2008
Jtitle	慶應義塾大学日吉紀要. 自然科学 (The Hiyoshi review of the natural science). No.44 (2008.) ,p.59- 80
JaLC DOI	
Abstract	
Notes	創立150年記念号：自然科学のエッセンス = 150th anniversary number : essence of natural sciences 研究ノート
Genre	Departmental Bulletin Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN10079809-20080930-0059

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

インターネット望遠鏡の応用 ——衛星の観測による木星と土星の質量の測定——

山本裕樹・表實

An Application of the Internet Telescopes

—Mass of Jupiter and Saturn Determined by the Observations of Those Satellites—

Yuki YAMAMOTO and Minoru OMOTE

1 序論

インターネット望遠鏡は、インターネットを利用して遠隔地に設置した自動導入の望遠鏡を操作して、天体観測を行うものである。現在、東京都府中市の五藤光学研究所とアメリカニューヨーク州の慶應ニューヨーク学院の2ヶ所にインターネット望遠鏡が設置されており運用中である。インターネット望遠鏡はインターネットを通じて以下の URL にアクセスすれば誰でもどこからでも使用できる。

<http://sylph.fbc.hc.keio.ac.jp/itp/>

詳細については文献 [1, 2, 3] を参照のこと。

本論文ではインターネット望遠鏡を用いた応用例として、木星のガリレオ衛星と呼ばれる4衛星 (Io, Europa, Ganymede, Callisto) を観測し、その軌道半径を求め、ケプラーの第三法則の検証と木星の質量を求めるためのマニュアルとその観測例を挙げる。また、同様に土星の衛星タイタンを観測することで土星の質量を求めた例も挙げる。

ケプラーの第三法則は、ドイツの天文学者であるケプラーが1909年と1919年に発表したケプラーの法則のうちの一つである。ケプラーの法則は3法則から成り、

- ・第一法則：惑星は太陽を一つの焦点とする楕円軌道を描いて運動する
- ・第二法則：惑星と太陽を結ぶ線分が決まった期間に走査する面積は一定（面積速度一定）
- ・第三法則：惑星の公転周期の2乗はその惑星の軌道の長半径の3乗に比例する

というものである。ケプラー自身はこの法則が成り立つ物理的背景の解明には至らなかった。その後、ニュートンによって

慶應義塾大学生物学教室（〒223-8521 横浜市港北区日吉 4-1-1）：Dept. Keio Univ., 4-1-1 Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama 223-8521, Japan. [Received Apr. 14, 2008]

- ・太陽と惑星間には万有引力が作用している
- ・惑星の質量に比して太陽の質量ははるかに大きい

という事実からケプラーの法則が全て導かれることが示された。太陽と惑星の質量の関係は木星とその衛星の質量の関係と同じであるため、ニュートン力学が木星の衛星の運動でも成り立てば、木星の衛星についてもケプラーの法則は成り立つはずである。木星のガリレオ衛星の公転周期は一番長い Callisto でも17日ほどなので、2～3ヶ月もあればガリレオ衛星が数周する様を観察でき、その軌道半径も望遠鏡の画角内に収まるほど小さいため、インターネット望遠鏡で観測する対象に非常に適している。

まず、第2節でデータ解析に必要な理論と式について簡単に述べる。第3節は観測とデータ解析のマニュアルである。これに従って実際に学生が木星のガリレオ衛星を観測し、データ解析によりケプラーの第三法則の検証と木星の質量を求めた例を第4節に挙げる。同様に土星の質量を求めた例を第5節に挙げる。最後の第6節はまとめである。

本論文で使用した観測データ以外の主なデータは、天文年鑑2007年版[4]より引用した。

2 解析方法

この節では木星とその衛星であるガリレオ衛星について考え、観測データから各衛星の軌道半径を求め、木星の質量を求めるための計算方法について述べる。土星とその衛星についてはこの節の計算が容易に応用できる。

2.1 地球と木星間の距離

地球や木星は共に太陽を回る公転運動をしているので、時間と共にその位置は変化する。したがって、地球と木星間の距離 r_{EJ} も時間と共に変化することになる。インターネット望遠鏡で観測した角距離 θ_i ($i=Io, Europa, Ganymede, Callisto$) は木星とその衛星間の視距離であるから、 θ_i から木星とその衛星間の実際の距離 r_i を求めるためには観測日時の r_{EJ} が必要である。地球と木星の座標を求め、それから r_{EJ} を求める。

ある時刻 t における日心座標（太陽を中心とした座標）で惑星の座標は

$$X(t) = a \{ (\cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \cos i \sin \omega) [\cos \psi(t) - e] - \sqrt{1 - e^2} (\cos \Omega \sin \omega + \sin \Omega \cos i \cos \omega) \sin \psi(t) \} \quad (1)$$

$$Y(t) = a \{ (\sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \cos i \sin \omega) [\cos \psi(t) - e] - \sqrt{1 - e^2} (\sin \Omega \sin \omega - \cos \Omega \cos i \cos \omega) \sin \psi(t) \} \quad (2)$$

$$Z(t) = a \sin i \left\{ \sin \omega [\cos \psi(t) - e] + \sqrt{1 - e^2} \cos \omega \sin \psi(t) \right\} \quad (3)$$

である。ここで a は軌道長半径、 Ω は昇交点黄経、 ω は近日点引数、 i は軌道傾角、 e は離心

率である。 $\psi(t)$ は離心近点角と呼ばれ,

$$\psi(t) = M(t) + e \sin M(t) + \frac{e^2}{2} \sin(2M(t)) + \dots \quad (4)$$

で与えられる。ここで $M(t)$ は平均近点角と呼ばれるもので

$$M(t) = M(t_0) + \frac{2\pi}{P}(t - t_0) \quad (5)$$

で与えられる。ここで t_0 は元期, P は公転周期である。

表 1 は各惑星の軌道データである (天文年鑑より引用)。このデータの元期は力学時 (TD) で 2007 年 1 月 1 日 0 時である。力学時と世界時 (UT) は 2007 年で 65 秒ほどしか変わらないので同じと見なしてさしつかえない。日本標準時 (JST) では 2007 年 1 月 1 日 9 時となる。表 1 のデータを実際に計算に使う場合は, 単位換算をする必要がある。

	軌道長半径 a [AU]	公転周期 P [年]	軌道離心率 e	軌道傾角 i [度]	近日点黄経 $\bar{\omega}$ [度]	昇交点黄経 Ω [度]	平均黄経 L [度]
地球	1.00000	1.000040	0.01671	0.0000	103.0577	0.00000	100.2739
木星	5.20260	11.86155	0.04851	1.3029	14.4441	100.5359	246.8719
土星	9.55491	29.53216	0.05552	2.4886	93.1947	113.7269	135.7148

1 AU = 1.49597870 × 10¹¹ m
 1 年 = 365.25 日
 1 度 = $\pi/180$ radian

表 1 軌道データと単位換算表 (元期は力学時で 2007 年 1 月 1 日 0 時)

元期の平均近点角 $M(t_0)$ と近日点引数 ω は以下の式より求められる。

$$M(t_0) = L - \bar{\omega} \quad (6)$$

$$\omega = \bar{\omega} - \Omega \quad (7)$$

式 (1), (2), (3) を使って各惑星の日心座標が計算できる。特に, 地球は $i_E = 0$, $\Omega_E = 0$ のため

$$X_E(t) = a_E \left\{ \cos \omega_E [\cos \psi_E(t) - e_E] - \sqrt{1 - e_E^2} \sin \omega_E \sin \psi_E(t) \right\} \quad (8)$$

$$Y_E(t) = a_E \left\{ \sin \omega_E [\cos \psi_E(t) - e_E] + \sqrt{1 - e_E^2} \cos \omega_E \sin \psi_E(t) \right\} \quad (9)$$

$$Z_E(t) = 0 \quad (10)$$

のように簡単になる。地球の日心座標 $(X_E(t), Y_E(t), Z_E(t))$ と木星の日心座標 $(X_J(t), Y_J(t), Z_J(t))$ から地球木星間の距離 $r_{EJ}(t)$ が

$$r_{EJ}(t) = \sqrt{(X_E(t) - X_J(t))^2 + (Y_E(t) - Y_J(t))^2 + (Z_E(t) - Z_J(t))^2} \quad (11)$$

で求められる。同様に, 土星の日心座標 $(X_S(t), Y_S(t), Z_S(t))$ から地球土星間の距離 $r_{ES}(t)$ が

$$r_{ES}(t) = \sqrt{(X_E(t) - X_S(t))^2 + (Y_E(t) - Y_S(t))^2 + (Z_E(t) - Z_S(t))^2} \quad (12)$$

で求められる。

2.2 衛星の軌道半径

各衛星の観測データから、それらの衛星の公転周期と軌道半径を求める問題は、非線形最小 2 乗法を用いる問題であり、解析方法が複雑である。ここでは衛星の公転周期は与えられているものとすることで線形の最小 2 乗法を使えるようにする。さらに問題を取り扱いやすくするために以下の近似を行い、公転軌道を単純化する。

- ・衛星の公転軌道を円軌道で近似する

- ・衛星は、木星の自転軸に直交する同一平面上にあり、その平面上で運動するものとする

これは衛星の離心率と軌道傾斜角の小ささを考えれば妥当な近似である。以上の条件のもとで衛星の軌道半径を求める。

全部で N 回観測したとき、 n 番目 ($n=1, 2, \dots, N$) の観測日時 t_n における衛星と木星の観測した角距離を $\theta_{i,n}$ とする。地球と木星間の距離 r_{EJ} は衛星の軌道半径 a_i に比べて非常に大きいため、この観測日時における地球から見たときの衛星と木星間の実際の距離 $r_{i,n}$ は、式 (11) から求めた $r_{EJ}(t_n)$ を $\theta_{i,n}$ にかけたもので近似される (図 1 参照)。

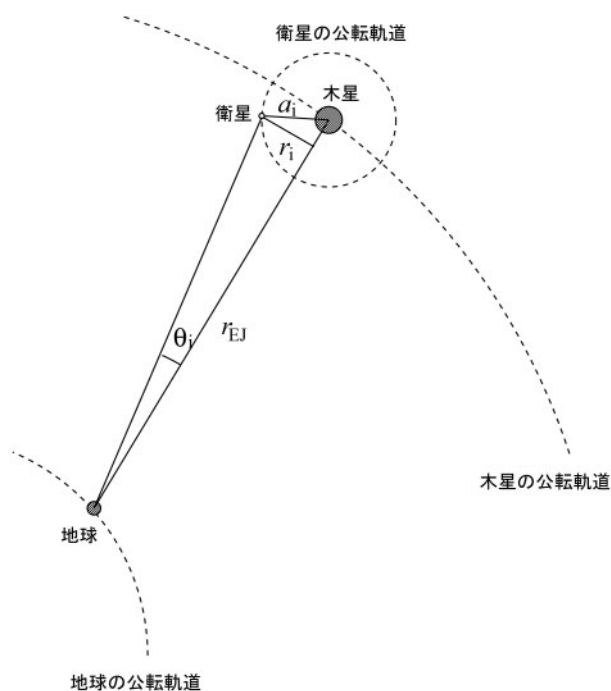


図1 地球と木星とその衛星の位置関係

$$r_{i,n} \simeq r_{\text{EJ}}(t_n)\theta_{i,n} \quad (13)$$

衛星の公転軌道は円軌道で近似しているので、時刻 t のときの $r_i(t)$ は軌道半径 a_i と公転周期 P_i と位相 φ_i を使って表すと

$$r_i(t) = a_i \sin\left(\frac{2\pi}{P_i}t + \varphi_i\right) \quad (14)$$

となる。 a_i と φ_i が観測データから決定されるべきパラメータである。このままでは最小 2 乗法としては使えないので加法定理を使って

$$r_i(t) = A_1 \sin\left(\frac{2\pi}{P_i}t\right) + A_2 \cos\left(\frac{2\pi}{P_i}t\right) \quad (15)$$

のように変形する。ここで

$$a_i = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad (16)$$

$$\varphi_i = \tan^{-1} \frac{A_2}{A_1} \quad (17)$$

の関係が成り立つ。つまり、 A_1 , A_2 を観測データから決定すれば a_i , φ_i を求めることが出来る。

n 番目の観測日時 t_n における r_i の理論値 $r_i(t_n)$ は式 (15) で与えられるが、これと観測データ $r_{i,n}$ の差をとったものを残差 $u_{i,n}$ と呼ぶ。

$$\begin{aligned} u_{i,n} &= r_{i,n} - r_i(t_n) \\ &= r_{i,n} - A_1 \sin\left(\frac{2\pi}{P_i}t_n\right) - A_2 \cos\left(\frac{2\pi}{P_i}t_n\right) \end{aligned} \quad (18)$$

この残差を 2 乗して全ての観測日時について和をとったものを S_1 とする。

$$S_1 = \sum_{n=1}^N u_{i,n}^2 \quad (19)$$

この S_1 を最小にするように A_1 , A_2 を決めるのが最小 2 乗法である。

S_1 を最小にするには S_1 を A_1 , A_2 で微分したものが 0 になれば良い。

$$\frac{\partial S_1}{\partial A_1} = -2 \sum_{n=1}^N \left[r_{i,n} - A_1 \sin\left(\frac{2\pi}{P_i}t_n\right) - A_2 \cos\left(\frac{2\pi}{P_i}t_n\right) \right] \sin\left(\frac{2\pi}{P_i}t_n\right) = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial A_2} = -2 \sum_{n=1}^N \left[r_{i,n} - A_1 \sin\left(\frac{2\pi}{P_i}t_n\right) - A_2 \cos\left(\frac{2\pi}{P_i}t_n\right) \right] \cos\left(\frac{2\pi}{P_i}t_n\right) = 0 \quad (21)$$

これを書き直すと

$$K_1 A_1 + K_2 A_2 = K_4, \quad (22)$$

$$K_2 A_1 + K_3 A_2 = K_5 \quad (23)$$

となる。ここで

$$K_1 = \sum_{n=1}^N \sin^2 \left(\frac{2\pi}{P_i} t_n \right), \quad (24)$$

$$K_2 = \sum_{n=1}^N \sin \left(\frac{2\pi}{P_i} t_n \right) \cos \left(\frac{2\pi}{P_i} t_n \right), \quad (25)$$

$$K_3 = \sum_{n=1}^N \cos^2 \left(\frac{2\pi}{P_i} t_n \right), \quad (26)$$

$$K_4 = \sum_{n=1}^N r_{i,n} \sin \left(\frac{2\pi}{P_i} t_n \right), \quad (27)$$

$$K_5 = \sum_{n=1}^N r_{i,n} \cos \left(\frac{2\pi}{P_i} t_n \right) \quad (28)$$

である。式 (23) を A_1 , A_2 について解くと

$$A_1 = \frac{K_4 K_3 - K_2 K_5}{K_1 K_3 - K_2^2}, \quad (29)$$

$$A_2 = \frac{K_1 K_5 - K_2 K_4}{K_1 K_3 - K_2^2} \quad (30)$$

となる。

まとめると、観測データから式 (29), (30) を使って A_1 , A_2 を決定し、式 (16), (17) から軌道半径 a_i と位相 φ_i を求めることができる。

2.3 ケプラーの第三法則と木星の質量

ケプラーの第三法則が木星の衛星についてもあてはまるならば、各衛星の公転周期 P_i と軌道半径 a_i の間には次の関係が成り立つ。

$$P_i^2 = k a_i^3 \quad (31)$$

比例係数 k は

$$k = \frac{4\pi^2}{GM_J} \quad (32)$$

で与えられ、衛星によらない。ここで $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ [N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2]$ は万有引力定数、 M_J は木星の質量である。 k が求まれば木星の質量を

$$M_J = \frac{4\pi^2}{Gk} \quad (33)$$

で求めることが出来る。

k を求めるには観測データから a_i を求め、最小 2 乗法で a_i^3 と P_i^2 の比例係数を計算すればよい。この場合、残差の 2 乗の和は

$$S_2 = \sum_i (P_i^2 - k a_i^3)^2 \quad (34)$$

である。 i の和は衛星の種類 (Io, Europa, Ganymede, Callisto) について行う。 S_2 を最小にするように k を決めると

$$\frac{\partial S_2}{\partial k} = -2 \sum_i (P_i^2 - k a_i^3) a_i^3 = 0 \quad (35)$$

より

$$k = \frac{\sum_i P_i^2 a_i^3}{\sum_i a_i^6} \quad (36)$$

となる。

3 観測から解析まで

木星の衛星のうち、ガリレオ衛星は非常に明るく、インターネット望遠鏡のサブスコープで十分映すことができる。サブスコープでは同じ静止画像内に木星とガリレオ衛星全てを同時に映せるため、木星と衛星間の距離を測定するのに適している。メインスコープは倍率が大きく、木星とガリレオ衛星全てを同時に映すことは難しいので、この観測には適さない。

3.1 観測手順

1. PC のウェブブラウザで慶應義塾大学インターネット望遠鏡プロジェクトのウェブページ <http://sylph.fbc.hc.keio.ac.jp/itp/> にアクセスし、「インターネット望遠鏡のログインページはこちら」をクリックしログインページを表示する。
2. ログインページの「マニュアル」をクリックし、インターネット望遠鏡の操作方法を理解する。さらに詳しい操作方法が PDF 版として用意されている。
3. インターネット望遠鏡へログインするにはログインページのユーザ名に「guest」と入力してログインボタンをクリックすればゲストユーザとしてログインできる。ゲストユーザで観測は可能だが、連続使用に制限がある。この制限なしに使用したければユーザ登録が必要である。ユーザ登録はログインページの左下の「Contact us」をクリックして管理者にメールを送ること。
4. ログイン後、インターフェースが出てきたら星図（通常は第3フレーム）で木星を選び、木星が地平線より上に出ているかを確認し、出ていたら導入ボタンをクリックして導入する。
5. スライド（通常は第1フレーム）をサブスコープに設定し、そのフレームの中央に木星が来る様にセンタリング機能を使って位置を微調整する。
6. 木星のまわりの衛星ができるだけ明瞭に見えるように感度と露出時間を調整する。
7. 星図上の衛星にカーソルを合わせ、表示された衛星の名前とスライドに映し出された衛星を照合し、名前を付して木星と各衛星の位置関係をあらかじめ用意した紙の上に図示

する。

8. キャプチャボタンをクリックしてスナップショット画面を表示する（図2は実際のスナップショット画面の例*¹）。
9. スナップショットの静止画像上で二点（木星の中心と衛星の中心）をクリックして、静止画像の右にある距離の欄に表示された角度（角距離 θ ）を読み取り、図示した衛星の下に記録する（図3参照）。
10. 9の作業を各衛星ごとに行う。衛星は木星と重なって見えない時があるので、観測日時によって見える衛星の個数は変化する。
11. 以上の作業が終わったら、ログアウトボタンをクリックして終了する。
12. 最後に観測日時（日本標準時）と観測地を記録し、その回の観測を終了する。
13. 木星の観測に適した季節を選んで（天文年鑑参照）、2～3ヶ月（またはそれ以上）にわたって上記の観測作業を実行し、各観測日時の順に観測データを記録する。

土星の衛星を観測する際には木星を土星に置き換えて読むこと。

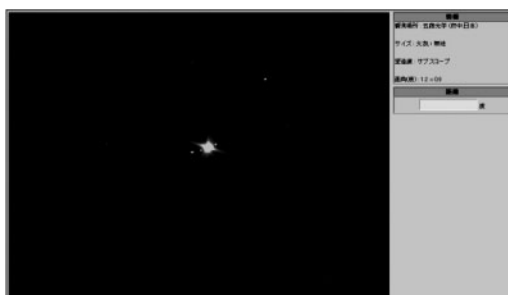


図2 木星とガリレオ衛星のスナップショット

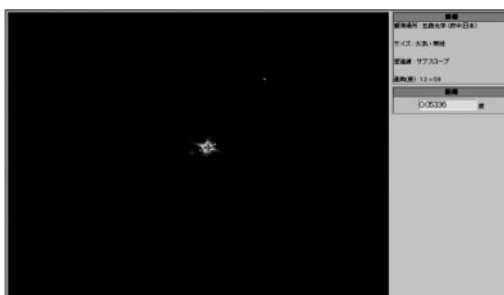


図3 木星と衛星間の角距離の測定

3.2 記録の整理

観測したデータを表計算ソフトで記録する（図4参照）。

1. 表計算ソフトを起動する。
2. 第1列に観測日時を日本標準時で観測順に記録する。例えば2007年5月14日12時20分なら“2007/5/14 12:20”と入力すれば表計算ソフトは自動的にその欄を日付の書式として認識してくれる。
3. 第2列から第5列まで各観測日時の木星と衛星の角距離を Io, Europa, Ganymede, Callisto の順で記録する。この記録を作成するに当たって、衛星が木星と重なって見えなかったときはその観測日時の該当する衛星の欄は空欄にしておく。

*¹ 中央の大きく明るい丸が木星で、木星の右にあるのが Europa、木星の左にあるのが近くから Callisto, Ganymede である。この観測時刻では Io は木星と重なって見えていない。

	A	B	C	D	E
1		角距離[度]			
2	観測日時	Io	Europa	Ganymede	Callisto
3	2007/5/14 12:20	0.02603	-0.05701	0.08049	0.14259
4	2007/5/16 15:05	0.03317	0.04587	-0.06539	0.15958

図4 サンプルの記録例

3.3 軌道半径の測定

第2節の解析方法に基づいた解析の具体的な手順について記す。ここでは例として衛星 Io を取り上げる (図5 参照)。

1. 表計算ソフトを起動する。
2. 観測データの記録から Io を観測した観測日時全てを第1列にコピーする。
3. 観測データの記録から各観測日時における Io と木星の角距離 θ_{Io} を第2列にコピーする。
この角距離の単位は度であることに注意する。
4. 天文年鑑のデータの元期 (ここでは日本標準時で2007年1月1日9時00分) を決め、元期から各観測日時までに経過した日数 t_n を第3列に入力する。邪魔にならない空いている欄に元期を入力しておいて第1列から元期の欄を引き算すれば表計算ソフトで自動的に日数で表示してくれる。日数にならない時は手動で第3列の書式を日数に設定すること。
5. 第4, 5, 6列に t_n の地球と木星の座標の差分 $X_{EJ}(t_n)=X_E(t_n)-X_J(t_n)$, $Y_{EJ}(t_n)=Y_E(t_n)-Y_J(t_n)$, $Z_{EJ}(t_n)=Z_E(t_n)-Z_J(t_n)$ を入力する。
6. t_n における地球と木星間の距離 $r_{EJ}(t_n)$ を第4, 5, 6列から式 (11) で計算して第7列に入力する。
7. t_n における Io と木星間の距離 $r_{Io}(t_n)$ を式 (13) で計算して第8列に入力する。ただし、式 (13) で用いている θ_{Io} の単位は radian なので第2列のデータに $\pi/180$ をかけて radian に変換してから計算すること。
8. t_n における $\sin^2(2\pi t_n/P_{Io})$, $\sin(2\pi t_n/P_{Io})\cos(2\pi t_n/P_{Io})$, $\cos^2(2\pi t_n/P_{Io})$ をそれぞれ第9, 10, 11列に入力する。
9. t_n における $a_{Io}\sin(2\pi t_n/P_{Io})$, $a_{Io}\cos(2\pi t_n/P_{Io})$ をそれぞれ第12, 13列に入力する。
10. 表計算の機能で第9列の全ての観測日時について和をとり、その和を K_1 とする。同様に第10列から第13列のそれぞれについて和をとり、その和を K_2 , K_3 , K_4 , K_5 とする。
11. 求めた K_1 , K_2 , K_3 , K_4 , K_5 から式 (29), (30) を用いて A_1 , A_2 を求める。
12. 式 (16), (17) から Io の軌道半径と位相を求める。

以上の手順を他の3衛星について繰り返せばガリレオ衛星全ての軌道半径と位相が得られる。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	t_0	$P_J[\text{day}]$											
2	2007/1/1 9:00	1.769											
3													
4	観測日時	$\theta_{Io}[\text{度}]$	経過日数	$X_E[10^{11}\text{m}]$	$Y_E[10^{11}\text{m}]$	$Z_E[10^{11}\text{m}]$	$r_E[10^{11}\text{m}]$	$r_J[10^7\text{m}]$	$\sin^2$	$\sin \cos$	$\cos^2$	$r_E \sin$	$r_E \cos$
5	2007/5/14 12:20	0.02603	133.1389	-1.4045	-6.4147	0.0835	6.5672	29.8353	0.9941	-0.0766	0.0059	29.7472	-2.2908
6	2007/5/16 15:05	0.03317	135.2535	-1.4250	-6.3683	0.0830	6.5458	37.8954	0.0693	-0.2540	0.9307	9.9795	-36.5577

図5 サンプルの解析例

4 木星の衛星の観測例とデータ解析

4.1 観測データ

ここでは学生の観測例を挙げる。2007年5月14日から9月6日にわたって慶應義塾大学の総合教育セミナー「天体観測と天文学」を受講した文系学生19人が観測を行った。4つのグループに分かれ、各人が大学のPC、自宅のPCなどで観測した。このようにどこからでも観測できるのがインターネット望遠鏡の利点の一つである。記録したデータは第3.2節に従って表計算ソフトで整理した。

各グループの観測データは表3、4、5、6である。表中の観測日時は日本標準時、各衛星の角距離 θ_i の単位は度である。横線が引かれている欄は木星と衛星が重なって観測できなかったところである。*が付いている値は、後で述べる外れ値として除外したものである。表2のサンプルデータは、学生にどのように観測するかを見せるための見本として観測したもので、これも有効なデータとして加えた。

観測日時	θ_{Io}	θ_{Europa}	$\theta_{Ganymede}$	$\theta_{Callisto}$
07/05/14 12:20	0.02603	-0.05701	0.08049	0.14259
07/05/16 15:05	0.03317	0.04587	-0.06539	0.15958

表2 サンプルデータ

観測日時	θ_{Io}	θ_{Europa}	θ_{Ganymede}	θ_{Callisto}
07/05/21 15:03	0.03160	-0.05701	0.08692	-0.08822
07/05/22 12:53	-0.03317	————	0.03160	-0.13193
07/05/23 14:52	0.03643	0.05217	-0.05579	-0.15860
07/05/24 12:00	-0.03486	-0.02496	-0.09396	-0.16174
07/05/30 14:04	0.03643	0.05690	-0.04519	0.12923
07/05/31 14:06	-0.03643	-0.02414	-0.09202	0.15914
07/06/02 21:40	0.01728	0.05450	0.02684	0.14475
07/06/06 00:07	-0.03000	0.01427	0.03395	-0.02137
07/06/11 21:20	0.03380	-0.05929	0.09048	-0.11608
07/06/12 19:54	-0.03640	————	0.03317	-0.06650
07/06/13 20:10	0.03721	0.05839	————	-0.04425
07/06/15 22:32	————	-0.03274	-0.06914	0.11680
07/06/19 16:00	-0.07990*	-0.01429	0.06172	0.13803
07/06/20 20:25	0.03750	0.05593	-0.03447	0.08633
07/06/23 20:32	————	0.04275	-0.01427	-0.09077
07/06/25 13:06	-0.02051	-0.03660	0.09240	-0.15445
07/06/27 20:06	0.03796	0.05887	-0.02186	-0.14475
07/07/06 22:59	0.01778	-0.03865	-0.02787*	0.05991
07/07/09 22:55	————	-0.04964	0.08939	-0.06232
07/07/13 12:10	0.01648	-0.04983	-0.09133	-0.15601
07/07/18 10:33	-0.02701	0.02388	0.04106	0.07584
07/07/27 21:35	0.03502	-0.05263	-0.08569	-0.12175
07/08/01 11:15	-0.03191	————	0.05998	-0.07321
07/08/12 11:03	————	0.03644	-0.03296	-0.06748

表3 第1班の角距離データ

観測日時	θ_{Io}	θ_{Europa}	θ_{Ganymede}	θ_{Callisto}
07/05/21 14:31	0.03145	-0.05847	0.08417	-0.08615
07/05/22 21:14	-0.02522	0.04129	0.01602	-0.14261
07/05/23 12:30	0.03643	0.05525	-0.04674	-0.15703
07/05/24 00:48	————	0.01687	-0.08168	-0.16416
07/05/25 16:55	0.01202	-0.02998	-0.05847	-0.13762
07/05/26 14:22	-0.01586	0.05229	0.01764	-0.10111
07/05/27 12:50	————	0.02372	0.07790	-0.04894
07/05/28 17:14	0.03347	-0.05701	0.08692	0.02346
07/05/30 12:31	0.03504	0.05858	-0.03995	0.12324
07/05/31 13:32	-0.03643	-0.02298	-0.09202	0.15720
07/06/01 20:48	————	-0.02121	-0.05833	0.16851
07/06/06 00:49	-0.02684	0.03754	-0.01093	-0.02319
07/06/06 10:15	0.01920	0.05892	-0.02105	-0.04555
07/06/11 20:00	0.02928	-0.05839	0.09284	-0.11694
07/06/13 19:56	0.03712	0.05702	-0.04213	————
07/06/19 00:34	0.03683	-0.01912	0.03103*	0.12451
07/06/20 23:42	0.03209	0.05263	-0.04349	0.07930
07/07/04 11:21	-0.01455	0.04211	0.01900	0.16115
07/07/06 22:35	0.03052	-0.05093	-0.06698	0.11035
07/07/09 20:15	————	0.45310*	0.09019	-0.05702
07/07/15 13:40	0.03486	0.05892	————	-0.09030
07/07/16 11:18	0.04260*	————	0.06933	-0.03684
07/07/17 11:22	0.03504	-0.05293	0.08888	0.02331
07/07/18 10:47	-0.03002	0.02756	0.04263	0.07584
07/07/24 21:40	————	-0.03640	0.08053	0.03557
07/07/25 19:10	————	0.04112	0.02501	-0.01728
07/07/27 21:05	0.03209	-0.05250	-0.08698	-0.12023
07/08/07 11:24	0.02756	-0.05293	0.08173	0.14976
07/08/09 21:18	-0.01546	0.02964	-0.03236	0.07139
07/08/18 11:22	0.01900	-0.04933	-0.08303	-0.05543
07/08/24 19:58	————	-0.02868	-0.02868	0.13057
07/08/25 11:58	0.02215	-0.04955	-0.08173	0.11119
07/08/29 11:47	-0.02105	-0.02701	0.07655	-0.07584

表4 第2班の角距離データ

観測日時	θ_{Io}	θ_{Europa}	θ_{Ganymede}	θ_{Callisto}
07/05/21 16:35	0.03518	-0.05810	0.08631	-0.16212*
07/05/24 17:47	-0.01900	-0.04463	-0.09376	-0.16020
07/05/27 00:09	0.03791	0.05958	0.04507	-0.07983
07/05/27 11:56	0.02550	0.02521	0.03751	0.03178*
07/05/28 12:05	0.02231	-0.02811	0.04263*	0.03255
07/05/31 13:57	-0.03790	-0.02569	-0.09344	0.15915
07/06/02 09:58	————	0.05929	0.02522	0.14456
07/06/03 12:05	0.02567	0.03452	0.03841	0.03276*
07/06/04 11:30	0.02786	-0.02278	0.03076*	0.01687
07/06/13 20:32	0.03692	0.05789	-0.04333	————
07/06/18 23:27	0.03380	-0.06002	0.09001	0.16538
07/06/21 10:35	-0.02075	0.01735	-0.07499	0.05210
07/06/27 22:47	————	0.05111	————	-0.15232
07/07/03 14:21	0.02404	-0.03790	0.08147	0.15445
07/07/04 11:49	-0.01900	0.04330	0.02414	0.16427
07/07/06 23:07	-0.08503*	-0.04964	-0.02964*	0.10920
07/07/07 19:45	-0.02768	0.02444	-0.04213	0.05869
07/07/09 23:05	————	-0.05014	0.09031	-0.06041
07/07/13 12:04	0.02231	-0.05324	-0.09133	-0.15623
07/07/21 22:18	-0.02964	0.02071	-0.04743	0.15840
07/07/28 20:35	-0.03187	————	-0.05815	-0.14626
07/08/01 10:08	-0.03035	0.05293	————	-0.02388*
07/08/09 10:25	0.03374	0.05449	————	0.09175
07/08/15 12:32	-0.03347	————	0.07145	-0.14329
07/08/23 19:26	0.01728	0.04702	————	0.14349
07/08/25 19:54	————	-0.03204	-0.07778	0.10380
07/08/30 09:32	0.02544	0.04489	0.03790	-0.01136*
07/09/06 09:06	0.01149	0.03374	0.04758	0.05788

表5 第3班の角距離データ

観測日時	θ_{Io}	θ_{Europa}	$\theta_{Ganymede}$	$\theta_{Callisto}$
07/05/21 15:15	0.03317	-0.05701	0.08527	-0.08885
07/05/22 14:45	-0.03661	0.01847	0.02414	-0.01847
07/05/24 12:50	-0.03471	-0.02724	-0.09501	-0.16317
07/05/26 14:45	————	0.05543	————	-0.09804
07/05/28 15:15	0.21470*	-0.05780	0.09165	0.02529
07/05/29 14:10	-0.03219	0.01648	0.03633	0.07683
07/05/30 03:30	0.03790	0.05532	0.13213*	0.05111*
07/06/06 02:40	-0.03347	0.05736	-0.03795*	-0.05857
07/06/07 13:13	-0.03643	-0.02075	-0.08771	-0.10648
07/06/11 20:56	0.02812	-0.06634	0.08962	-0.12416
07/06/13 21:58	0.03274	0.05293	-0.04791	————
07/06/15 22:56	————	-0.02568	-0.06538	0.19710*
07/06/18 22:35	0.03322	-0.60520*	0.09124	0.15814
07/06/19 23:15	-0.03567	0.01511	0.03977	0.12772
07/06/20 23:25	0.03380	0.05466	-0.04312	0.07744
07/06/21 13:10	-0.02910	0.01555	-0.07477	0.04734
07/06/27 20:20	0.03698	0.05776	-0.01993	-0.13936
07/07/02 12:00	-0.02231	-0.04644	0.08534	0.14663
07/07/31 21:05	0.00795	-0.04328	0.08425	-0.10414
07/08/01 20:08	————	0.03754	0.03977	-0.05253
07/08/03 19:45	0.02257	-0.05003	-0.08604	0.05674
07/08/04 22:16	-0.03029	————	-0.06121	0.10661

表6 第4班の角距離データ

4.2 データ解析

解析の順序は

1. 得られたデータから各衛星の軌道半径を測定
2. 各衛星の軌道半径と公転周期がケプラーの第三法則を満たすことを検証
3. これらのデータから木星の質量を測定

である。

ここで外れ値について記しておく。観測データは不確かさ（誤差）を必ず含み、本当と思われる値の周りにあるまとまった分布をする。データ全体で見て、そのまとまった分布から大きく外れた値を外れ値と呼ぶ。最小2乗法はデータに外れ値があると大きく影響を受けることが知られている。ここで測定したデータをそのまま用いて衛星の公転運動のグラフを描くと、明らかに大きく外れたデータが存在することが分かる。この外れ値の原因は、観測者が19人いて各人の観測環境や観測技術も異なるため、一人で観測するよりもデータの書き写し間違い、符号の間違い、恒星を衛星と誤認するなどのミスが増えたからではないかと考えられる。以下で

は残差の標準偏差で残差を割った標準残差が2以上のデータを外れ値として除外して解析を行った。後に外れ値の影響については考察する。

4.2.1 各衛星の軌道半径

第3.3節に基づいて最小2乗法で各衛星の軌道半径を求めた。最小2乗法に必要な木星の各衛星の公転周期は天文年鑑より引用した^{*2}。

	Io	Europa	Ganymede	Callisto
公転周期 [日]	1.769	3.551	7.155	16.689

この公転周期とデータから最小2乗法で求めた各衛星の軌道半径は以下の通りである^{*3}。軌道半径の単位は 10^7m である。

	Io	Europa	Ganymede	Callisto
軌道半径 [$\times 10^7\text{m}$]	41.9	65.0	103.8	185.9

観測データと求めた軌道半径をもとに公転運動を描いたグラフが図6, 7, 8, 9である。曲線は求めた軌道半径と位相を用いて式(14)で描いた最適曲線である。

4.2.2 ケプラーの第三法則と木星の質量

求めた各衛星の軌道半径 a_i と天文年鑑から引用した周期 P_i より, a_i^2 と P_i^3 の比例係数を式(36)から求めると

$$k = 4.34 \times 10^{-26} [\text{日}^2/\text{m}^3] \quad (37)$$

となった。さらに, 式(33)と $G = 6.67 \times 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2]$ より, 木星の質量は

$$M_J = \frac{4 \times (3.14)^2}{6.67 \times 10^{-11} \times 4.34 \times 10^{-26} \times (24 \times 60 \times 60)^2} = 1.83 \times 10^{27} [\text{kg}] \quad (38)$$

となった。ここで分母の $(24 \times 60 \times 60)^2$ は k の単位を 日^2 から s^2 (秒の2乗)にするために必要な因子である。

各衛星の軌道半径と公転周期の関係をグラフに描いたものが図10である。実線は観測データより求めた式(37)を使った直線で, 点線は天文年鑑より木星の質量 $M_J = 1.90 \times 10^{27} [\text{kg}]$ を用いて式(32)より求めた $k = 4.17 \times 10^{-26} [\text{日}^2/\text{m}^3]$ を使った直線である。

^{*2} 参考までに, 計算ソフト gnuplot を用いて非線形最小2乗法で数値的にフィットしてみると, Callisto で

$a_{\text{Callisto}} = (186.3 \pm 1.8) \times 10^7 [\text{m}]$, $P_{\text{Callisto}} = 16.642 \pm 0.015 [\text{日}]$, $\varphi_{\text{Callisto}} = 1.091 \pm 0.060$

であった。ただし, 非線形最小2乗法は初期値を適切に選ばないと, 全然違う値が出てくるので難しい。

^{*3} 誤差はそれぞれ $\Delta a_{\text{Io}} = 1.3 \times 10^7 [\text{m}]$, $\Delta a_{\text{Europa}} = 1.5 \times 10^7 [\text{m}]$, $\Delta a_{\text{Ganymede}} = 2.1 \times 10^7 [\text{m}]$, $\Delta a_{\text{Callisto}} = 1.9 \times 10^7 [\text{m}]$ 。

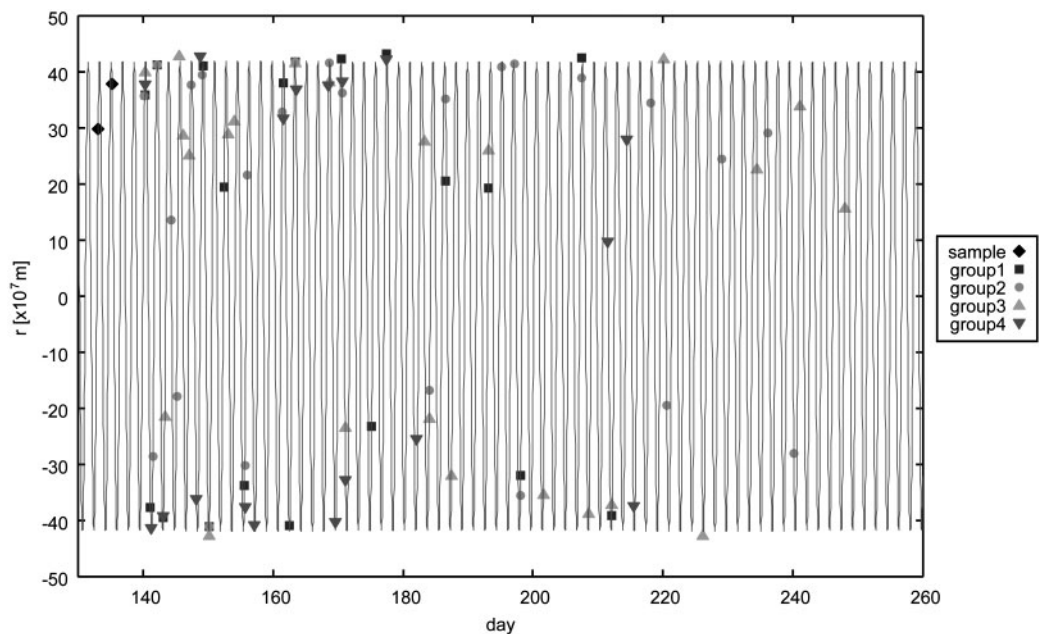


図6 Ioの公転運動のデータと最適曲線

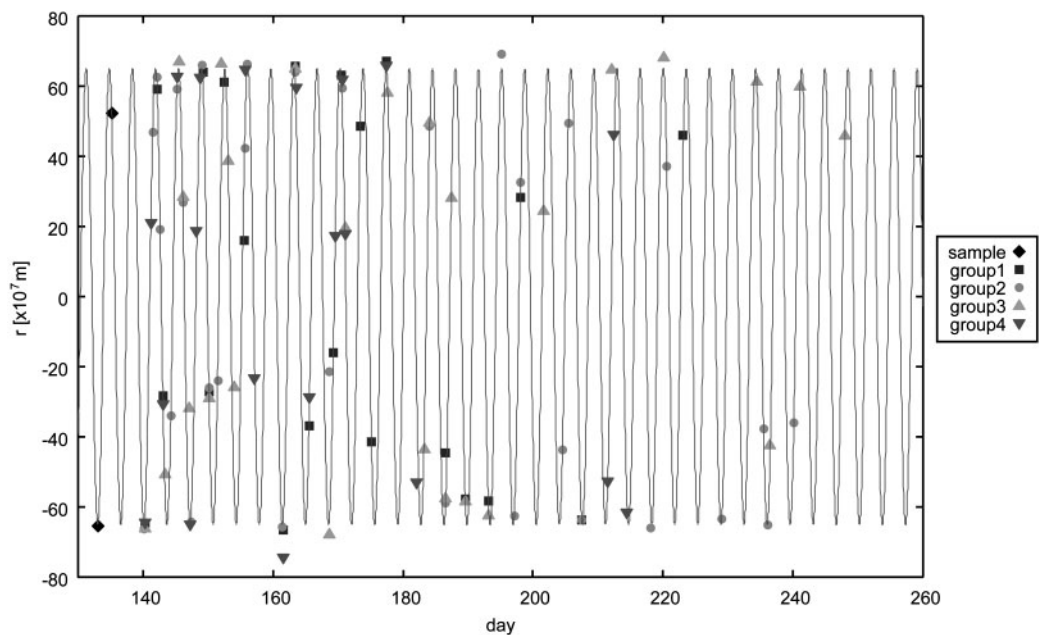


図7 Europaの公転運動のデータと最適曲線

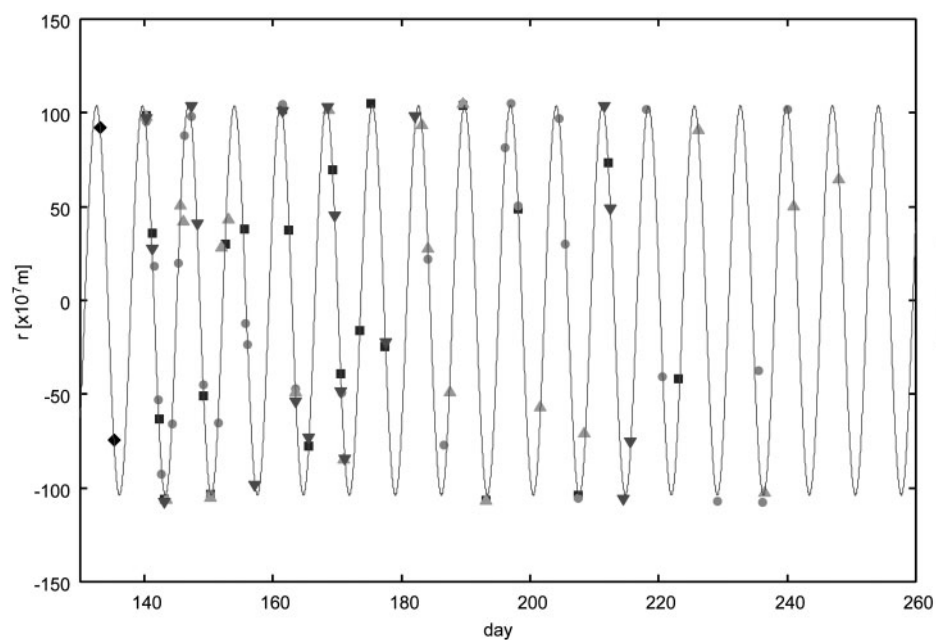


図8 Ganymede の公転運動のデータと最適曲線

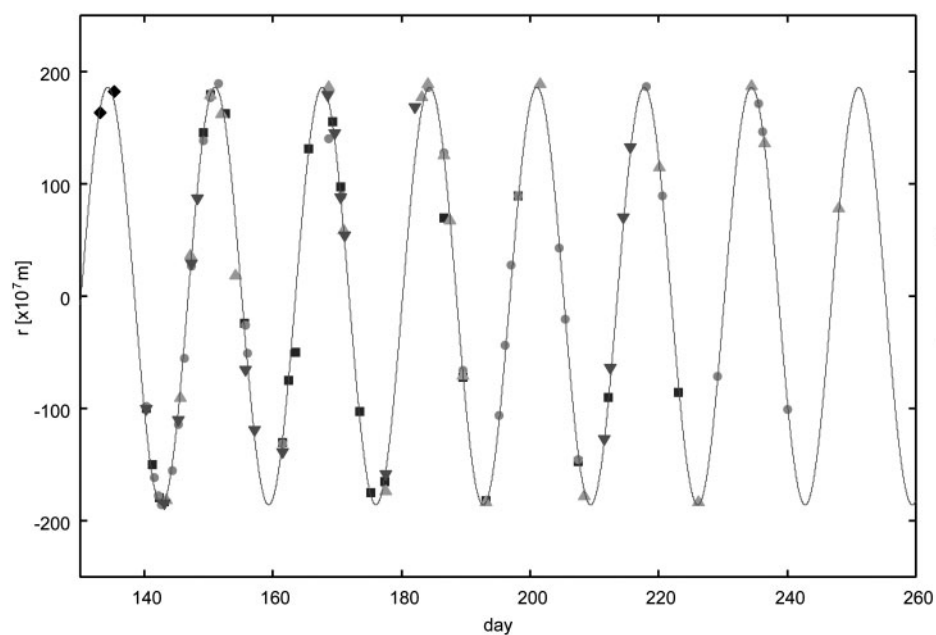


図9 Callisto の公転運動のデータと最適曲線

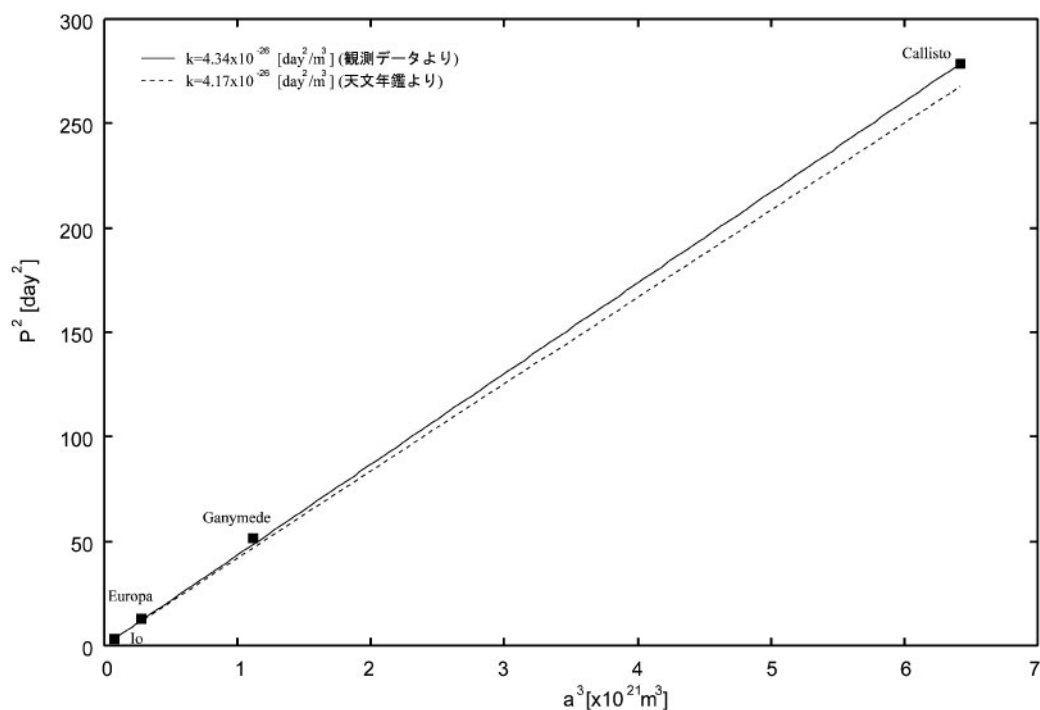


図10 ガリレオ衛星についてのケプラーの第三法則

4.3 考察

4.3.1 各衛星の軌道半径

各衛星の軌道半径の天文年鑑にのっている値は以下の通りである。

	Io	Europa	Ganymede	Callisto
天文年鑑の値	42.2	67.1	107.0	188.3

ここで、軌道半径の単位は 10^7m である。

まず、観測より求めた軌道半径を天文年鑑の値と比較する。

	Io	Europa	Ganymede	Callisto
観測データからの測定値	41.9	65.0	103.8	185.9
天文年鑑の値との差の相対比	0.7%	3.1%	3.0%	1.3%

天文年鑑の値との差の相対比は最大で3.1%であり、かなり良い精度で求められた。

以上のデータは外れ値を除外したデータなので、次に外れ値の効果を調べる。外れ値を除外しなかった場合は

	Io	Europa	Ganymede	Callisto
外れ値込みの測定値	42.7	68.6	98.0	182.6
天文年鑑の値との差の相対比	1.2%	2.2%	8.4%	3.0%

となり、天文年鑑の値との差の相対比は最大で8.4%である。外れ値を除外したことでEuropaの軌道半径以外は改善されたことが分かる。

4.3.2 ケプラーの第三法則と木星の質量

図10を見ると、観測データから得られた軌道半径の3乗と天文年鑑から引用した公転周期の2乗は比例関係にあるのが分かる。つまり、木星のガリレオ衛星についてもケプラーの第三法則は良く成り立っていると言える。

このデータから得られた k は

$$k = 4.34 \times 10^{-26} [\text{日}^2/\text{m}^3] \quad (39)$$

で、これより木星の質量は

$$M_J = 1.83 \times 10^{27} [\text{kg}] \quad (40)$$

であった。これは天文年鑑の値 $M_J = 1.90 \times 10^{27} [\text{kg}]$ と比べても3.7%しか違わない。インターネット望遠鏡を用いてかなり良い精度の値が得られることが分かった。

4.3.3 誤差

誤差の原因と改善策として以下のことが考えられる。

1. 木星の衛星の公転軌道の単純化に起因するもの

これは実際の軌道に合わせて式を修正していけばいくらかでも精度は良くなるが、その代わり式がどんどん複雑化していく。一般学生向けとしてはあまり複雑になるのは望ましくないで、この程度の単純化で十分であろう。

2. 画像のピクセルに起因する測定誤差

角距離の測定はインターネット望遠鏡のインターフェースの機能で静止画像の二点をクリックすることで行ったが、その角距離はクリックした二点のピクセル差から算出するようになっている。この1ピクセルの大きさがインターネット望遠鏡での測定精度の限界となる。1ピクセルを正方形とすると、府中のサブスコープでは1ピクセルの一辺が0.0019度にあたるので、対角線は $0.0019 \times \sqrt{2} = 0.0027$ 度、つまり、少なくとも0.0027度の精度で測定できる。ニューヨークでは一辺が0.0016度、対角線で0.0023度なので、0.0023度の精度がある。測定は府中、ニューヨークで区別していないので測定精度は

$$\Delta\theta = 0.0027 [\text{度}] = 4.7 \times 10^{-5} [\text{rad}] \quad (41)$$

となる。測定期間中の地球と木星間の距離をほぼ

$$r_{\text{EJ}} \simeq 7.0 \times 10^{11} [\text{m}] \quad (42)$$

とすると木星と衛星間の距離 r の精度は

$$\Delta r = r_{\text{EJ}} \times \Delta\theta \simeq 3.3 \times 10^7 \text{ [m]} \quad (43)$$

程度である。インターネット望遠鏡に付いている CCD カメラの質を向上し、キャプチャする画像のサイズを大きくすればこの誤差は減らすことができる。また、望遠鏡が入っている筐体はガラスで覆われているため、その影響で画像がぼやけてしまうことも分かっている。この改善は我々の今後の課題である。

3. 木星の中心を確定することが難しい

これは木星が衛星に比べて明るすぎるためである。衛星が映るようにカメラの感度と露出時間を上げると、木星が明るくなりすぎて木星の輪郭がはつきりせず、どこが中心か分かりにくくなる。逆に感度と露出時間を下げると衛星が映らなくなってしまうというジレンマがある。一番良いのは感度と露出時間を上げて木星と衛星をキャプチャし、すぐに感度と露出時間を下げて木星をキャプチャして、先ほどキャプチャした画像と比べて木星の中心を確定するということだと思われるが、面倒なのであまり実用的ではない。

4. 多くの観測者で観測を分担したため、間違いや勘違いが増加

ここでは外れ値の除外で改善したが、データを故意に取り除くのはあまり望ましくない。観測者が観測に慣れることが一番良いと考えられる。

5 土星の衛星の観測例

ここでは土星の衛星の観測例を挙げる。土星の衛星はいくつもあるが、インターネット望遠鏡で観測に適しているのはタイタンのみである。図11, 12は、サブスコープの感度と露出時間を最大にしてとったスナップショットである。画像上の中央の明るい丸が土星で、右下に小さく光る点がタイタンである。タイタンのみではケプラーの第三法則の検証はできないが、土星の質量を求めることはできる。

観測データは表7である。天文年鑑よりタイタンの公転周期は

$$P_{\text{Titan}} = 15.945 \text{ [日]} \quad (44)$$

である。このデータから求めたタイタンの軌道半径は

$$a_{\text{Titan}} = 121.6 \times 10^7 \text{ [m]} \quad (45)$$

であった*4。これをもとに描いた公転運動のグラフが図13である。天文年鑑でのタイタンの軌道半径 $a_{\text{Titan}} = 122.185 \times 10^7 \text{ [m]}$ と比べると0.5%の差しかなかった。

観測できる衛星はタイタンしかないため、 k は軌道半径の3乗と公転周期の2乗のグラフで原点とタイタンの点を結んだ直線の傾きから直接得られる。つまり、

$$k = \frac{P_{\text{Titan}}^2}{a_{\text{Titan}}^3} = 1.41 \times 10^{-25} \text{ [日}^2/\text{m}^3] \quad (46)$$

*4 誤差は $\Delta a_{\text{Titan}} = 6.7 \times 10^7 \text{ [m]}$ 。

である。これより、土星の質量は

$$M_S = \frac{4 \times (3.14)^2}{6.67 \times 10^{-11} \times 1.41 \times 10^{-25} \times (24 \times 60 \times 60)^2} = 5.62 \times 10^{26} \text{ [kg]} \quad (47)$$

と求められる。これは天文年鑑の値 $M_S = 5.68 \times 10^{26} \text{ [kg]}$ と比べても 1 % しか変わらず、これも非常に良い測定値が得られた。



図11 土星のスナップショット

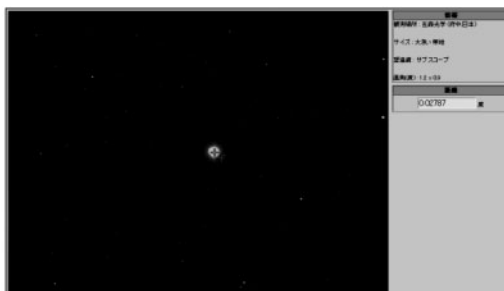


図12 土星とタイタン間の角距離の測定

観測日時	θ_{Titan}
07/05/21 15:34	-0.03432
07/05/22 12:53	-0.04430
07/05/22 21:20	-0.04316
07/05/23 12:35	-0.04894
07/05/24 12:20	-0.04519
07/05/26 20:24	-0.02062
07/05/27 12:55	-0.01680
07/05/28 12:30	0.01001
07/05/30 12:38	0.04106
07/06/02 21:40	0.03322
07/06/04 19:33	-0.00530
07/06/11 20:10	-0.02250
07/06/12 19:55	0.01325
07/06/13 20:03	0.02096
07/06/20 20:34	0.01200

表7 タイタンの角距離データ

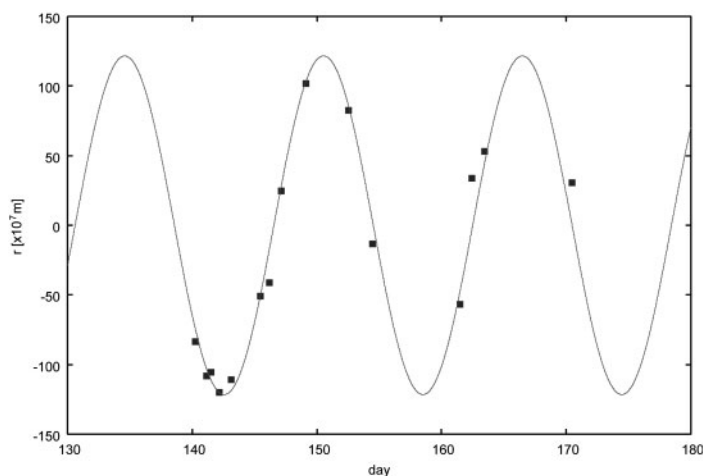


図13 タイタンの公転運動のデータと最適曲線

6 まとめ

インターネット望遠鏡を応用した例として、木星と土星についてそれぞれの衛星をインターネット望遠鏡で観測することで木星と土星の質量が十分な精度で得られることが分かった。特に、木星の4つのガリレオ衛星を観測することで木星についてもケプラーの第三法則が成り立

っていることを検証することもできた。用いた道具はインターネット望遠鏡と表計算ソフトと紙と鉛筆だけである。それ以外は特別な道具が必要ないため、誰でもこの応用例を実行することができる。

インターネット望遠鏡は、この他にも多様な場面に応用できる。例えば、月のクレーターの影からクレーターの高さを求めたり、望遠鏡の精度が向上すればレーマーがやったようにガリレオ衛星から光速を測定することも可能になるだろう。そのような応用例が増えていけば教育の現場でインターネット望遠鏡を非常に有効に活用できるはずである。現在、インターネット望遠鏡は府中市とニューヨークの2カ所に設置されているが、多くの場所に設置を考えている。設置場所が増えれば天候と時間によらず、さらに多くの人々に使ってもらえると期待している。

謝辞

本論文のデータを4ヶ月近くにわたって観測してくれた総合教育セミナー「天体観測と天文学」の学生の皆様に感謝します。また、インターネット望遠鏡の開発とメンテナンスに協力していただいている五藤光学研究所の皆様に感謝します。

参考文献

1. 表實, 慶應義塾大学日吉紀要自然科学36号, 27-39 (2004).
2. 山本裕樹, 慶應義塾大学日吉紀要自然科学38号, 41-55 (2005).
3. 山本裕樹・表實, 慶應義塾大学商学部創立五十周年記念日吉論文集 (2007年), 457-490.
4. 天文年鑑編集委員会, 天文年鑑2007年版 (誠文堂新光社, 2006年).