慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	所得分配の数理
Sub Title	Mathematical background of income distribution
Author	小宮, 英敏(Komiya, Hidetoshi)
Publisher	慶應義塾大学日吉紀要刊行委員会
Publication year	2008
Jtitle	慶應義塾大学日吉紀要. 自然科学 (The Hiyoshi review of the natural science). No.44 (2008.) ,p.33- 57
JaLC DOI	
Abstract	Economists have been interested in the problem of income distribution for a long time. Some kind of mathematics used in the analysis of income distributions is attractive in itself and developed without any contact with economics, and other field of mathematics has developed stimulated by problems posed in economics. The problem of income distribution has been studied in terms of such various fields of mathematics. The purpose of this paper is showing mathematical background of the theory of income distribution.
Notes	創立150年記念号 : 自然科学のエッセンス = 150th anniversary number : essence of natural sciences 綜説
Genre	Departmental Bulletin Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN10079809-20080930-0033

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

Hiyoshi Review of Natural Science
Keio University No. 44, 33-57 (2008)

所得分配の数理

小　宮　英　敏

Mathematical Background of Income Distribution

Hidetoshi KOMIYA

Summary —— Economists have been interested in the problem of income distribution for a long time. Some kind of mathematics used in the analysis of income distributions is attractive in itself and developed without any contact with economics, and other field of mathematics has developed stimulated by problems posed in economics. The problem of income distribution has been studied in terms of such various fields of mathematics. The purpose of this paper is showing mathematical background of the theory of income distribution.

Key words: income distribution, Lorenz dominance, doubly stochastic matrix, minimax theorem, distance

1　序論

複数の構成員から成るひとつの社会を想定する。大きくは国とその国民を考えることもでき，小さくは少人数のある目的をもったグループを考えてもよい。話を簡明にするためにこの社会は数量で記述できるあるものを生産したとし，この社会の構成員はそれぞれその生産に対し等しい寄与をしたとする。そして生産の成果を構成員間で分け合うことを考える。寄与が等しいとしているのだから各構成員が相等しい分け前をうることが最も公平な分配と考えられる。しかし，現実には分配の不公平が起り，すべての成果を独り占めする構成員が現れるかもしれないし，ふたりの構成員が結託し全成果を山分けする可能性もある。これらすべての可能性を記述するために一般に数ベクトルが用いられる。すなわち，社会の構成員の総数をn人とし生産成果がm単位であるとした場合の分配は$(x_1, x_2, \ldots, x_n)(\sum_{i=1}^{n} x_i = m,\ x_i \geq 0)$という数ベクト

慶應義塾大学商学部（〒223-8521　横浜市港北区日吉 4-1-1）：Faculty of Business and Commerce, Keio University, Hiyoshi 4-1-1, Kohoku-ku, Yokohama 223-8521, Japan. [Received Apr. 10, 2008]
E-mail:hkomiya@fbc.keio.ac.jp

ルで表現される。ここで，考察対象の社会の構成員の名前は1からnであり，構成員iの生産成果の分配量はx_iで表している。(3，1，2）という数ベクトルは3人からなる社会における生産成果6の分配の一例である。この社会の他の分配の例としては（2，2，2）があるが，これが最も公平な分配である。また，(1，2，3）という分配は（3，1，2）という分配とは異なる。実際，構成員1に対し，前者は1を後者は3を分配している。しかし，社会における分配という観点からは同一の不公平性をもった分配とみなすことができる。したがって，(3，1，2）という分配の数学的な分析を行なう時は適当に構成員の名前である番号の順番を入れ換え(1，2，3）という昇順に分配量である成分を並べたベクトルを使う。このようにベクトル$x=(x_1,\ldots,x_n)$の成分を小さい成分から順番に大きい成分に並べ換えたベクトルをxの**並べ換え**と呼び$x^*=(x_1^*,\ldots,x_n^*)$と表す。したがって，x^*とxの間には集合｛1，2，…，n｝上の置換πが存在し，

$$x^*=\pi x=(x_{\pi(1)},\ldots,x_{\pi(n)})$$

と書くことができる。このxからx^*を導く操作は行列をxに作用させ実現することができる。すなわち，n次正方行列Pをその第j列が第$\pi(j)$成分のみ1で他の成分はすべて0である列ベクトルであるような行列と定義すると

$$x^*=xP$$

が成立していることは明らかだろう。一般に各行と各列にひとつだけ1を成分としてもち，他の成分はすべて0である正方行列を**置換行列**といい，この行列をベクトルに右からかけることによりベクトルの成分を適当に並べ換えることができる。

再度分配を表す上記の例（1，2，3）に戻ってみよう。この分配において，構成員3から構成員1に生産成果を1だけ移転したとすると，分配（2，2，2）がえられる。このような移転という操作も行列を使って表すことができる。この例では

$$\begin{aligned}(2,2,2)&=\frac{1}{2}(1,2,3)+\frac{1}{2}(3,2,1)\\&=(1,2,3)(\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}P)\\&=(1,2,3)\begin{pmatrix}1/2&0&1/2\\0&1&0\\1/2&0&1/2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

と書ける。ここでIは単位行列，Pは$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$という置換行列である。後に示すが一般に分配が公平になるようにふたりの構成員の間で所得の移転を行なうという操作は単位行列と置換行列の凸結合で表せることが知られている。単位行列のベクトルに対する作用は全くそのベクトルを変化させないことであるが，これも置換の特別な場合と考えられるので生産成果の移転はふたつの置換行列の凸結合として表されることになる。

2　所得分配と二重確率行列

第1節では本稿の議論に絶えず表れる所得分配がベクトルで記述され，その分配に変化を与える手段は行列を作用させることであることを紹介した。そこに表れた行列として置換行列があったがそのひとつの特徴として，すべての成分は非負であり，そのいかなる行の成分の総和（行和）もいかなる列の成分の総和（列和）も1に等しいことである。この性質は置換行列の凸結合にも遺伝することは明らかだろう。このようにすべての成分は非負であり，すべての行和とすべての列和が1に等しい正方行列を**二重確率行列**という。n次二重確率行列全体の集合を$\mathcal{D}_n$と書き，n次置換行列全体の集合を$\mathcal{P}_n$と書くことにすると上記の事実は

$$(1-\lambda)\mathcal{P}_n+\lambda\mathcal{P}_n\subset\mathcal{D}_n,\quad 0\le\lambda\le 1$$

と表すことができる。さらに，$\mathcal{D}_n$が$R^{n\times n}$内の凸集合であることは容易に確認できる。$\mathcal{D}_n$の基本的な性質として次の定理が知られている。

定理1（[1]）　凸集合$\mathcal{D}_n$の端点全体の集合と$\mathcal{P}_n$は一致する。

証明　$\mathcal{D}_n$の任意の端点は置換行列であることと，任意の置換行列は$\mathcal{D}_n$の端点であることを示すことにより証明は完了するが，まず簡単な後者の証明から始める。

$P\in\mathcal{P}_n$とし，$D,E\in\mathcal{D}_n$，$\lambda\in(0,1)$で$P=(1-\lambda)D+\lambda E$と書けていたとする。この両辺の任意の(i,j)成分を考える。$p_{ij}=(1-\lambda)d_{ij}+\lambda e_{ij}$と書けているが，$0<\lambda<1$と$0\le d_{ij},e_{ij}\le 1$に注意して，$p_{ij}=0$または$p_{ij}=1$であるので$d_{ij}$と$e_{ij}$は0か1の値しかとりえない。成分として0か1のみをとる二重確率行列は置換行列であるので，DとEは置換行列である。ここで$D\neq E$とすると$0<\lambda<1$よりPは置換行列とはなりえない。したがって，$D=E$である。

次に逆の証明に進む。すなわち$\mathcal{D}_n$の任意の端点は置換行列にならざるをえないことを示す。$\mathcal{D}_n$は$R^{n\times n}$における線形不等式

$$\begin{gathered}p_{ij}\ge 0,\quad i,j=1,\dots,n;\\ \sum_{i=1}^{n}p_{ij}\le 1,\quad \sum_{i=1}^{n}p_{ij}\ge 1,\quad j=1,\dots,n;\\ \sum_{j=1}^{n}p_{ij}\le 1,\quad \sum_{j=1}^{n}p_{ij}\ge 1,\quad i=1,\dots,n-1\end{gathered}$$

の解空間と一致することは明らかだろう。この線形不等式は全部で$n^2+2n+2(n-1)=n^2+4n-2$個ある。Pを$\mathcal{D}_n$の端点とすると，Pは上記の線形不等式で定義される半空間の境界となっている超平面のうち少なくともn^2個の超平面に含まれている必要がある。もしそうでないとすると，Pを含む1次元以上の線形多様体が存在しそれと$\mathcal{D}_n$の交わりがPを相対内点として含み

Pが端点であることに矛盾する。上記のp_{ij}の和に関する不等式から決まる超平面は全部で$(2n-1)$個であるので，$n^2-(2n-1)=(n-1)^2$より，少なくとも$(n-1)^2$個の添字（i, j）に対し$p_{ij}=0$である。ここで，Pのすべての行が$(n-2)$個以下の0成分しかもたないとすると$n(n-2)=(n-1)^2-1$より，Pは$(n-1)^2$個以上の0成分をもつことに反する。よって，どれかの行は$(n-1)$個以上の0成分をもつが，Pは二重確率行列なので残りの成分は1でなくてはならない。この1を含む列を考えると他の成分は0のみとなる。Pからこの行と列を除いた$(n-1)$次正方行列をQとする。このときQは$\mathcal{D}_{n-1}$の端点であることが次のようにして分かる。もしQが端点でないとすると，$\mathcal{D}_{n-1}$内にQとは異なるふたつの行列D_1とE_1と$0<\lambda<1$が存在して$Q=(1-\lambda)D_1+\lambda E_1$と書けているが，$P$から除いたものと同じ行と列を$D_1$と$E_1$に付け加えた行列を$D$と$E$とすると，明かに$D, E\in\mathcal{D}_n$で，$P=(1-\lambda)D+\lambda E$と書け，$P$が$\mathcal{D}_n$の端点であることに矛盾する。

Qが$\mathcal{D}_{n-1}$の端点であることが確認できたので，Pに適用したものと同じ議論を繰り返すことにより，Qは少なくともひとつの行とひとつの列をもちその交点の成分は1で他の成分はすべて0である。これらの議論を繰り返すことによりPは置換行列であることをうる。Q.E.D.

系1　$\mathcal{D}_n$は$\mathcal{P}_n$の凸包である。

証明　局所凸線形位相空間においてコンパクト凸集合は常に端点をもち，端点全体の閉凸包に等しいことはよく知られた事実である。Q.E.D.

さてこれまでに社会における分配の公平性について記述を進めるためにベクトルを使うこと，そして公平性に向けての操作を表すための作用素としての行列の特徴を捉えた概念としての二重確率行列の基本的な性質を考察した。さらに話を進めて社会のふたつの分配を比べてより公平であることを定式化する。その助けとなる経済学でよくしられた概念にローレンツ曲線がある。分配$x=(x_1,\ldots,x_n)$に対しまずこれの並び換え$x^*=(x_1^*,\ldots,x_n^*)=(x_{\pi(1)},\ldots,x_{\pi(n)})$を作る。そして，各$k(1\le k\le n)$に対し$x^*$の第1成分から第$k$成分までの和$s_k=\sum_{i=1}^{k}x_i^*$を計算し，平面上に点$(k/n, s_k/s_n)$を打ちその点を折れ線で結ぶ。この折れ線を分配$x$のローレンツ曲線とよぶ。ローレンツ曲線は平面［0，1］×［0，1］内に描かれ点（0，0）と（1，1）を結ぶことは明かである。そして，常に45度線より下にある。分配xの各成分が等しい，すなわち，最も公平な分配の場合にはそのローレンツ曲線は45度線に一致する。分配が偏るに従ってローレンツ曲線は下に落ち込むことになる。ふたつの分配が与えられたとき，それぞれのローレンツ曲線を描き一方が他方の完全に下にあるとき，上にある分配は下にある分配より公平であると解釈し，この意味での「より公平である」という分配の間の関係を考察する。

$x=(x_1,\ldots,x_n)$と$y=(y_1,\ldots,y_n)$をふたつのR^n内のベクトルとし，これらはある生産成果の二通りの分配の仕方を表現しているとする。この前提から$\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i$が成立している。$x$のローレンツ曲線が$y$のそれの下にあることを定式化すると，

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^* \le \sum_{i=1}^{k} y_i^*, \quad k = 1, \ldots, n-1$$

となる。このような関係が成立しているとき，yはxを**ローレンツ支配している**と言うことにし，$x \precsim_{\mathrm{L}} y$と表記する。

ある分配の高い割り当ての構成員から低い割り当ての構成員に割り当ての一部を移転するという操作は単位行列とふたりの割り当て高を交換するという置換行列の凸結合として表される可能性を第1節で示唆した。一方，この移転の後の分配は移転前の分配をローレンツ支配していることは容易に確かめることができる。このように考えていくと$x \precsim_{\mathrm{L}} y$なるふたつの分配$x$と$y$があったとき，$x$から$y$に向かって移転を繰り返すことにより$y$に到達することが期待できる。この予想は実際正しい。その証明に取り掛かる前に概念の整理をしておこう。n次正方行列Tは単位行列Iと単位行列のあるふたつの列を交換することによってえられる行列Cの凸結合として表されるとき**移転行列**という。上記のようなCを**互換行列**という。互換行列をベクトルに作用させるとベクトルのふたつの成分が交換されるからこの名前がついている。実際，単位行列の第i列と第j列を交換することによってえられる互換行列をC_{ij}とすると，ベクトルxに$(1-\lambda)I+\lambda C_{ij}$作用させると第$i$成分は$(1-\lambda)x_i+\lambda x_j$，第$j$成分は$(1-\lambda)x_j+\lambda x_i$となり他の成分は不変である。したがって，構成員の$j$から構成員$i$に正負を含めて$\lambda(x_j-x_i)$の移転が起こっていることになる。互換行列は置換行列の一種である。また，置換行列は互換行列の有限回の積でかけるということは線形代数でよく知られた事実である。

補題1　xとyをR^n内のベクトルとする。もし$x \precsim_{\mathrm{L}} y$ならば，高々$(n-1)$個の移転行列$T_1, \ldots, T_k$ $(1 \le k \le n-1)$が存在し $y = xT_1 \ldots T_k$ が成立している。

証明　$x^* = xP$，$y^* = yQ$と置換行列PとQを用いて書けているとする。

$x^* = y^*$である場合は$y = xPQ^{-1}$となり，任意の置換行列は高々$(n-1)$個の互換行列の積で表現でき，互換行列は移転行列の一種であるので補題の主張は正しい。したがって，以下では$x^* \neq y^*$の場合を考える。

jを$x_j^* < y_j^*$であるような最小の添字とする。そして，kを$x_k^* > y_k^*$であるような最大の添字とする。このような添字jとkは$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$であることより存在し，さらに自然に$j < k$となる。

$$x_j^* < y_j^* \le y_k^* < x_k^*, \quad j < k$$

であることに注意し，$\delta = \min(y_j^* - x_j^*, x_k^* - y_k^*) > 0$と定義する。$\lambda = \delta/(x_k^* - x_j^*)$とおくと，$0 < \lambda \le 1/2$で，

$$x' = (x_1^*, \ldots, x_j^* + \delta, \ldots, x_k^* - \delta, \ldots, x_n^*)$$

とおくと，

$$x' = x^*((1-\lambda)I + \lambda C_{jk})$$

とかける。ここで，C_{jk}は第 j 成分と第k成分を交換する互換行列である。ここで，$x_j^* + \delta \leq y_j^*$ かつ $x_k^* - \delta \geq y_k^*$が成立しており，このふたつの不等式のうち少なくともひとつは等式である。よって，x^*と y^*では対応する成分が二箇所で異なっていたものがx'と y^*では少なくとも一箇所は確実に減ることになる。また，$x^* \precsim_{\mathrm{L}} x' \precsim_{\mathrm{L}} y^*$ が成立している。$x_1 = x'P^{-1}$とおくと，明らかに $x \precsim_{\mathrm{L}} x_1 \precsim_{\mathrm{L}} y$ でx_1と yとは，xと yとの組み合せに比べて，等しい成分が一組は増えている。一方，

$$\begin{aligned} x_1 &= x'P^{-1} \\ &= x^*((1-\lambda)I + \lambda C_{jk})P^{-1} \\ &= xP((1-\lambda)I + \lambda C_{jk})P^{-1} \\ &= x((1-\lambda)I + \lambda PC_{jk}P^{-1}) \\ &= x((1-\lambda)I + \lambda C_{\pi(j)\pi(k)}) \end{aligned}$$

が成立するので，$T_1 = (1-\lambda)I + \lambda C_{\pi(j)\pi(k)}$ とおくと，T_1は移転行列で$x_1 = xT_1$とかける。ここで，$x_1^* \neq y^*$であるときには，xからx_1を導く議論をxの代わりにx_1に適用すれば，$x \precsim_{\mathrm{L}} x_1 \precsim_{\mathrm{L}} x_2 \precsim_{\mathrm{L}} y$ で，x_1と yとの組み合せよりは，x_2と yとの組み合せの方が同じ値の成分をもつものが少なくとも一組増え，x_1にある移転行列 T_2を適用することによりx_2はえられる。この議論を繰り返すことにより高々 $(n-1)$ 個の移転行列$T_1, T_2, \ldots, T_k$が存在して$y = xT_1 \cdots T_k$ が成立することが分かる。Q.E.D.

この補題により $x \precsim_{\mathrm{L}} y$であれば$y = xD$となる二重確率行列 D が存在することが分かる。実際，移転行列は二重確率行列であり，二重確率行列の積は再び二重確率行列であることに注意すれば容易に確認できる。逆に，$y = xD$と二重確率行列 D を用いて表現されているとすると $x \precsim_{\mathrm{L}} y$となっていることを次の補題は示している。

補題 2　n次正方行列 D が二重確率行列であるための必要十分条件は，任意の$x \in R^n$ に対し $x \precsim_{\mathrm{L}} xD$が成立することである。

証明　すべての成分が 1 であるベクトルを e で表す。まず，$x \precsim_{\mathrm{L}} xD$がすべての$x \in R^n$ に対し成立すると仮定する。e は最も公平な分配であるからすべての$x \in R^n$ に対し$x \precsim_{\mathrm{L}} e$ であることが期待されるがこれを検証するのは容易である。また，一般に$x \precsim_{\mathrm{L}} y$かつ$y \precsim_{\mathrm{L}} x$が成立するときは必然的に$x^* = y^*$となることも容易に検証できる。これらの事実に注意して，仮定より$e \precsim_{\mathrm{L}} eD$ であり，$eD \precsim_{\mathrm{L}} e$ は常に成立するので，$eD = e$が結論できる。これより $j = 1,\ldots, n$に対し $\sum_{i=1}^{n} d_{ij} = 1$が出る。一方，第$i$成分が 1 でその他のすべての成分が 0 であるベ

クトルをe_iとすると，e_iは最も不公平な分配であるので，成分の総和が1であるすべての$x\in R^n$に対し$e_i \precsim_{\mathrm{L}} x$が成立していることが期待されるが，これも容易に検証できる。よって，$e_i \precsim_{\mathrm{L}} e_iD=(d_{i1},\ldots,d_{in})$が成立するので，$i=1,\ldots,n$に対し$\sum_{j=1}^n d_{ij}=1$と，$i,j=1,\ldots,n$に対し$d_{ij}\geq 0$が出る。以上で$D$が二重確率行列であることが示せた。

逆にDが二重確率行列であると仮定する。$y=xD$とおき，$x^*=xP$，$y^*=yQ$と置換行列を使い書けているとする。このとき，$y^*=x^*(P^{-1}DQ)$となり，$P^{-1}DQ$は二重確率行列である。$P^{-1}DQ$を改めてD，x^*をx，y^*をyと考えることにより，$x_1\leq\cdots\leq x_n$，$y_1\leq\cdots\leq y_n$と仮定しても一般性は失われない。任意の$k=1,\ldots,n$に対し，

$$\sum_{j=1}^k y_j=\sum_{j=1}^k\sum_{i=1}^n x_i d_{ij}=\sum_{i=1}^n x_i t_i,\quad t_i=\sum_{j=1}^k d_{ij}$$

と書けるが，$0\leq t_i\leq 1$と$\sum_{i=1}^n t_i=k$が成立していることに注意する。したがって，

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^k y_j-\sum_{j=1}^k x_j&=\sum_{i=1}^n x_i t_i-\sum_{i=1}^k x_i\\&=\sum_{i=1}^n x_i t_i-\sum_{i=1}^k x_i-x_k(\sum_{i=1}^n t_i-k)\\&=\sum_{i=1}^k (x_i-x_k)t_i-\sum_{i=1}^k (x_i-x_k)+\sum_{i=k+1}^n (x_i-x_k)t_i\\&=\sum_{i=1}^k (x_i-x_k)(t_i-1)+\sum_{i=k+1}^n (x_i-x_k)t_i\\&\geq 0\end{aligned}$$

をうる。さらに，e^tをeの転置とすると

$$\sum_{j=1}^n y_i=ye^t=(xD)e^t=xe^t=\sum_{i=1}^n x_i$$

も成立する。これで$x\precsim_{\mathrm{L}} y$を示すことができた。Q.E.D.

補題1と補題2を組み合わせることによりローレンツ支配と二重確率行列との間の簡潔な関係をうる。

定理2（[2]）　ふたつのベクトル$x,y\in R^n$に対し，$x\precsim_{\mathrm{L}} y$が成立するための必要十分条件は$y=xD$を満たす二重確率行列Dが存在することである。

ローレンツの意味での公平性は凹関数とも密接に関連していることが知られている。その基本的な定理は次のものである。

定理 3（[2]）　ふたつのベクトル $x, y \in R^n$ に対し，$x \precsim_{\mathrm{L}} y$ が成立するための必要十分条件は，すべての連続凹関数 $g : R \to R$ に対し

$$\sum_{i=1}^{n} g(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} g(y_i)$$

が成立することである。

証明　$x \precsim_{\mathrm{L}}$ を仮定すると定理 2 より二重確率行列 D が存在し $y = xD$ となっている。したがって，$y_j = \sum_{i=1}^{n} d_{ij} x_i$ が成立しているので，

$$\sum_{j=1}^{n} g(y_j) = \sum_{j=1}^{n} g(\sum_{i=1}^{n} d_{ij} x_i) \geq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} d_{ij} g(x_i) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) \sum_{j=1}^{n} d_{ij} = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)$$

をうる。

逆を証明する。$k = 1, \ldots, n$ の各々に対し，区分的線形関数 g_k を

$$g_k(z) = \begin{cases} z - x_k^*, & z \leq x_k^* \\ 0, & z > x_k^* \end{cases}$$

と定義する。明かに g_k は連続凹である。仮定より不等式 $\sum_{i=1}^{n} g_k(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} g_k(y_i)$ が成立していることと，$g_k(z) \leq 0$ と $g_k(z) \leq z - x_k^*$ がすべての z に対して成立することに注意すると，以下の不等式を確認することができる。

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^* - k x_k^* = \sum_{i=1}^{k} g_k(x_i^*) = \sum_{i=1}^{n} g_k(x_i^*) \leq \sum_{i=1}^{n} g_k(y_i^*) \leq \sum_{i=1}^{k} g_k(y_i^*) \leq \sum_{i=1}^{k} y_i^* - k x_k^*$$

したがって，すべての $k = 1, \ldots, n$ に対し，$\sum_{i=1}^{k} x_i^* \leq \sum_{i=1}^{k} y_i^*$ が成立する。さらに，関数 $g_0(z) = -z$ に対して仮定を適用すると，$-\sum_{i=1}^{n} x_i^* \leq -\sum_{i=1}^{n} y_i^*$ が出て，特に $\sum_{i=1}^{k} x_i^* = \sum_{i=1}^{k} y_i^*$ が成立することより $x \precsim_{\mathrm{L}} y$ が導かれる。Q.E.D.

定理 3 の応用範囲は広く様々な不等式を導くために用いられるが，本稿ではローレンツ支配に関する順序 $\precsim_{\mathrm{L}}$ の基本的な性質を主張する次の命題を導くために使用する。順序 $\precsim_{\mathrm{L}}$ の定義どおりに証明しようとすると細かい議論を必要とするが，定理 3 を前提とすると次の命題は自明となる。

命題 1　$x, y \in R^n$ で，$a, b \in R^m$ とする。このとき，$x \precsim_{\mathrm{L}} y$ かつ $a \precsim_{\mathrm{L}} b$ ならば，$(x, a) \precsim_{\mathrm{L}} (y, b)$ が成立する。

3　二重劣確率行列と二重優確率行列

第2節の中心的な話題であった二重確率行列に関連し二重劣確率行列と二重優確率行列というふたつの対立的な概念がある。二重劣確率行列とは二重確率行列の定義における列和および行和が1に等しいという条件を1以下としたものである。すなわち，n次正方行列$A=(a_{ij})$が**二重劣確率行列**であるとは，

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq 1, \quad a_{ij} \geq 0$$

を満足することをいう。この定義から二重劣確率行列と二重確率行列とは密接な関係があることを予想できるが，実際以下の命題が知られている。

命題2　二重劣確率行列$A=(a_{ij})$に対し，すべてのiとjについて$a_{ij} \leq d_{ij}$を満たす二重確率行列$D=(d_{ij})$が存在する。

証明　Aが二重確率行列のときは証明すべきことはないので，Aが二重確率行列ではないと仮定する。このときある行和か列和が1より小さいことになる。たとえばある行和が1より小さいときはAの成分の総和はnより小さい。よって，ある列和も1より小さいことになる。ある列和が1より小さい場合も同様に考えるとある行和が1より小さいことになる。いずれにしろある行和とある列和が1より小さくなっている。すなわち，あるjがあり$\sum_{k=1}^{n} a_{kj} < 1$であり，ある$i$があり$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} < 1$である。$\varepsilon = 1 - \max(\sum_{k=1}^{n} a_{kj}, \sum_{k=1}^{n} a_{ik})$とおき，第$(i, j)$成分は$a_{ij} + \varepsilon$であり，それ以外の成分は$A$の対応する成分と同じ成分をもつ行列を$A'$とすると，$A'$は二重劣確率行列であり，$A$よりは少なくともひとつは列和または行和が1である列または行の数を増やしている。この過程を繰り返すことにより最終的に求める二重確率行列Dをうる。Q.E.D.

命題2で示した性質をもちその成分が非負であるような行列が二重劣確率行列であることは明らかであるので，どちらの性質を二重劣確率行列の定義として採用しても不都合は起こらない。ここでこれらに対応する性質として不等号の向きを逆にしたものを考えてみる。すなわち，以下のふたつの性質を考える。

1．すべての列和と行和が1以上であり，すべての成分が非負である。
2．$a_{ij} \geq d_{ij}$がすべての(i, j)について成立するような二重確率行列$D=(d_{ij})$が存在する。

性質2は性質1を含意していることをみるのは容易である。しかし，性質1は性質2を含意しないことを次の行列が示している。

$$\begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1/4 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

本稿では二重優確率行列の定義として性質2を採用する。これは後に表れる分配の公平性を考察する際の順序関係を記述するために適したものであるためである。n次正方行列$B=(b_{ij})$は二重確率行列$D=(d_{ij})$が存在して，すべての$i, j=1,\ldots,n$に対し$b_{ij}\geq d_{ij}$となっているとき**二重優確率行列**であるという。

後の議論に関連して使われる定理をここで証明しておく。まず，分配の公平性を記述する順序であるローレンツの意味での公平性を拡張する。ふたつのベクトル$x, y\in R^n$に対し，

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i, \quad k=1,\ldots,n$$

が成立する時，$x \precsim_{\mathrm{GL}} y$とかく。この定義は$x \precsim_{\mathrm{L}} y$の定義から成分の総和が等しいという条件を除いただけであるが，総所得が大きい方がより好ましいとういう順序を考えたいために取り上げた定義である。

定理3で二項関係$\precsim_{\mathrm{L}}$と連続凹関数との関係を明らかにしたが，二項関係$\precsim_{\mathrm{GL}}$についても同様の定理が成立している。証明は定理3と同様なので省略する。

定理4　ふたつのベクトル$x, y\in R^n$に対し，$x \precsim_{\mathrm{GL}} y$が成立するための必要十分条件は，すべての連続非減少凹関数$g: R\to R$に対し

$$\sum_{i=1}^{n} g(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} g(y_i)$$

が成立することである。

順序$\precsim_{\mathrm{GL}}$と二重優確率行列は密接に関連しているが，その議論をこれから始める。まず，ふたつの順序$\precsim_{\mathrm{GL}}$と$\precsim_{\mathrm{L}}$の関係を明確にする補題から始める。

補題3　ふたつのベクトルx，$y\in R^n$に対し，$x \precsim_{\mathrm{GL}} y$であるための必要十分条件は$x \precsim_{\mathrm{L}} u$かつ$u\leq y$なる$u\in R^n$が存在することである。

証明　$x \precsim_{\mathrm{GL}} y$を仮定し，補題にある$u$の存在を示す。ベクトルの次元$n$に関する帰納法で証明する。$n=1$のときは明らかである。

$n<l$に対し結論が成立していると仮定し，$n=l$の場合も成立することを示す。まず$x \precsim_{\mathrm{GL}} y$を仮定する。$\varepsilon_1 = \min_{1\leq k\leq n}(\sum_{i=1}^{k} y_i^* - \sum_{i=1}^{k} x_i^*)$とおく。$y' = (y_1^* - \varepsilon_1, y_2^*, \ldots, y_l^*)$とおくと$y_1' \leq y_2' \leq \cdots \leq y_l'$で，ある$k(1\leq k\leq l)$で$\sum_{i=1}^{k} x_i^* = \sum_{i=1}^{k} y_i'$が成立しているので，$(x_1^*,\ldots,x_k^*) \precsim_{\mathrm{L}} (y_1',\ldots,y_k')$となる。ここで$k=l$のときは$u=y'$とすればよいので$k<l$とする。このとき$(x_{k+1}^*,\ldots,x_l^*) \precsim_{\mathrm{GL}} (y_{k+1}',\ldots,y_l')$が成立しているので，帰納法の仮定より$(u_{k+1},\ldots,u_l)$

$\leq (y'_{k+1},\ldots,y'_l)$ かつ $(x^*_{k+1},\ldots,x^*_l) \precsim_{\mathrm{L}} (u_{k+1},\ldots,u_l)$ なる $(u_{k+1},\ldots,u_l)$ が存在する。命題 1 より $(x^*_1,\ldots,x^*_k,x^*_{k+1},\ldots,x^*_l) \precsim_{\mathrm{L}} (y'_1,\ldots,y'_k,u_{k+1},\ldots,u_l)$ が成立する。また，$(y'_1,\ldots,y'_k,u_{k+1},\ldots,u_l) \leq y^*$ が成立するのは明らか。$u' = (y'_1,\ldots,y'_k,u_{k+1},\ldots,u_l)$ とおく。$y^* = yP$ と置換行列 P により書けているとすると $u'P^{-1} \leq y$ であり，$x \precsim_{\mathrm{L}} u'P^{-1}$ であるので，この $u'P^{-1}$ が求める u である。

一方，逆は定理 4 より $u \leq y$ から $u \precsim_{\mathrm{GL}} y$ が演繹され二項関係 $\precsim_{\mathrm{GL}}$ は推移的であることより $x \precsim_{\mathrm{GL}} y$ が導かれる。Q.E.D.

定理 5　ふたつのベクトル $x, y \in R^n_{++}$ に対し，$x \precsim_{\mathrm{GL}} y$ が成立するための必要十分条件は $y = xS$ を満たす二重優確率行列 S が存在することである。ここで，R^n_{++} はすべての成分が正である n ベクトルの集合を表す。

証明　$x \precsim_{\mathrm{GL}} y$ を仮定すると，補題 3 より $x \precsim_{\mathrm{L}} u$ かつ $u \leq y$ なる $u \in R^n$ が存在する。n 次正方行列 S をその第 i 対角成分が y_i/u_i である対角行列とすると，S は二重優確率行列であり，$y = uS$ が成立する。また，定理 2 より $u = xD$ となる二重確率行列 D が存在するので，$y = x(DS)$ となるが，一般に二重優確率行列の積は再び二重優確率行列であるので必要であることの証明が完了する。

逆に，$y = xS$ なる二重優確率行列が存在すると仮定する。二重優確率行列の定義より $S = D + N$ と分解できる。ここで，D は二重確率行列であり，N はその成分がすべて非負である行列である。$xD = xS - xN = y - xN$ より $u = xD$ とおくと，$x \precsim_{\mathrm{L}} u$ かつ $u \leq y$ となり，補題 3 より $x \precsim_{\mathrm{GL}} y$ が導かれる。Q.E.D.

4　ミニマックス定理

第 5 節以降では必ずしも総所得が等しくなく，また広義ローレンツ支配の順序もつかない分配の間の善し悪しを判定する尺度の議論を進めていくが，その前にその議論の技術的側面に必要なミニマックス定理について本節では触れることにする。ミニマックス定理はゼロ和二人ゲームの基本定理として広く知られており，その証明方法は数多く知られている。初期のミニマックス定理は利得関数が二重線形であり，戦略集合も有限次元空間に含まれたものであったが，それが無限次元空間の場合に拡張され利得関数も線形関数から準凹および準凸関数に拡張されていった。本稿ではかなり一般化された形のミニマックス定理を扱う。ミニマックス定理の証明法は不動点定理を使うもの，凸集合の分離定理を使うものなど様々であるが，本稿ではあまり知られていない凸集合の連結性に注目した証明法を紹介する。まずは，証明すべきミニマックス定理を明示する。

定理 6（[12]）集合 X と Y をそれぞれ位相線形空間の非空コンパクト凸集合とし，その直積空間 $X\times Y$ 上の実数値関数 f は以下の性質を満たすものとする。

1．$f(\cdot,y):X\to R$ は各 $y\in Y$ に対し，上半連続かつ準凹である。
2．$f(x,\cdot):Y\to R$ は各 $x\in X$ に対し，下半連続かつ準凸である。

このとき，以下のミニマックス等式が成立する。

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y)=\min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y)$$

この定理の証明に入る前にいくつかの注意点を挙げておく。まず，左辺に関し $f(x,\cdot)$ が下半連続であることより，$\min_{y\in Y} f(x,y)$ の値を達成する最小点 $y\in Y$ が存在することが保証される。さらに，関数 $x\mapsto \min_{y\in Y} f(x,y)$ は各 $f(\cdot,y)$ が上半連続であることより，上半連続であることが保証される。したがって，$\max_{x\in x}\min_{y\in Y} f(x,y)$ を達成する $x\in X$ の存在が保証される。右辺についても同様である。また，不等式 $\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y)\le \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y)$ は関数 f の特別な性質を仮定せずとも常に成立する。したがって，ミニマックス定理の本質は逆の不等式 $\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y)\ge\min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y)$ を主張するところにある。

これから定理 6 の証明を進めるが，いくつかの補題が必要である。

補題 4　定理 6 の仮定の下で，任意の二点 x_1，$x_2\in X$ に対し

$$\min_{y\in Y}\max(f(x_1,y),f(x_2,y))\le\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y)$$

が成立する。

証明　結論を否定して矛盾を導く。

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y)<\min_{y\in Y}\max(f(x_1,y),f(x_2,y))$$

なる $x_1,x_2\in X$ が存在したとする。

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y)<\alpha<\min_{y\in Y}\max(f(x_1,y),f(x_2,y))$$

なる実数 α をとる。任意の $x\in[x_1,x_2]=\{(1-\lambda)x_1+\lambda x_2:0\le\lambda\le 1\}$ に対し，

$$Lx=\{y\in Y:f(x,y)\le\alpha\}$$

とおくと，Lx は非空閉凸である。また，$Lx_1\cap Lx_2=\emptyset$ が成立している。また，$f(\cdot,y)$ が準凹であることより $Lx\subset Lx_1\cup Lx_2$ がすべての $x\in[x_1,x_2]$ に対して成立する。Lx は凸なので連結であるから，$Lx\subset Lx_1$ または $Lx\subset Lx_2$ となっている。ここで，

$$I_1=\{x\in[x_1,x_2]:Lx\subset Lx_1\}\quad I_2=\{x\in[x_1,x_2]:Lx\subset Lx_2\}$$

とおくと，$x_1 \in I_1, x_2 \in I_2, I_1 \cup I_2 = [x_1, x_2]$，$I_1 \cap I_2 = \emptyset$ が成立していることは容易に確かめられる。

次に I_1が$[x_1, x_2]$内で開であることを示す。任意の$x \in I_1$を考える。Lx 内に$f(x, y) < \alpha$ なるyが存在する。$U = \{u \in [x_1, x_2] : f(u, y) < \alpha\}$ と U を定義すると$f(\cdot, y)$ の上半連続性より U は$[x_1, x_2]$ 内で開であるので，これは x の$[x_1, x_2]$ 内の近傍である。また，$y \in Lu$ より $Lu \cap Lx \neq \emptyset$ なので$Lu \cap Lx_1 \neq \emptyset$ となる。よって，$Lu \subset Lx_1$がえられ，$u \in I_1$となり，$U \subset I_1$ である。これで I_1が$[x_1, x_2]$内で開であることが示せたが，同様にして I_2 が［x_1，x_2］内で開であることが示せ，これは$[x_1, x_2]$の連結性に矛盾する。Q.E.D.

補題 5　定理 6 の仮定の下で，任意の有限個の点 $x_1, ..., x_n \in X$ に対し

$$\min_{y \in Y} \max(f(x_1, y), \ldots, f(x_n, y)) \leq \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y)$$

が成立する。

証明　nに関する帰納法で証明する。$n = 1$のときは明かに補題の主張は成立する。$n = k$ のとき補題の主張が成立すると仮定し，$n = k+1$の場合を証明する。結論を否定し，

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) < \min_{y \in Y} \max(f(x_1, y), \ldots, f(x_{k+1}, y))$$

となっていたと仮定する。$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \alpha$とおき，$Y' = \{y \in Y : f(x_{k+1}, y) \leq \alpha\}$と定義する。$Y'$は非空コンパクト凸である。背理法の仮定$\alpha < \min_{y \in Y} \max(f(x_1, y), \ldots, f(x_{k+1}, y))$より，$Y'$の定義に注意すると$\alpha < \min_{y \in Y'} \max(f(x_1, y), \ldots, f(x_k, y))$がでる。ここで，帰納法の仮定を使い，

$$\begin{aligned} \alpha &< \min_{y \in Y'} \max(f(x_1, y), \ldots, f(x_k, y)) \\ &\leq \max_{x \in X} \min_{y \in Y'} f(x, y) \end{aligned}$$

が導かれる。よって，$x_0 \in X$が存在して$\alpha < \min_{y \in Y'} f(x_0, y)$となる。この不等式と$Y'$の定義と補題 4 より

$$\begin{aligned} \alpha &< \min_{y \in Y} \max(f(x_0, y), f(x_{k+1}, y)) \\ &\leq \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

なる矛盾をうる。Q.E.D.

証明　定理 6 の後で注意したように，不等式

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) \leq \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y)$$

を証明すればよい。$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y)=\alpha$とおき，$Y_x=\{y\in Y : f(x,y)\le\alpha\}$と定義をする。補題5より閉集合族$\{Y_x\}_{x\in X}$は有限交差性を持ち$Y$はコンパクトであるので，その交わりは空ではない。これは$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y)\le\alpha$を意味する。Q.E.D.

5　広義ローレンツ支配とゼロ和二人ゲーム

これまでに分配の種々の様相と確率行列との関連性，およびミニマックス定理の議論を行なってきた。本節ではこのふたつの話題を基礎にしてある種のゼロ和二人ゲームの値とローレンツ支配との関連を議論する。xとyをふたつのR^nのベクトルとする。このxとyからゼロ和二人ゲームを構成し，その値がxとyのローレンツ支配性と密接に関係していることを示す。そのための道具としていくつかの補題を用意する。記号$\langle\cdot,\cdot\rangle$で$R^n$のユークリッド内積を表すことにする。すなわち，$\langle\lambda,x\rangle=\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i$である。$x^*$はこれまでと同様に$x$の昇順の並び換えを表し，$x_*$は降順の並び換えとする。このとき，次の補題が成立する。

補題6　λとxをR^nのベクトルとする。このとき，

$$\langle\lambda_*,x^*\rangle\le\langle\lambda,x\rangle\le\langle\lambda^*,x^*\rangle$$

が成立する。

証明　右側の不等号の証明をする。$\langle\lambda,x\rangle$はλとxに同じ置換を施すことによりxは昇順に並んでいるとしても一般性を失わない。もしλが昇順に並んでいないとすると$\lambda_i>\lambda_j$なる$i<j$が存在する。このとき，

$$(\lambda_i x_j+\lambda_j x_i)-(\lambda_i x_i+\lambda_j x_j)=(\lambda_i-\lambda_j)(x_j-x_i)\ge 0$$

が成立するので，λにおいてλ_iとλ_jを交換することにより$\langle\lambda,x\rangle$の値は小さくなることはない。この操作を繰り返すことにより有限回の後にλは昇順に並ぶ。これで第二の不等号を示すことができた。第一の不等号は$-\lambda$を第二の不等号で考えればよい。Q.E.D.

補題7　x,yとλはR^nのベクトルで

$$\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_n\ge 0,\ \text{かつ}\quad\sum_{i=1}^k x_i\le\sum_{i=1}^k y_i,\ k=1,2,\ldots,n$$

を満足すると仮定する。このとき，$\langle\lambda,x\rangle\le\langle\lambda,y\rangle$が成立する。

証明　各$k=1,2,\ldots,n$に対し，$\xi_k=\sum_{i=1}^k x_i,\ \eta_k=\sum_{i=1}^k y_i$とおく。このとき，以下の不等式から求める結果をうる。

$$\begin{aligned}\langle\lambda, x\rangle &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n \\ &= \lambda_1\xi_1 + \lambda_2(\xi_2 - \xi_1) + \cdots + \lambda_n(\xi_n - \xi_{n-1}) \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2)\xi_1 + (\lambda_2 - \lambda_3)\xi_2 + \cdots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n)\xi_{n-1} + \lambda_n\xi_n \\ &\leq (\lambda_1 - \lambda_2)\eta_1 + (\lambda_2 - \lambda_3)\eta_2 + \cdots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n)\eta_{n-1} + \lambda_n\eta_n \\ &= \langle\lambda, y\rangle.\end{aligned}$$

Q.E.D.

x と y を R^n のふたつのベクトルとする。このとき，次のような有限ゼロ和二人ゲーム $G_{x,y}$ を定義する。第一プレーヤの戦略集合は N=$\{1, 2, \ldots, n\}$ とする。すなわち，第一プレーヤの戦略はベクトルの成分を選ぶことである。第二プレーヤの戦略集合は N の置換全体の集合Π とする。すなわち，第二プレーヤの戦略はベクトルの成分の並べ換えの仕方を選ぶことである。最後に第一プレーヤの利得関数 $u_{x,y} : N \times \Pi \to R$ を

$$u_{x,y}(i, \pi) = (\pi x - y)_i, \quad (i, \pi) \in N \times \Pi$$

と定義する。このゲームでは第一プレーヤは成分の選択を，第二プレーヤは成分の並べ換えを考えることにより，第一プレーヤは選んだ x と y の成分の差をなるべく大きくしたく思っており，第二プレーヤはなるべく小さくしたく思っている状況を考えている。ゼロ和二人ゲーム $G_{x,y}$ の混合拡張を $\widehat{G}_{x,y} = (\Delta_N, \Delta_\Pi, \widehat{u}_{x,y})$ とする。すなわち，Δ_N，Δ_Π はそれぞれ N およびΠ 上の確率分布全体の集合であり，

$$\widehat{u}_{x,y}(\lambda, \mu) = \sum_{i\in N}\sum_{\pi\in\Pi} \lambda_i\mu_\pi u_{x,y}(i, \pi), \qquad \lambda \in \Delta_N,\ \mu \in \Delta_\Pi$$

である。この利得関数はλおよび μ に関して線形であり，Δ_N と Δ_Π は共にコンパクトなので定理 6 より，ミニマックス等式

$$\max_{\lambda\in\Delta_N}\min_{\mu\in\Delta_\Pi} \widehat{u}_{x,y}(\lambda, \mu) = \min_{\mu\in\Delta_\Pi}\max_{\lambda\in\Delta_N} \widehat{u}_{x,y}(\lambda, \mu)$$

が成立する。また，系 1 より Δ_Π は二重確率行列の集合$\mathcal{D}_n$と同一視できるので，$\widehat{u}$ を書き下して，上記のミニマックス等式は

$$\max_{\lambda\in\Delta_N}\min_{D\in\mathcal{D}_n} \langle\lambda, xD - y\rangle = \min_{D\in\mathcal{D}_n}\max_{\lambda\in\Delta_N} \langle\lambda, xD - y\rangle$$

と書き直せる。線形関数は凸集合上で最大値または最小値をとるとすると，端点でもその最大値または最小値をとっているので，さらに

$$\max_{\lambda\in\Delta_N}\min_{\pi\in\Pi}\langle\lambda, \pi x - y\rangle = \min_{D\in\mathcal{D}_n}\max_{i\in N}(xD - y)_i$$

と書き直せる。このミニマックス等式の値は $\widehat{G}_{x,y}$ の**値**と呼ばれる。これを $v(\widehat{G}_{x,y})$ と書くことにする。以上の準備の下にこの節の主要定理を証明をする。

定理 7（[8]） R^n の任意のふたつのベクトル x と y に対して，$x \precsim_{\mathrm{GL}} y$ が成立することと $v(\widehat{G}_{x,y}) \leq 0$ が成立することは同値である。

証明　まず x と y は共に R^n_{++} の要素である場合の証明を行なう。$x \precsim_{\mathrm{GL}} y$ を仮定する。λ を Δ_N の任意の要素とする。このとき，補題 6 と補題 7 より，不等式

$$\langle \lambda, y \rangle \geq \langle \lambda_*, y^* \rangle \geq \langle \lambda_*, x^* \rangle = \langle \pi' \lambda, \pi'' x \rangle = \langle \lambda, \pi'^{-1}(\pi'' x) \rangle$$

をうる。ここで，π' と π'' は N のある置換である。したがって，$\pi = \pi'^{-1} \circ \pi'' \in \Pi$ とおけば，$\langle \lambda, \pi x - y \rangle \leq 0$ をうる。これより $\min_{\pi \in \Pi} \langle \lambda, \pi x - y \rangle \leq 0$ となる。$\lambda \in \Delta_N$ は任意だったので，

$$v(\widehat{G}_{x,y}) = \max_{\lambda \in \Delta_N} \min_{\pi \in \Pi} \langle \lambda, \pi x - y \rangle \leq 0$$

が成立する。

逆に $v(\widehat{G}_{x,y}) \leq 0$ を仮定する。$v(\widehat{G}_{x,y}) \leq 0$ の定義より

$$\min_{D \in \Delta_\Pi} \max_{i \in N} (xD - y)_i \leq 0$$

が成立するが，これよりすべての $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して，$(xD)_i \leq y_i$ が成立するような二重確率行列 D が存在する。x は R^n_{++} の要素であると仮定しているので，すべての $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し $(xD)_i > 0$ が成立する。$i = 1, 2, \ldots, n$ に対し $\alpha_i = y_i / (xD)_i \geq 1$ とおき，n 次正方行列 S を $S = (\alpha_1 d_1, \alpha_2 d_2, \ldots, \alpha_n d_n)$ と定義をする。ここで，d_i は D の第 i 列を表している。すると，S は二重優確率行列であることは明らかで，$xS = y$ が成立する。したがって，定理 5 より，$x \precsim_{\mathrm{GL}} y$ となる。

以上で $x, y \in R^n_{++}$ の場合には定理が成立することが確認できた。一般の $x, y \in R^n$ については，十分大きな $\alpha > 0$ をとり $x + \alpha e, y + \alpha e \in R^n_{++}$ が成立するようにする。$x \precsim_{\mathrm{GL}} y$ と $x + \alpha e \precsim_{\mathrm{GL}} y + \alpha e$ は同値であり，$v(\widehat{G}_{x,y}) = v(\widehat{G}_{x+\alpha e, y+\alpha e})$ が成立するので，証明が完了する。Q.E.D.

系 2　R^n の任意のふたつのベクトル x と y に対して，$x \precsim_{\mathrm{L}} y$ が成立することと $v(\widehat{G}_{x,y}) = 0$ かつ $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$ が成立することは同値である。特に，もし $x^* = y^*$ ならば $v(\widehat{G}_{x,y}) = 0$ である。

証明　$x \precsim_{\mathrm{L}} y$ を仮定する。定理 7 より $v(\widehat{G}_{x,y}) \leq 0$ が成立する。もし $v(\widehat{G}_{x,y}) < 0$ とすると，$\min_{D \in \Delta_\Pi} \max_{i \in N} (xD - y)_i < 0$ が成立するので，二重確率行列 D が存在し，すべての $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $(xD - y)_i < 0$ が成立する。このとき，$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n (xD)_i < \sum_{i=1}^n y_i$ が成立するが，これは $x \precsim_{\mathrm{L}} y$ に矛盾する。

逆に，$v(\widehat{G}_{x,y}) = 0$ かつ $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$ であると仮定する。上記と同じ議論で，二重確率行列 D が存在し，すべての $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し $(xD)_i \leq y_i$ が成立する。$\sum_{i=1}^n (xD)_i = \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$ なので，$i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $(xD)_i \leq y_i$ である。すなわち，$xD = y$ が成立するので定理 2 より $x \precsim_{\mathrm{L}} y$ がでる。Q.E.D.

系 3　$x^* \neq y^*$である R^n の任意のふたつのベクトル x と yに対して，$x \precsim_{\mathrm{GL}} y$であることと $v(\widehat{G}_{x,y}) \leq 0 < v(\widehat{G}_{y,x})$が成立することは同値である。

証明　$x^* = y^*$が成立することと $x \precsim_{\mathrm{GL}} y$かつ $y \precsim_{\mathrm{GL}} x$ が成立することが同値であることに注意すれば定理 7 より明らかである。Q.E.D.

6　ゲームの値と距離

第 5 節では広義ローレンツ支配とゼロ和二人ゲームの関係を議論した。本節ではそこでえられた結果を基に広義ローレンツ支配と密接に関連する距離を定義し，それらの基本性質を考察する。$R^n \times R^n$ 上の実数値関数 δ をゲームの値を使い以下のように定義をする。

$$\delta(x, y) = v(\widehat{G}_{x,y})$$

まず，関数 δ は三角不等式を満たしていることを証明する。

命題 3　R^n の任意の三つの要素 x，y，z に対して，

$$\delta(x, z) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z)$$

が成立する。

証明　$\delta(x, z) = \max_{\lambda \in \Delta_N} \min_{\pi \in \Pi} \langle \lambda, \pi x - z \rangle$ が成立しているので，$\delta(x, z) = \min_{\pi \in \Pi} \langle \lambda', \pi x - z \rangle$ となる $\lambda' \in \Delta_N$ が存在する。Π 内の任意の置換 π' をとり固定して考える。このとき，以下の等式が成立する。

$$\begin{aligned}
\delta(x, z) &= \min_{\pi \in \Pi} \langle \lambda', \pi x - \pi' y + \pi' y - z \rangle \\
&= \min_{\pi \in \Pi} \langle \lambda', \pi x - \pi' y \rangle + \langle \lambda', \pi' y - z \rangle \\
&= \min_{\pi \in \Pi} \langle \pi'^{-1} \lambda', (\pi'^{-1} \circ \pi) x - y \rangle + \langle \lambda', \pi' y - z \rangle \\
&= \min_{\pi \in \Pi} \langle \pi'^{-1} \lambda', \pi x - y \rangle + \langle \lambda', \pi' y - z \rangle \\
&\leq \max_{\lambda \in \Delta_N} \min_{\pi \in \Pi} \langle \lambda, \pi x - y \rangle + \langle \lambda', \pi' y - z \rangle \\
&= \delta(x, y) + \langle \lambda', \pi' y - z \rangle.
\end{aligned}$$

$\pi' \in \Pi$を任意にとったので，

$$\begin{aligned}
\delta(x, z) - \delta(x, y) &\leq \min_{\pi \in \Pi} \langle \lambda', \pi y - z \rangle \\
&\leq \max_{\lambda \in \Delta_N} \min_{\pi \in \Pi} \langle \lambda, \pi y - z \rangle \\
&= \delta(y, z)
\end{aligned}$$

が成立し，$\delta(x,z) \leq \delta(x,y) + \delta(y,z)$ となる。Q.E.D.

次に上で定義した δ を使い R^n 上の距離を定義し，その基本的な性質を調べる。$R^n \times R^n$ 上の実数値関数 d を

$$d(x,y) = \delta(x,y) \vee \delta(y,x)$$

で定義する。次の定理 8 は d はほとんど距離の公理を満足していることを示している。

定理 8（[8]）R^n の任意の三つの要素 x，y，z に対して，関数 d は次の性質ををもつ。

1．$d(x,y) \geq 0$が成立し，$d(x,y) = 0$であるための必要十分条件は $\pi x = y$ となる N の置換 π が存在することである；

2．$d(x,y) = d(y,x)$;

3．$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$;

4．もし $x \precsim_{\mathrm{GL}} y \precsim_{\mathrm{GL}} z$ ならば，

$$d(x,y) \leq d(x,z) \quad \text{かつ} \quad d(y,z) \leq d(x,z).$$

が成立する。

証明

1．系 3 より明らかである。

2．d の定義から明らかである。

3．命題 3 から直接でる。

4．次の不等式が最初の主張を示している。

$$d(x,y) = \delta(y,x) \leq \delta(y,z) + \delta(z,x) \leq \delta(z,x) = d(x,z).$$

同様にして $d(y,z) \leq d(x,z)$ をうる。Q.E.D.

次の命題は d の基本的な性質を述べている。

命題 4　R^n の任意の要素 x，yと任意の実数 α に対して，次の主張が成立する。

1．$d(x+\alpha e, y+\alpha e) = d(x,y)$;

2．もし $\alpha \geq 0$ならば，$d(\alpha x, \alpha y) = \alpha d(x,y)$;

3．Π内の任意の置換の π と π' に対し，$d(\pi x, \pi' y) = d(x,y)$が成立する。

証明　第一と第二の主張は，対応する関数 δ の性質を考えれば明らかである。第三の主張は d の性質から明らかである。Q.E.D.

次に距離 d の連続性の議論に移る。d がユークリッド空間の通常の位相について連続である

ことを確認できるが，そのために補題をひとつ用意する。

R^n の部分集合 M を $M=\{\lambda\in R^n:\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_n\geq 0\}$ と定義する。

補題 8　R^n の任意の要素 x と y に対して，

$$\delta(x,y)=\max_{\lambda\in M\cap\Delta_N}\langle\lambda,x^*-y^*\rangle$$

が成立する。

証明　$\beta=\max_{\lambda\in M\cap\Delta_N}\langle\lambda,x^*-y^*\rangle$ とおく。まず不等式 $\beta\leq\delta(x,y)$ を示す。$\beta=\langle\lambda',x^*-y^*\rangle=\langle\lambda',x^*\rangle-\langle\lambda',y^*\rangle$ なる $\lambda'\in M\cap\Delta_N$ をとり，さらに $\pi'y^*=y$ なる $\pi'\in\Pi$ をとると $\beta=\langle\lambda',x^*\rangle-\langle\pi'\lambda',y\rangle$ が成立する。補題 6 よりすべての $\pi\in\Pi$ に対して $\langle\lambda',\pi x\rangle\geq\langle\lambda',x^*\rangle$ となるので，

$$\begin{aligned}\beta&\leq\langle\lambda',\pi x\rangle-\langle\pi'\lambda',y\rangle\\&=\langle\pi'\lambda',(\pi'\circ\pi)x\rangle-\langle\pi'\lambda',y\rangle\\&=\langle\pi'\lambda',(\pi'\circ\pi)x-y\rangle\end{aligned}$$

が成立する。π は任意なので，$\beta\leq\min_{\pi\in\Pi}\langle\pi'\lambda',(\pi'\circ\pi)x-y\rangle$ が成立する。したがって，$\beta\leq\min_{\pi\in\Pi}\langle\pi'\lambda',\pi x-y\rangle$ となる。$\pi'\lambda'\in\Delta_N$ であることに注意すると，

$$\beta\leq\max_{\lambda\in\Delta_N}\min_{\pi\in\Pi}\langle\lambda,\pi x-y\rangle=\delta(x,y)$$

をうる。

次に逆の不等式 $\delta(x,y)\leq\beta$ を示す。$\delta(x,y)=\min_{\pi\in\Pi}\langle\lambda',\pi x-y\rangle=\min_{\pi\in\Pi}\langle\lambda',\pi x\rangle-\langle\lambda',y\rangle$ なる $\lambda'\in\Delta_N$ をとる。$\pi'\lambda'$ が M に属するような $\pi'\in\Pi$ をとると，補題 6 より $\langle\pi'\lambda',y^*\rangle\leq\langle\lambda',y\rangle$ となる。したがって，$\delta(x,y)\leq\min_{\pi\in\Pi}\langle\lambda',\pi x\rangle-\langle\pi'\lambda',y^*\rangle$ が成立する。$\pi''\in\Pi$ を $\pi''x^*=x$ となる置換とする。このとき以下の不等式が成立し，証明が完了する。

$$\begin{aligned}\delta(x,y)&\leq\min_{\pi\in\Pi}\langle\lambda',(\pi\circ\pi'')x^*\rangle-\langle\pi'\lambda',y^*\rangle\\&=\min_{\pi\in\Pi}\langle(\pi\circ\pi'')^{-1}\lambda',x^*\rangle-\langle\pi'\lambda',y^*\rangle\\&\leq\langle\pi'\lambda',x^*\rangle-\langle\pi'\lambda',y^*\rangle\\&=\langle\pi'\lambda',x^*-y^*\rangle\\&\leq\max_{\lambda\in M\cap\Delta_N}\langle\lambda,x^*-y^*\rangle\\&=\beta\end{aligned}$$

Q.E.D.

定理 9　距離 $d : R^n \times R^n \to R$ は連続である。

証明　まず写像 $x \mapsto x^*$ の連続性を確認しておく。点列 x_n が x に収束しているとする。$x^* = xP$なる置換行列をとる。x^* の成分で等しいものがあるときは，それらは連続して表れるので，その連続した添字の集合を，$E_1, \ldots, E_p$ とする。$i \in E_k$，$j \in E_l$，$k < l$ ならば，$x_i^* < x_j^*$が成立しているものとする。$x'_n = x_nP$とおくと，x'_nが x^* に収束している。ε>0を任意に固定する。十分大きな n に対しては，$i \notin \cup_{k=1}^{p} E_k$なる添字$i$については$x'_{ni} = x^*_{ni}$となることに注意する。したがって，$|x^*_{ni} - x^*_i| = |x'_{ni} - x^*_i| < \varepsilon$が成立する。次に，任意の$k$をひとつ固定して$E_k$を考える。各$i \in E_k$に対して$j \in E_k$が存在して，十分大きな n に対して $|x^*_i - x^*_{ni}| = |x^*_j - x'_{nj}| < \varepsilon$が成立している。したがって，十分大きな n を考えればすべてのi= $1, \ldots, n$について$|x^*_i - x^*_{ni}| < \varepsilon$がでて，$x^*_n$が x^* に収束することが示せた。

d の連続性を示すためには δ の連続性を示せば十分である。補題 8 より$\delta(x, y) = \max_{\lambda \in M \cap \Delta_N} \langle \lambda, x^* - y^* \rangle$であり，$x \mapsto x^*$ の連続性を上で示したので，関数$f(x) = \max_{\lambda \in M \cap \Delta_N} \langle \lambda, x \rangle$の連続性を示せばよい。$f$の定義から$f$が下半連続であることはよい。$f$が上半連続であることを示すために，点列$x_n$が x に収束しているとする。ε>0を任意に固定する。$f(x_n) = \langle \lambda_n, x_n \rangle$なる $\lambda_n \in M \cap \Delta_N$ をとる。$\langle \lambda_n, x_n \rangle - \langle \lambda_n, x \rangle \le \|\lambda_n\| \|x_n - x\|$が成立し，$\lambda_n \in M \cap \Delta_N$ なので $\|\lambda_n\| \le 1$である。よって，十分大きな n については，

$$\langle \lambda_n, x_n \rangle < \langle \lambda_n, x \rangle + \varepsilon \le f(x) + \varepsilon$$

すなわち，$f(x_n) < f(x) + \varepsilon$をえて，$f$は上半連続である。Q.E.D.

7　典型的な所得分配間の距離

本節では典型的な所得分配間の距離を計算する。そのためにひとつ補題を用意しておく。

補題 9　もし $\lambda \in M \cap \Delta_N$で $0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$ ならば，すべてのk=1, 2, . . . , nに対して，

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \le \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_i$$

が成立する。

証明　$1 \le k \le n$ なる任意のkを固定して考える。$\lambda_k > 1/k$ とすると$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i > 1$となり，これは仮定に反するので$\lambda_k \le 1/k$である。$i_0$ を $\lambda_i \le 1/k$なるiのうちで最小の添字とする。このとき，$1 \le i_0 \le k$ である。もしi_0=1ならば，$1/k \ge \lambda_1 \ge \cdots \ge \lambda_k$ が成立するので，$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \le (\sum_{i=1}^{k} x_i)/k$なる結論をうる。したがって，1< $i_0 \le k$と仮定する。このとき，i =1, ..., i_0−1に対しては$\lambda_i > 1/k$であり，i =i_0, ..., kに対しては$\lambda_i \le 1/k$である。したがっ

て，$i=1,...,i_0-1$に対しては$1/k-\lambda_i<0$が成立し，$i=i_0,...,k$に対しては$1/k-\lambda_i\geq 0$が成立する。よって，

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}x_i-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i=\sum_{i=1}^{i_0-1}(\frac{1}{k}-\lambda_i)x_i+\sum_{i=i_0}^{k}(\frac{1}{k}-\lambda_i)x_i$$
$$\geq x_{i_0-1}\sum_{i=1}^{i_0-1}(\frac{1}{k}-\lambda_i)+x_{i_0}\sum_{i=i_0}^{k}(\frac{1}{k}-\lambda_i)$$

が成立する。

一方，

$$\sum_{i=1}^{i_0-1}(\frac{1}{k}-\lambda_i)+\sum_{i=i_0}^{k}(\frac{1}{k}-\lambda_i)=\sum_{i=1}^{k}(\frac{1}{k}-\lambda_i)=1-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\geq 0$$

なので，

$$\sum_{i=1}^{i_0-1}(\frac{1}{k}-\lambda_i)\geq-\sum_{i=i_0}^{k}(\frac{1}{k}-\lambda_i)$$

が成立する。したがって，

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}x_i-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i\geq -x_{i_0-1}\sum_{i=i_0}^{k}(\frac{1}{k}-\lambda_i)+x_{i_0}\sum_{i=i_0}^{k}(\frac{1}{k}-\lambda_i)$$
$$=(x_{i_0}-x_{i_0-1})\sum_{i=i_0}^{k}(\frac{1}{k}-\lambda_i)\geq 0$$

をうる。Q.E.D.

これまでeですべての成分が1であるR^nのベクトルを表し，e_nで最後の成分が1で他のすべての成分が0であるR^nのベクトルを表してきた。したがって，eとne_nはすべての成分が非負で成分の総和がnであるベクトルである。このような性質をもつベクトルの集合をF_nと書くことにする。すなわち，

$$F_n=\{x\in R^n : x_i\geq 0,\ i=1,2,\ldots,n\ \text{そして}\ \sum_{i=1}^{n}x_i=n\}$$

である。さらに，nに必ずしも等しくないrについてもF_rという記号を使うことにする。すなわち，$F_r=\{x\in R^n : x_i\geq 0,\ i=1,2,\ldots,n$かつ$\sum_{i=1}^{n}x_i=r\}$である。以下では集合$F_n$の性質を調べていく。次の命題は$F_n$の要素間の距離は高々1であり，最大の距離1は$F_n$の中でローレンツ支配の意味で最も極端な分配である$e$と$ne_n$によって達成されることを主張しており，前節で定義した距離がローレンツ支配を記述する距離として妥当と考えられるひとつの根拠となる。

命題5　1．任意の$x,y\in F_n$に対して$d(x,y)\leq 1$が成立する。

2．任意の $x \in F_n$ に対して $d(ne_n, x) = \dfrac{1}{n-1}(n - \max_{i \in N} x_i)$ が成立する。したがって，$x \in F_n$ に対して，$d(ne_n, x) = 1$ であるための必要十分条件は $x = e$ である。

3．任意の $x \in F_n$ に対して，$d(e, x) = 1 - \min_{i \in N} x_i$ が成立する。したがって，$x \in F_n$ に対して，$d(e, x) = 1$ であるための必要十分条件は $\min_{i \in N} x_i = 0$ である。

証明

1．$x, y \in F_n$ とする。$\delta(x, y) = \min_{D \in \Delta_\Pi} \max_{i \in N} (xD - y)_i$ であることに注意する。$x \precsim_{\mathrm{L}} e$ が成立するので，定理2より $xD = e$ となる二重確率行列 D が存在する。よって，$\delta(x, y) \leq \max_{i \in N}(e - y)_i$ である。$i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $(e - y)_i \leq 1$ であるので，$\delta(x, y) \leq 1$ である。x と y の役割を交換し，$\delta(y, x) \leq 1$ をうる。したがって，$d(x, y) \leq 1$ が成立する。

2．$ne_n \precsim_{\mathrm{L}} x$ が成立するので，$d(ne_n, x) = \delta(x, ne_n)$ であることに注意する。このとき，以下の等式の連鎖をうる。

$$\begin{aligned}
\delta(x, ne_n) &= \max_{\lambda \in M \cap \Delta_N} \langle \lambda, x^* - ne_n \rangle \\
&= \max_{\substack{\lambda \in M \cap \Delta_N \\ \lambda_n = 0}} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i^* \\
&= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} x_i^* \\
&= \frac{1}{n-1}(n - \max_{i \in N} x_i)
\end{aligned}$$

第一と第三の等号はそれぞれ補題8と補題9による。

3．補題8より，

$$\begin{aligned}
d(e, x) &= \delta(e, x) \\
&= \max_{\lambda \in D \cap \Delta_N} \langle \lambda, e - x^* \rangle \\
&= \max_{\lambda \in D \cap \Delta_N} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (1 - x_i^*)
\end{aligned}$$

が成立する。$1 - x_1^* \geq 1 - x_2^* \geq \cdots \geq 1 - x_n^*$ なので，上の等式の最後の最大値は $\lambda = (1, 0, \ldots, 0)$ によって達成される。よって，$d(e, x) = 1 - x_1^* = 1 - \min_{i \in N} x_i$ をうる。Q.E.D.

R^n 内のよく知られた線分について考えてみる。R^n のふたつのベクトル x と y を結ぶ線分 $[x, y]$ は通常

$$[x, y] = \{(1 - s)x + sy : 0 \leq s \leq 1\}$$

と R^n の線形構造を使い定義される。次のユークリッド距離 $d_E(d_E(x,y)=\sqrt{\langle x-y,x-y\rangle})$ を使った線分［x,y］の特徴付けは容易に確認できる。

$z\in[x,y]$ であるための必要十分条件は $d_E(x,z)+d_E(z,y)=d_E(x,y)$ が成立することである。

この特徴付けからの示唆により，ne_n と e を結ぶ F_n 内の**線分** L_n を我々が定義した距離 d を使い

$$L_n=\{x\in F_n : d(ne_n,x)+d(x,e)=d(ne_n,e)(=1)\}$$

と定義する。次の命題は L_n の要素の形を明示している。

命題 6　L_n を上で定義された ne_n と e を結ぶ F_n 内の線分とし，$x\in F_n$ とする。このとき，x が L_n に属するための必要十分条件は，x は $(n-1)$ 個の相等しい成分をもちそれは残りのひとつの成分以下であることである。

証明　$n=2$の場合は，$F_2=L_2$ となり証明することはないので $n\geq 3$とする。命題 5 より，

$$\begin{aligned} d(ne_n,x)+d(x,e) &= \frac{1}{n-1}(n-\max_{i\in N}x_i)+1-\min_{i\in N}x_i \\ &= 1+\frac{1}{n-1}(n-\max_{i\in N}x_i-(n-1)\min_{i\in N}x_i) \end{aligned}$$

が成立するので，$x\in L_n$であるための必要十分条件は，xが等式 $\max_{i\in N}x_i+(n-1)\min_{i\in N}x_i=n$ を満足することである。

x が等式 $\max_{i\in N}x_i-(n-1)\min_{i\in N}x_i=n$ を満足すると仮定する。$x_{i_1}=\min_{i\in N}x_i$ かつ $x_{i_2}=\max_{i\in N}x_i$ である相異なる添字 i_1 と i_2 をとる。$x_{i_2}+(n-1)x_{i_1}=n=\sum_{i=1}^n x_i$ なので，$\sum_{i\neq i_1,i_2}(x_i-x_{i_1})=0$ であり，したがって，$i\neq i_2$ に対して $x_i=x_{i_1}$ である。よって，$i\neq i_2$ に対して $x_i=\min_{i\in N}x_i\leq x_{i_2}$ である。

逆に，すべての $i\neq i_0$ に対して $x_{i_0}\geq x_i$ であり，すべての $i\neq i_0$ に対して $x_i=\alpha$ であるような α が存在すると仮定する。このとき，$\max_{i\in N}x_i+(n-1)\min_{i\in N}x_i=x_{i_0}+(n-1)\alpha=\sum_{i=1}^n x_i=n$が成立する。Q.E.D.

最後に隣り合う所得レベルの構成員の間で所得の移転が起きた場合に生じる距離と所得分配の割合は変わらずに生産成果の総量が増加した場合に生じる距離を求める。

命題 7　x を F_nの要素とする。

1．$x_k^*<x_{k+1}^*$ とし，$x_k^*+t\leq x_{k+1}^*-t$ なる $t>0$をとる $x'\in F_n$ を以下で定義されるベクトルとする：

$i \neq k$かつ$i \neq k+1$なるiに対して$x'_i = x^*_i$とし，$x'_k = x^*_k + t$，$x'_{k+1} = x^*_{k+1} - t$とする。

このとき，

$$d(x, x') = \frac{t}{k}$$

が成立する。

2．$r > 0$としたとき，

$$d(x, (1+r)x) = r$$

が成立する。

証明

1．命題4の3と補題8より，$d(x, x') = d(x^*, x') = \delta(x', x^*) = \max_{\lambda \in M \cap \Delta_N} \langle \lambda, x' - x^* \rangle$が成立する。

$$x' - x^* = (0, \ldots, 0, t, -t, 0, \ldots, 0)$$

なので，$M \cap \Delta_N$の中のλは$\lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_n = 0$を満たす$\lambda$に制限できる。よって，補題9より，$\max_{\lambda \in D \cap \Delta_N} \langle \lambda, x' - x^* \rangle = t/k$となり，$d(x, x') = t/k$をうる。

2．次の等式の連鎖から証明をされる。$d(x, (1+r)x) = \delta((1+r)x, x) = \max_{\lambda \in M \cap \Delta_N} \langle \lambda, rx^* \rangle = r \max_{\lambda \in M \cap \Delta_N} \langle \lambda, x^* \rangle = r$。二番目の等号は補題8により，最後の等号は補題9による。

Q.E.D.

もし社会厚生を我々の距離を用いて測るならば，分配レベルが$(k+1)$番目の構成員からk番目の構成員へtだけ移転することにより公平性を目指すことと分配の割合は変化させずに生産成果を$(1+t/k)$倍にすることは同じ社会厚生の増加をもたらすと命題7は解釈できる。

参考文献

［1］ Birkhoff, G.: Tres Observasiones sobre el Álgebra Lineal, Univ. Nac. Tucumán Rev. Ser. A5, 147–151 (1946).

［2］ Hardy, G. H., Littlewood, J.E., Pólya,: Inequalities 2nd ed., Cambridge Univ. Press, London and New York, 1952.

［3］ 川又邦雄，市場機構と経済厚生，創文社，1991.

［4］ Komiya, H.: On Infinite Doubly Substochastic Matrices, Z. Wahrscheinlichkeistheorie verw. Gebiete 61, 119–128 (1982).

［5］ Komiya, H.: Necessary and Sufficient Conditions for Multivariate Majorization, Linear Algebra 55, 147–154 (1983).

［6］ Komiya, H.: Elementary Proof for Sion's Minimax Theorem, Kodai Math. J. 11, 5–7 (1988).

［7］ Komiya, H.: On Minimax Theorems without Linear Structure, 日吉紀要自然科学 8, 74–78 (1990).

［8］ Komiya, H.: A Distance and a Binary Relation Related to Income Comparisons, Adv. Math. Econ. 11, 77–93 (2008).

［9］ Lorenz, M.O.: Methods of Measuring Concentration of Wealth, J. Amer. Statist. Assoc. 9, 209–219 (1905).

［10］ Marshall, A.W., Olkin, I.: Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications, Academic Press, New York, 1979.

［11］ Shorrocks, A.F.: Ranking Income Distributions, Economica 50, 3–17 (1983).

［12］ Sion, M.: On General Minimax Theorems, Pacific J. Math. 8, 171–176 (1958).