Title	微分代数から差分代数へ
Sub Title	
Author	西岡, 啓二(Nishioka, Keiji)
Publisher	慶應義塾大学湘南藤沢学会
Publication year	2014
Jtitle	リサーチメモ
JaLC DOI	
Abstract	
Notes	
Genre	Technical Report
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KO92001002-2014-100-0001

ISBN 978-4-87762-277-0
SFC-RM 2014-001

微分代数から差分代数へ

西岡啓二

慶應義塾大学 環境情報学部

微分代数から差分代数へ

西 岡 啓 二
慶應義塾大学 環境情報学部

目次

はじめに

微分方程式と差分方程式は似ているところが多々あるとよくいわれる. 実際, 微分方程式で得られた結果に類似的結果が多く散見される. というよりむしろ, 類似の結果を求めるほうが簡単であったというべきだろう. ある程度研究が進めば, 同様の手法が適用することが困難になってくる. 実は逆に差分の綺麗な結果が微分に反映しているようにみえる. 特別な変換

$$e^{d/dx}$$

が $+1$ 差分を表現していることから類推されるように, 微分から得られる差分に関してなんらかの結果があるなら, それは微分によって表現できることになる. しかし, 逆はうまくいかない. 典型的な例は, Kolchin の意味の普遍微分拡大は差分においてはその存在を考えることができないという事実である. もっとも重大な違いが代数拡大を考察する場合にみられる. たとえば指数関数の定義式

$$De = e \neq 0$$

によって微分体 $\mathbf{C}(e)$ をつくり, その 2 次拡大を $K = \mathbf{C}(f)$, $f^2 = e$ とする. K は微分体になる. 微分が

$$Df = \frac{1}{2}f$$

によって決まる. 実際 $f^2 = e$ を微分して $2fDf = De = e = f^2$ であるから. 一方 τ を $\tau x = x + 1$ によって定義される変換とし, $\tau e = 2e$ によって定義される差分体 $\mathbf{C}(e)$ の 2 次拡大 $K = \mathbf{C}(f)$, $f^2 = e$ には,

$$\tau f = \pm f$$

と 2 種の変換 の可能性がでてくる. 変換の不定性が微分の場合と違って複雑な議論の必要性をもたらすのである.

このように微分と差分との間の相違が一体どういうものなのかを知ることは大変興味あることがらではあるが, 似ているところはどこかを知ることも意義あると思われる. というより, むしろ似ているところの限界として特異性が出現するというべきだろう. 類似

の結果を予想し，実際にその証明を考えることで，はじめて相違点をみつけることができる．今般わたしが筆をとった理由もそこにあり，ここで議論したことがらが学生のみなさんの相違点をどんどん見つける手助けになればと期待する．

さて，この論説では §1.6 を除いて，考察する環や体は可換であり，有理数体 $\mathbf{Q}$ を部分環や部分体として含むものとする．すなわち標数 0 の可換体を考察の対象とする．環 R が微分環であるとは，内部に作用する微分作用 $D : R \to R$ を議論において考慮に入れるときにいう．ここで

$$D(a+b) = Da + Db, \quad D(ab) = aDb + bDa \quad (a, b \in R)$$

環 R が差分環とは変換 $\tau : R \to R$ を考慮に入れた場合をいう．

$$\tau(a+b) = \tau a + \tau b, \quad \tau(ab) = \tau(a)\tau(b) \quad (a, b \in R)$$

すなわち τ は R の差分作用とよばれる内部準同型である．$\tau R = R$ のとき，R は inversive であるという．$[R : \tau R] < +\infty$ のとき，R は quasi-inversive (西岡斉治の用語) と称える．微分の場合，このような用語はない．微分代数における定数が差分代数では漠然と分岐している．この点が大きな相違点で，また面白いところでもある．

このような口調で以下にいくつか微分代数と差分代数の用語と結果を紹介するが，基本的文献として Kolchin [7], Cohn [3] のみ挙げる．古いスタイルがすきなひとには Ritt [20] を推薦する．微分代数の動機に計算可能性がある．差分代数での比較的最近の文献 Levin [8] はその方面への接近を意図しているようだ．また，日本語で読める文献として西岡 [14] を挙げる．体論については永田 [9] を推奨する．とくに，線形無関連性は重要な道具であるので，よく馴染んでおいてほしい．たとえば，つぎはよく用いられる．

$\ll$ 拡大体 L/K で，K は代数的に閉じているとする．もし，拡大体 M/K が L と K 上代数的に無関連ならば，L, M は K 上線形無関連である．逆も成立する．$\gg$

また，差分体 K の代数的閉包が差分拡大になることは Steinitz の定理から知られる．

$\ll$ 体 K の代数的閉包を $\overline{K}$ とする．$L_1 \subset L_2$ が共に K の代数拡大で，σ が L_1 から $\overline{K}$ の中への K 同型であれば，σ は L_2 から $\overline{K}$ の中への K 同型に拡張できる．$\gg$

Lüroth の定理も引用しておこう．

$\ll$ $x_1, \ldots, x_r$ が体 K 上の代数的独立元で，$K \subset L \subset K(x_1, \ldots, x_r)$ であるような体 L が K 上超越次数 1 であるならば，$L = K(t)$ となる元 t がある．$\gg$

この論考で強調したいことは差分体に関する事柄であるから, 微分体や 1 変数代数関数体に関する結果は [14] から断わりなしに使用することにし, あまり詳しく述べることはしない.

第1章

基本概念

この章では基本概念の紹介と, いくつかの結果を示す. 次章に回すべきものもあるが, 応用をできるだけ早く示すことを意図した.

K は標数 0 の可換体とする. K が微分体 (微分環で体) のとき,

$$C_K = \{c \in K \mid Dc = 0\}$$

を K の constant field という. 実際, これは K の部分体になる. C_K の元を K の constant という.

K が差分体 (差分環で体) のとき,

$$C_K = \{c \in K \mid \tau c = c\}$$

を K の invariant subfield という. 実際, これは K の部分体になる. C_K の元を K の invariant という. $a \in K$ はある整数 $n > 0$ で $\tau^n a = a$ なるとき, K の periodic element とよばれる. periodic elements 全体は K における C_K の代数閉体になる. 実際, $\tau^n a = a \ (n > 0)$ とすると $a, \tau a, \ldots, \tau^{n-1} a$ の対称式は K の invariant になるから. 逆に, $a \in K$ が C_K 上代数的ならば, それは periodic である. なぜなら, $\tau^k a$ は C_K 上すべて同じ代数方程式をみたすから, ある h で $\tau^h a = a$ が成り立つからである.

$[K : C_K] < +\infty$ のとき, K は periodic とよばれ, そうでないとき aperiodic とよばれる. 前者の場合, $a \in K$ は C_K 上代数的であるから, K の各元は periodic である.

可算個の不定元 $Y_0, Y_1, \ldots$ による体 K 上の多項式環を $K[Y_0, Y_1, \ldots]$ と書く. K が差分体のとき, $Y = Y_0, Y_k = \tau^k Y$ とすることによって $K[Y_0, Y_1, \ldots]$ は差分環になる. これを $K\{Y\}$ と書き, K 上 Y に関する差分多項式環という. K 上代数的 (常) 差分方程式とは, ある $F \in K\{Y\}$ によって

$$F(y, \tau y, \ldots, \tau^n y) = 0$$

と表示される方程式である. Y_n が F に真に現れるが, Y_k $(k > n)$ は F に現れないとき, n を F の order といい, $n = \mathrm{ord}\, F$ と記述する. このとき, 代数的差分方程式 $F(y) = 0$ は n 階であるといわれる.

L/K を差分拡大とする. すなわち, L は K 上のそれに一致する差分作用 τ をもつとする. $y \in L$ を含む最少の差分拡大 M/K を $K\langle y\rangle$ と記し, y を生成元とする差分拡大という.

$$M = K\langle y\rangle = K(\tau^k y \mid 0 \le k)$$

と書いても意味はわかると思う. いくつかの元を生成元とする差分拡大も考えることができる. 同様の記法を用いることにする.

$$K\langle y_1, \dots, y_n\rangle = K(\tau^h y_k \mid 0 \le h, 1 \le k \le n)$$

$y \in L$ は非零な $A \in K\{Y\}$ で $A(y) = 0$ をみたすとき, K 上差分代数的であるという. このとき,

$$\mathrm{td}\, K\langle y\rangle/K \le \mathrm{ord}\, A$$

である. ここで td は超越次数を示す. y が K 上差分代数的でないとき, それは K 上差分超越的であるといわれる. このとき $\mathrm{td}\, K\langle y\rangle/K = +\infty$ である.

L/K を差分拡大とする. $y_1, \dots, y_n \in L$ は, 各 k に対して y_k が $K\langle y_1, \dots, y_{k-1}\rangle$ 上差分超越的であるとき, K 上差分独立という. このとき L の各元が $K\langle y_1, \dots, y_n\rangle$ 上差分代数的ならば, $y_1, \dots, y_n$ は L の K 上差分超越基底とよばれる.

文字 $Y_1, \dots, Y_m$ を用いて多変数の差分多項式環 $K\{Y_1, \dots, Y_m\}$ を 1 変数の $K\{Y\}$ と同様に定義することができる. 差分拡大 L/K の元 $y_1, \dots, y_m$ が K 上差分代数的に従属であるとは,

$$A(y_1, \dots, y_m) = 0$$

を満たす非零な $A \in K\{Y_1, \dots, Y_m\}$ が存在するということである.

$y_1, \dots, y_m$ は K 上差分独立であるとする. このとき $z \in K\langle y_1, \dots, y_m\rangle$ が K 上差分代数的ならば $z \in K$ である. $n = 1$ のとき $z \notin K$ なら, z は $K\{y_1\}$ の 2 元の比で表わされ, 分母分子どちらかにある $\tau^k y_1$ が含まれる. y_1 はしたがって $K\langle z\rangle$ 上差分代数的である. z が K 上差分代数的であるから, y_1 もそうであり, 矛盾. あとは induction で証明を完了する.

1.1　単純拡大

K を標数 0 の可換体とする. 前小節の差分超越性などの概念は微分代数でも同様に定義される.

K が微分体の場合, 微分拡大 L/K は有限個の元 $y_1, \ldots, y_n \in L$ によって生成されるとき, 有限生成微分拡大という. 記号で, $L = K\langle y_1, \ldots, y_n\rangle$ と記す. つぎが成り立つ.

$\ll$ L/K を有限生成微分拡大とする. その中間拡大は有限生成微分拡大である. $\gg$

実際 $y_1, \ldots, y_r \in L$ を L の K 上微分超越基底とし, $y_{r+1}, \ldots, y_n \in L$ を L の $K\langle y_1, \ldots, y_r\rangle$ 上超越基底とするならば, L は $K\langle y_1, \ldots, y_n\rangle$ 上代数的である. よって,

$$L = K\langle y_1, \ldots, y_n, y\rangle$$

なる $K\langle y_1, \ldots, y_n\rangle$ 上代数的元 $y \in L$ が存在する.

差分代数においても同様の結果が成り立つ. 定義は上記の「微分」を「差分」に置き換えればよい.

命題　K を差分体, L/K を有限生成差分拡大とする. その中間差分体は K 上有限生成差分拡大である.

つぎは Ritt [20] で証明されているものであるが, ここでは Kolchin [7] の証明を紹介する. 差分代数に直ちに書き換えることができるからである.

$\ll$$K \neq C_K$ とし, L/K を有限生成微分拡大で t.d $L/K < +\infty$ なるものとする. このとき, ある $\eta \in L$ で $L = K\langle \eta\rangle$ なるものが存在する. $\gg$

実際つぎを証明すればよい. α, β を K 上微分代数的とすると, ある $e \in K$ で $\gamma = \alpha + e\beta$ とすれば $K\langle\gamma\rangle = K\langle\alpha, \beta\rangle$ なるものが存在する. さて t を微分不定元, $u = \alpha + t\beta$ とする. t, u は K 上微分代数的に従属であるから $0 \neq A \in K\{y, z\}$ が存在し

$$A(t, u) = 0$$

が成り立つ. $\frac{\partial A}{\partial z_r}(t, u) \neq 0$ と仮定してよい. ここで $r = \mathrm{ord}_z A$ とした. 上記の関係式を t_r で微分すれば

$$\frac{\partial A}{\partial t_r}(t, u) = \frac{\partial A}{\partial y_r}(t, u) + \frac{\partial A}{\partial z_r}(t, u)\beta = 0$$

を得る. $K \neq C_K$ であるから $e \in K$ で

$$\frac{\partial A}{\partial z_r}(e, \gamma) \neq 0 \quad (\gamma = \alpha + e\beta)$$

なるものがある. t に e を代入して

$$\frac{\partial A}{\partial y_r}(e, \gamma) + \frac{\partial A}{\partial z_r}(e, \gamma)\beta = 0$$

したがって $\beta \in K\langle\gamma\rangle$, $K\langle\gamma\rangle = K\langle\alpha,\beta\rangle$ となる.

差分代数ではどうか. 少し準備が必要なので次節で述べる.

問題 ところで, K を微分体, y を微分不定元とするとき, $K\langle y\rangle/K$ の自明でない中間微分体は単純拡大である, という Lüroth の定理に類似する命題が Ritt によって証明されている. 証明は Ritt の教科書に初出, Kolchin の本に, すこし怪しいとは思うが, 演習問題として載っている. 差分の場合にも成り立つかもしれない.

加群においても同様な議論がなされている. K を定数体でない微分拡大とするとき, もし K 上有限次元ベクトル空間 V がつぎの意味で微分が与えられていると仮定する.

$$D(av) = D(a)v + aD(v) \quad (a \in K,\ v \in V)$$

このとき, $v \in V$ で $\{v, Dv, \ldots, d^{n-1}v\}$ が V を生成するものが存在する. このような v を cyclic vector (たとえば [5, p.424] を参照) という.

差分においても同様の事実がある. K を差分体とする. $v \in K^n$ に対して変換 $\sigma v = \tau(v)A$ を考える. これは $\sigma(av) = \tau(a)\sigma(v)$ を満足する. 後で述べる命題によって $\{v_0, \sigma v_0, \ldots, \sigma^{n-1}v_0\}$ が K^n の基底になるような $v_0 \in K^n$ が存在する. このとき

$$P = \begin{pmatrix} v_0 \\ \sigma v_0 \\ \vdots \\ \sigma^{n-1}v_0 \end{pmatrix}$$

とおけば, $\det P \neq 0$ であり

$$\sigma P = \begin{pmatrix} \sigma v_0 \\ \sigma^2 v_0 \\ \vdots \\ \sigma^n v_0 \end{pmatrix} = BP$$

となる. ここで $\sigma^n v_0 = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \sigma^i v_0$ とした.

U, V を K 上有限次ベクトル空間とする. 加法準同型 $f: U \to V$ は $f(au) = \tau(a)f(u)$ をみたすとする. $f(U), \mathrm{Ker}\, f$ は V の部分空間である. 実際 $b \in K, f(u) \in f(U)$ とするとき, $b = \tau a$ なる $a \in K$ をとれば $bf(u) = f(au) \in f(U)$ である. また, $a \in K, f(u) = 0$ とすると, $f(au) = \tau(a)f(u) = 0$ である. よって $au \in \mathrm{Ker}\, f$ となる.

V のスカラー積を

$$a \cdot v = \tau(a)v \quad (a \in K, v \in V)$$

によって定義すれば, f を K 上ベクトル空間の間の準同型とみなせる. 次元については変化しない. 実際 $v_1, \ldots, v_m$ が K 上線形独立とすると

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \cdot v_i = 0$$

とすれば $\sum_{i=1}^{m} \tau(a_i)v_i = 0$ よって a_i はすべて 0. したがって $v_1, \ldots, v_m$ は第 2 の意味で K 上線形独立である. 逆も同様である.

この意味で

$$U/\mathrm{Ker}\, f \cong f(U)$$

よって

$$\dim U = \dim f(U) + \dim \mathrm{Ker}\, f$$

を得る.

改めて K を inversive difference field とし, V/K をベクトル空間, 変換 transforming operator を τ とする. これは $\tau(av) = \tau(a)\tau(v)$, $a \in K, v \in V$ をみたすものである.

命題 K を aperiodic とする. このとき, もし $n = \dim V < \infty$ ならば, cyclic vector $v_0 \in V$ が存在する. すなわち

$$V = \langle v_0, \tau v_0, \ldots, \tau^{n-1} v_0 \rangle = \bigoplus_{i=0}^{n-1} K\tau^i v_0$$

証明 $0 \neq u \in V$ を任意にとり, $U = \langle u, \tau u, \ldots, \tau^{m-1} u \rangle$, $m = \dim U$ とし $\tau^m u \in U$ と仮定する. $m = n$ ならここで証明を終える. $m < n$ と仮定する. $v \notin \langle u, \tau u, \ldots, \tau^{m-1} u \rangle$ をとり, t を不定元として $z = u + tv$ とおく.

$$\omega_0 = u \wedge \tau u \wedge \cdots \wedge \tau^{m-1} u \wedge \tau^m v$$

とする. すると $\omega_0 \neq 0$ である. なぜなら u は K 上線形差分方程式の解であることから U は inversive となり, もし, $\tau^m v \in U$ ならば $v \in U$ となる. これは仮定に反する. (ω) を ω_0 を含む K 上基底とし,

$$z \wedge \tau z \wedge \cdots \wedge \tau^m z = \sum_{\omega} F_\omega \omega$$

と表す. 各 F_ω は t に関する微分多項式である. その t に関する線形項は

$$tv \wedge \tau u \wedge \cdots \wedge \tau^m u + u \wedge \tau(tv) \wedge \cdots \wedge \tau^m(u) + \cdots + u \wedge \tau u \wedge \cdots \wedge \tau^m(tv).$$

したがって F_{ω_0} は $\tau^m t$ を含み, 0 にならない. K は aperiodic であるから, つぎの節により, ある $a \in K$ で, $F_{\omega_0}(a) \neq 0$ が成り立つ. よって

$$u \wedge \tau u \wedge \cdots \wedge \tau^{m-1} u \wedge \tau^m v$$

の項を含む．よって

$$z \wedge \tau z \wedge \cdots \wedge \tau^m z$$

は，$t = a$ のとき，0 ではない．すなわち，$z, \tau z, \ldots, \tau^m z$ は K 上線形独立である．z の作り方を必要な回数実行すれば v_0 の存在がいえる．

1.2　線形従属性

K を標数 0 の差分体，C_K を K の不変元全体からなる部分体とし，L/K を差分拡大とする．

$0 \neq A \in K\{Y\}$ を $\deg A = 1$, $\operatorname{ord} A = n$ の斉次差分多項式であるとする．方程式 $A(y) = 0$ を n 階線形斉次方程式という．$A(y) = 0$ をみたす $y \in L$ 全体は高々 n 次元 C_L-vector 空間であることを示そう．

実際 $A = \sum_{k=0}^{n} a_k Y_k$, $a_n \neq 0$ とおく．いま $y_1, \ldots, y_{n+1} \in L$ が $A(y_i) = 0$ をみたし，C_L 上線形独立であるとする．

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \tau^k y_i = 0 \quad (1 \leq i \leq n+1)$$

であるが，つぎに示すように Casoratian $\det(\tau^k y_i) \neq 0$ $(0 \leq k \leq n,\ 1 \leq i \leq n+1)$ であるから，$a_k = 0$ $(0 \leq k \leq n)$ を得て，矛盾になる．

命題　$y_1, \ldots, y_n \in L$ が C_L 上線形従属であるためには $\det(\tau^i y_j) = 0$ $(0 \leq i \leq n-1,\ 1 \leq j \leq n)$ であることが必要十分である．

証明　$y_1, \ldots, y_n \in L$ が C_L 上線形従属であると仮定する．非自明な C_L 上線形関係式

$$\sum_{j=1}^{n} c_j y_j = 0$$

が成立する．$(c_j) \neq 0$ である．これより

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \tau^i y_j = 0 \quad (0 \leq i)$$

よって $\det(\tau^i y_j) = 0$ を得る．逆に casoratian が 0 と仮定する．

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \tau^i y_j = 0 \quad (0 \leq i \leq n-1)$$

を満足する, すべてが 0 とは限らない $c_j \in L$ が存在する. たとえば $c_1 = 1$ としてよい.
$\sum_j c_j \tau^{i-1} y_j = 0$ に τ を作用させて, 上式との差をとれば

$$\sum_{j=2}^{n} (\tau c_2 - c_2)\tau^i y_2 + \cdots + (\tau^i c_n - c_n)\tau^i y_n = 0 \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

を得る. すべての c_j が C_L に属するならば話は終わる. もし $\tau^i c_j \neq c_j$ なる j が存在すれば $\det(\tau^i y_j)_{1\leq i\leq n-1, 2\leq j\leq n} = 0$ となる. そして帰納法を使えば, すべてが 0 とは限らない $a_j \in C_L$ が存在して $\sum_{j=2}^{n} a_j \tau y_j = 0$ を得る. よって $\sum_{j=2}^{n} a_j y_j = 0$ を得る.

以下, K は aperiodic すなわち, C_K 上無限次元 vector 空間と仮定する.
$[K:\ C_K] = +\infty$ である.

K 上非自明な線形斉次差分多項式 $A \in K\{Y\}$ に対して, ある $u \in K$ で $A(u) \neq 0$ となるものがある. 実際, n を A の階数とすれば, $A(y) = 0$ の解 $y \in K$ 全体は C_K 上有限次元線形空間である. したがって, $A(u) = 0$ をみたさない $u \in K$ が存在する.

一般の $(0 \neq)A \in K\{Y\}$ に対して, $A(u) \neq 0$ なる $u \in K$ が存在する. $n = \deg A$ に関する帰納法でこれを示す. $A \in K$ の場合明らか. あらたな差分不定元 Z を用いて

$$B = \frac{\partial A}{\partial Y} Z + \frac{\partial A}{\partial Y_1} Z_1 + \cdots + \frac{\partial A}{\partial Y_n} Z_n \in K\{Y, Z\}$$

とおく. n は A の階数である. 帰納法の仮定により $\frac{\partial A}{\partial Y_n}(a) \neq 0$ なる $a \in K$ が存在する. また, 既述のことから $B(a, b) \neq 0$ なる $b \in K$ が存在することがわかる. 任意の整数 k に対して $A(a + kb) = 0$ が成り立つならば, $B(a, b) = 0$ でなければならないから, ある k で $A(a + kb) \neq 0$ が成立する.

この結果は微分体においても類似的に成立し, 同様に証明される.

命題　K を aperiodic すなわち $[K : C_K] = +\infty$ をみたす inversive 差分体, L/K を有限生成差分拡大で inversive, そして t.d. $L/K < +\infty$ とする. このとき, ある $\eta \in L$ で $L = K\langle\eta\rangle$ なるものが存在する.

証明　つぎを証明すればよい: $\alpha, \beta \in L$ とすれば, ある $e \in K$ で $K\langle\gamma\rangle = K\langle\alpha, \beta\rangle$ なるものが存在する. ただし $\gamma = \alpha + e\beta$ とした. さて t を差分不定元, $u = \alpha + t\beta$ とする. t, u は K 上差分代数的に従属であるから $0 \neq A \in K\{y, z\}$ が存在し

$$A(t, u) = 0$$

が成り立つ. $\frac{\partial A}{\partial z_r}(t, u) \neq 0$ と仮定してよい. ここで $r = \mathrm{ord}_z\, A$ とした. 上記の関係式を t_r で微分すれば

$$\frac{\partial A(t, u)}{\partial t_r} = \frac{\partial A}{\partial y_r}(t, u) + \frac{\partial A}{\partial z_r}(t, u)\tau^r \beta = 0$$

を得る．K は aperiodic であるから $e \in K$ で

$$\frac{\partial A}{\partial z_r}(e, \gamma) \neq 0 \quad (\gamma = \alpha + e\beta)$$

なるものがある．t に e を代入して

$$\frac{\partial A}{\partial y_r}(e, \gamma) + \frac{\partial A}{\partial z_r}(e, \gamma)\tau^r \beta = 0$$

したがって $\tau^r \beta \in K\langle\gamma\rangle$ であるが, K, L は inversive であるから $K\langle\gamma\rangle$ も inversive である．したがって $\beta \in K\langle\gamma\rangle$, 故に $K\langle\gamma\rangle = K\langle\alpha, \beta\rangle$ となる．ここで用いた inversive に関する事項はつぎの節で述べる．

1.3 quasi-inversive 差分拡大

この節では西岡斉治の最近の研究成果 [17] を紹介する．K を差分体, L/K を有限生成差分拡大で td $L/K < +\infty$ とする．

命題 K, L はともに quasi-inversive とする．このとき中間差分体 M/K も quasi-inversive で $[M : \tau M]$ は $[L : \tau L]$ の約数である．
証明 N によって M の L における代数閉包を示す．τN は τL の中で代数的に閉じているから, $\tau L, N$ は τN 上線形無関連である．よって $[N : \tau N] = [N\tau L : \tau L]$ は $[L : \tau L]$ の約数である．L/K が有限生成であるから, N/M もそうである．

$$[N : M][M : \tau M] = [N : \tau M] = [N : \tau N][\tau N : \tau M] = [N : \tau N][N : M]$$

より

$$[M : \tau M] = [N : \tau N]$$

これより証明を終える．

とくに, L が inversive ならば, M も inversive であることに注意しよう．また, 証明をみれば, 命題において K を quasi-inversive と仮定しなくとも, それが L の仮定から必然的に導かれることがわかる．

つぎは西岡斉治 [17] による．

定理 K は inversive 差分体, M/K は差分拡大で, $K = \overline{K} \cap M$ とする．
R_i $(1 \leq i \leq n) \subset M$ は K 上一変数代数関数体, で差分拡大, そして $d_i = [R_i, \tau R_i]$ はすべて異なるとする．このとき,

$$\text{t.d. } R_1 R_2 \cdots R_n / K = n, \quad [R_1 R_2 \cdots R_n, \tau(R_1 R_2 \cdots R_n)] = d_1 d_2 \cdots d_n$$

である.

上述と同様に次が示される.

命題 R を差分体, S/R を差分拡大とし, $[R:\tau R]<+\infty, [S:R]<+\infty$ であると仮定する. このとき $[S:\tau S]=[R:\tau R]$ が成り立つ.

定理の証明 $n=1$ の場合あきらか. $n>1$ とし, $n-1$ のとき定理が成立すると仮定する. $L=R_1R_2\cdots R_{n-2}$ とおく. $\mathrm{td}\, LR_{n-1}/K=\mathrm{td}\, LR_n/K=n-1$ である. よって R_{n-1}, L および R_n, L は K 上線形無関連である. L は LR_{n-1}, LR_n の中で代数的に閉じている. いま $\mathrm{td}\, LR_{n-1}R_n/K=n-1$ とせよ. $S=LR_{n-1}R_n$, $R=LR_{n-1}$ とおけば $[S:R]<+\infty$ である. 帰納法の仮定から

$$[S:\tau S]=[R:\tau R]=d_1d_2\cdots d_{n-1}$$

を得る. 同様に

$$[S:\tau S]=d_1d_2\cdots d_n$$

したがって, $d_{n-1}=d_n$, これは仮定に反する. 故に $\mathrm{td}\, LR_{n-1}R_n/K=n$ を得る. これより LR_{n-1}, R_n が K 線形無関連であるから, $\tau(LR_{n-1}), R_n$ は τR_n 上線形無関連であり,

$$\begin{aligned}
&[LR_{n-1}R_n:\tau(LR_{n-1}R_n)]\\
&=[LR_{n-1}R_n:\tau(LR_{n-1})R_n]\,[\tau(LR_{n-1})R_n:\tau(LR_{n-1}R_n)]\\
&=[LR_{n-1}:\tau(LR_{n-1})]\,[R_n:\tau R_n]\\
&=d_1d_2\cdots d_n.
\end{aligned}$$

これで証明を終える.

例 $\mathbf{C}$ における複素変数 z に関する有理的関数全体を M_z と記す. $\mathcal{M}_z$ に作用する変換を $\tau z=2z$ とする. 指数関数 e^z は $\tau y=y^2$ の解であり, Weierstrass のペー関数 $\wp(z)$ は

$$\tau y=-2y+\frac{1}{2}\left(\frac{y'}{y''}\right)^2, \quad y'^2=4y^3-g_2y-g_3$$

$z, e^z, \wp(z)$ によって生成される $\mathbf{C}$ 上差分拡大の拡大次数はそれぞれ $1,2,4$ である. よって $z, e^z, \wp(z)$ は $\mathbf{C}$ 上代数的に独立である.

1.4 形式的べき級数

代数的文献として Zariski-Smuel [23] を挙げる. K を標数 0 の体とする. t を不定元として, K 係数形式的べき級数を

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_kt^k=a_0+a_1t+a_2t^2\cdots \quad (a_k\in K)$$

によって示す. K 係数形式的べき級数全体を $K[[t]]$ で表わし, K 上形式的べき級数環という. 和, 積はつぎによって定義する.

$$\sum_{k}^{\infty} a_k t^k + \sum_{k}^{\infty} b_k t^k = \sum_{k}^{\infty} (a_k + b_k) t^k$$

$$\sum_{k}^{\infty} a_k t^k \sum_{k}^{\infty} b_k t^k = \sum_{k}^{\infty} c_k t^k, \quad c_h = \sum_{k=0}^{\infty} a_h b_{k-h}$$

$K[[t]]$ は整域になり, その商体を $K((t))$ で表わす. $f \in K((t))$ は

$$f = \sum_{k=p}^{\infty} a_k t^k \quad (a_k \in K)$$

で表わすことができる. p は整数である. もし $a_p \neq 0$ のとき $p = \nu_0(f)$ と表す. $n_0(0) = \infty$ と約する. ν_0 はつぎをみたす.

(1) $\nu_0(f + g) \geq \min\{\nu_0(f), \nu_0(g)\}$

(2) $\nu_0(fg) = \nu_0(f) + \nu_0(g)$

多項式の場合, 合成は自由に行えるが, 形式べき級数の場合にはそうはいかない. $f \in K((t))$ および $g \in K[[t]]$, $\nu_0(g) \geq 1$ に対して合成

$$f(g) = \sum_{k=p}^{\infty} a_k g^k \quad (a_k \in K)$$

が定義される. もし, $\nu_0(f) = 1$ ならば $f(g) = t$ なる $g \in K[[t]]$, $\nu_0(g) = 1$ が存在する.

K が微分体のとき, $Dt \in K((t))$ として

$$D\sum_{k=p}^{\infty} a_k t^k = \sum_{k=p}^{\infty} D(a_k) t^k + \sum_{k=p}^{\infty} k a_k t^{k-1} Dt$$

と定義すれば, $K((t))/K$ は微分拡大になる.

K が差分体のとき, $\tau t \in K[[t]], \nu_0(\tau t) \geq 1$ として

$$\tau \sum_{k=p}^{\infty} a_k t^k = \sum_{k=p}^{\infty} \tau(a_k)(\tau t)^k$$

と定義すれば, $K((t))/K$ は差分拡大になる.

命題　K を aperiodic な差分体, t を不定元, $q \in C_K^\times$ とし, 変換 $\tau t = qt$ によって $K((t))/K$ を差分拡大であると考える. $f \in K[[t]]$ をつぎによって定める.

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{n_k} \quad (0 \neq a_k \in K^\times)$$

ここで, a_k 全体が生成する vector 空間は C_K 上無限次元, n_k は単調増加で,

$$\lim_{k \to \infty} \frac{n_{k-1}}{n_k} = 0$$

がみたされるものとする. このとき f は K 上差分超越的である.

証明　f は K 上差分代数的として矛盾を示す. いま $0 \neq A \in K\{Y\}$ で $A(f) = 0$ なるものがあると仮定する. $\deg A$ を最小とする. $r = \mathrm{ord}\ A$, $f_h = \sum_{k=0}^{h-1} a_k t^{n_k}$ とおく.

$$A(f_h) - A(f) = \sum_{i=0}^{r} \frac{\partial A}{\partial Y_i}(f)\tau^i(f_h - f) + \sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{r} \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 A}{\partial Y_i \partial Y_j}(f)\tau^i(f_h - f)\tau^j(f_h - f) + \cdots$$

が成り立つ. 左辺は $A(f_h)$ に等しい. h を十分大きくとれば右辺の ν_0 の値は第 1 項の値になる. $\nu_0(\frac{\partial A}{\partial Y_i}(f))$ の最小値を m とおく. A の取り方からわかるように, ある i で $\frac{\partial A}{\partial Y_i}(f) \neq 0$ であるから m は有限値である. 十分大きなすべての h に関して $A(f_h) = 0$ が満足されるとしよう. $\frac{\partial A}{\partial Y_i}(f)$ の t^m の係数を b_i とおく. すると

$$\sum_{i=0}^{r} b_i q^{n_h} \tau^i a_{n_h} = 0 \quad (h \gg 0)$$

を得る. a_{n_h} は非自明な線形斉次差分方程式の解である. よって a_{n_h} 全体が生成する vector 空間は C_K 上有限次元である. これは仮定に反する. 故に無限個の h に対して $A(f_h) \neq 0$ が成り立つ. このとき $\deg A(f_h) \leq n_{h-1} \deg A$ であるから,

$$n_{h-1} \deg A \geq \deg A(f_h) \geq \nu_0(A(f_h)) \geq m\nu_0(f_h - f) \geq mn_h$$

が無限個の h に対して成立する. しかしこれは矛盾である.

上述のべき級数は lacunary series とよばれるものである. 命題は, 微分の場合に, 体 C 上の Liouville series

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} t^{k!} \quad (D = d/dt)$$

が C 上微分超越的であることの類似である. 証明はつぎの通り： $0 \neq A \in C\{Y\}$ で $A(f) = 0$ なるものがあるとして矛盾を導く. このような A のなかで $\deg A$ が最小なるものをとる. $r = \mathrm{ord}\ A$, $f_h = \sum_{k=0}^{h-1} t^{k!}$ とすると,

$$A(f_h) - A(f) = \sum_{i=0}^{r} \frac{\partial A}{\partial Y_i}(f)D^i(f_h - f) + \sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{r} \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 A}{\partial Y_i \partial Y_j}(f)D^i(f_h - f)D^j(f_h - f) + \cdots$$

左辺は $A(f_h)$ に等しい. h を十分大きくとれば右辺の ν_0 の値は第 1 項の値になる. $\nu_0(\frac{\partial A}{\partial Y_i}(f)) - i$ の最小値を m とおく. A の取り方からある i で $\frac{\partial A}{\partial Y_i}(f) \neq 0$ となり, よって m は有限である. 十分大きなすべての h に関して $A(f_h) = 0$ が満足されるとしよう. $\frac{\partial A}{\partial Y_i}(f)$ の t^{m+i} の係数を b_i とおく. すると

$$\sum_{i=0}^{r} b_i t^i D^i t^{h!} = 0 \quad (h \gg 0)$$

を得る. $t^{h!}$ は共通の線型微分方程式の解である. これは矛盾. 故に無限の h に対して $A(f_h) \neq 0$ が成り立つ. このとき $\deg A(f_h) \leq (h-1)! \deg A$ であるから,

$$(h-1)! \deg A \geq \deg A(f_h) \geq \nu_0(A(f_h)) \geq mh!$$

が無限個の h に対して成立する. しかし, これは矛盾である.

Liouville 級数を使えばつぎがわかる.

命題　E を代数的閉体 C の有限生成拡大とする. 不定元 t を用いて E は形式的べき級数体 $C((t))$ に埋め込むことができる. すなわち C 上同型 $\phi : E \to C((t))$ が存在する.

証明　E の C 上超越基底を $y_1, \ldots, y_n$ とし, $y \in E$ によって $E = C(y_1, \ldots, y_n, y)$ と表す. y がみたす既約方程式を

$$A(y_1, \ldots, y_n, y) = 0 \quad (A \in K[Y_1, \ldots, Y_n, Y])$$

とする. 既約性から $\frac{\partial A}{\partial Y}(y_1, \ldots, y_n, y) \neq 0$ である. $a_1, \ldots, a_n, c \in C$ で

$$A(a_1, \ldots, a_n, c) = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial Y}(a_1, \ldots, a_n, c) \neq 0$$

をみたすものが存在する. (形式的) 陰関数定理によって

$$y = c + \sum_{i_1, \ldots, i_n} c_{i_1, \ldots, i_n} y_1^{i_1} \cdots y_n^{i_n} \in C[[y_1, \ldots, y_n]]$$

を得る. ここで $C[[y_1, \ldots, y_n]]$ は $y_1, \ldots, y_n$ に関する形式的べき級数環で, 証明は係数比較による. $f_1 = \sum_{k=1}^{\infty} t^{k!}$ とし, $f_i = \dfrac{d^{i-1} f_1}{dt^{i-1}}$ とすれば, $f_1, \ldots, f_n$ は C 上代数的独立である. よって

$$\phi(y_i) = f_i \ (1 \leq i \leq n), \quad \phi(y) = y(f_1, \ldots, f_n)$$

と定義すれば, もとめるべき同型を得る.

代数的独立な元を得るのならつぎのようにしてもよい. $f_k = e^{\alpha_k t} - 1 \ (1 \leq k \leq n)$ と定義する. ただし, 通常のように $e^t = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$ である. $\alpha_k \in C \ (1 \leq k \leq n)$ は $\mathbf{Q}$ 上線形独立とする.

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$ が互いにことなるならば, $e^{\alpha_k t}$ $(1 \leq k \leq n)$ は C 上線形独立であることを示す. 実際

$$\sum_{k=1}^{n} a_k e^{\alpha_k t} = 0 \quad (a_k \in C)$$

とすると,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \alpha_k^j = 0 \quad (j \geq 0)$$

が成立する. よってすべての $a_k = 0$ がわかる. つぎに, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ が $\mathbf{Q}$ 上線形独立の場合を考える. もし, $e^{\alpha_k t}$ $(1 \leq k \leq n)$ は C 上代数的従属ならば, $(i_1, \dots, i_n)$ を多重指標として

$$\sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1, \dots, i_n} e^{i_1 \alpha_1 + \dots + i_n \alpha_n} = 0 \quad (a_I \in C)$$

を得る. 仮定より $i_1 \alpha_1 + \dots + i_n \alpha_n$ はすべてことなるから, これは矛盾である.

1.5　微分加群

微分代数の場合に関しては西岡 [10, 12] を参照されたい.

K を標数 0 の可換体, L/K を拡大体, M を L 加群とする. L から M への K 上微分とは

$$D(a+b) = Da + Db, \quad D(ab) = aDb + bDa \quad (a, b \in L)$$

をみたす $D: L \to M$ で, K 上自明なものである. それら全体を $\mathrm{Der}_K(L, M)$ と表す. $\mathrm{Der}_K(L, M)$ は L 加群になる. $M = L$ のとき, $\mathrm{Der}(L/K)$ と記す. それは交換子によって Lie 環になる. その双対加群を $\Omega_{L/K}$ と記し, L の K 上微分加群と称する. 加群準同型 $d_{L/K}: L \to \Omega_{L/K}$ が

$$dx(D) = Dx \quad (x \in L)$$

によって定義される. $\Omega_{L/K}$ は $d_{L/K}L = \{d_{L/K}x \mid x \in L\}$ によって生成される.

M を L 加群とするとき, 任意の $D \in \mathrm{Der}_K(L, M)$ に対して, ある L 上線形写像 $\alpha: \Omega_{L/K} \to M$ で

$$D = \alpha \circ d_{L/K}$$

が L 上で成立するものがある. 実際 M は L 上ベクトル空間であるから, $M = L$ の場合を示せばよい.

$$\alpha(\omega) = \omega(D) \quad (\omega \in \Omega_{L/K})$$

がその定義である. $x \in L$ に対して

$$\alpha(d_{L/K}x) = d_{L/K}x(D) = D(x) \quad (x \in L)$$

であるから well-defined である.

K は差分体, L/K は差分拡大であるとしよう. 変換 τ から微分加群 $\Omega_{L/K}$ はつぎによって, あらたな L 加群になる.

$$x \cdot \omega = \tau(x)\omega \quad (x \in L)$$

したがって, つぎの加群準同型 $\tau^* : \Omega_{L/K} \to \Omega_{L/K}$ が得られる.

$$\tau^*(ad_{L/K}b) = \tau(a)d_{L/K}\tau b \quad (a, b \in L)$$

たとえば, $g \in L$ が $f = \delta g = \tau g - g \in K$ をみたすとき

$$\tau^* d_{L/K} g = d_{L/K}\tau g = d_{L/K}(g + \delta g) = d_{L/K} g$$

また $a = g^{-1}\tau g \in L$ のとき

$$\tau^*(g^{-1}d_{L/K}g) = (\tau g)^{-1}d_{L/K}(\tau g) = (ag)^{-1}d_{L/K}(ag) = g^{-1}d_{L/K}g$$

が成り立つ. これらの公式は Ogawara [18] に有効に用いられている (§2.6).

つぎは初等関数論で重要な役割を果たす事実である. M. Roenlicht の補題として参照する.

補題 $a_1, \ldots, a_m \in K$ を $\mathbf{Q}$ 上線形独立とする. もし, $x, y_1, \ldots, y_m \in L$ が

$$d_{L/K}x + \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{d_{L/K}y_i}{y_i} = 0$$

をみたすならば $dx = dy_1 = \cdots = dy_m = 0$, したがって $x, y_1, \ldots, y_m$ は K 上代数的である.

1.6 Ore domain

K を差分体とする. τ に関する不変元全体を F で示す.

$$F = \{a \in K \mid \tau a = a\}$$

積を

$$\xi a = \delta a + \tau(a)\xi, \quad \delta(a), \tau(a) \in K$$

によって, 不定元 ξ に関する形式的和 $\sum_{i=0}^{n} a_i\xi^i$, $a_i \in K$ 全体からなる集合 $K[\xi]$ が結合法則と分配法則が成り立つ環になるようにする. すると, δ は微分ではないが, 差分 $\tau - 1$ と同様の公式をみたす.

$$\delta(ab) = \delta(a)b + \tau(a)\delta b$$

$K[\xi]$ を Ore domain という. deg は通常の多項式環と同様に定義される. Ore domain は零因子をもたない (だから, domain).

$$\deg(fg) = \deg f + \deg g$$

がなりたつ. もし $\delta = 0$ なら $K[\xi]$ は差分環となる.

$K[\xi]$ の元 $f = a_0\xi^n + a_1\xi^{n-1} + \cdots + a_n$ の中心化を

$$Z_f = \{g \in K[\xi] \mid fg = gf\}$$

によって表わす. Z_f は $K[\xi]$ の部分環である.

つぎの定理は与えられた微分作用素 f に可換な微分作用素は f と代数的関係をもつという周知の結果の類似である. 一般の Ore domain $K[\xi]$ において考えるため条件が強くなっている. 定理の証明は, Amitsur の議論そのままだ. だから Amitsur の定理というべきである.

定理 (Amitsur) F は K 内で代数的に閉じてい, $\delta F = \{0\}$ をみたすと仮定する. このとき, Z_f は自由 $F[f]$-加群である. その次元は n の約数である. そして Z_f は可換である.

証明 まず $a \in K$ が周期的, すなわち $\tau^k a = a$ が成立するとすると a は F 上代数的であるから, $a \in F$ そして $\delta a = 0$, $\xi a = a\xi$ であることに注意しよう. よって $F[f] \subset Z_f$ である. いま $g \in Z_f$, $m = \deg g$ の initial を g_0 とすれば τ^{m+n} の係数を比較して

$$a_0\tau^n g_0 = g_0\tau^m a_0$$

を得る. したがって, もし, $h \in Z_f$, $\deg h = m$ ならば h の initial h_0 も同様の関係式をみたす. よって, ある $c \in F$ で $g_0 = ch_0$ となるものが存在する. これより Amitzur の Lemma 2 がいうところのつぎの結果が得られる : 次数 m 以下の Z_f の元全体は F 上有限次元加群である.

$M_f = \{\deg g \mid g \in Z_f\}$ とし, $\pi : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ を canonical projection とする. M_f は和に関して閉じている. πM_f は $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ の部分加群であるから, 位数 $\rho|n$ の cyclic submodule である. $\pi M_f = \{\pi m_1, \ldots, \pi m_d\}$ とする. ここで $m_1 = 0$ で, $m_i > 0$ は最小とする. (ここでは群論の基礎的事実を使用している.)

$g_i \in Z_f$ を $m_i = \deg g_i$ なるものとすれば, それらは $F[f]$ 上線形独立である. 実際

$$g_1\phi_1 + \cdots + g_d\phi_d = 0, \quad \phi_i \in F[f]$$

で, ある $\phi_h \neq 0$ としよう. 次数を考えれば $\deg g_i\phi_i = \deg g_j\phi_j$ なる $i \neq j$ が存在する. mod n でみれば $m_i \equiv m_j$ となり矛盾である.

任意の $g \in Z_f$ は

$$g = g_1\phi_1 + \cdots g_d\phi_d, \quad \phi_i \in F[f]$$

と表すことができることを示そう．$\deg g$ に関する帰納法によって証明する．$\deg g = 0$ は $g \in F$ を示すから主張は正しい．$m = \deg g > 0$ と仮定する．$m \in M_f$ であるから，ある i で $m \equiv m_i \bmod n$，したがって $m = m_i + nk$ と表せられる．$c \in F$ を

$$\deg(g - cg_i f^k) < m$$

なるように選ぶ．ここで f^k は積 "∘" の意味での累乗を示す．故に帰納法の仮定によってわれわれの主張が示される．

Z_f が可換であることを示す．$g \in Z_f$ を $\deg g$ が M_f を mod n で生成するものとする．各 $\deg g_i$ は mod n で，ある g のべきの次数と合同である．M_f に属する数は，ある m_i に合同であるから，Z_f の各元は有限個を除いて $F[f, g]$ のある元と同じ次数をもつ．除外される多項式の次数を N 以下としよう．すると任意の $h \in Z_f$ に対して，j を任意の非零正数とするとき，$f^j h = u_j + v_j$ なる $u_j \in F[f, g]$, $v_j \in Z_f$, $\deg v_j \leq N$ が存在する．このような v_j 全体は F 上有限次元である．よって $p \in F[f], u \in F[f, g]$ で $ph = u$ なるものが存在する．さて $\phi, \psi \in Z_f$ とする．ある $p.q \in F[f]$ で $p\phi$, $q\psi \in F[f, g]$ なるものがある．

$$(pq)(\phi\psi) = (p\phi)(q\psi) = (q\psi)(p\phi) = (pq)(\psi\phi)$$

である．なぜなら $F[f, g]$ は可換であるから．よって $\phi\psi = \psi\phi$ すなわち，Z_f は可換である．

この Amitsur の定理によって，次が得られる．Z_f は可換整域である．その商体を $\langle Z_f \rangle$ と書く．$F(f) \subset \langle Z_f \rangle$ である．上記の g は Z_f 上 d 次代数的である．よって

$$[\langle Z_f \rangle : F(f)] = d$$

を得る．

ここで Amitsur の結果を紹介したのは $\delta = 0$ の場合が線形差分作用素の議論に他ならないからである．可換な差分作用素が代数的関係をもつことが得られるのである．微分作用素で成り立つ事柄が差分作用素でも成り立つという現象をここでも観察することができる．実は，そんなことは冗談なのだが，冗談であることを知るためには結構な経験が必要でしょう．

Amitsur はさらに $\langle Z_f \rangle$ について研究を続けている．そこでは線形作用素の固有値に関する考察が行われている．差分ではどのような状況が出現するのか，興味がわくが，読者諸氏にその翻訳を委ねよう．もちろん，思ったほどには簡単にいかないかもしれない．

第 2 章

種々の拡大

前章で差分代数における基本的な手段をほぼ説明した．以下では特徴的な差分拡大をいくつか紹介する．対応すると思われる微分拡大についてもできるだけ説明するよう心掛けた．

2.1 和分

(K, τ) を標数 0 の差分体, C_K を K の不変部分体とする．$\delta = \tau - 1$ を差分作用素とする．$f \in K$ の和分とは, ある差分拡大 L/K の元 g で $\delta g = f$ となるものである．

Schneider [21] にもとづき, Karr の $\Pi\Sigma^*$ 拡大について説明する．参考文献は Schneider の文献を参照されたし．

差分拡大 $K(t)/K$ は, もし t は K 上超越的, $C_{K(t)} = C_K$ で,

(1) $\delta t = b$ (t は K 上 Σ^* 元)

または

(2) $\tau t/t = b$ (t は K 上 Π 元)

なる $b \in K^\times$ が存在するとき, $\Pi\Sigma^*$ 拡大という．$K(t_1, \dots t_n)/K$ は各 $K(t_1, \dots, t_{i+1})/K(t_1, \dots, t_i)$ $(0 \leq i \leq n-1)$ が $\Pi\Sigma^*$ 拡大のとき, $\Pi\Sigma^*$ 拡大という．このとき, $K(t_1, \dots t_n)$ は $\Pi\Sigma^*$ 体という．

$\delta t = f$ $(f \in K)$ なる t が K 上 Σ^* 元であるためには $\delta g = f$ なる $g \in K$ が存在しないことが必要十分である． 実際, $u \in C_{K(t)} \setminus C_K$ が存在するとしよう．$u = A/B$, $A, B \in K[t], (A, B) = 1$ と表せば

$$\frac{A^\tau(t+f)}{B^\tau(t+f)} = \frac{A}{B}$$

$(A^\tau, B^\tau) = 1$ であるから, B は $B^\tau(t+f)$ を割り切る．B の最高次 t^n の係数は 1 としてよい．すると, 係数比較によって $B^\tau(t+f) = B$ を得る．B における t^{n-1} の係数を b とすると, $\tau b + nf = b$, したがって $g = -b/n$ とおけば $\delta g = f$ を得る．$B = 1$ ならば, A

を考えればよい．逆に $g \in K$ で $\delta g = f$ なるものが存在すると仮定する．このとき $t - g \in C_{K(t)} \setminus C_K$ である．

定義 $\Pi\Sigma^*$ 拡大 $K(t_1, \dots, t_n)/K$ が (K 上) reduced であるとは,

$$\delta t_i \in K(t_1, \dots, t_{i-1}) \setminus K$$

となる Σ^* 元 t_i のいづれも任意の $g \in K(t_1, \dots, t_{i-1})$ に対して

$$\delta(t_i - g) \notin K$$

をみたすときにいう．

たとえば, 各 $1 \leq i \leq n$ に対して $\tau t_i - t_i \in K$ または $\tau t_i / t_i \in K$ なるとき, $K(t_1, \dots, t_n)/K$ は reduced である．

つぎは Karr の構造定理とよばれる．

定理 L/K を reduced $\Pi\Sigma^*$ 拡大, $f \in K$ とする．$L = K(t_1, \dots, t_n)$, t_i は $K(t_1, \dots, t_{i-1})$ 上 Σ^* 元または Π 元で

$$\tau t_i = a_i t_i + f_i \ (a_i = 1 \text{ または } f_i = 0)$$

と表わされるとする．

$$S = \{i \mid 1 \leq i \leq n, \delta t_i = f_i \in K\}$$

とおく．このとき, もし, $g \in L$ で $\delta g = f$ が成り立つならば

$$f = \delta w + \sum_{i \in S} c_i f_i$$

なる $w \in K, c_i \in C_K$ が存在する．これは生成元によって

$$g = a + w + \sum_{i \in S} c_i t_i \quad (a \in C_K)$$

と表現できる．

証明 $n = 0$ なら当然成り立つ．そこで $n \geq 1$ として帰納法で定理を証明する．$E = K(t_1, \dots, t_{n-1})$ とおく．$g \in E(t_n)$, $\delta g = f \in K$ である．もし $g \in E$ ならば, 帰納法の仮定より, 定理の主張が成り立つ．以下 $g \notin E$ とする．証明には微分加群を用いる．

[場合 1] $\tau t_n = a_n t_n \ (a_n \in E)$

まず $dg = cdt_n/t_n$ が $\Omega_{E(t_n)/E}$ において成立する. τ を作用させて

$$\tau dg = d\tau g = dg, \quad \tau(dt_n/t_n) = dt_n/t_n$$

であるから $\tau c = c \in C_K$ を得る. Rosenlicht の補題により $g \in E$, これは仮定に反する.

[場合 2]　$\delta t_n = f_n$ $(f_n \in E)$
まず $dg = cdt_n$ $(c \in E(t_n))$ が成立する. τ を作用させて

$$dg = \tau(c)\tau dt_n = \tau(c)dt_n$$

より $\tau c = c \in C_K$ を得る. よって $d(g - ct_n) = 0$, $u = g - ct_n \in E$ である. δ を作用させれば $\delta u = f - c\delta t_n \in E$ となる. reducedness によって $\delta t_n = f_n \in K$, $n \in S$. そして $\delta u = f - cf_n \in K$ を得る. 帰納法の仮定を u に適用すれば

$$f - cf_n = w + \sum_{i \in S'} c_i f_i \quad (S' = \{i \mid 1 \leq i \leq n-1, \delta t_i \in K\})$$

これより証明が完了する.

定理は Σ^* 元に関する命題である. Π の場合でも同様の命題がなりたつと思われる. ただし"reduced"とはなにかを明確にする必要がある.

2.2　線形差分方程式

K を inversive 差分体, L/K を差分拡大とする. $y \in L$ は K 上の線形斉次差分方程式

$$\tau^n y + a_1 \tau^{n-1} y + \cdots + a_n y = 0$$

の非自明解とする. このとき $K\langle y \rangle$ は inversive である. なぜならば h を $a_h \neq 0$ なる最大数とする.

$$\tau^h(\tau^{n-h} y + b_1 \tau^{n-h-1} y + \cdots + b_h y) = 0 \quad (\tau^h b_k = a_k)$$

であるから

$$\tau^{n-h} y + b_1 \tau^{n-h-1} y + \cdots + b_h y = 0$$

を得る. y は $\tau^k y$ $(1 \leq k \leq n-h)$ で表わされるから, $y \in \tau(K\langle y \rangle)$ である.

線形常微分方程式のある一風変わった解に関する定理が文献 [5] で証明されている. つぎはその差分版である.

定理 (Harris-Sibuya)　K を inversive とし, L/K を差分拡大とする. $y \in L$ およびその逆数 $1/y$ は K 上線形斉次微分方程式をみたすと仮定する. このとき, 自然数 h で $\tau^h y/y$ が K 上代数的とするものが存在する.

証明　K は代数的閉体であると仮定してよい．証明には1変数代数関数論でよく使われる手法を用いる [14]．まずつぎの事実を証明しよう:

M/K は L/K の中間微分拡大とし, K 上代数的または1変数代数関数体であるとする．$y \in M$ はその逆数 $1/y$ とともに K 上線形斉次微分方程式を満足すると仮定する．そのとき, ある自然数 h で $\tau^h y/y \in K$ なるものが存在する．

y が K 上超越的であるときのみ示せばよい．M/K は inversive である．P を M/K の任意の素因子とする．すると

$$\nu_{\tau P}(\tau u) = \nu_P(u) \quad (u \in M)$$

によって新たな素因子 τP を得る．写像 $P \to \tau P$ は injective である．実際, $P \neq Q$ を異なる素因子とすると, ある $u \in M$ で $\nu_P(u) \neq \nu_Q(u)$ となるものがある．よって $\nu_{\tau P}(\tau u) \neq \nu_{\tau Q}(\tau u)$ となる．さて y は線形差分方程式

$$\tau^m y + a_1 \tau^{m-1} y + \cdots + a_m y = 0, \quad a_i \in K, a_m \neq 0$$

を満足するとしよう．$y, \tau y, \ldots, \tau^{m-1} y$ の極素因子全体からなる集合を $\Sigma = \{P_1, \ldots, P_n\}$ で表わす．$\tau^m y$ の極は Σ に属するから, $\tau\Sigma \subset \Sigma$ が成り立つ．したがって $\tau^r P = P$ $(P \in \Sigma)$ をみたす自然数 r が存在する．同様に $y, \tau y, \ldots, \tau^{m-1} y$ のどの零素因子も τ^s によって不変とする自然数 s の存在がいえる．とくに τ^{rs} は y の極も零点も動かさない．よって $\tau^{rs} y/y \in K$ を得る．

定理の証明に移ろう．y は上記の方程式をみたすとする．$A = K[y_{ij}; 1 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq m-1]$ を多項式環とし, 変換 τ を $\tau^j y_{i0} = y_{ij}$ によって定義する．$y_i = y_{i0}$ とし, それらは y と同じ方程式をみたすとする．これによって A は差分整域になる．E を A の商体とすれば E/K は差分拡大で, $M = K\langle y \rangle$ と K 上線形無関連である．ME において y は

$$y = \sum_{i=1}^{m} c_i y_i \quad (c_i \in C_{ME})$$

と表示される．M/K の超越次数を r とする．ME/E の超越次数は r に等しい．必要なら順序を入れ替え $c_1, \ldots, c_r$ が E 上代数的独立なるものとする．$E_i = E(c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_r)$ とおく．ME/E_i は拡大次数1の差分拡大と考えられる．すでに得たことから, 自然数 h_i で $\tau^{h_i} y/y$ が E_i 上代数的になるものが存在する．$h = h_1 h_2 \cdots h_r$ とおけば, 各 i に対して

$$\frac{\tau^h y}{y} = \prod_{j=1}^{h/h_i} \frac{\tau^{h_i j} y}{\tau^{h_i (j-1)} y}$$

は E_i 上代数的である．よって $\tau^h y/y$ は E 上, したがって K 上代数的である．

Sperber の定理 [22] の差分版を考えてみてはどうか．

2.3 Riccati 方程式

代数的常微分方程式で最も単純なものとして Riccati 方程式があげられる. 解の一次分数変換によって Riccati 方程式は Riccati 方程式に移る. 差分では一次分数変換そのものが不変な形式としてもっとも単純なものと考えられる. 常微分の場合と同様, 差分 Riccati は 2 階線形差分方程式の研究に欠かせない.

さて, K を標数 0 の差分体とする. y を不定元として $K(y)/K$ を差分拡大にするには, $f \in K(y)$ を任意にとり $\tau y = f$ と定義すればよい. f として 1 次分数式を採用したものを Riccati 方程式という.

$$\tau y = \frac{ay+b}{cy+d}, \quad (a,b,c,d \in K,\ ad-bc \neq 0)$$

L/K を差分拡大とし, $y, y_1, y_2, y_3 \in L$ は上記の Riccati 方程式を満足すると仮定する. このとき, 直接計算すれば, 複比

$$[y, y_1 : y_2, y_3] = \frac{(y-y_2)(y_1-y_3)}{(y-y_3)(y_1-y_2)}$$

が invariant であることがわかる. この事実は微分の場合と同様である.

行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

を用いて, 上記 Riccati 方程式を

$$\tau y = A(y)$$

と略記する. 方程式系

$$\tau \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau y_1 \\ \tau y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

の解 $(y_1, y_2)^T$, $y_2 \neq 0$ が L に存在すれば, $y = y_1/y_2$ は上記の Riccati 方程式をみたす.

たとえば q-Airy 方程式

$$f(q^2t) + qtf(qt) - f(t) = 0$$

において $g(t) = f(qt)/f(t)$ とすれば, Riccati 方程式

$$g(qt)g(t) + qtg(t) - 1 = 0$$

が得られる.

$y \in L$ を $\tau y = A(y)$ の解とする．$A^{(2)} = \tau(A)A$ とおけば $\tau^2 y = A^{(2)}(y)$ となる．ただし，τA は A の各要素に τ を作用して得られる行列を示す．一般に $\tau^n y = A^{(n)}(y)$ となる．ただし $A^{(n)} = \tau(A^{(n-1)})A$ である．したがって y は τ^n に関しても Riccati 方程式の解である．$y = 1/z$ と置けば，$\tau z = 1/A(1/z)$ は K 上 Riccati 方程式である．もし $z = 0$ がその解ならば，$y = \infty$ を始めの方程式の解であるという．すなわち $c = 0$ の場合に外ならない．

K を inversive 差分体，$K(y)/K$ を Riccati 拡大，すなわち Riccati 方程式の解 y が生成する差分拡大で，y は K 上超越的であると仮定する．L を td $L/K = 1$ なる中間差分体，すなわち L/K は差分拡大で $K(y)$ の差分部分体とする．すると L は K 上 Riccati 方程式の解によって生成される．実際，体論における Lüroth の定理により $L = K(z)$ なる $z \in K(y) \setminus K$ が存在する．$K(y)$ は inversive であるから L もそう．よって z は K 上 Riccati 方程式の解である．

微分の場合にも同様の結果がある．微分体 K 上の Riccati 方程式は

$$Dy = ay^2 + by + c \quad (a, b, c \in K)$$

の形式をもつ．微分拡大 $K(y)/K$ の K と異なる微分部分体は K 上の Riccati 拡大である．Lüroth の定理により $L = K(z)$ なる $z \in K(y) \setminus K$ が存在し，$Dz \in K(z)$ である．K は $K(y)$ において代数的に閉じているから，$K(y), \overline{K}$ は K 上線形無関連であり，したがって $K(y) \cap \overline{K}(z) = K(z)$ である．ところで $\overline{K}(y)$ は $\overline{K}$ 上 Fuchs 拡大であるから，中間体 $\overline{K}(z)/\overline{K}$ も Fuchs 拡大である ([14] を参照)．

$$Dz = \alpha z^2 + \beta z + \gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \overline{K})$$

と書くことができる．すでに述べたように，右辺は $K(z)$ に属すべきで，その係数はすべて K に属する．

K を代数的閉微分体，L/K を微分拡大で，K 上線形斉次微分方程式の解 $y_1, \ldots, y_n$ によって生成されるとする．$L = K\langle y_1, \ldots, y_n\rangle$ である．M を中間微分体で，K 上超越次数 1 をもつとする．このとき，さらに $C_M = C_K$ ならば M/K は Riccati 拡大である．

証明は概略つぎの通り．L/K が Fuchs 拡大であることから M/K もそうであることがわかる．$C_M = C_K$ より，M の種数は 1 以下となるが，種数 1 の場合，M は K 上 Weiersrass 拡大で，それは線形的ではあり得ない．

この命題の差分版はまだ明確に記述できる段階にない．同様の結果を得るためには periodic elements に関するなんらかの条件が必要であるようだ．

さらに微分の場合, つぎが成り立つ.

$\ll$ K を代数的閉微分体, $K(y)/K$ を Riccati 拡大とする.

$$Dy = ay^2 + by + c \quad (a, b, c \in K)$$

中間微分体 M は K 上 Riccati 拡大であった. もしどの $\alpha \in K$ も $D\alpha = a\alpha^2 + b\alpha + c$ をみたすことがなければ, $K(y) = M$ が成り立つ. $\gg$

証明には 1 変数代数関数体の理論が必要である (たとえば [14] を参照). つぎの差分版の証明と同様であることに注意する.

K は代数的閉体で inversive 差分拡大とし, L/K を差分拡大で, 簡単のため $L = \overline{L}$ と仮定する.

定理 $\eta \in L$ を K 上 Riccati 方程式

$$\tau y = A(y)$$

の解とし, 任意の n に対して, 方程式 $\tau^n y = A^{(n)}(y)$ は $K \cup \{\infty\}$ に解をもたないと仮定する. 中間差分体 $K(\eta) \subset M \subset L$ は inversive かつ $[M : K(\eta)] < +\infty$ をみたすと仮定する. このとき $M = K(\eta)$ である.

証明 $M \neq K$ として矛盾を導く. $K(\eta)$ 上 M の分岐する素因子全体を Φ と記す. M の素因子 P に対して素因子 τP を付値を用いて

$$\nu_{\tau P}(\tau x) = \nu_P(x) \quad (x \in M)$$

によって定義する. $K(\eta)$ の素因子に対しても同様に定義する. すると, 制限と τ を作用させることとは交換可能である. $P \to \tau P$ は双射である. 実際, $P \neq Q$ とする. ある $x \in R$ で $\nu_P(x) \geq 0$ で $\nu_Q(x) < 0$ なるものが存在する. τ を作用させれば,

$$\nu_{\tau P}(\tau x) \geq 0, \quad \nu_{\tau Q}(\tau x) < 0$$

を得るが, これは $\tau P \neq \tau Q$ であることを示す. 全射であることはあきらか. $P \in \Phi$ ならば, P の分岐指数を e とすると, ある $t \in K(\eta)$ で $\nu_P(t) = e$ なるものが存在する.
$\nu_{\tau P}(\tau t) = e$ であるから, $\tau P \in \Phi$ である. Φ は有限集合であるから, ある自然数 n と素因子 $P \in \Phi$ で $\tau^n P = P$ なるものが存在する. この主張は, 方程式 $\tau^n y = A^{(n)}(y)$ が $K \cup \{\infty\}$ において解をもつことを意味する. これは定理の仮定に反する.

命題 $\eta_1, \eta_2 \in L$ をそれぞれ K 上 Riccati 方程式

$$\tau y_i = A(y_i)$$

の解とする．ともに, iterated equations は $K \cup \{\infty\}$ に解をもたないとする．このとき, もし η_1, η_2 が K 上代数的に従属するならば, $K(\eta_1) = K(\eta_2)$ である．

なぜならば, $M = K(\eta_1, \eta_2)$ は定理の条件をみたすので,

$$M = K(\eta_1) = K(\eta_2)$$

である．この命題はすこし修正すれば, 一般化できそうである．

2.4　付置環型拡大

前節で西岡斉治 [16] の結果に関連した事項を紹介した．ここでは [16] で示された 2 つの定理とその応用 [15] を紹介する．証明は複雑なので省略するが, 原論文を参照してもらいたい．

差分拡大 L/K はつぎの性質をもつ差分拡大列

$$K = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_{n-1} \subset K_n = L$$

が存在するとき, 付置環型拡大といわれる．各 i $(1 \leq i \leq n)$ に対してつぎが成立する．

(1) K_i/K_{i-1} は代数拡大, または
(2) K_i, K_{i-1} はともに inversive で, K_i/K_{i-1} は 1 変数代数関数体であり, ある $j \geq 0$ で $\tau^j O \subset O$ をみたす付置環をもつ．

inversiveness によって (2) の $\subset$ を等号としてもよい．

さて K 上 Riccati 方程式

$$\tau y = A(y), \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

を考える．

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a^{(k)} & b^{(k)} \\ c^{(k)} & d^{(k)} \end{pmatrix}$$

とおく．

定理　$b^{(i)}c^{(i)} \neq 0$ $(1 \leq i)$ を仮定する．もし, ある k で

$$\tau^k y = A^{(k)}(y)$$

がある付置環型拡大 L/K の中で解をもつならば, ある $l \leq 1$ で

$$\tau^{ki} y = A^{(ki)}(y)$$

が K 上代数的な解をもつ．すなわち解は L の代数閉包における K の代数的閉包 $\overline{K}$ に属する．

定理 K を inversive, ある k で $b^{(k)}c^{(k)} \neq 0$, そして $\tau^k y = A^{(k)}(y)$ が K 上代数的解を有すると仮定する．f を $\tau f = A(f)$ の K 上超越的解であるとする．このとき $L = K(f)$ はつぎをみたす．

(1) L は inversive である．

(2) L/K は 1 変数代数関数体である．

(3) L/K の付置環 O で $\tau^k O \subset O$ なるものが存在する．

(4) L/K は付置環型拡大である．

この 2 定理は微分の場合における Riccati 方程式に関する事実の類似である．

さて，$K = \mathbf{C}(x)$, $\tau x = x^2$ とする．形式べき級数体 $\mathbf{C}((x))$ に τ を延長しておく．

Rudin-Shapiro 数列はつぎのように与えられる．

$$a_0 = 1, \quad a_{2n} = a_n, \quad a_{2n+1} = (-1)^n a_n.$$

2 つの形式的べき級数を

$$f_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad f_2 = f_1(-x)$$

によって定義する．それらは線形差分方程式

$$\tau \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2x} & -\frac{1}{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

を満足する．$f = f_1/f_2$ とおけば

$$\tau f = A(f), \quad A = \begin{pmatrix} x & x \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

が成立する．

Baum-Sweet 数列はつぎのように与えられる．

$$b_0 = 1,\ b_{4n} = b_n,\ b_{4n+1} = b_{2n},\ b_{4n+2} = 0,\ b_{4n+3} = b_n.$$

2 つの形式的べき級数を

$$g_1 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad g_2 = \tau g_1$$

によって定義する．これらは線形差分方程式

$$\tau \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix}$$

を満足する．

K. Mahler は超越数論の研究において差分方程式によって定義される関数を考察した．それは Mahler 関数とよばれる．上記の f_1, f_2, g_1, g_2 は Mahler 関数の好例である．．

定理 [15]　Mahler 関数 f_1, f_2, g_1, g_2 は任意の付置環型拡大 L/K 上代数的に独立である．

2.5　Clairaut 方程式

ここでは Kalmkin[6] の結果を紹介する．はじめに Clairaut 型微分方程式について．微分の場合, Raffy [19] がすでに同様の結果を得ている．

$$z_h = \sum_{k=0}^{n-h-1} \frac{(-x)^k}{k!} \frac{d^{h+k}y}{dx^{h+k}}$$

とするとき，（一般化された）Clairaut 型代数的微分方程式は

$$F(z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}) = 0$$

で与えられる．F は z_i 達に関して複素数体上 n 変数既約多項式であるとする．これは y_i 達に関しても K 上既約である．

y を $\mathbf{C}(x)$ 上 $F=0$ の一般解としよう．

$$\frac{d}{dx}z_h = \sum_{k=1}^{n-h-1} \frac{-(-x)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{d^{h+k}y}{dx^{h+k}} + \sum_{k=0}^{n-h-1} \frac{(-x)^k}{k!} \frac{d^{h+k+1}y}{dx^{h+k+1}} = \frac{(-x)^{n-h-1}}{(n-h-1)!} \frac{d^n y}{dx^n}$$

であるから，$F(z_0, \ldots, z_{n-1}) = 0$ を微分して

$$\frac{d^n y}{dx^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-x)^{n-h-1}}{(n-h-1)!} \frac{\partial F}{\partial z_k}(z_0, \ldots, z_{n-1}) = 0$$

よって $d^n y/dx^n = 0$, そして $dz_h/dx = 0$ を得る．さらに

$$y = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} z_k$$

である．

差分では少し事情が異なる．K を差分体,

$$K\{Y\} = K[Y_0, Y_1, \ldots], \quad Y_0 = Y,\ Y_k = \tau Y_{k-1}\ (1 \le k)$$

を差分多項式環とし，K には

$$\delta x = 1, \quad \delta = \tau - 1$$

なる元 x が存在すると仮定する. $C = C_K$ は代数閉体であると仮定する.

$a \in K^\times$ に対し

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}, \quad \binom{a}{0} = 1$$

によって K の元を定義する. つぎが成り立つ.

$$\binom{a}{k} = \binom{a-1}{k} + \binom{a-1}{k-1}$$

さて n を自然数とし

$$Z_h = \sum_{k=h}^{n-1} \binom{-x}{k-h} \delta^k Y \in K\{Y\}$$

とおく. 逆に各 $\delta^h Y$ したがって Y_h を Z_k $(0 \le k \le n-1)$ の線形結合によって表わすことができる. とくに, 公式

$$\sum_{h=0}^{k} \binom{x}{h}\binom{-x}{k-h} = 0\ (k > 0), \quad 1\ (k = 0)$$

によって

$$Y = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{x}{k} Z_k$$

を得る. 上記の公式は, 任意の自然数 m に対して

$$\sum_{h=0}^{k} \binom{m}{h}\binom{-m}{k-h} = 0\ (k > 0), \quad 1\ (k = 0)$$

が成立することから明らか. Z_h に関しては

$$\begin{aligned}
\tau Z_h &= \sum_{k=h}^{n-1} \binom{-x-1}{k-h} (\delta^{k+1} + \delta^k) Y \\
&= \binom{-x-1}{0} \delta^h Y + \sum_{k=h+1}^{n-1} \left(\binom{-x-1}{k-h-1} + \binom{-x-1}{k-h} \right) \delta^k Y + \binom{-x-1}{n-h-1} \delta^n Y \\
&= \delta^h Y + \sum_{k=h+1}^{n-1} \binom{-x}{k-h} \delta^k Y + \binom{-x-1}{n-h-1} \delta^n Y
\end{aligned}$$

よって

$$\delta Z_h = \phi_h \delta^n Y, \quad \phi_h = \binom{-x-1}{n-h-1} \in K$$

を得る.

いま n を自然数, $z_0,\ldots,z_{n-1}$ を不変元とし, それらが0でない C 上 n 変数多項式 F

$$F(z_0,z_1,\ldots,z_{n-1})=0$$

をみたすとする.

$$y=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{x}{k}z_k$$

とするとき, $\Phi=F(Z_0,Z_1,\ldots,Z_{n-1})\in K\{Y\}$ に対して

$$\Phi(y)=0,$$

が成り立つ. また, $\delta^n y=0$ も成立する. $\Phi(y)=0$ を Clairaut 方程式という. 微分のときとことなり, Clairaut 方程式の解が $\delta^n y=0$ を満足するとは限らない.

たとえば方程式

$$y-x\delta y-(\delta y)^2=0$$

を考える (cf. Boole [2], p.159). 差分すれば

$$-(x+1)\delta^2 y-\delta^2(y)\tau\delta y-\delta(y)\delta^2 y=0,$$

よって

$$\delta^2(y)(\delta^2 y+2\delta y+x+1)=0.$$

$L_0=K(y)$, L をその代数的閉包とし

$$\delta(\delta+2)y+x+1=0$$

によって方程式の解を L の中に見出す. 実際, この等式によって $\tau^k y$ $(k\geq 2)$ を定義し, 差分拡大 $K\langle y\rangle=K(y,\tau y)\subset L$ を得る. もちろん $\delta^2 y\neq 0$ である. この線形方程式の特殊解として $y=-\frac{1}{4}x^2$ が得られるが, Clairaut 方程式の解として

$$y=x\delta y+(\delta y)^2=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{16}$$

を得る. これは「一般解」$y=cx+c^2$ $(\delta c=0)$ には属さない. また「一般解」の包絡線にもなっていない. この解を一般解というわけにはいかないのである.

2.6　OKH 定理

K を標数0の微分体, L/K を微分拡大, C を K の定数体とする. C は代数閉体と仮定する.

Ostrowski の定理と Kolchin の定理は微分体での成果であるが, Hardouin がガンマー関数に関する Hölder の定理を差分 Galois 理論に基づいた証明を得るため, 差分化したものである. 小川原 [18] は. 微分加群を使うことによって簡単な証明を与えた. ここでは, 彼の差分代数的議論を微分のものに変換して, Ostrowski-Kolchin-Hardouin の定理 (微分版) を証明しよう.

定理　$x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n \in L$ は

$$Dx_i = u_i x_i,\ Dy_j = v_j, \quad u_i, v_j \in K \quad (1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$$

をみたすと仮定する. もし, $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n \in L$ が KC_L 上代数的に従属するならば, つぎの (1) または (2) が成立する.

(1) $(0) \neq (k_i) \in \mathbf{Z}^m$, $x \in K^\times$ で

$$Dx = x \sum k_i u_i$$

なるものが存在する.

(2) $(0) \neq (\gamma_i) \in C^n$, $y \in K$ で

$$Dy = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i v_i$$

なるものが存在する.

証明　体拡大 L として K 上有限生成としてよい. このとき C_L も C 上有限生成である. 定理の証明のために, まず $x_1, \dots, x_m$ が KC_L 上代数的従属であると仮定する. m を最小にとる. このとき, Ω_{L/KC_L} において

$$\sum_{i=1}^{m} a_i dx_i / x_i = 0 \quad (a_i \in L)$$

がなりたつ. ここで $a_m = 1$ である. $\mathcal{L}_D$ を作用させて

$$\sum_{i=1}^{m-1} D(a_i) dx_i / x_i = 0,$$

m の最小性より $a_i \in C_L$ を得る. $c_1, \cdots, c_r \in C_L$ を $\mathbf{Q}$ 上線形独立なものとし, 整数 n_{ij} を用いて $a_i = \sum_{j=1}^{r} n_{ij} c_j$ と表すことができる. ある n_{ij} は 0 でない. これによって

$$0 = \sum_{i=1}^{m} a_i dx_i / x_i = \sum_{j=1}^{r} c_j \sum_{i=1}^{m} n_{ij} dx_i / x_i = \sum_{j=1}^{r} c_j dz_j / z_j, \quad z_j = \prod_{i=1}^{m} x_i^{n_{ij}}$$

を得る. c_j は $\mathbf{Q}$ 上線形独立であるから各 z_j は KC_L 上代数的である. $Dz_j = z_j \sum n_{ij}u_i$ に注意. 周知のように, このとき $z \in KC_L$, $(k_i) \in \mathbf{Z}^m$ で

$$Dz = z\sum k_i u_i,\ (k_i) \neq 0$$

なるものが存在する.

つぎに $x_1, \ldots, x_m$ は KC_L 上代数的独立で, $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ は KC_L 上代数的従属であると仮定する. n を最小にとる. このとき, Ω_{L/KC_L} において

$$\sum_{i=1}^{m} a_i dx_i/x_i + \sum_{h=1}^{n} b_h dy_h = 0$$

が成立する. ただし, $b_n = 1$ とする. $\mathcal{L}_D$ を作用させれば

$$\sum_{i=1}^{m} D(a_i)dx_i/x_i + \sum_{h=1}^{n-1} D(b_h)dy_h = 0$$

を得る. よって, $Da_i = Db_h = 0$ すなわち $a_i, b_h \in C_L$ を得る. 前述のように $c_1, \ldots, c_r \in C_L$ を $\mathbf{Q}$ 上線形独立なものとし, $a_i = \sum_{j=1}^{r} n_{ij}c_j$, $n_{ij} \in \mathbf{Z}$ と表せば, 上式は

$$\sum_{j=1}^{r} c_j dz_j/z_j + d\sum_{h=1}^{n} b_h y_h = 0, \quad z_j = \prod_{i=1}^{m} x_i^{n_{ij}}$$

となる. 故に $f = \sum_{h=1}^{n} b_h y_h$ は KC_L 上代数的である. f は

$$Df = \sum_{h=1}^{n} b_h v_h \in KC_L$$

をみたす. 周知のように $w \in KC_L$ で

$$Dw = \sum_{h=1}^{n} b_h v_h$$

なるものが存在する.

C_L は C 上有限生成であるから, 形式ベキ級数体 $C((t))$, $Dt = 0$ に埋め込むことが出来る. したがって $KC_L \subset K((t))$ とみなす. 実際, K, C_L は C 上線形無関連であるから, このことは保証される.

$$Dz = z\sum_{i=1}^{m} k_i u_i$$

において,

$$z = \sum_{\nu=p}^{\infty} \alpha_\nu t^\nu, \quad \alpha_\nu \in K,\ \alpha_p \neq 0$$

を代入すれば $x=\alpha_p$ に対して

$$Dx = x\sum_{i=1}^{m} k_i u_i$$

が成立する．これで (1) を得た．

(2) についてはつぎの通り．上述から $w \in KC_L$, $b_h \in C_L$ で

$$Dw = \sum_{h=1}^{n} b_h v_h$$

なるものが存在する．$b_n = 1$ である．$w \in K((t))$, $b_h \in C((t))$ であるから

$$w = \sum \omega_\nu t^\nu, \quad b_h = \sum \beta_{h\nu} t^\nu$$

と表すことができる．$\beta_{n0} = 1$ である．$y = \omega_0$ とすると

$$Dy = \sum_{h=1}^{n} \beta_{h0} v_h$$

を得る．これで定理の証明を終える．

差分版を証明ぬきで引用する．K を差分体, L/K を差分拡大, $C = C_K$ を K の不変部分体とする．C は代数閉体と仮定する．

O-K-H 定理 $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n \in L$ は

$$\tau x_i = u_i x_i,\ \tau y_j = y_j + v_j, \quad u_i, v_j \in K \quad (1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$$

をみたすと仮定する．もし, $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n \in L$ が K 上代数的に従属するならば, つぎの (1) または (2) が成立する．

(1) $(0) \ne (k_i) \in \mathbf{Z}^m$, $x \in K$ で

$$\tau x = x \prod u_i^{k_i}$$

なるものが存在する．

(2) $(0) \ne (a_i) \in C^n$, $y \in K$ で

$$\tau y = y + \sum_i a_i v_i$$

なるものが存在する．

2.7 Poincaré の定理

K を代数閉体, R/K を一変数代数関数体, $\tau \in \mathrm{Aut}\,(R)$ で $\tau K = K$ なるものとする. 素因子 P に対して, 素因子 τP をつぎによって定義する.

$$\nu_{\tau P}(\tau x) = \nu_P(x)$$

$P \to \tau P$ は双射である (第 2.2 節定理の証明を参照).

任意の因子 $A = \sum_P m_P P$ に対して $\tau A = \sum_P m_P \tau P$ と定義する. A が正因子ならば τA も正因子である. また $x \in R$ に対して $\tau(x) = (\tau x)$ である. 実際
$(x) = \sum_P \nu_P(x) P$ であるから

$$\tau(x) = \sum_P \nu_P(x)\tau P = \sum_{\tau P} \nu_{\tau P}(\tau x)\tau P = (\tau x)$$

各因子 A に対して $\tau L(A) = L(\tau A)$ が成立する. 実際, $(x) + A \geq 0$ とすると $(\tau x) + \tau A \geq 0$ であるから $\tau L(A) \subset L(\tau A)$ を得る. τ^{-1} を考えれば逆の包含関係を得る.

定理 K を差分体, R/K を 1 変数代数関数体で, inversive 差分拡大とする. このときもし R/K の種数 g が 2 以上ならば, R は周期元によって生成される.

証明 τ は Weierstrass 点全体の置換を与える. よってある r で τ^r はすべての W 点を不動にする. P を Weierstrass 点で, $n \leq g$ を $\dim L(nP) = 2$ なるものとする. $1, z$ を $L(nP)$ の K-基底とする. $\tau^r z \in L(nP)$ より $\tau^r z = az + b$ となる $a, b \in K, a \neq 0$ が存在する. Q を P と異なる Weierstrass 点とすると, ある $\alpha \in K$ で $\nu_Q(z - \alpha) > 0$ となる. Q_1 を第 3 の Weierstrass 点とし, $\nu_{Q_1}(z - \alpha_1) > 0$ ($\alpha_1 \in K$) としよう. $\alpha \neq \alpha_1$ ととることができる. なぜなら $[R : K(z)] = n$ であるから, $\nu_{Q_1}(z - \alpha) > 0$ となる点 Q_1 は高々 g 個しかない. 一方 Weierstrass 点の個数は少なくとも $2g + 2$ 個である. よって残り $g + 1$ 個以上の点から 所要の Weierstrass 点を採用することができる. $\tau^r \alpha = a\alpha + b$, $\tau^r \alpha_1 = a\alpha_1 + b$ が成立する. そこで

$$u = \frac{z - \alpha}{\alpha_1 - \alpha}$$

とおけば $\tau^r u = u$ を得る. n と互いに素な, ある整数 m で, $\dim L((m-1)P) < \dim L(mP)$ なるものがある. そこで $v \in L(mP) \setminus L((m-1)P)$ をとれば, $R = K(u, v)$ である. τ^r は P の位相に関して連続であることに注意しよう. 素元 t_P を $u = t_P^{-n}$ なるようにとる. $\tau^r u = u$ より $K((t_P))$ において $\tau^r t_P = \epsilon t_P, \epsilon^n = 1$ を得る. すると $\tau^{rn} t_P = t_P$ である. $\sigma = \tau^{rn}$ とすれば, $\sigma t_P = t_P$ で, v は K-上線形斉次方程式

$$F(v) = \sigma^k v + a_1 \sigma^{k-1} v + \cdots + a_k v = 0$$

をみたす. $v \in K((t_p))$ を t_P に関して展開する.

$$v = \sum_{i=-m}^{\infty} \beta_i t_P^i$$

各係数 β_i は $F(\beta_i) = 0$ をみたす. そこで $V = \{x \in K \mid F(x) = 0\}$ とおけば, これは $M = \{x \in K \mid \sigma x = x\}$ 上線形空間で, その次元 d は k を超えない. V の M-上基底を $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$ とすると,

$$v = \sum_{i=1}^{d} w_i \gamma_i$$

なる表示を得る. ここで $w_i \in M((t_P))$, $\sigma w_i = w_i$ である. w_i は $\sigma^j \gamma_i (0 \le i, j < d)$ および $\sigma^j v$ $(0 \le j < d)$ によって表わされる. よって $w_i \in R$ であることがわかり, $R = KM$ が結論される.

定理は R/K が quasi-inversive であっても成立する. 実際, このとき Hurwitz の公式より inversive になるからである.

参考文献

[1] Amitsur: Commutative linear differentail operators, Pacific J. Math. 8(1958), 1-10

[2] G. Boole: A treatise on the calculus of finite differences, Macmillan, 1880

[3] R.M. Cohn: Difference Algebra, Interscience Publ., 1965

[4] W.A.Jr. Harris & Y. Sibuya: The reciprocals of solutions of linear ordinary differential equations, Adv. in Math. 58(1985), 119-132

[5] P.-F. Hsieh & Y. Sibuya: Basic theory of ordinary differential equations, Springer, 1999

[6] M.S. Kalmkin: Generalization of Clairaut 's differential equation and the analogous difference equation, Amer. Math. Monthly 60(1953), 97-99

[7] E.R. Kolchin: Differential Algebra and Algebraic Groups, Academic Press, 1973

[8] A. Levin: Difference Algebra, Springer, 2008

[9] 永田雅宜: 可換体論, 裳華房, 1967

[10] 西岡啓二: 初等超越関数について, 慶応義塾大学湘南藤沢藤沢学会, 2006

[11] ________: 常微分作用素の Floquet 分解, 慶応義塾大学湘南藤沢藤沢学会, 2011

[12] _______: 微分代数における変分方程式, 慶応義塾大学湘南藤沢藤沢学会, 2012

[13] _______: Fuchs Extensions, 慶応義塾大学湘南藤沢藤沢学会, 2013

[14] 西岡久美子: 微分体の理論, 共立出版, 2010

[15] 西岡久美子, 西岡斉治: Algebraic theory of difference equations and Mahler functions, Aequationes Math. 84(2012), 245-259

[16] 西岡斉治: Solvability of difference Riccati equations by elementary operations, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 17 (2010), 159-178

[17] _______: Algebraic independence of solutions of first order rational difference equations, Results in Math.

[18] 小川原弘: Another proof of Ostrowski-Kolchin-Haldouin theorem in differece algebra, SFC J. vol. 13, No. 2 (2013), 99-1002

[19] L. Raffy: Sur certaines équations différentielles d'ordre supérieur à l'équation de Clairaut, Bull. S. M. F. 25(1897), 71-72

[20] J.F. Ritt: Differential Algebra, Dover, 1950

[21] C. Schneider: Structural theorems for symbolic summation, AAECC 21(2010), 1-32

[22] S. Sperber: On solutions of differentil equations which satisfy certain algebraic relations, Pacific J. Math. 124(1986), 249-256

[23] O. Zariski & P. Samuel: Commutative Algebra vol.2, Springer, 1960

微分代数から差分代数へ

発 行 日	2014年6月10日
著　　者	西岡啓二
発 行 所	慶應義塾大学 湘南藤沢学会
印 刷 所	株式会社 ワキプリントピア

ISBN 978-4-87762-277-0
SFC-RM2014-001