Title	第5講：アレクサンドリア周辺
Sub Title	
Author	石川, 史郎(Ishikawa, Shirō)
Publisher	
Publication year	2018
Jtitle	理系の西洋哲学史；哲学は進歩したか? (2018. 6) ,p.101- 125
JaLC DOI	
Abstract	
Notes	慶應義塾大学理工学部大学院講義ノート
Genre	Book
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KO52003003-00000000-0101

第 5 講

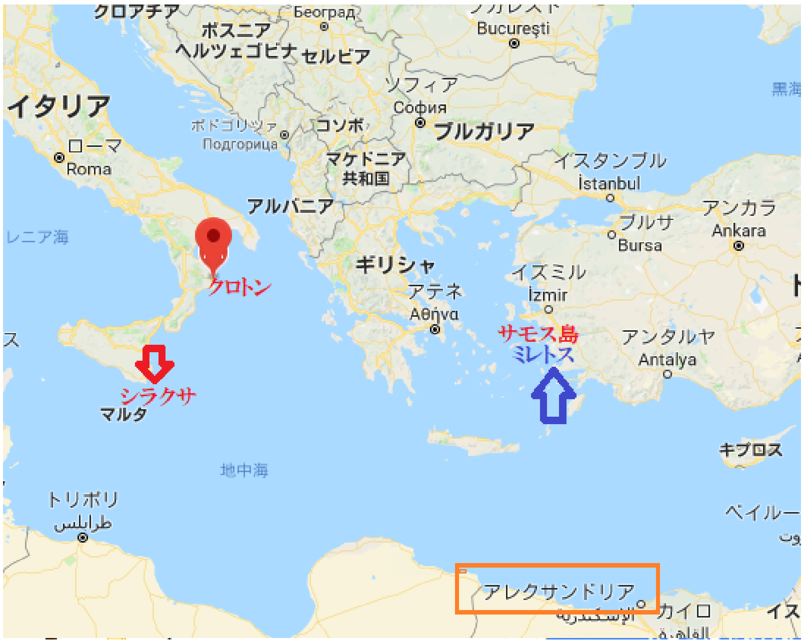
アレクサンドリア周辺

「理系の西洋哲学史」 目次; 他

古代ギリシャと言っても, ギリシャだけが学問の中心というわけではなかった．エジプト (アレクサンドリア) には数千年間のピラミッド建造の知恵が蓄積されていたし, それを学ぶために地中海沿岸の各地から俊英たちがエジプトに留学した．本章では, アレクサンドリア学派とその影響を受けた次の賢人たち：

ユークリッド (アレクサンドリア)・・・幾何学
アリスタルコス (サモス)・・・地動説
アルキメデス (シラクサ)・・・浮力・テコ
エラトステネス (アレクサンドリア)・・・地球の大きさ
プトレマイオス (アレクサンドリア)・・・天動説

について述べる．



5.1 アレクサンドリア周辺

ピラミッド建造という工学的伝統の影響だろうが, アレクサンドリア学派の仕事は堅実かつ理系的で実がある. 逆に言えば, 論理を超越する哲学的な魅力 (プラトン哲学のような魅力) がなかったとも言える. 時代的には, アレクサンドリア学派はプラトンの仕事を知っていたはずであるが,

- まさか, プラトン哲学が 2000 年以上も生き残るとは思っていなかった

と思う.

本章で, アリスタルコスの地動説を多少詳しく述べたのは, 第 7 章の主張, すなわち,

- 「天動説 vs. 地動説」は, 実験で白黒つけることができない形而上学的問題で, すなわち,

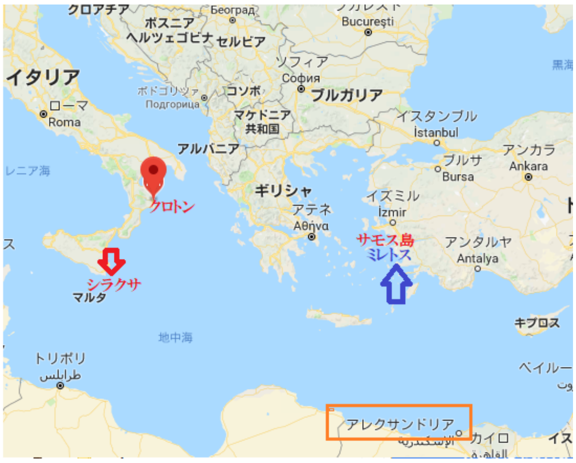
  (♯)「天動説 vs. 地動説」は哲学論争であって,「測定・真偽の問題」ではない

  である.

の準備のためである.

5.2 ユークリッド　(幾何学に王道なし)

5.2.1 ユークリッド (BC.330 年頃 - BC.275 年頃) - 平行線の公準



エジプト, ギザの砂漠にある三大ピラミッド (被葬者はクフ王, カフラー王, メンカウラー王) の造営時期は紀元前 2500 年頃である．それから 2000 年以上経ってから，ユークリッドは生まれている． ユークリッドはアレクサンドリア（ナイル川の河口）で活躍した数学者で「幾何学の父」と称される．著作『原論』(ユークリッド原論）は古代数学の集大成である． 「原論」は西方世界では聖書に次いで広く読まれた本で, 数学における聖典とも言うべきものである．一言で言えば,

- 原論は, 「(数学の) 証明とは何か？」に初めて答えた

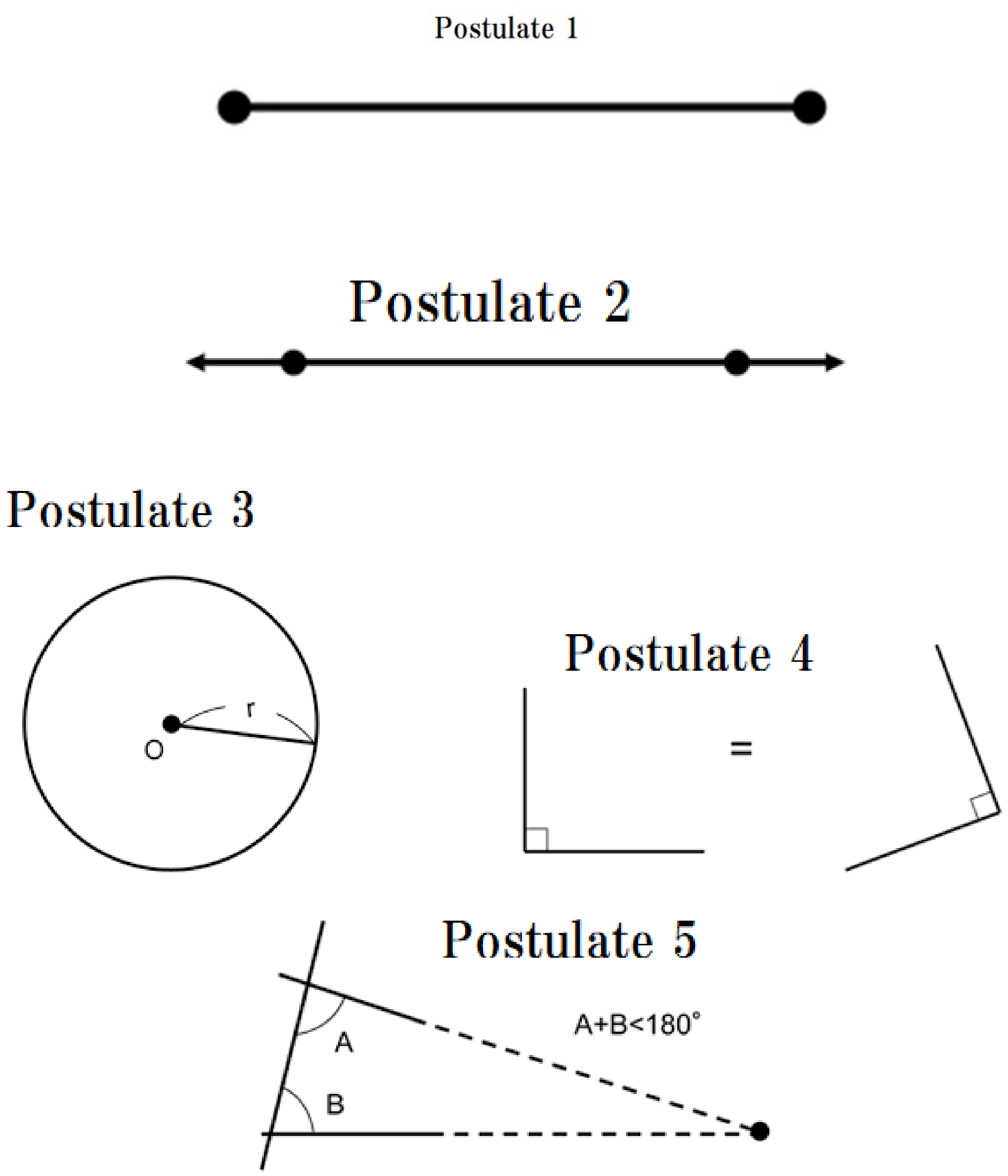
と言える．あることを証明するには, 別のあることを前提にしなければならない．そしてそのあることを認めるにはまたさらに別のあることを前提にしなければならない．そうなると, これを無限に続けなければならないのだろうか？

- 子供に「なぜ？」と質問されて, それに答えるとまた, 「それはなぜ？」と質問される．これを繰り返されて, 最後には, 「これは決まっているんだよ」というしかなくなる．

この決まっていること (約束事のこと) をユークリッドは「公準」と呼んで，次の５つの「自明な命題」からスタートすることを宣言した．

ユークリッドの公準

- Postulate 1: 任意の点から任意の点へ直線を引くこと.
- Postulate 2: 有限な直線を連続的に直線に延長すること.
- Postulate 3: 任意の点を中心とする任意の半径の円を描くこと.
- Postulate 4: すべての直角は互いに等しい.
- Postulate 5: 直線が 2 直線と交わるとき，同じ側の内角の和が 2 直角より小さいなら，この 2 直線は限りなく延長されたとき，内角の和が 2 直角より小さい側において交わる.



以上で, どれも自明で疑う余地がないと思うかもしれない.

しかし, ユークリッド自身が公準 5(平行線の公準) を疑っていたらしい. 平行線の公準の疑義が明確になるのは, ユークリッドから 2000 年以上も後のガウス (1777 年-1855 年) を待たなければならなかった (次節参照). ユークリッドの細心の注意にも関わらず, 「原論」によって,

(B) 自明なことから, スタートすることが最良の方法

という思い込みが形成されてしまった. この思い込みには多くの哲学者（デカルト, スピノザ等）が嵌ってしまった. 今ならば誰だって知っていることであるが, デカルトのコギト命題「我思う, ゆえに我あり」は自明どころか意味不明な命題である.

♠ **注釈 5.1.** タレスからユークリッドまでをギリシャ数学というならば,

- ギリシャ数学=(初等) 幾何学

と思っていいだろう. もちろん, 例外はある. たとえば, 『原論』は幾何学だけではなくて, 素数が無限個あることも次のように示されている :

(♮) 有限個で, 素数全体の集合を $\{2, 3, 5, 7, ..., n\}$ と仮定しよう. このとき,

$$N = (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times ... \times n) + 1$$

とする. N は素数であるか, n より大きな素数で割り切れる数である. いずれにせよ, n が最大の素数であるという仮定に矛盾する.

////

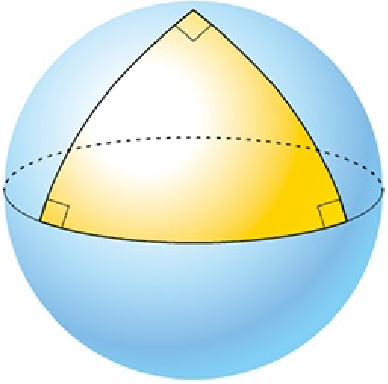
5.2.2 非ユークリッド的転回

ガウス (1777 年 - 1855 年) 等による非ユークリッド幾何学 (平行線の公準を受け入れない幾何学) の発見は, この思い込み (B) を打破して,

(C) 何からスタートしても, それが生産的ならばよい.

と主張した.

とは言っても, 複雑なことではない. 平行線の公準は「三角形の内角の和が 180°」と同値であるが, 球面の幾何学を考えればこれが成立しないことは下図を見れば自明だろう.



直線を最短距離を与える線と定義すれば, 球面上に三角形を描くと内角の和が 180 度を超える. たとえば, 地球上では, 経度 0 度線, 経度 90 度線, 赤道の 3 つの直線によって三角形を描くことがでるが, この三角形はすべての角が直角になる. 内角の和は 270 度 ($3 \times 90=270$).

思い込み (B) の打破を本書では,

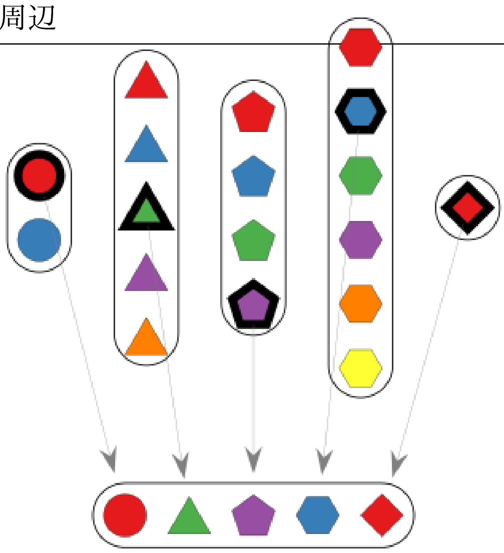
(D) 【(B): 自明→ (C)：生産性】を**非ユークリッド的転回**

と呼ぼう. 非ユークリッド的転回は, 現代においても一般にはまだ十分認知されているとは言えないかもしれない.　しかし, すこし考えてみれば, わかることであるが, 「自明」なことからスタートして成功した理論なんてない. ニュートン力学, 相対性理論, 量子力学等は「自明」からスタートしていない. そもそも

(E) 「『自明』とは何か？」だって自明ではない.

数学（=集合論）の選択公理も自明とはいえない. ここで, 選択公理とは,

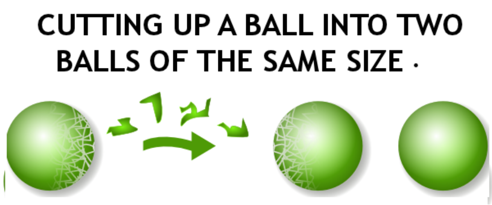
- どれも空でないような集合を元とする集合 (すなわち, 集合の集合) があったときに, それぞれの集合から一つずつ元を選び出して新しい集合を作ることができるという公理
(たとえば, 集合の集合
$\{\{a, b\}, \{c, d, e\}, \{g\}, \{h, i, j, k\}\}$
があったとき, 各集合から元を一つずつ取り出して, たとえば, 新しい集合 $\{a, c, g, j\}$ を作ることができる)



であるが, 選択公理は自明とは言えない. たとえば, 数学のバナッハ＝タルスキーの定理は次の (F) を主張する：

(F) 選択公理を認めてしまうと, 次の信じがたい手品のようなことが証明できてしまう：

- 球を幾つかの有限個のパーツに分解して, 再び組み立て直すとする. このとき, 同じ大きさの球を 2 個作ることができる.



である. こうなると, 選択公理を疑いたくなるが, 選択公理を認めないと数学の記述力が大幅に低下してしまい, 「使えない数学」になってしまう.

混乱を避けるために, 次の (本書の立場・著者の意見) を「挑発的」に述べておく.

(G) 数学基礎論とか数理論理学は, 科学とか哲学とは一切関係ない. 関係すると思ったときは, 袋小路に迷い込んでいると思った方がいい.

たとえば, バナッハ=タルスキーの定理とかゲーデルの不完全性定理とかは科学者・哲学者が教養として知っておくことは悪いことではないが, これが彼らの仕事の中で有効に使われた例を著者は知らない. 逆に, バナッハ=タルスキーの定理とかゲーデルの不完全性定理など知らない一流の数学者も多数いるわけで, 数学の教養など無用の長物で, 必要なのは問題を解く力である. また, 数学をいくら学んでも「(実社会で) 論理的思考」ができるようになるわけでない. 著者は

(実社会で) 非論理的な一流の数学者を幾人か知っている.

5.2.3 ところで, 原論は正しかったのだろうか？

ガウスは公準 5(平行線の公準) を認めない幾何学 (非ユークリッド幾何学) が存在することを示した. もちろん, ガウスは原論の幾何学 (ユークリッド幾何) が間違っていると言ったわけではなくて, それとは異なる別の幾何学 (非ユークリッド幾何学) も存在すると主張したわけである. それでは, 次の疑問を読者は問うかもしれない.

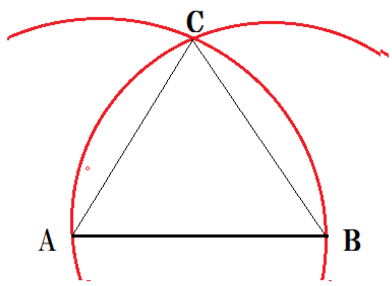
(H) 原論は正しかったのだろうか？

である. もちろん, 細かいことことを言えば間違っている. たとえば, 原論の最初の定理は次である.

定理 5.1.　(I) 与えられた線分 AB を辺とする正三角形が存在する.

これを原論は次のように証明している：

[証明]：



上の左図を見よ. 公準 3 から, A を中心とする半径 1 の円を描こう. さらに B を中心とする半径 1 の円を描く. この二つの円の交点を C としよう. このとき, △ ABC は正三角形になる.

////

以上が原論の証明であるが, 完全とは言えない. これを次に示す.

[上の証明には不備がある]：

交点 C の存在が保証されていない. 大学一年で勉強する中間値の定理と同じことで, 円が連続な曲線であること (とか平面の完備性とか) を保証しておかないと不十分である.

////

原論には上以外にも様々な不備がある. これらを改善する試みの中で最も有名なのが, 20 個ぐらいの公準からなるヒルベルトの「幾何学基礎論」(1899 年) である. 原論では, 点や線をそれぞれ「部分を持たない」とか「幅のない長さ」と定義しているが, これでは「それでは, 『部分』とはなのか？とか『幅』とはなにか？」と問われてしまう. そこで, ヒルベルトは, 「点」とか「線」

を無定義用語として, それらの関係も無定義用語で定めて, 「幾何学基礎論」を提唱した.

- 点, 直線, 平面という言葉の代わりに, テーブル, 椅子, そしてビール・ジョッキと言っても, 公準さえ満たせばそれで幾何学になる

というたとえ話は有名であるが, 実は著者には次のように思っている.

(J_1) 点, 直線, 平面, 円とか書いてあるので, 読者が気を利かして公準が言っていないことまで無意識に使ってしまっているかもしれない. もちろん, そういうことはないようにヒルベルトが万全を期したに違いないわけで, 「幾何学基礎論」は正しいに違いない.

しかし,

(J_2) 著者に「幾何学基礎論」を論じる資格があるとは到底思えない. 著者は「原論」の不備すら見抜けなった ([定理 5.1 の証明が不備であった] 参照) わけで, 2000 年以上昔のユークリッドの誤謬すら見抜けなかった者が, 現代数学の巨人であるヒルベルトが誤謬したとしても到底それを見抜けないと思うからである. 「幾何学基礎論」を読んでも, 高尚な気分になるだけの自己満足以上のものを得ることはできないだろう.

ただし, 次は確信できる.

- 「幾何学の公理化」は著者の能力外であるが, 「数学全体の公理化」ならばわかる気がする. [数学全体の公理化=集合論] で, 集合論の公準 (たとえば, ツェルメロ＝フレンケルの公理系 (ZF: Zermelo-Fraenkel)) は (平面とか直線とかの) 日常言語で書かれていない (「∈」という記号だけで書かれている) ので, 先入観で思い込むような危険性無いと思い込める

からである.

♣ **補足 5.1.** 「なぜ上の (J) のようなことにしつこくこだわるのか？」と疑問に思うかもしれない. 実はこの問題は著者の提案する「量子言語」でも重要だからである. たとえば, 次である：

- 量子言語の公準をコンピュータに教えておけば, コンピュータは (原理的には) 量子言語のすべての結果を導いてくれるか？

である (*cf.* 問題 12.3「量子言語 v.s. AI」). 「量子言語」を知らないというならば, 「量子力学」とか「ニュートン力学」に置き換えてもよい. 高校の物理の教科書でも「ニュートン力学の 3 法則」が書いてあるが, この 3 法則を知っているだけでは, どんなに頭のよい人でも物理の問題は解けないと思うがどうだろうか？

5.2.4 それでも, 原論はすごい； 三平方の定理に関して

原論の第一巻は４８の定理からなり, 最後は三平方の定理で完結している. そうならば, 原論の「三平方の定理の証明」を検討したくなる. 以下にこれをしよう.

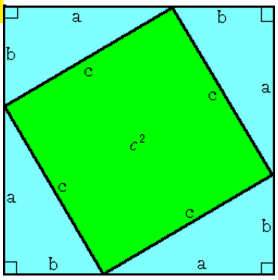
定理 5.2. [三平方の定理]:

$\triangle$ABC において, 次は同値：

($\sharp_1$) $\angle \mathrm{C} = 90°$
($\sharp_2$) $\mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2 = \mathrm{AB}^2$

「($\sharp_1$)⇒($\sharp_2$)」ならば, 「($\sharp_2$)⇒($\sharp_1$)」は明らか. なぜならば, $\triangle$ABC ($\angle \mathrm{C} = 90°$, $a = \mathrm{BC}, b = \mathrm{AC}, c = \mathrm{AB}$) と $\triangle \mathrm{A'B'C'}$ ($a =$ B'C'$, b =$ A'C'$, c =$ A'B', $a^2 + b^2 = c^2$) は合同だからである. したがって, 「($\sharp_1$)⇒($\sharp_2$)」を示せばよい. この証明法は多数あるが, ここでは次の三つを述べる.

[(1):面積の加法性を使う中学の証明]



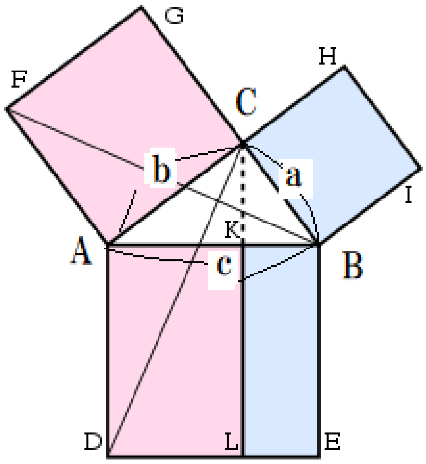
すなわち,

$$4 \times \frac{ab}{2} + c^2 = (a+b)^2$$

より, $a^2 + b^2 = c^2$.

////

[(2):ユークリッドの証明]



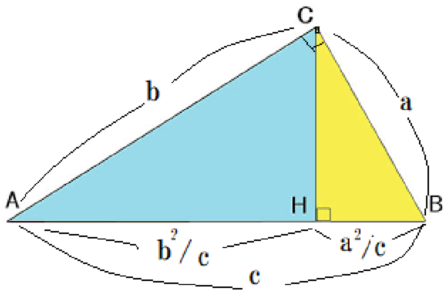
△ ABF と△ ADC は回転合同であることに注意せよ. よって,

$$\square \text{ ACGF の面積} = 2 \times \triangle \text{ ABF の面積} = 2 \times \triangle \text{ ADC の面積} = \square \text{ ADLK の面積}$$

右側も同様.

////

[(3):相似を使う証明]



H を垂線の足とする. △ ABC ∽ △ ACH よって, AH=$\frac{b^2}{c}$, △ ABC ∽ △ CBH よって, BH=$\frac{a^2}{c}$, より, $\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{c}=c$.　よって, $a^2+b^2=c^2$.

////

[上の 3 つの証明の比較] 上では, (1) が一番わかりやすい証明とされていて, 現在の中学の数学の教科書にも採用されている (昔は, (2) のユークリッドの証明が採用されていた). しかし, (1) は面積の加法性が暗黙裡に仮定されて, 原論の証明としては不備がある (厳密には, 誤りである) とユークリッドは考えたのだと思う. 多角形を三角形分割した場合の面積の加法性ぐらいでも, その証明はかなり面倒. (1) を却下したのはユークリッドの卓見と思う.

- ユークリッドが (1) の証明を採用していたら,「原論」は現在まで残らなかっただろう

しかし, 著者には, 三平方の定理の証明としては, (3) がベストと思う. 三平方の定理はそもそも面積とは関係ないはずで, ユークリッドの証明 (2) は面積を使うのが気に入らない. しかも「面積」という概念は簡単とは言えない (実は, 著者は今でも「面積」がよくわかっていない. 大学一年の常識「$\theta<\tan\theta \quad (0<\theta<\pi/2)$」の証明に面積を使うと簡単になるトリックの意味が未だにわからず, 証明に面積が使えない). 著者の感覚では,

$$(1) < (2) < (3)$$

であるが, 著者の独断にすぎない.

♠ **注釈 5.2.** 本書では, 数学は世界記述法の一種とは考えないとする. 極端な話, 世界が無くても数学は存在するからである. また, ユークリッドは純粋数学者とする. したがって, 世界記述法の分類の中にユークリッドの居場所はない. すなわち,

$(\flat_1)$: 実在的世界記述 (物理学)
　アリストテレス, アルキメデス, ガリレオ,
ニュートン, アインシュタイン, ・・・

$(\flat_2)$: 空想的言語的世界記述　(西洋哲学の本流)
　プラトン, スコラ哲学, デカルト, ロック,
ライプニッツ, バークリー, ヒューム, カント,
フッサール

$(\flat_3)$: 科学的言語的世界記述 (統計学・量子言語)
　パルメニデス, ゼノン, ベルヌーイ,
統計学, 量子言語

♠ **注釈 5.3.** ピラミッド建設の伝統もあって, エジプトは数学の先進国であった.　ピタゴラスやアルキメデスもエジプトで幾何学を学んだ.　当時のアレクサンドリアは, 蔵書 70 万冊を有するアレクサンドリア図書館があったほどの学術都市であった. ユークリッドの後に,

- エラトステネス（BC.275 年 - BC.194 年）: 地球の全周長を 46250km と測定した古代最高の測定者.
- クレオパトラ (BC.69 年 - BC.30 年）

である.

5.3 アリスタルコス； 古代の地動説

5.3.1 月, 地球, 太陽の直径の比

アリスタルコス（BC.310 年 - BC.230 年頃）は古代ギリシャ (現在ではトルコのサモス島 (アテネから見てエーゲ海の対岸)) の天文学者で, 地動説を唱えた． 地動説の説得力としては, コペルニクスよりもアリスタルコスのほうが勝ると考える． 次の命題を示した

命題 5.3.

(A_1) 月の直径：地球の直径 ≈1:3 （現在の最新測定では, 1：3.669）

(A_2) 月の直径：太陽の直径 ≈1:19

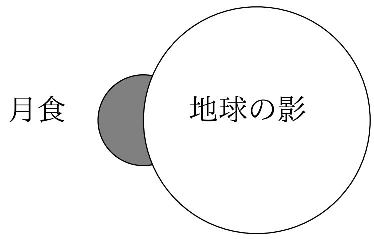
(A_3) よって, 地球の直径：太陽の直径 ≈1：6.333 （現在の最新測定では, 1：109)．したがって, 大体,

$$【月の直径】:【地球の直径】:【太陽の直径】= 1:\ 3:\ 19$$

となる．

(A_4) 体積は直径の 3 乗に比例するから, 地球より太陽の方が圧倒的に大きい．

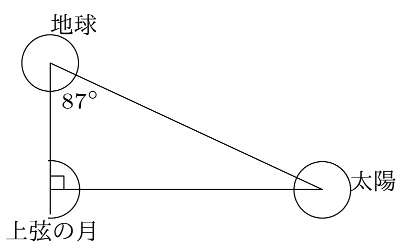
(A_1) の解答: 左下図 (月食の図) を見よう．太陽は非常に遠いところにあるので,「地球の大きさ＝地球の影の大きさ」と思ってよい．よって, 目分量で, (A_1) は小学生の問題だろう．



////

(A_2) の解答: また, 右下図 (上弦の月の図) を見れば, (A_2) は高校生の問題だろう．$\cos 87^\circ \approx 1/19$ で, 太陽と月が同じ大きさに見えるという奇跡を使えば,

$$\frac{\text{月の直径}}{\text{太陽の直径}} = \frac{\text{地球と月の距離}}{\text{地球と太陽の距離}} = \cos 87^\circ \approx \frac{1}{19}$$



////

5.3.2 古代の地動説

ここで, アリスタルコスは以下のように考えた.

(B_1) 太陽の方が地球よりも圧倒的に大きい. そうならば, 大きい太陽が小さな地球のまわりを回っているはずがない. つまり, 地球が太陽のまわりをまわっているにちがいない.

と考えて, アリスタルコスは地動説を唱えた.

(B_2) アリスタルコスの論理は完璧だった

と思う. 「体積」と「質量」は違うなどと難癖をつけるのはヤボというものだろう. この (B_1) の理屈をなぜ天才アルキメデスが理解しなかったのかは, 著者には不思議である (次節参照).

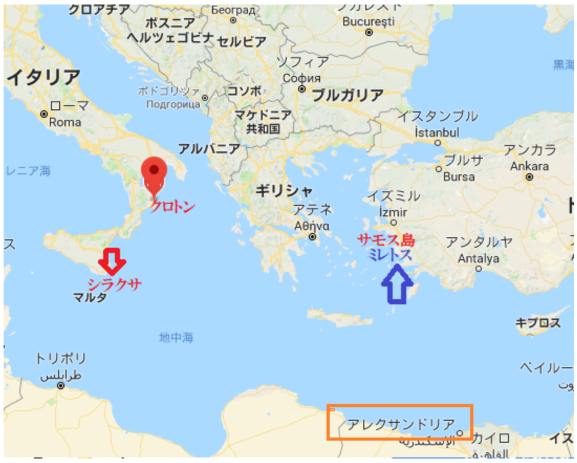
しかし, 「比」だけではすっきりしないと考えるのは人情で, 次に挑戦すべき問題は

(C) 地球の大きさを測る

で, これはエラトステネスによって解決された (*cf.* 5.5 節).

5.4 アルキメデス;(エウレーカ (発見した))

アルキメデス（BC.287 年 - BC.212 年）は地中海にある (現在のイタリアの) シチリア島のシラクサで生まれた．その後, アルキメデスは学問の中心地であったアレクサンドリアに留学し, ユークリッドの弟子たちと共に「原論」の研究に従事したのち, 生地シラクサに帰り, シラクサで一生を過ごした．



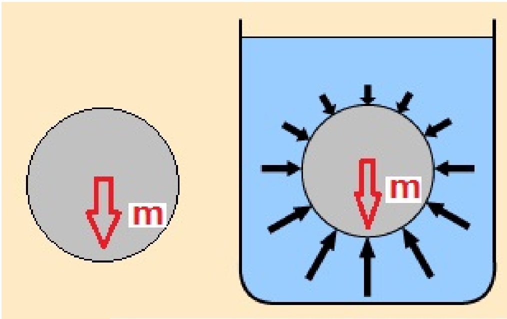
5.4.1 浮力の発見 (アルキメデスの原理)

アルキメデスの原理とは,

(A) 物体を水に沈めたとき, 浮力 (物体の浮く力) の大きさは, 物体が排除した水の重さに等しい．とは言っても,「『力』は難しい」と言うならば,

$$
\begin{aligned}
&\text{【物体の水中での重さ】} \\
=&\text{【物体の重さ} (= m)\text{】} \\
&\quad - \text{【物体の体積に相当する水の重さ】}
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

である．理屈 (深いところの方が水圧が強い) は下図の通りだが, 物体の形は球でも (かってな向きの) 直方体でもなんでもいいのだから, 証明は理系の大学 2 年ぐらいでないとできない．



♠ **注釈 5.4.** 黄金の王冠の有名な逸話は,「アルキメデスの原理」とは関係があるような, 無いような微妙な逸話であるが, 関係があるように書くと以下のようになる：

- シラクサの王は, アルキメデスに「(純金のはずの) 王冠に銀が混ぜられていないかを, 王冠を壊さずに調べる」という依頼をした. アルキメデスは入浴中に次の解答 (♯) に気づき, 喜びのあまり「ヘウレーカ！（「ΕΥΡΗΚΑ：われ発見せり」)」と叫びながら, 服も着ずに裸のままで街を走り回った.
  - (♯) 王冠と同じ重さの金塊を用意して, その金塊の水中での重さと王冠の水中での重さが同じかどうかを調べればよい. そうすれば, (5.1) 式によって, 王冠の体積と金塊の体積を比べることができる.

体積の違いを知るだけなので, この (♯) のような面倒な手続きは不要であるが,「アルキメデスの原理」を使うためには (♯) のようにした. 万有引力の発見の「ニュートンの林檎」みたいなもので, こんな逸話の重箱の隅を突っつくのも大人げない. もちろん, 語り継がれてきた有名な逸話があるということは,「大発見」ということである.

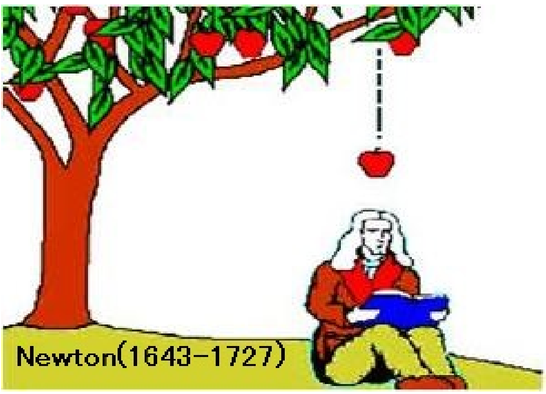
補遺 5.1.

アルキメデスと同じぐらい頭の良いカラスがいるみたいで, これをテレビ (E テレ) で見たときは驚いた.

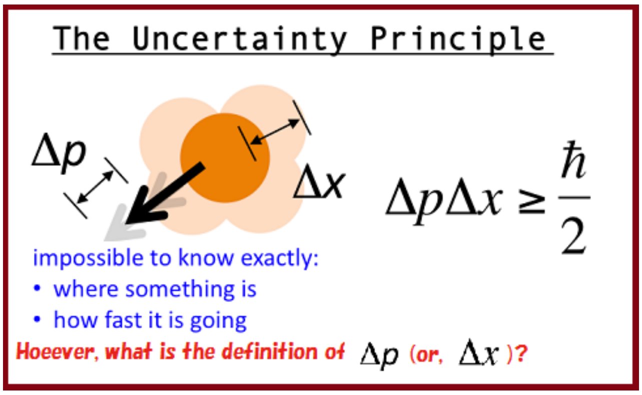
クリック： アルキメデス級の頭脳を持つカラス

////

♠ **注釈 5.5.** 「大発見」には「逸話・キャッチコピー」が残されている.



($\sharp_1$) アルキメデスの浮力・・・・・王冠
($\sharp_2$) ガリレオ・・・・・ピサの斜塔伝説, 「それでも地球は回っている」
($\sharp_3$) ニュートン・・・・・林檎, 「天動説 vs. 地動説」(*cf.* 注釈 7.6)
($\sharp_4$) デカルト・・・・・我思う, ゆえに我あり
($\sharp_5$) アインシュタイン・・・・・エレベータ
($\sharp_6$) 量子力学・・・・・ハイゼンベルグの不確定性原理



等である. ($\sharp_4$) と ($\sharp_6$) は著者の意見である (($\sharp_4$) は 8.3 節, ($\sharp_6$) は

- [コペンハーゲン解釈 ; 量子哲学. 534 pp.] [KOARA 2018; コペン] の第 4 講

を見よ[*1])

[*1] 問題「 What is the definition of Δp (or Δx)?」の解答は次を見よ. S. Ishikawa, Uncertainty relation in simultaneous measurements for arbitrary observables,
Rep. Math. Phys. 9, 1991

5.4.2 アルキメデスの墓

数学は論理的な美しさにおいて比類をみない学問であるが，定量的な答えを計算によって出すという面白さは数学の大きな魅力である．前者はユークリッドの原論によって一応の頂点に達した．後者は, ユークリッドの次の世代であるアルキメデスによって強力に推進された．たとえば,

$$3\frac{10}{71} < \pi(= \text{円周率}) < 3\frac{1}{7}$$

を示したのはアルキメデスである．

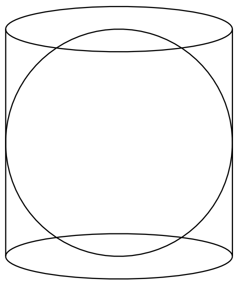
標語的には「哲学的・理学的なユークリッド, 算数的・工学的なアルキメデス」となる．世界三大数学者と言えば,「アルキメデス, ニュートン, ガウス」が定説 (俗説？) であり，アルキメデスの天才は最大級に評価されている．三人とも計算オタクであり, 結局,「数学力＝計算力」なのだと思う．数学が哲学の枠から飛び出すことができたのは, アルキメデスのお陰であると言える．

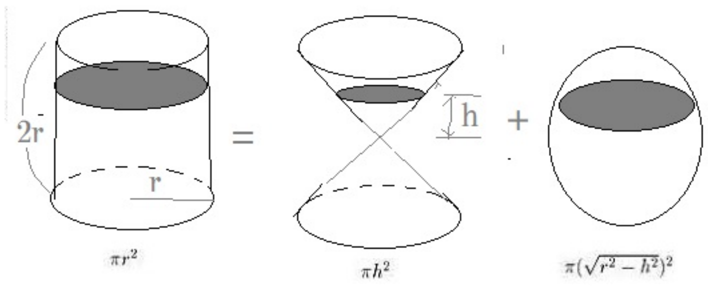
アリキメデスの真骨頂は, 求積法であり多々あるが，ここでは「球の体積」について述べよう．

さて, 半径 r の球 B を考えよう．アルキメデスは次を示した：

$$\text{球 } B \text{ の体積} = \frac{4\pi r^3}{3} \quad (\text{身の上に心配あーるの参上}), \qquad \text{球 } B \text{ の表面積} = 4\pi r^2$$

証明は, 下図 (アルキメデスの墓)「球に外接する円柱」をじっくり見ていると, 天才なら閃くらしい．天才でないならば, その下の図をみればわかるだろう．それでもわからないならば, 高校で習う積分を使えばよい．





同じ高さでの灰色部分の面積

♠ **サプリ 5.2.** たとえば,

$$\text{円錐の体積} = \frac{1}{3} \quad [\text{底面積}] \quad \times [\text{高さ}]$$

であるが,「なぜ $\frac{1}{3}$ のか？」と問えば, 大学院生ならば,

- 「3次元空間」の「3」ですよ.

と即座に答えるだろう. そこで,「もう一言, 補足してください」と言うと,「だから, 4次元空間内の円錐の「体積」は $\frac{1}{4}$ 底体積 $\times$ [高さ] 」と補足するかもしれない. しかし, 次を答える学生は滅多にいない.

- だから, 平面 (二次元空間) 内の三角形の面積は

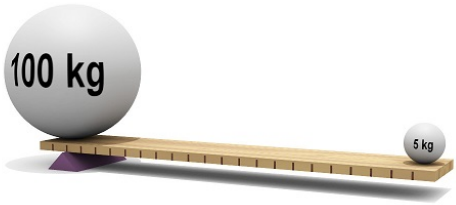
$$\text{三角形の面積} = \frac{1}{2} \quad [\text{底辺の長さ}] \quad \times \quad [\text{高さ}]$$

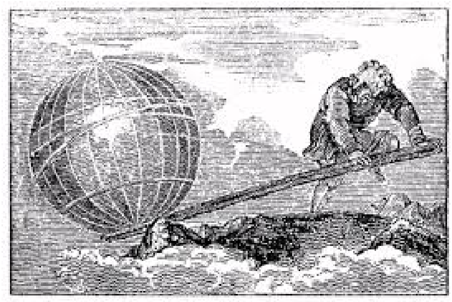
  なんですよ

しかし, これは著者も自身で考え付いたことではなくて, 人から聞いて覚えたことにすぎない.

5.4.3 テコの原理

アルキメデスはてこの原理を発見して, 更に, てこを使用した様々な発明をした.「我に支点を与えよ. さすれば地球を動かしてみせよう」という言葉を残した.





アルキメデスの著作『砂粒を数えるもの』で, 宇宙の大きさを見積もるために, アルキメデスは複数の天文学者の説を紹介しており, それらの記述は当時を知る貴重な資料である．例えば, アリスタルコスが, 太陽を中心とした宇宙 (地動説) を想定したことが述べられている．そうならば,「テコの原理」を発見して, 「我に支点を与えよ．さすれば地球を動かしてみせよう」と豪語した天才アルキメデスならば, アリスタルコスの地動説 (5.3.2 節の（B_1)) を言い直して,

(C) 太陽の方が地球より圧倒的に大きいのだから, 太陽と地球を合わせたもの重心は太陽に圧倒的に近いはずで, その重心を中心にして, 太陽も地球も回っている

と言ってくれれば, 科学史は今と全く異なる歴史になっていただろう.

- 天才アルキメデスにも, 太陽と地球の間に支点もどきがあることが見えなかったのだろう

アルキメデスは天動説を支持してしまったので, 歴史はややっこしいことになってしまった.

5.4.4 アルキメデスの言葉

さて,

- アルキメデスの主張は小学生でもわかるような明快さがあり，哲学 (プラトン等) のような意味不明な曖昧なことを発言しなかった.

このわかりやすさが, アルキメデスの人気を要因で，アルキメデスの言葉は我々の胸に突き刺さる．前にも述べたように,

($\sharp_1$) Eureka!(= I have found it!)
($\sharp_2$) Give me a place to stand, and I shall move the Earth with it.

等である．そして，「最期の言葉」は

($\sharp_3$) Do not disturb my circles! (わたしの円を踏みつけるな！)

である.

アルキメデスの住んでいたシラクサはカルタゴ (ハンニバル将軍) とローマの争奪地で, ローマ軍の奇襲により城壁を突破される. ローマ軍はアルキメデスが高名な科学者と知っていたため, 危害を加えないよう指示をしていた. しかしアルキメデスは砂の上に図形を書いて考えていたところをローマ兵に連行されそうになり, それを「Do not disturb my circles!」と拒否したため兵士に殺されてしまう. 最期まで「絵になる男」だったと言える.

♠ **注釈 5.6.** さて,

- アルキメデスは, 哲学 (プラトン等) のような意味不明な曖昧なことを発言しなかった.

したがって, アルキメデスの仕事は数量的かつ明快で分かり易い. 「曖昧か？ 明快か？」によって, それ以降の発展の方向が決定的に異なった. 曖昧な哲学は, 時の権力者が都合よく解釈できることを意味していて, 宗教とか政治と共生して影響力を持ち続けることができた. 事実, 中世では, 哲学は神学の婢女として影響力を持ち続けた. 一方, アルキメデスの仕事は, 一定の評価は得られるもののそれ以上のことは期待できなかった. 哲学 (プラトン等) が生き残ることができたのは奇跡的な偶然が重なった面もあるが, アルキメデスの仕事が葬り去られる可能性は少なかったと思う.
以上の対比は結構重要で, 近代でも似たようなことが,

【デカルト＝カント哲学】vs.【ニュートン力学】

で再現される. ニュートン力学がまったく役に立たないデカルト＝カント哲学に世論的には負けるのだから,

- 理系は, 天下を取れない

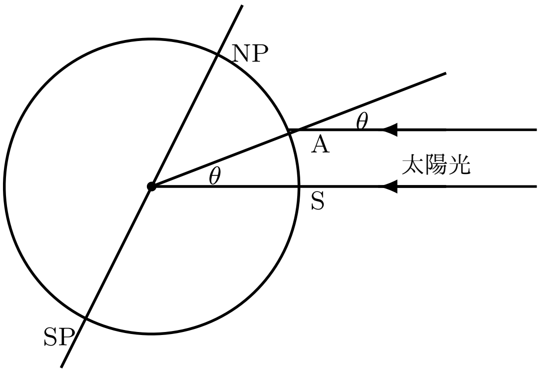
と思った方がいいかもしれない.

5.5 エラトステネス; 古代最大の測定者

5.5.1 古代最大の測定者

月食が地球の影であることから, アリストテレスは地球が球であることを知っていた. もちろん, 海を見れば水平線は弧のように見えるのだから, もっと以前から地球が球であることは誰かが発見していたのだろう. しかし, 発見者を特定できる 2 人に絞るならば, エラトステネス（BC.275 年 - BC.194 年）（地球の全周長の測定者）とマゼラン（実際に地球を一周回った）と思う.

エラトステネスは次のようにして, 地球の全周長を測定した.



NP:北極, SP:南極, A:アレクサンドリア, S:シエネ (=アスワン)

- シエネは北回帰線上なので, 夏至正午には太陽が真上.
- エジプトのアスワンはアレクサンドリアの真南（下図で θ =7.2 度, 【アレクサンドリアとシエネの距離】=AS=925km）.

よって,

地球の全周長 = 2 × 3.14 × [地球の半径]
$$=360AS/\theta = 360 \times 925/7.2 = 46250km$$

実際は, 40009km なので, 驚くべき精度と言っていいだろう.

♠ **注釈 5.7.** かなり誤差があるとしても, アリスタルコスによって,

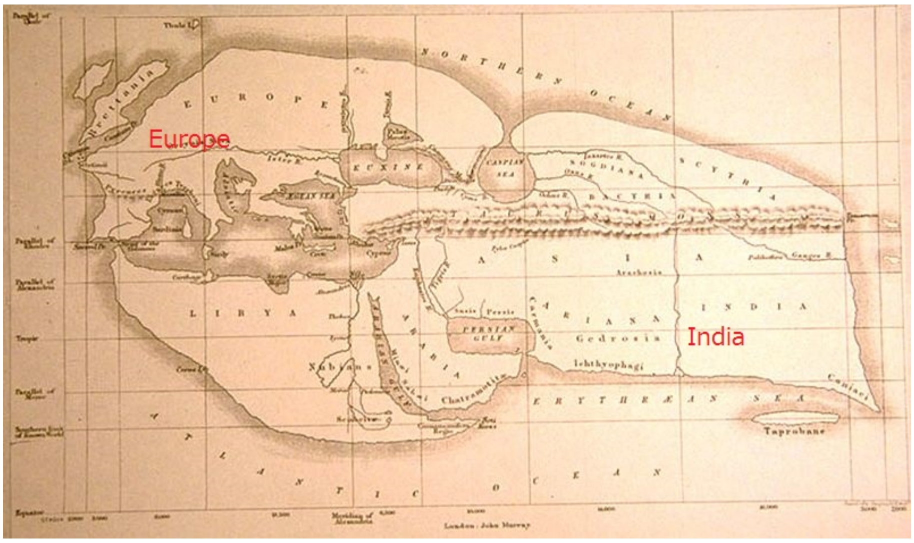
【月の直径】:【地球の直径】:【太陽の直径】= 1: 3: 19

は既に発見されていたので, エラトステネスの結果と合わせて,

地球の直径, 月の直径, 太陽の直径

が分かったことになる

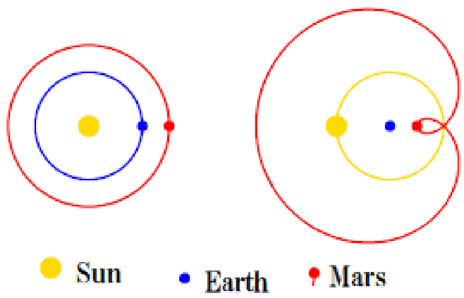
補遺 5.3. 下図はエラトステネスの時代の世界地図である．当時のアレクサンドリアの絶大な科学力に驚かされる．



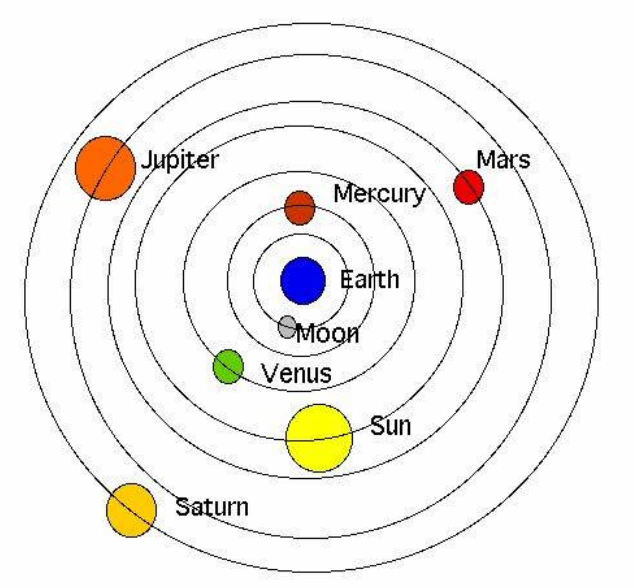
5.6 クラウディオス・プトレマイオス；天動説

5.6.1 古代科学の集大成

クレオパトラの死によってプトレマイオス朝は滅び, ローマは五賢帝時代を迎えて絶頂期の頃, プトレマイオス（AD.83 年 - 168 年）はアレクサンドリアで活躍した． プトレマイオスの宇宙観 (著名な作品『天文大全』（アルマゲスト））は, アリスタルコスではなく, アリストテレスの地球中心思想（天動説）を採用した．既に知られていた周転円モデルを発展させ, 地球が宇宙の中心で, 惑星は地球を中心とする円周上で更に周回しているとした．



たとえば, 東に向かって進んでいた火星が突然, 西向きに方向を変え, 見かけ上戻ってしまうような現象を逆行運動と言うが, この逆行運動を「周転円」という小さな円を描きながら地球の周りを回転することによって起こると説明し, プトレマイオスは天動説を強固にした．もちろん, プトレマイオスは, 膨大な測定データの下に, 当時の最新理論を集大成して天動説を結論した．



アリスタルコスの「地動説」はあったとしても,

(A) 天動説は, アリストテレス, アルキメデスの正当派の伝統の延長線上にある

わけで,

(B) プトレマイオスが超一流の研究者である

ことは疑う余地のないことと思う.

♠ **注釈 5.8.** 本書では数学・数理論理学は哲学 (世界記述の哲学) でないとした. ユークリッドは純粋数学者で, 世界記述法の分類の中にユークリッドの居場所はない. アルキメデスは原理 (テコ, 浮力) の発見で, 実在的世界記述に属す. アリスタルコス, エラストテネス, プトレマイオスは測定者なので, 世界記述法の確立とは関係ない. よって, ここまでで次の分類を得る (*cf.* 主張 1.4[哲学者の仕分け]).

($\flat_1$) : 実在的世界記述 (物理学)
アリストテレス, アルキメデス, ガリレオ,
ニュートン, アインシュタイン, ・・・

($\flat_2$) : 空想的言語的世界記述　(西洋哲学の本流)
プラトン, スコラ哲学, デカルト, ロック,
ライプニッツ, バークリー, ヒューム, カント,
フッサール

($\flat_3$) : 科学的言語的世界記述 (統計学・量子言語)
パルメニデス, ゼノン, ベルヌーイ,
統計学, 量子言語

ローマはギリシャを征服して,「すべての道はローマ通ず」と言われるように, 世界制覇を成し遂げるわけだが, 彼らの興味は法律・政治・建築・土木等に集中して, 基礎科学・数学には向かわなかった. 不思議と思うかもしれないが, 世界的に見れば, むしろギリシャが特異・異常だったということなのだと思う. ローマに征服されたことによって, ギリシャ数学とギリシャ哲学の成果は断絶・消滅という歴史もありえたかもしれないが, アラビア方面に拡散することで消滅の危機は奇跡的に回避された. そして, ルネッサンスを経て, 逆輸入されることになる.