第 14 講

“信念” の確率解釈

量子言語の主張は、

(♯) (多少の無理があっても) すべての現象を量子言語で記述せよ!

であった．すなわち、「足を靴に合わせる」である．そうならば、「信念」を量子言語で記述したくなる．この章では、

“信念” = “オッズ”

と見なすことで、「信念」を量子言語で記述する．この方法は、「等確率の原理」の成立が自明として処理できるという大きなメリットを有する．この章は、次の論文からの抜粋である．Ref. [30]: S. Ishikawa, “Mathematical Foundations of Measurement Theory,” Keio University Press Inc. 2006.

14.1 信念, オッズ、確率

たとえば、次のような「確率」が意味を持つのだろうか？

(A) 日本が、次の FIFA ワールドカップで優勝する確率

また、「等確率の原理」を正当化できるのだろうか？ここで、「等確率の原理」とは次の習慣のことである：

(B) たとえば、今可能な状況が 3 つあるとして、全く確率が分からないときにどうしたら行動が決められるのか? こんな場合は、仕方がないからそれぞれの状況が 1/3 の確率で起きるとする習慣のことを「等確率の原理」と言う.

この節では、第 7 章で述べた次の混合測定の枠組みの中で、上の二つの (A) と (B) に答えることである.

$$\underset{(=\text{量子言語})}{\boxed{\text{混合型測定理論}}} := \underbrace{\overset{[\text{混合型言語ルール 1}]}{\underset{(cf.\ \ 7.1\text{ 節})}{\boxed{\text{混合型測定}}}} + \overset{[\text{言語ルール 2}]}{\underset{(cf.\ \ 8.3\text{ 節})}{\boxed{\text{因果関係}}}}}_{\text{一種の呪文 (=量子力学の言葉遣い)}} + \underbrace{\overset{[\text{言語的コペンハーゲン解釈}]}{\underset{(cf.\ \ 3.1\text{ 節})}{\boxed{\text{言語的解釈}}}}}_{\text{呪文の使い方のマニュアル}} \tag{14.1}$$

14.1.1 簡単な例; 量子言語で「信念」を記述する

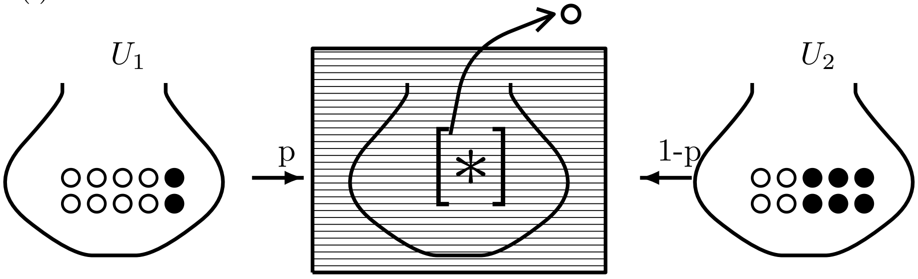
次の簡単な例 (*cf.* 問題 7.5 の復習) から始めよう.

問題 14.1. [= 問題 7.4; ベイズの方法] 次の状況を仮定しよう.

(C) あなたは、カーテンの後ろの壺が U_1 k U_2 かどうかは知らないが、その「確率」が p と $1-p$ であることは知っている.

このとき、次の問題を考える.

カーテンの後ろの壺から一つの球を取り出したとしよう．
(i): その取り出した球が白球である確率を求めよ．



(ii): もしそれが白球であったとしよう．

このとき、カーテンの後ろの壺が U_1 である確率を求めよ．

図 14.1: (混合測定)

解答 14.2. **(=解答 7.13)**
離散距離空間 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ に個数測度 ν_c を仮定する．したがって、$C_0(\Omega) = C(\Omega) = L^\infty(\Omega, \nu_c)$ と考えてよい．C^*-代数法を使う．$C(\Omega)$ 内の二つの観測量 $\mathsf{O} = (\{W,B\}, 2^{\{W,B\}}, F)$ と $\mathsf{O}_U = (\{U_1,U_2\}, 2^{\{U_1,U_2\}}, G_U)$ を次のように定める：

$$
\begin{aligned}
&F(\{W\})(\omega_1) = 0.8,\ F(\{B\})(\omega_1) = 0.2,\ F(\{W\})(\omega_2) = 0.4, \\
&F(\{B\})(\omega_2) = 0.6 \\
&G_U(\{U_1\})(\omega_1) = 1, G_U(\{U_2\})(\omega_1) = 0, G_U(\{U_1\})(\omega_2) = 0, \\
&G_U(\{U_2\})(\omega_2) = 1
\end{aligned}
$$

こｋで、"W" と "B" はそれぞれ "白" and "黒" を意味する．同一視 $U_1 \approx \omega_1$ と $U_2 \approx \omega_2$ の下に、上の状況を表す混合状態 $\rho^{(p)}_{\text{prior}} (\in \mathcal{M}_{+1}(\Omega))$ は次のようになる：

$$
\rho^{(p)}_{\text{prior}} = p\delta_{\omega_1} + (1-p)\delta_{\omega_2}
$$

ここに δ_ω は点 ω における点測度とする．したがって、次の混合測定を考えればよい．

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{M}_{C(\Omega)}(\mathsf{O} \times \mathsf{O}_U \\
:=&(\{W,B\} \times \{U_1, U_2\}, 2^{\{W,B\}\times\{U_1,U_2\}}, F \times G_U), S_{[*]}(\rho^{(p)}_{\text{prior}}))
\end{aligned}
\tag{14.2}
$$

混合型言語ルール 1　に従えば、 問題 14.1 の (i) の解答は、以下のようになる：

(D)　混合測定 $\mathsf{M}_{C(\Omega)}(\mathsf{O}\times\mathsf{O}_U, S_{[*]}(\rho^{(p)}_{\text{prior}}))$ によって得られる測定値 (x, y) が $\{W\}\times\{U_1, U_2\}$

に属する確率は、次で与えられる：

$$
{}_{\mathcal{M}(\Omega)}(\rho^{(p)}_{\rm prior}, F(\{W\}))_{C(\Omega)} = 0.8p + 0.4(1-p).
$$

さらに、白球を取り出したと仮定しよう．このときは解答 7.13 (=ベイズの定理) によって、測定後の新しい混合状態 $\rho^{(p)}_{\rm post} (\in \mathcal{M}_{+1}(\Omega))$ は以下のようになる：

$$
\begin{aligned}
\rho^{(p)}_{\rm post} &= \frac{F(\{W\})\rho^{(p)}_{\rm prior}}{\int_\Omega [F(\{W\})](\omega)\rho^{(p)}_{\rm prior}(d\omega)} \\
&= \frac{0.8p}{0.8p+0.4(1-p)}\delta_{\omega_1} + \frac{0.4(1-p)}{0.8p+0.4(1-p)}\delta_{\omega_2}
\end{aligned}
\tag{14.3}
$$

したがって、問題 (ii) の解答は次のようになる：

$$
{}_{\mathcal{M}(\Omega)}(\rho^{(p)}_{\rm post}, G_U(\{U_1\}))_{C(\Omega)} = \frac{0.8p}{0.8p+0.4(1-p)}
$$

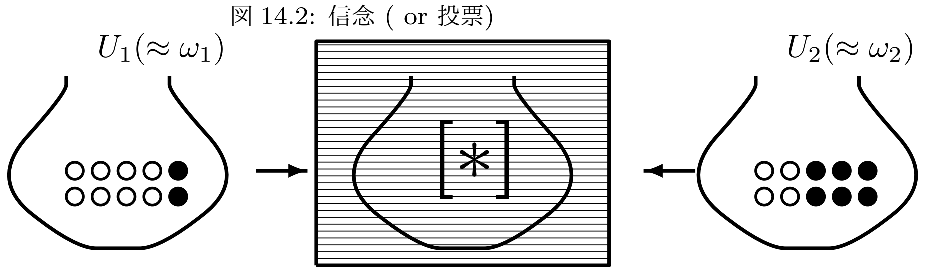
問題 14.1(簡単のため, $p = 1/4, \;\; 1-p = 3/4$ と置く) を参考にして、以下のような議論をする．

100 人の集団を考えよう．次の状況 (E) を想定する．

$$
\text{(E)} \begin{cases}
\text{「}[*] = U_1 \text{ (i.e., カーテンの後ろの壺は } U_1\text{)」と} \\
\hfill \text{25 人が信じている (投票する)} \\
\text{「}[*] = U_2 \text{ (i.e., カーテンの後ろの壺は } U_2\text{)」と} \\
\hfill \text{75 人が信じている (投票する)}
\end{cases}
$$

この状況を以下のように図示しておく (図 14.1):

図 14.2: 信念 (or 投票)



25 人が「$[*] = U_1$」と信じる,　75 人が「$[*] = U_2$」と信じる.

ここで、次の問題を考察する:

問題 14.3. 状況 (E) と状況 (C) ($p = 1/4, \;\; 1-p = 3/4$) を比較しよう．さて、次の問題を考

える.

(F$_1$)　状況 (E) を状況 (C) のように理解できるか？

または、同じ意味で,

(F$_2$)　状況 (E) は、混合測定 (i.e., 混合型言語ルール 1) で、したがって、量子言語で記述できるか?

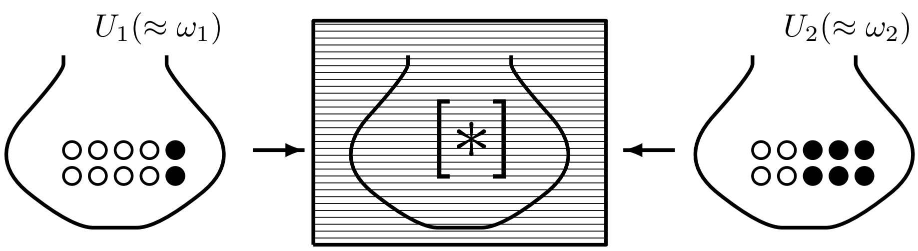
答えは「Yes」で、次で説明する.

14.1.2 問題 14.3 への肯定的解答

100 人は、図 14.2 の状況を把握しているので、次の (G)(=図 14.3) を仮定するのは自然である.

$$
\text{(G)} \left\{ \begin{array}{l}
25\text{ 人が「}[*]=U_1\text{」を信じる} \\
\quad \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\mathrm{G}_1)\text{:20 人が「白球が取り出される」方に賭ける} \\ (\mathrm{G}_2)\text{: 5 人が「黒球が取り出される」方に賭ける} \end{array} \right. \\
25\text{ 人が「}[*]=U_2\text{」を信じる} \\
\quad \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\mathrm{G}_3)\text{:30 人が「白球が取り出される」方に賭ける} \\ (\mathrm{G}_4)\text{: 40 人が「黒球が取り出される」方に賭ける} \end{array} \right.
\end{array} \right.
$$

図 14.3: 最初のオッズ



25 人が「$[*]=U_1$」を信じる
(G_1):20 人が「白球が取り出される」方に賭ける
(G_2):5 人が「黒球が取り出される」方に賭ける

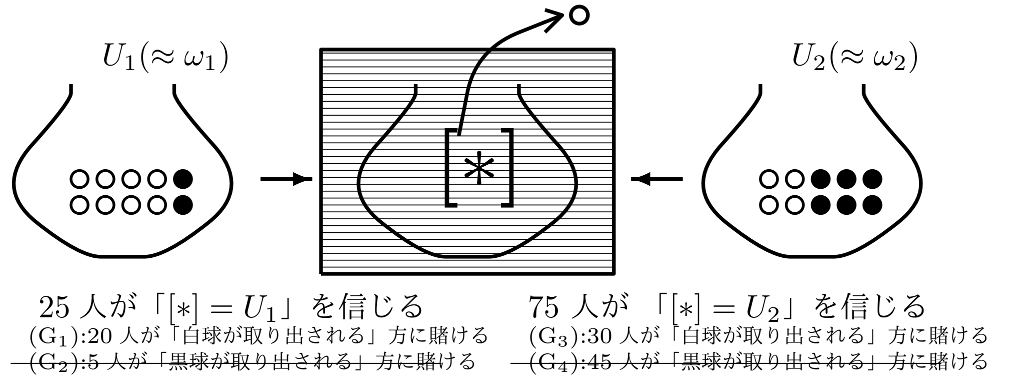
75 people believe that $[*]=U_2$.
(G_3):30 人が「白球が取り出される」方に賭ける
(G_4):45 人が「黒球が取り出される」方に賭ける

さて、

- 上図で、白玉が得られたとしよう．すなわち、次図の状況を想定しよう

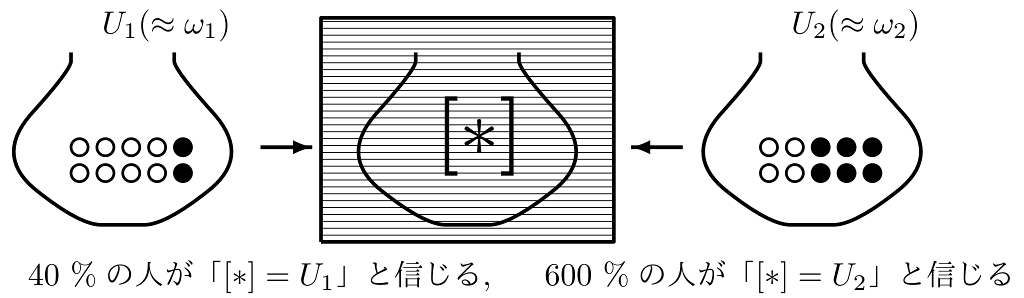
このときは、上の (G$_2$) と (G$_4$) は、賭けに負けたことになる．したがって、

図 14.4: 白玉を取り出す



となり、結局、次の最終図をえる.

図 14.5: 結局、新たなオッズを得る



したがって、次を得る.

$$\underset{\frac{1}{4}\delta_{\omega_1}+\frac{3}{4}\delta_{\omega_2}}{\overset{\text{(事前状態)}}{\boxed{\text{図 } 14.3}}} \longrightarrow \overset{\text{(白球を取り出す)}}{\boxed{\text{図 } 14.4}} \longrightarrow \underset{\frac{2}{5}\delta_{\omega_1}+\frac{3}{5}\delta_{\omega_2}}{\overset{\text{(事後状態)}}{\boxed{\text{図 } 14.5}}} \tag{14.4}$$

次の混合測定 (i.e., 式 (14.2) ($p = 1/4$, $1 - p = 3/4$)):

$$(14.2) = \mathsf{M}_{C(\Omega)}(\mathsf{O} \times \mathsf{O}_U, S_{[*]}(\rho_{\text{prior}}^{(1/4)})) \tag{14.5}$$

ここに、$\mathsf{O} \times \mathsf{O}_U = (\{W,B\} \times \{U_1, U_2\}, 2^{\{W,B\}\times\{U_1,U_2\}}, F \times G_U)$.

さて、上の (14.4) 式は、ベイズの結果 (14.3) と等しいことに注意せよ.

また、測定 (14.5) は次のように解釈できる：

(H)　100 人の中から一人を無作為に選び、彼/彼女に次のように質問する：

- カーテンの後ろの壺から球を取り出すとき、その球が白球である確率を求めよ．また、そのとき、カーテンの後ろの壺は U_1 か U_2 か?

この解釈 (H) を説明しよう．

状態空間 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{100}\}$ を設定して、基本構造

$$C(\Theta) \subseteq L^\infty(\Theta) \subseteq B(L^2(\Theta))$$

を考えよう．$C(\Theta)$ 内の観測量 $\widehat{\mathsf{O}} = (\{W, B\}, 2^{\{W,B\}}, \widehat{F})$ と $\widehat{\mathsf{O}}_U = (\{U_1, U_2\}, 2^{\{U_1,U_2\}}, \widehat{G}_U)$ を次のように定める．

$$\begin{aligned} &[\widehat{F}(\{W\})](\theta_k) = 4/5, \quad [\widehat{F}(\{B\})](\theta_k) = 1/5, \quad (k = 1, 2, ..., 25) \\ &[\widehat{F}(\{W\})](\theta_k) = 2/5, \quad [\widehat{F}(\{B\})](\theta_k) = 3/5, \quad (k = 26, 27, ..., 100) \end{aligned} \tag{14.6}$$

$$\begin{aligned} &[\widehat{G}_U(\{U_1\})](\theta_k) = 1, \quad [\widehat{G}_U(\{U_2\})](\theta_k) = 0, \quad (k = 1, 2, ..., 25) \\ &[\widehat{G}_U(\{U_1\})](\theta_k) = 0, \quad [\widehat{G}_U(\{U_2\})](\theta_k) = 1, \quad (k = 26, 27, ..., 100) \end{aligned} \tag{14.7}$$

この同時観測量を $\widehat{\mathsf{O}} \times \widehat{\mathsf{O}}_U$ とする．ここで、混合状態 $\nu_0 (\in \mathcal{M}_{+1}(\Theta))$ を $\nu_0 = (1/100) \sum_{k=1}^{100} \delta_{\theta_k} (\in \mathcal{M}_{+1}(\Theta))$ と定めて、上の測定 (H) は以下のように定式化できる：

$$\begin{aligned} &\mathsf{M}_{C(\Theta)}(\widehat{\mathsf{O}} \times \widehat{\mathsf{O}}_U \\ =&(\{W,B\} \times \{U_1, U_2\}, 2^{\{W,B\}\times\{U_1,U_2\}}, \widehat{F} \times \widehat{G}_U), S_{[*]}(\nu_0)) \end{aligned} \tag{14.8}$$

ここで決定因果作用素 $\Phi : C(\Omega) \to C(\Theta)$ を $\Phi^*(\delta_{\theta_k}) = \delta_{\omega_1}$ $(k = 1, 2, ..., 25)$, $= \delta_{\omega_2}$ $(k = 26, 27, ..., 100)$ のように定める．この決定因果作用素 $\Phi : C(\Omega) \to C(\Theta)$ の下に、測定 (14.8) は測定 (14.5) と同一視できる：すなわち、

$$\boxed{\text{(14.8): ハイゼンベルグ描像}} \xleftarrow[\text{identification}]{\Phi} \boxed{\text{(14.5): シュレーディンガー描像}}$$

よって、問題 14.3 に肯定的に答えることができた．

また，特別な場合として，次が言える．

(I_1) : 確信 [状況 (E)] を確率 [状況 (C)] のように理解できる．

または，同じ意味で，

(I_2) : 確信 [状況 (E)] は,「100 人の中から無作為に一人を選ぶ」という解釈を添付して，混合測定 (i.e., 混合言語ルール $^{(\mathrm{m})}$ 1 (§9.1)) で，したがって，量子言語で記述できる．

この節の，最初の問い掛け (A)：

(A)　日本が，次の FIFA ワールドカップで優勝する確率

は，たとえば，(サッカーをよく知っている) 100 人の中から無作為に一人を選んで，「日本が，次の FIFA ワールドカップで優勝すると思いますか？」と質問することを想定すればよい．

14.2 等確率の原理 (=等重率)

次の公準を主張する．

公準 14.4. [等確率の原理 (=等重率)] 有限状態空間 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ (離散距離空間) を考える．$\mathsf{O} = (X, \mathcal{F}, F)$ を $C(\Omega)$ 内の観測量とする．ここで、測定 $\mathsf{M}_{C(\Omega)}(\mathsf{O}, S_{[*]})$ は、混合測定 $\mathsf{M}_{C(\Omega)}(\mathsf{O}, S_{[*]}(\rho_{\mathrm{e}}))$ によって代用できると考えることも一理ある．ここで、

$$\rho_{\mathrm{e}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\delta_{\omega_k} \tag{14.9}$$

説明. 賭けと考えれば, 誰もが、一番人気のない状態 (たとえば、$\omega_k \in \Omega$) を選ぶだろう．したがって、人気の分布は一様分布 (14.9) になると考えることは自然と思う．混合測定 $\mathsf{M}_{C(\Omega)}(\mathsf{O}, S_{[*]}(\rho_{\mathrm{e}}))$ は測定 $\mathsf{M}_{C(\Omega)}(\mathsf{O}, S_{[*]})$ の代用として使える．念を押すと、

(J) 言語ルール;11 (or 言語ルール $^{(m)}$ 1) の文脈の中で整合性があえば、「確率」という言葉は自由に使える

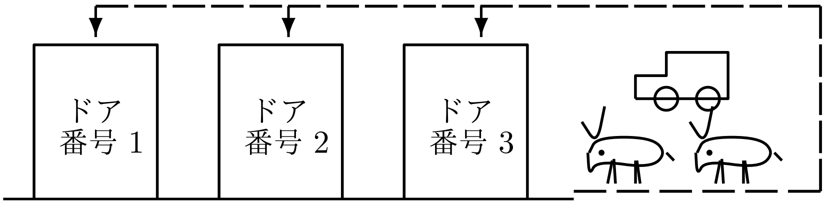
したがって、(B) がまだ承認されていない歴史があるとしたら、(前節で述べた) オッズを確率とみる手続きが明確化されていないことに起因すると考える．

♠ **注釈 14.1.** 本書では，三種類の「等確率の原理 (=等重率)」を扱った．すなわち，
($\sharp_1$) 注意 5.19 の等確率の原理
($\sharp_2$) 定理 7.18 の等確率の原理
($\sharp_3$) 公準 14.4 の等確率の原理
で, これらは本質的には同じと見なしよい．

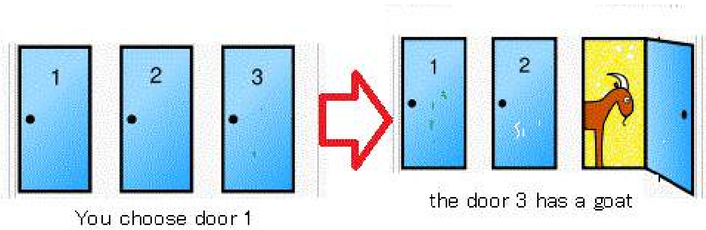
二つの等確率の原理 (($\sharp_1$) と ($\sharp_2$)) の理解を深めるために、次の問題 14.5 を補足しておく．この問題と問題 5.14 と問題 7.17 とを比較検討してもらいたい．

問題 14.5. [モンティ・ホール問題]

あなたはゲームショーに出演している．3 つのドア (すなわち,「1 番」,「2 番」,「3 番」) のうちの 1 つのドアの後ろには自動車 (当り), 他の 2 つのドアの後ろには羊 (はずれ) が隠されている．司会者は，どのドアの後ろに自動車が隠されているかを知っている．しかし，あなたはそれを知らない．司会者は問う「どのドアの後ろが自動車だと思いますか？」



モンティ・ホール問題



さて，あなたはあるドアを選んだと仮定する．たとえば, 1 番のドアを選んだとする．このとき，司会者が「実は，3 番ドアの後ろは羊です」と言う．更に，司会者は問う．「あなたは 1 番のドアを選んでしまいましたが，今からでも変更可能ですよ．2 番のドアに変更しますか？」と．さて，あなたはどうするか？

////

解答　測定 $\mathsf{M}_{C(\Omega)}(\mathsf{O}, S_{[*]})$ は、混合測定 $\mathsf{M}_{C(\Omega)}(\mathsf{O}, S_{[*]}(\rho_{\mathrm{prior}}))$ によって代用しても良いのだから、問題 5.14(フィッシャーの最尤法) を問題 7.16(ベイズの方法) に帰着できて、問題 7.16 の解答に従えばよい. □