慶應義塾大学学術情報リポジトリ

Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	第13講 : 平衡統計力学(エルゴード仮説と等確率の原理)
Sub Title	
Author	石川, 史郎(Ishikawa, Shiro)
Publisher	
Publication year	2018
Jtitle	コペンハーゲン解釈; 量子哲学 (2018. 3) ,p.411- 420
JaLC DOI	
Abstract	
Notes	慶應義塾大学理工学部大学院講義ノート(Web版)
Genre	Book
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KO52003002-00000000-0411

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって 保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

第13講

平衡統計力学 (エルゴード仮説と等確 率の原理)

我々の観点で分類するならば、

 実在的世界観 (物理学)
 ・・・・ニュートン力学、電磁気学、相対論・・・・

 言語的世界観 (量子言語; 工学)
 ・・・・統計力学、量子力学、経済学・・・・

となる.

この章では、平衡統計力学における基本的な次の3つの問題について考える:

- (A) 平衡統計力学において、等確率の原理は不可欠か?
- (B) 平衡統計力学とエルゴード仮説は関係があるか?
- (C) 平衡統計力学において、「確率概念」はどこでいつ生じるか?

平衡統計力学の定式化にはいろいろな意見があって、この意味では、上記の問題 (A)-(C) は未解決とも言える。ここでは測定理論 (=測定 + 因果関係) の立場から、これらの問題を議論する。すなわち

を議論する. 結論としては、

(A) は "No", しかし, (B) は "Yes"

である. また、(C) は 13.2 節で明らかにする. もちろん、量子言語で、確率に関わる部分は言語ルール 1 だけなのだから、確率の出所は言語ルール 1 に帰着する.

この章は、次の論文の抜粋である.

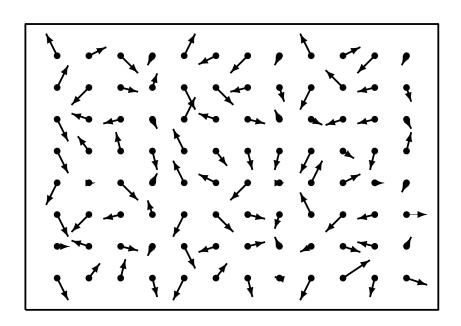
[35] S. Ishikawa, "Ergodic Hypothesis and Equilibrium Statistical Mechanics in the Quantum Mechanical World View," *World Journal of Mechanics*, Vol. 2, No. 2, 2012, pp. 125-130. doi: 10.4236/wim.2012.22014.

13.1 平衡統計力学と言語ルール 2(因果関係)

13.1.1 平衡統計力学的現象

仮定 13.1. [平衡統計力学的現象]. ある箱 (たとえば、一辺が約 30 cm の立方体)の中に、約 $N(\div 10^{24})$ 個の同一粒子 (たとえば、水素分子)が入っていて、各粒子が乱雑に運動している. このとき、次の現象① - ④ を観察したとする.

- ① 粒子たちの運動はニュートンの運動方程式に従う.
- ② どの粒子もいろいろな場所を動いて、満遍なく運動する. たとえば、ある粒子が、いつも箱の端っこに居続けるようなことはない.
- ③ どの粒子も時間的な統計的挙動は同じである.
- ④ 任意のいくつかの粒子たちの時間的な統計的挙動は独立, すなわち, ある粒子と別の粒子の動きは連動しない.



(13.1)

目次;他



- ♠ 注釈 13.1. ② ④ を簡単な「喩え話」で説明しよう. 100 人の幼稚園児が幼稚園の庭で,1 時間の昼休みに,ブランコ,滑り台,砂遊びをするとしよう.ただし,ブランコ,滑り台,砂場はどれも十分あって順番待ちの時間はないとする.このとき,② ④ は次のような「喩え話」になる.
 - ② どの園児も、飽きっぽくて、次々と遊びを変える. たとえば、ある園児は、

(#)
$$\vec{J}$$
 \rightarrow \vec{R} \rightarrow \vec{W} \rightarrow \vec{R} \rightarrow \vec{J} \rightarrow \vec{R} \rightarrow \vec{J} \rightarrow \vec{W} \rightarrow \vec{J} \rightarrow \vec{W} \rightarrow \vec{J} \rightarrow \vec{W} \rightarrow \vec{U} \rightarrow $\vec{U$

③ どの園児も同じ嗜好性を持っている. したがって, 3 つのそれぞれの遊びの合計時間は, どの園児も同じである. たとえば, どの園児も

【 ブランコで遊んだ時間の合計 30 分 滑り台で遊んだ時間の合計 18 分 砂場で遊んだ時間の合計 12 分

である.

④ どの園児も、「ほぼ独立自尊」の精神で遊んでいる。すなわち、他の園児の遊びに影響されることはほとんどない。たとえば、仲良し同士で、ブランコをして、次に滑り台というようにグループ行動しない。

この②-④ をイメージして以下を読めばよい.

本章では、以下の問題に集中する.

(D) 上の「平衡統計学的現象① - ④」を量子言語で記述せよ!

13.1.2 仮定 13.1 の①について

ニュートン力学では、一粒子の状態は、(x 軸方向の位置、y 軸方向の位置、z 軸方向の位置、x 軸方向の運動量、y 軸方向の運動量、z 軸方向の運動量)= $(q_1,q_2,q_3,p_1,p_2,p_3) \in \mathbb{R}^6$ で表される。したがって、箱の中に、約 $N(\div 10^{24})$ 個の粒子が入っていると仮定したのだから、箱の中の粒子たちの状態は、6N 次元空間 \mathbb{R}^{6N} 内の点 (q,p) (=(位置、運動量) = $(q_{1n},q_{2n},q_{3n},p_{1n},p_{2n},p_{3n})_{n=1}^N$) で表現される。

エネルギー関数 (ハミルトニアン) $\mathcal{H}:\mathbb{R}^{6N} \to \mathbb{R}$ を $\mathcal{H}=$ [全運動エネルギー] + [全相互ポテンシャル

エネルギーU], すなわち,

 $\mathcal{H}((q_{1n}, q_{2n}, q_{3n}, p_{1n}, p_{2n}, p_{3n})_{n=1}^{N})$

とする.

全エネルギーを E>0 として、ハミルトニアン $\mathfrak H$ の等エネルギー面 Ω_E を、 Ω_E (= $\{(q,p)\in\mathbb R^{6N}\mid \mathfrak H(q,p)=E\}$) で定めて*1、これを状態空間とする.

ハミルトニアン 光 の下におけるニュートンの運動方程式, すなわち, ハミルトンの正準方程式:

$$\frac{dp_{kn}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{kn}}, \quad \frac{dq_{kn}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{kn}}, \qquad (k = 1, 2, 3, \ n = 1, 2, \dots, N)$$
(13.3)

が生成する決定因果写像列を $\phi^E_{t_1,t_2}:\Omega_E\to\Omega_E$ $(-\infty< t_1\leqq t_2<\infty)$ とする. すなわち, $\phi^E_{t_1,t_2}(q(t_1),p(t_1))=(q(t_2),p(t_2))$ とする*2.ハミルトニアン $\mathfrak{H}(q,p)$ は時変数を持たない (すなわち, $\mathfrak{H}(q,p,t)$ という形ではない). したがって,定常性があって, $\psi^E_{t_2-t_1}=\phi^E_{t_1,t_2}$ と置いて考えた方が簡単になるので,以下の議論では, $\psi^E_{t_2-t_1}$ を使う.

等エネルギー面 Ω_E 上の測度 ν_E を次のように定める:

$$u_E(B) = \int_B |\nabla \mathcal{H}(q,p)|^{-1} dm_{6N-1} \quad (\forall B \in \mathcal{B}_{\Omega_E} : ボレル集合体^{*3})$$

ここに, $|\nabla \mathfrak{H}(q,p)| = [\sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1,2,3} \{(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_{kn}})^2 + (\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_{kn}})^2\}]^{1/2}$,また, dm_{6N-1} は \mathbb{R}^{6N-1} 内の通常の測度 (ルベーグ測度) とする.このとき,リューヴィルの定理 (cf. [58]) より,

$$\nu_{\scriptscriptstyle E}(S) = \nu_{\scriptscriptstyle E}(\psi^{\scriptscriptstyle E}_t(S)) \qquad (0 \leqq \forall t < \infty, \quad \forall S \in \mathcal{B}_{\Omega_{\scriptscriptstyle E}})$$

が成立する.

正規測度 (=確率測度) $\overline{\nu}_E$ を $\overline{\nu}_E = \frac{\nu_E}{\nu_E(\Omega_E)}$ と定義して、正規測度空間 (=確率測度空間) $(\Omega_E, \mathcal{B}_{\Omega_E}, \overline{\nu}_E)$ を得る.

 $(\Omega_E \ \mathcal{O}$ コンパクト性から) $\mathcal{A} = C_0(\Omega_E) = C(\Omega_E)$ とおいて、次の基本構造を得る:

$$[C(\Omega_E)\subseteq L^\infty(\Omega_E,\nu_E)\subseteq B(L^2(\Omega_E,\nu_E))]$$

ここで、 $T = \mathbb{R}$ として、(13.1) 式を解いて、 $\omega_t = (q(t), p(t)), \phi_{t_1.t_2} = \psi_{t_2-t_1}^E, \Phi_{t_1.t_2}^* \delta_{\omega_{t_1}} = \delta_{\phi_{t_1.t_2}(\omega_{t_1})}$ ($\forall \omega_{t_1} \in \Omega_E$) を得る.さらに、決定因果作用素列 $\{\Phi_{t_1,t_2} : L^\infty(\Omega_E) \to L^\infty(\Omega_E)\}_{(t_1.t_2) \in T_{\leq}^2}$ を得る (cf. 定義 8.4).

 $^{^{*1}}$ 当然, $\Omega_{\scriptscriptstyle E}$ はコンパクト集合となる.

^{*2} 本章では,決定因果写像列 $\{\phi^E_{t_1,t_2}:\Omega_E\to\Omega_E\}_{-\infty< t_1}\leq t_2<\infty$ を多用するが,ハイゼンベルグ描像の決定因果作用素列 $\{\Phi^E_{t_1,t_2}:C(\Omega_E)\to C(\Omega_E)\}_{-\infty< t_1}\leq t_2<\infty$ でも同値の議論ができることは言うまでもない. 41 4^3 ボレル集合体:すべての開集合を含む最小の σ -集合体

13.1.3 仮定 13.1 の②について

箱の中の N 個の粒子のうちの一つの粒子 a_1 を考えて, $S_{a_1} = \{\omega \in \Omega_E \mid \omega$ は粒子 a_1 が箱の端っこに いる状態 $\}$ としよう.当然, $S_{a_1} \subsetneq \Omega_E$ となる.また,もし $\psi_t^E(S_{a_1}) \subseteq S_{a_1}$ $(0 \le \forall t < \infty)$ とすると,粒子 a_1 がいつも端っこに居続けることになって,② に反する.したがって,② は次を意味すると考える:

②' [エルゴード性]: コンパクト集合 $S(\subseteq \Omega_E, S \neq \emptyset)$ が、 $\psi^E_t(S) \subseteq S$ $(0 \leq \forall t < \infty)$ を満たすならば、 $S = \Omega_E$ が成り立つ.

である.

このとき,エルゴード定理 (cf.~[77]) から, ν_E を正規化して (すなわち, $\overline{\nu}_E=\frac{\nu_E}{\nu_E(\Omega_E)}$ とおいて),次が言える:

$$\int_{\Omega} f(\omega) \overline{\nu}_{E}(d\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T} f(\psi_{t}^{E}(\omega_{0})) dt \quad (\forall f \in C(\Omega_{E}), \quad \forall \omega_{0} \in \Omega_{E})$$
((状態) 空間平均)

以後,Tは十分大きいとして,

$$\int_{\Omega} f(\omega) \overline{\nu}_{E}(d\omega) \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{T} \int_{0}^{T} f(\psi_{t}^{E}(\omega_{0})) dt \tag{13.5}$$

とする.

 $m_T(dt)=rac{dt}{T}$ とおいて,上の意味で,確率空間 $([0,T],\mathcal{B}_{[0,T]},m_T)$ を (正規) 第 1 滞在時間空間,確率空間 $(\Omega_E,\mathcal{B}_{\Omega_E},\overline{
u}_E)$ を,(正規) 第 2 滞在時間空間と呼ぶ*4.

13.1.4 仮定 13.1 の⑶と⑷ について

 $D_N=\{1,2,\dots,N(\doteqdot 10^{24})\}$ とする。各 $k\ (\in D_N)$ に対して,写像 $X_k:\Omega_E(\subset\mathbb{R}^{6N})\to\mathbb{R}^6$ を次のように定める:

$$X_{k}(\omega) = X_{k}(q, p) = X_{k}((q_{1n}, q_{2n}, q_{3n}, p_{1n}, p_{2n}, p_{3n})_{n=1}^{N})$$

$$= (q_{1k}, q_{2k}, q_{3k}, p_{1k}, p_{2k}, p_{3k})$$

$$(\forall \omega = (q, p) = (q_{1n}, q_{2n}, q_{3n}, p_{1n}, p_{2n}, p_{3n})_{n=1}^{N} \in \Omega_{E}(\subset \mathbb{R}^{6N}))$$

$$(13.6)$$

また,任意の部分集合 D ($\subseteq D_N=\{1,2,\ldots,N(\doteq 10^{24})\}$) に対して,写像 $R_D^{(\cdot)}:\Omega_E(\subset\mathbb{R}^{6N})\to \mathcal{M}_{+1}(\mathbb{R}^6)$

^{*4 「}確率空間」は数学用語で、全体の測度が 1 の測度空間のことであって (ここでは、 $m_T([0,T])=\overline{\nu}_E(\Omega_E)=1$)、「確率概念」と関係する必要はない.ここでも、「(正規) 滞在時間」は、ニュートン力学からの帰結であって、「確率概念」とは関係しない.測定理論の精神「測定なくして、確率なし (言語的コペンハーゲン解釈 $(cf.\ 3.1\ {\rm m})$)」を思い出して欲しい.」

を, 点測度 $\delta_{(\cdot)}$ ($\in M_{+1}(\mathbb{R}^6)$) を用いて,次のように定める:

$$R_D^{(q,p)} = \frac{1}{\sharp [D]} \sum_{k \in D} \delta_{X_k(q,p)} \quad (\forall (q,p) \in \Omega_E (\subset \mathbb{R}^{6N}))$$

ここに、 $\sharp[D]$ は集合 D の要素の個数とする.

状態 $\omega_0(\in \Omega_E)$ を任意に固定する. 各 $n\ (\in D_N)$ に対して、関数 $Y_n^{\omega_0}:[0,T]\to\mathbb{R}^6$ を

$$Y_n^{\omega_0}(t) = X_n(\psi_t^E(\omega_0)) \qquad (\forall t \in [0, T])$$

$$\tag{13.7}$$

で定義して, $\{Y_n^{\omega_0}\}_{n=1}^N$ を確率空間 $([0,T],\mathcal{B}_{[0,T]},m_T)$ 上の確率変数列 (すなわち,関数列) と見る.③ と④ はそれぞれ次を意味すると考える.

③ $\{Y_n^{\omega_0}\}_{n=1}^N$ は「だいたい」同一分布をもつ. すなわち、次を満たすような $\rho_E\in \mathcal{M}_{+1}(\mathbb{R}^6)$ が存在する:

$$m_T(\{t \in [0,T] : Y_n^{\omega_0}(t) \in \Xi\}) \dot{=} \rho_E(\Xi) \quad (\forall \Xi \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^6}, n = 1, 2, \dots, N)$$
 (13.8)

④ $\{Y_n^{\omega_0}\}_{n=1}^N$ は,「だいたい」独立,すなわち, $1 \leq \sharp [D_0] \ll N$ (つまり, $\frac{\sharp [D_0]}{N} \stackrel{\cdot}{=} 0$)を満たす任意 の $D_0 \subset \{1,2,\ldots,N(\stackrel{\cdot}{=}10^{24})\}$ に対して

$$m_T(\{t \in [0,T] : Y_k^{\omega_0}(t) \in \Xi_k(\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^6}), k \in D_0\})$$

とする.

よって、 $1 \ll \sharp [D_0] \ll N$ (すなわち, $\frac{1}{\sharp [D_0]} \doteqdot 0 \doteqdot \frac{\sharp [D_0]}{N}$) として,ほとんどの時刻 t ($\in [0,T]$) で

$$\frac{1}{\sharp [D_0]} \sum_{k \in D_0} \delta_{Y_k^{\omega_0}(t)} \dot{=} \rho_E \qquad (\forall \omega_0 \in \Omega_E, (3 \& 4 \& 9))$$

を得る.

注意 13.2. [区間 [0,T] の評価]. 典型的な例として、辺の長さが 0.3m の立方体内の 10^{24} 個の粒子の運動で、粒子の平均速度= 5×10^2 m/秒,平均自由行程= 10^{-7} m と思って,T=数秒, $\sharp[D_0]$ $\doteqdot10^{10}\ll10^{24}$ ぐらいとすれば, $\sharp[D_0]$ 個の粒子同士は滅多に衝突しないので,「だいたい」独立である.したがって,(13.4)式の T を宇宙の年齢ぐらい長い時間—永劫回帰時間—と思う必要は決してない (cf. [35]).

さて、「定義関数 $\chi \notin C(\Omega_E)$ 」であるが、(13.4) 式の中で f を χ と置き換えても良いので

$$m_T(\{t \in [0,T] : Y_k^{\omega_0}(t) \in \Xi_k(\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^6}), k \in D_0\})$$

$$=m_T(\{t \in [0,T] : X_k(\psi_t^E(\omega_0) \in \Xi_k(\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^6}), k \in D_0\})$$

$$=m_T(\{t \in [0,T] : \psi_t^E(\omega_0) \in ((X_k)_{k \in D_0})^{-1}(\underset{k \in D_0}{\times} \Xi_k)\})$$

$$= \frac{1}{T} \int_{0}^{T} \chi_{((X_{k})_{k \in D_{0}})^{-1}(X_{k \in D_{0}} \Xi_{k})} (\psi_{t}^{E}(\omega_{0})) dt$$

$$\stackrel{:}{=} \int_{\Omega_{E}} \chi_{((X_{k})_{k \in D_{0}})^{-1}(X_{k \in D_{0}} \Xi_{k})} (\omega) \overline{\nu}_{E}(d\omega)$$

$$= \overline{\nu}_{E} (((X_{k})_{k \in D_{0}})^{-1}(X_{k \in D_{0}} \Xi_{k}))$$

$$(13.9)$$

特に, $D_0 = \{k\}$ として,

$$m_{T}(\{t \in [0,T] : Y_{k}^{\omega_{0}}(t) \in \Xi\}) \dot{=} (\overline{\nu}_{E} \circ X_{k}^{-1})(\Xi) \qquad (\forall \Xi \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{6}})$$
 (13.10)

が成立する.

以上の準備の下で、日常言語の文言③と④を、 $\{X_n\}_{n=1}^N$ の言葉で書くと以下のようになる.

仮定 13.3. [= 仮定 13.1 の③ と④] $D_N = \{1,2,\ldots,N(\doteqdot 10^{24})\}$ とする。 $\mathfrak{H},\,E,\,\nu_E,\,\overline{\nu}_E,\,X_k:$ $\Omega_E \to \mathbb{R}^6$ は上述の通りとする。このとき,③と④ は次を意味する。

- (b) $\{X_k:\Omega_E\to\mathbb{R}^6\}_{k=1}^N$ は,次の (\sharp) の近似的な意味で,同一分布をもつ独立な確率変数列である. すなわち.
 - (\sharp) 次を満たす ρ_E ($\in \mathcal{M}_{+1}(\mathbb{R}^6)$) が存在する.

 $(\forall D_0 \subset \{1, 2, \dots, N(=10^{24})\},$ しかも, $1 \le \sharp [D_0] \ll N$ とする).

また、状態 $(q,p)(\in \Omega_E)$ は、 $R_{D_N}^{(q,p)} \doteq \rho_E$ を満たすとき、平衡状態 (equilibrium state) と呼ばれる.

13.1.5 エルゴード仮説

ここで,次の定理を得る*5:

定理 **13.4.** [エルゴード仮説 (ergodic hypothesis)] ほとんどの時刻 t で,

$$R_{D_N}^{(q(t),p(t))} = \overline{\nu}_E \circ X_k^{-1} \ (= \rho_E) \quad (k = 1, 2, \dots, N (= 10^{24}))$$
 (13.12)

が成立する. すなわち、 $0 \le m_T(\{t \in [0,T]: (13.12)$ が成立しない $\}) \ll 1$ 、つまり、「平衡状態でないような時間帯」は無視できる.

^{*5} 通常の定式化では、等確率の原理から始めるので、「エルゴード」という言葉は、「等確率の原理」や「(13.4) 式」の意味やいろいろな意味で使われている。しかし、本講では、「エルゴード仮説」をこの定理および系 13.5 の意味と解釈する。また、条件② の「エルゴード性」を「エルゴード仮説」と呼ぶこともあるが、本書では区別する。

証明 $1 \ll N_0(\Rightarrow \sharp [D_0]) \ll N(\Rightarrow 10^{24})$, $k \in \{1,2,\ldots,N(\Rightarrow 10^{24}\}\}$ とする. 仮定 13.3 から,大数の法則 (4.2~\$) より,次が成り立つ:

$$R_{D_0}^{(q(t),p(t))}$$
 $\Rightarrow \overline{\nu}_E \circ X_k^{-1} \ (\Rightarrow \rho_E \)$ (ほとんどの時刻 t で) (13.13)

 D_N の分割 $\{D_{(1)}, D_{(2)}, \dots, D_{(L)}\}$ を考える (すなわち、 $D_N = \bigcup_{l=1}^L D_{(l)}, D_{(l)} \cap D_{(l')} = \emptyset \ (l \neq l')$). ここに、 $\sharp [D_{(l)}] \stackrel{.}{=} N_0 \ (l = 1, 2, \dots, L)$ とする。(13.13) より、各 $k \ (= 1, 2, \dots, N \ (\stackrel{.}{=} 10^{24}))$ に対して、

$$R_{D_{N}}^{(q(t),p(t))} = \frac{\sum\limits_{l=1}^{L} [\sharp[D_{(l)}] \times R_{D_{(l)}}^{(q(t),p(t))}]}{N} \\ \stackrel{:}{\div} \frac{\sum\limits_{l=1}^{L} [\sharp[D_{(l)}] \times \rho_{E}]}{N} \\ \stackrel{:}{\div} \overline{\nu}_{E} \circ X_{k}^{-1} \ (\\ \stackrel{:}{\div} \rho_{E} \) \ \ (13.14)$$

が、ほとんどすべての時刻tで、成り立つことがわかる。

この定理は次のことを主張している:

系 13.5. [エルゴード仮説]

ほとんどすべての時刻 t での $N(\doteqdot 10^{24})$ 個のすべての粒子の (位置,運動量) の分布

= 任意の一つの粒子の (位置,運動量) の時間的挙動の意味での分布

注意 13.6. 状態 $(q,p)(\in \Omega_E)$ のエントロピーを $H(q,p)=C\log[\nu_E(\{(q',p')\in \Omega_E\mid R_{D_N}^{(q,p)}\})]$ と定める. ここに,

$$C = [$$
ボルツマン定数 $] \times ([$ プランク定数 $]^{3N}N!)^{-1}).$

とする. Ω_E 内のほとんどの状態が平衡状態なので、どんな初期状態 (q,p) からスタートしても、直ちに平衡状態に落ち着いて、そのエントロピーは、最大値の $C\log\nu_E(\Omega_E)$ になる. したがって、エントロピー増大則を、「目的因 $(8.1.1\ \mbox{\footnote{m}})$ 」とは見なさない.

418

13.2 平衡統計力学と言語ルール 1(測定)

前節 (13.1 節) の議論では、「確率概念」に関わらなかったことに注意せよ、ここからは、平衡統計力学の確率的側面について考えよう。もちろん、本章の冒頭の「要旨」の問題 (\sharp_2) で述べたこと、すなわち、

(a) 平衡統計力学がニュートン力学から導出されるべきものだとして,「確率概念」を持たないニュートン力学から,なぜ「確率概念」が生じたのだろうか?

が我々の興味であるが,測定理論 (=量子言語) は「確率概念」一言語ルール 1(測定;2.7 節) 一を持っているので,この (a) は意外と簡単に解答できる.

箱の中の $N(\doteqdot 10^{24})$ 個の水素分子の (位置,運動量) の比を考えることも,壷問題 (壷の中の球の「白・黒の比」) を考えることも同じと考える.すなわち,前節の結論は,

(b) 箱の中で, $N(\doteqdot 10^{24})$ 個の粒子が運動しているとき,ほとんどすべての時刻 t で,「(位置,運動量) $\in \Xi(\in \mathbb{R}^6)$ 」であるような粒子の個数は, $\rho_E(\Xi) \times N$ である.

であった.

ここで、 $C(\Omega_E)$ 内の観測量 $O = (\mathbb{R}^6, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^6}, F)$ を次のように定める:

$$[F(\Xi)](q,p) = [R_{D_N}^{(q,p)}](\Xi) \left(= \frac{\sharp [\{k \mid X_k(q,p) \in \Xi\}]}{\sharp [D_N]} \right)$$

$$(\forall \Xi \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^6}, \forall (q,p) \in \Omega_E(\subset \mathbb{R}^{6N}))$$

$$(13.15)$$

ここに、 $\sharp[D_N] (= N \div 10^{24})$ は非常に大きいので、 $F(\Xi) \in C(\Omega_E)$ と考えてよい.よって、時刻 t における測定 $\mathsf{M}_{C(\Omega_E)}(\mathsf{O}=(\mathbb{R}^6, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^6}, F), S_{[(q(t), p(t))]})$ を得る.すなわち、

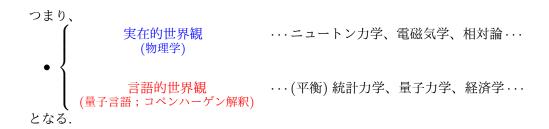
- (c) N 個の粒子の中から、1 つの粒子を選んで、その (位置、運動量)を測定することである。言語ルール 1(測定 (2.7~%)) により、ほとんどすべての時刻 t で、
 - (d) 測定 $\mathsf{M}_{C(\Omega_E)}(\mathsf{O}=(\mathbb{R}^6, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^6}, F), S_{[(q(t), p(t))]})$ により得られる測定値が $\Xi(\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^6})$ に属する確率は $\rho_E(\Xi)$ で与えられる.

となる. よって、

• 平衡統計力学における確率の出所は、上の (d) である

また、決定因果写像 $\psi_t^E:\Omega_E\to\Omega_E$ によって定まる決定因果作用素を $\Psi_t^E:C(\Omega_E)\to C(\Omega_E)$ とすれば、明らかに Ψ_t^E O = O が成り立つ。したがって、時刻 $t_1,t_2,\ldots,t_k,\ldots,t_n$ における測定 $\mathsf{M}_{C(\Omega_E)}(\mathsf{O},S_{[(q(t_k),p(t_k))]})$ たちを考えるとしても、 同時測定 $\mathsf{M}_{C(\Omega_E)}(\mathsf{O}^n,S_{[(q(0),p(0))]})$ を考えればよい。

♠ 注釈 13.2. 本章の議論では、量子言語という言語体系 (「言葉が先、世界が後」) を初めに決めておいて、それで、13.1 節の①-④という事実 (=世界) を記述して、「平衡統計力学」という形而下学を構築した。したがって、平衡統計力学は、言語的記述法によって構築された諸科学の一つとなる。



注意 13.7. [等重率 (統計力学)]. 上の (c) は

- (\sharp_1) N 個の粒子たちから一つの粒子を選ぶであって、
 - (\sharp_2) 状態空間 $\Omega_{\scriptscriptstyle E}$ から一つの状態を選ぶ

ではない. (\sharp_2) は等重率と呼ばれるが、本章の「平衡統計力学の量子言語による定式化」ではこれに関係しない.