Title	第12講：「測定は一回だけ」と(古典)因果関係
Sub Title	
Author	石川, 史郎(Ishikawa, Shiro)
Publisher	
Publication year	2018
Jtitle	コペンハーゲン解釈; 量子哲学 (2018. 3) ,p.391- 410
JaLC DOI	
Abstract	
Notes	慶應義塾大学理工学部大学院講義ノート(Web版)
Genre	Book
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KO52003002-00000000-0391

第 12 講

「測定は一回だけ」と (古典) 因果関係

量子言語において重要なことは, 演習・訓練で, 特に,

「測定と因果関係の絡み」の演習・訓練

で, これが, 測定理論 (二元論的言語) の「実質的なすべて」と言える.
量子系ではあまり深い議論ができなかったが (前章). 本章では「古典系の測定」を主に扱うので. 「測定と因果関係の絡み」についてかなり深い議論ができる. この分野 (実質的には、動的システム理論のすべて) は書き出したら切りがない. したがって, 本章では, ゼノンのパラドックスとその周辺の議論だけに絞った. すなわち, ゼノンの問題提起は,
(♭)「思考の形式」を確立して, その下に「飛ぶ矢が飛ぶ」ことを示せ
なのだから, 我々の「量子言語」でこれを確認すればよい. 本章は, 以下の文献 [37, 39] からの抜粋である.

[37]: S. Ishikawa, *"Zeno's paradoxes in the Mechanical World View,"* arXiv:1205.1290v1 [physics.hist-ph], (2012)
[39]: S. Ishikawa, *Measurement Theory in the Philosophy of Science,* arXiv:1209.3483 [physics.hist-ph] 2012, (177 pages)

12.1 無限実現因果観測量–測定は一回だけ

「測定は一回だけ」なのだから、「観測量も一つ」でなくてはならない. もし複数個の観測量があったら、それらを一つにまとめなくてはならない. したがって、本章では

- 10.1 節 (有限測定理論の因果関係) の議論を無限測定理論に一般化する.

♠ **サプリ 12.1.** 「有限から無限へ」は数学の常套手段で、上級者にとっては「いつもの方法」であるが、初級者にとっては「ややっこしい議論」だろう. 当たり前のことでも証明するとなると面倒なのは数学の宿命だろうか. 12.4 節で、「運動関数法 (小学生の旅人算のようなもの)」という形而上学的主張をするが、これが量子言語からの帰結であることを証明するのに 12.1 節 ∼12.3 節がややっこしくなってしまった. したがって、運動関数法を天下り的に信じてもらえるならば、12.4 節からスタートできる. そうすれば、ゼノンのパラドックスの量子言語的解答も直ちに理解できる. 初回なら

ば、12.1 節 ∼12.3 節を飛ばして、12.4 節からのスタートを推奨する.

$(T, \leqq)$ を 木半順序集合, すなわち, 半順序集合で

$$“t_1 \leqq t_3 \text{ かつ } t_2 \leqq t_3” \Longrightarrow “t_1 \leqq t_2 \text{ または } t_2 \leqq t_1”$$

を満たすとする．ただし，ここでは，T は有限集合とは限らないとする．$T^2_{\leqq} = \{(t_1, t_2) \in T^2 : t_1 \leqq t_2\}$ とおく．要素 $t_0 \in T$ が, $t_0 \leqq t$ $(\forall t \in T)$ を満たすとき，ルートと呼ぶ．木半順序集合 T はルートをもつとは限らないが，ルートをもつ場合，しかもそれを明示したい場合は，T を $T(t_0)$ と記す．

典型的な例としては，第 6 章で述べた例や，通常の順序関係の下で，$T(0) = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geqq 0\}$ とか $T(1) = \{1, 2, \ldots\}$ などを想定すればよい．

部分集合 $T'(\subseteq T)$ が，下に有界とは，$t_i \leqq t$ $(\forall t \in T')$ となる $t_i \in T$ が存在するときを言う．したがって，もし T がルートをもつ場合は，任意の $T'(\subseteq T)$ は，下に有界である．

T は (木半順序集合の意味で) 完備と仮定する．すなわち，任意の下に有界な部分集合 $T'(\subseteq T)$ に対して，次の (i) と (ii) を満たす $\mathrm{Inf}_T(T')(\in T)$ が一意に存在すると仮定する．

(i) $\mathrm{Inf}_T(T') \leqq t \qquad (\forall t \in T')$

(ii) もし $s \leqq t$ $(\forall t \in T')$ ならば，$s \leqq \mathrm{Inf}_T(T')$ が成り立つ．

ただし，本書では，T の位相・距離についての議論は省く．

$(T(t_0), \leqq)$ をルート t_0 をもつ (有限または無限) 木半順序集合とする．各 $t \in T$ に対して, 可分完備距離空間 X_t を定めて，$(X_t, \mathcal{F}_t)$ をそのボレル可測空間，O_t=$(X_t, \mathcal{F}_t, F_t)$ を $\overline{\mathcal{A}}_t$ 内の観測量とする．すなわち，(無限) 因果観測量列 $[\mathsf{O}_{T(t_0)}] = [\{\mathsf{O}_t\}_{t \in T}, \{\Phi_{t_1,t_2} : L^\infty(\Omega_{t_2}, \nu_{t_2}) \to L^\infty(\Omega_{t_1}, \nu_{t_1})\}_{(t_1,t_2) \in T^2_{\leqq}}\ ]$ を考える．

復習 12.1. [有限の場合: 問題 10.3, 問題 10.7 の復習]

ここで，$\overline{\mathcal{P}}_0(T)$ $(= \overline{\mathcal{P}}_0(T(t_0)) \subseteq \mathcal{P}(T))$ を次のように定める:

$$\overline{\mathcal{P}}_0(T(t_0)) = \{T' \subseteq T \mid T' \text{は有限集合，} t_0 \in T' \text{かつ } \mathrm{Inf}_{T'} S = \mathrm{Inf}_T S \ \ (\forall S \subseteq T')\} \tag{12.1}$$

$T'(t_0) \in \overline{\mathcal{P}}_0(T(t_0))$ とする．$(T'(t_0), \leqq)$ は，有限木半順序集合なので，親写像を用いて，$(T'$=$\{t_0, t_1, \ldots, t_N\}, \pi : T' \setminus \{t_0\} \to T')$ と書ける．

さて，因果観測量列

$$[\{\mathsf{O}_t\}_{t \in T'}, \{\Phi_{\pi(t),t} : \overline{\mathcal{A}}_t \to \overline{\mathcal{A}}_{\pi(t)}\}_{t \in T' \setminus \{t_0\}}]$$

を考えよう．各 s $(\in T')$ に対して，$T_s = \{t \in T' \mid t \geqq s\}$ と定めて，$\overline{\mathcal{A}}_s$ 内の観測量 $\widehat{\mathsf{O}}_s$=$(\times_{t \in T_s} X_t, \boxtimes_{t \in T_s} \mathcal{F}_t, \widehat{F}_s)$ を以下の規則で定める (T' が有限なので, 前節と同じ議論で):

$$\widehat{\mathsf{O}}_s = \begin{cases} \mathsf{O}_s & (s \in T' \setminus \pi(T') \ \text{ のとき}) \\ \mathsf{O}_s \times (\displaystyle\mathop{\times}_{t \in \pi^{-1}(\{s\})} \Phi_{\pi(t),t} \widehat{\mathsf{O}}_t) & (s \in \pi(T') \ \text{ のとき}) \end{cases} \tag{12.2}$$

これを逐次的に行なって (量子系の場合は必ずしも可能とは限らないが), $\widehat{\mathsf{O}}_{t_0}{=}(\times_{t\in T'} X_t, \boxtimes_{t\in T'}\mathcal{F}_t, \widehat{F}_{t_0})$ を得る．これは T' $(\in \overline{\mathcal{P}}_0(T))$ に依存しているので,

$$
\widehat{\mathsf{O}}_{T'}{=}(\underset{t\in T'}{\times} X_t,\ \boxtimes_{t\in T'}\mathcal{F}_t, \widehat{F}_{T'})
$$

とも記す.

無限の場合 (以下で, 上の有限の場合を無限に拡張する)

任意の部分集合 $T_1 \subseteq T_2 (\subseteq T)$ に対して, 自然な射影写像 $\pi_{T_1,T_2} : \times_{t\in T_2} X_t \longrightarrow \times_{t\in T_1} X_t$ を,

$$
\underset{t\in T_2}{\times} X_t \ni (x_t)_{t\in T_2} \mapsto (x_t)_{t\in T_1} \in \underset{t\in T_1}{\times} X_t \tag{12.3}
$$

によって定める.

上で定めた $\overline{\mathcal{A}}_{t_0}$ 内の観測量の族

$$
\{\widehat{\mathsf{O}}_{T'}{=}(\underset{t\in T'}{\times} X_t,\ \boxtimes_{t\in T'}\mathcal{F}_t, \widehat{F}_{T'}) \mid T' \in \overline{\mathcal{P}}_0(T)\}
$$

は，明らかに次の**一貫性条件**を満たす[*1]．すなわち，

$T_1 \subseteq T_2$ を満たす任意の T_1, T_2 $(\in \overline{\mathcal{P}}_0(T))$ に対して，次を満たす：

$$
\widehat{F}_{T_2}\big(\pi^{-1}_{T_1,T_2}(\Xi_{T_1})\big) = \widehat{F}_{T_1}\big(\Xi_{T_1}\big) \quad (\forall \Xi_{T_1} \in \boxtimes_{t\in T_1}\mathcal{F}_t) \tag{12.4}
$$

したがって，定理 4.1[測定理論版のコルモゴロフの拡張定理] により，次を満たす $\overline{\mathcal{A}}_{t_0}$ 内の観測量 $\widehat{\mathsf{O}}_T = \big(\times_{t\in T} X_t,\ \boxtimes_{t\in T}\mathcal{F}_t,\ \widehat{F}_T\big)$ が唯一存在する：

$$
\widehat{F}_T\big(\pi^{-1}_{T_0,T}(\Xi_{T_0})\big) = \widehat{F}_{T_0}\big(\Xi_{T_0}\big) \quad (\forall \Xi_{T_0} \in \boxtimes_{t\in T_0}\mathcal{F}_t,\ \forall T_0 \in \overline{\mathcal{P}}_0(T)) \tag{12.5}
$$

この観測量 $\widehat{\mathsf{O}}_T = (\times_{t\in T} X_t,\ \boxtimes_{t\in T}\mathcal{F}_t,\ \widehat{F}_T)$ を，因果観測量列 $[\mathsf{O}_{T(t_0)}] = [\{\mathsf{O}_t\}_{t\in T},\ \{\Phi_{t_1,t_2} : L^\infty(\Omega_{t_2},\nu_{t_2}) \to L^\infty(\Omega_{t_1},\nu_{t_1})\}_{(t_1,t_2)\in T^2_{\leqq}}\ ]$ の**実現因果観測量**と呼ぶ.

以上をまとめて, 次を得る.

[*1] 定理 4.1 では，$\mathcal{P}_0(T)$ を考えたが，$\overline{\mathcal{P}}_0(T)$ でも同様な議論ができる.

定理 12.2. [(無限) 実現因果観測量の存在定理] $T(=$ 木半順序集合$)$ はルート t_0 を持つとする． 各 $t \in T(=$ 木半順序集合$)$ に対して, 基本構造：

$$[\mathcal{A}_t \subseteq \overline{\mathcal{A}}_t \subseteq B(H_t)]$$

を考える． 各 $t \in T$ に対して, 可分完備距離空間 X_t を定めて，$(X_t, \mathcal{F}_t)$ をそのボレル可測空間, $\mathsf{O}_t{=}(X_t, \mathcal{F}_t, F_t)$ を $\overline{\mathcal{A}}_t$ 内の観測量とする．すなわち, (無限) 因果観測量列 $[\mathsf{O}_{T(t_0)}] = [\{\mathsf{O}_t\}_{t \in T}, \{\Phi_{t_1,t_2} : \overline{\mathcal{A}}_{t_2} \to \overline{\mathcal{A}}_{t_1}\}_{(t_1,t_2) \in T^2_{\leqq}}]$ を考える．任意の T' $(\in \overline{\mathcal{P}}_0(T))$ に対して, (12.9) 式, すなわち, 観測量：

$$\widehat{\mathsf{O}}_{T'}{=}(\mathop{\times}_{t \in T'} X_t, \ \boxtimes_{t \in T'} \mathcal{F}_t, \widehat{F}_{T'})$$

が存在すると仮定する． このとき, 次を満たす $\overline{\mathcal{A}}_{t_0}$ 内の観測量 $\widehat{\mathsf{O}}_T = \big(\times_{t \in T} X_t, \ \boxtimes_{t \in T} \mathcal{F}_t, \ \widehat{F}_T\big)$ が唯一存在する：

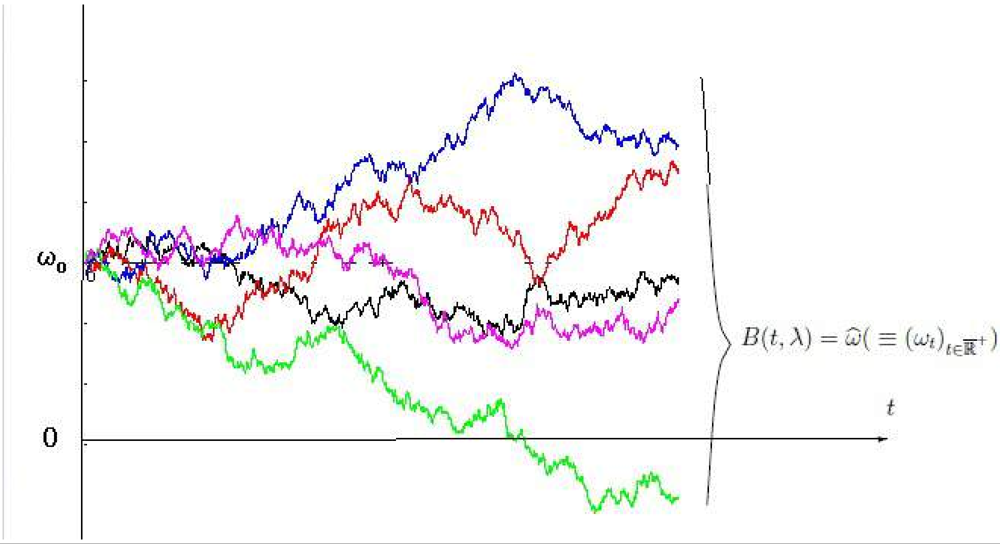
$$\widehat{F}_T\big(\pi^{-1}_{T_0,T}(\Xi_{T_0})\big) = \widehat{F}_{T_0}\big(\Xi_{T_0}\big) \quad (\forall \Xi_{T_0} \in \ \boxtimes_{t \in T_0} \mathcal{F}_t, \ \forall T_0 \in \overline{\mathcal{P}}_0(T)) \tag{12.6}$$

12.2 ブラウン運動は運動か?

12.2.1 確率論の中でのブラウン運動

この節では、定理 12.2 の応用として、ブラウン運動を量子言語で記述することを考える.

その前に、確率論の中でのブラウン運動の通常の定式化について復習しておく.



定義 12.3. [確率論の中でのブラウン運動の通常の定式化 [57]].

$(\Lambda, \mathcal{F}_\Lambda, P)$ を確率空間として，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，実数値連続関数 $B(\cdot, \lambda) : T(=[0,\infty)) \to \mathbb{R}$ が定まって，次を満たすとき，$B(t,\lambda)$，$(t \in T)$，を**ブラウン運動**と呼ぶ．$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ を任意として，

$$
\begin{aligned}
&P(\{\lambda \in \Lambda \mid B(t_k, \lambda) \in \Xi_k \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \;\; (k=1,2,\ldots,n)\}) \\
=&\int_{\Xi_1} \Big(\cdots (\int_{\Xi_{t_{n-1}}} (\int_{\Xi_{t_n}} \mathop{\times}_{k=1}^{n} G_{\sqrt{t_k - t_{k-1}}}(\omega_k - \omega_{k-1}) d\omega_n) d\omega_{n-1}) \cdots \Big) d\omega_1
\end{aligned}
\tag{12.7}
$$

ここに，$\omega_0 \in \mathbb{R}$，$d\omega_k$ は $\mathbb{R}$ 上のルベーグ測度，$G_{\sqrt{t}}(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left[-\frac{q^2}{2t} \right]$ とする.

12.2.2 ブラウン運動の量子言語的定式化

このブラウン運動を，測定理論の中で定式化するならば，以下のようになる.

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, m)$ をルベーグ測度空間とする．拡散方程式：

$$
\frac{\partial \rho_t(q)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \rho_t(q)}{\partial q^2}, \qquad (\forall q \in \mathbb{R}, \forall t \in T{=}[0,\infty)\ )
$$

を考えて，この解から，前双対作用素列 $\{[\Phi_{t_1,t_2}]_* : L^1(\mathbb{R}, m) \to L^1(\mathbb{R}, m)\}$

目次; 他

を次のように得る．すなわち，任意の $\rho_1 \in L^1(\mathbb{R}, m)$ に対して，

$$\big([\Phi_{t_1,t_2}]_*(\rho_{t_1})\big)(q) = \rho_{t_2}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{t_1}(y) G_{\sqrt{t_2-t_1}}(q-y) m(dy) \qquad (\forall q \in \mathbb{R}, \forall (t_1,t_2) \in T^2_{\leqq})$$

と定まる．

簡単のため，各 $t \in T{=}[0,\infty)$ に対して，$(\Omega_t, \mathcal{B}_t, d\omega_t) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, m)$ とおく．$L^\infty(\Omega_t)$ 内の精密観測量 $\mathsf{O}_t^{(e)} = (\Omega_t, \mathcal{B}_t, F_t^{(\mathrm{e})})$ を考える．$\Phi_{t_1,t_2} = ([\Phi_{t_1,t_2}]_*)^*$ とおいて (すなわち，Φ_{t_1,t_2} は $[\Phi_{t_1,t_2}]_*$ の双対作用素)，因果精密観測量列

$$[\mathsf{O}_T] = [\{\mathsf{O}_t^{(e)}\}_{t \in T}, \{\Phi_{t_1,t_2} : L^\infty(\Omega_{t_2}, d\omega_{t_2}) \to L^\infty(\Omega_{t_1}, d\omega_{t_1})\}_{(t_1,t_2)\in T^2_{\leqq}}]$$

を得る．定理 4.1[測定理論版のコルモゴロフの拡張定理] により，実現因果観測量を $\widehat{\mathsf{O}}_T = (\times_{t\in T} \Omega_t,\ \boxtimes_{t\in T} \mathcal{B}_t,\ \widehat{F}_T)$ を構成して，測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega_0)}(\widehat{\mathsf{O}}_T, S_{[\omega_0]})$ を得る．

さて，次を仮定する:

測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega_0)}(\widehat{\mathsf{O}}_T, S_{[\omega_0]})$ により測定値 $\widetilde{x}$ $(= (x_t)_{t\in T} \in \times_{t\in T} \Omega_t = \mathbb{R}^T)$ が得られた．

ここで，測定値 $\widetilde{x}$ $(= (x_t)_{t\in T} \in \mathbb{R}^T)$ の性質について考えよう．

$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ として，$D = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ とおく．また，$\widetilde{\Xi} = \times^D_{t\in T} \Xi_t = (\times_{t\in D} \Xi_t) \times (\times_{t\in T\setminus D} X_t)$ $\big(\in \mathcal{B}^T_{\mathbb{R}}\big)$ とおく．このとき，測定値 $\widetilde{x}(= (x_t)_{t\in T})$ が $\widetilde{\Xi}{=}\times^D_{t\in T}\Xi_t$ に属する確率は，言語ルール 1(2.7 節) により，

$$\big(\widehat{F}_T(\widetilde{\Xi})\big)(\omega_0) = \Big(F(\Xi_0)\Phi_{0,t_1}\Big(F(\Xi_{t_1})\cdots\Phi_{t_{n-2},t_{n-1}}\Big(F(\Xi_{t_{n-1}}) \times \big(\Phi_{t_{n-1},t_n} F(\Xi_{t_n})\big)\Big)\Big)\Big)(\omega_0)$$

$$= \int_{\Xi_1} \Big(\cdots\big(\int_{\Xi_{t_{n-1}}} \big(\int_{\Xi_{t_n}} \mathop{\times}_{k=1}^{n} G_{\sqrt{t_k - t_{k-1}}}(\omega_k - \omega_{k-1}) d\omega_n\big) d\omega_{n-1}\big)\cdots\Big) d\omega_1 \tag{12.8}$$

となる．ここで，(12.7)=(12.8) であるから，これはブラウン運動 $B(t,\lambda)$ と数学的には同じであることがわかる．すなわち、つぎの同一視を得る：

$$\underset{\text{ブラウン運動}}{\overset{\text{確率論}}{\boxed{\Big(B(t,\cdot)\Big)_{t\in T}}}} = \underset{\text{測定値}}{\overset{\text{量子言語}}{\boxed{\Big(\widehat{\omega}_t\Big)_{t\in T}}}}$$

♠ **注釈 12.1.** ただし，測定理論の原則 (言語的世界観，すなわち，ウィトゲンシュタインの「言葉の限界が，世界の限界」) に固執して言うならば，

- ブラウン運動は，「運動」ではなくて，精密測定値列ということになって，パルメニデスの「運動は存在しない」も納得できる．

繰り返しになるが言語的コペンハーゲン解釈 (*cf.* 3.1 節) によれば、

(♯)「多数」を「単一」のように記述せよ.
(♯)「動いているもの」を「静止しているもの」のように記述せよ
である.

12.3 決定因果作要素列のシュレーディンガー描像

12.3.1 次節 (§12.5: ゼノンのパラドックス) の準備

量子言語では, ハイゼンベルグ描像— 「状態は変化しない」— が原則である．しかし，便宜的な方法として,「状態変化のシュレーディンガー描像」は，一般性はないけれど，直感的でわかりやすい．以下に、これを古典系の場合に限って説明する．本節は、次節の準備である．

$(T(t_0), \leqq)$ をルート t_0 を持つ (無限) 木半順序集合とする．各 $t \in T$ に対して、古典基本構造

$$[C_0(\Omega_t) \subseteq L^\infty(\Omega_t, \nu_t) \subseteq B(L^2(\Omega_t, \nu_t))]$$

が定まっているとしよう．

定義 12.4. [状態変化のシュレーディンガー描像] $[\mathsf{O}_{T(t_0)}] = [\{\mathsf{O}_t\}_{t \in T}, \{\Phi_{t_1,t_2} : L^\infty(\Omega_{t_2}, \nu_{t_2}) \to L^\infty(\Omega_{t_1}, \nu_{t_1})\}_{(t_1,t_2) \in T^2_{\leqq}}]$ を決定因果観測量列とする．$\phi_{t_1,t_2} : \Omega_{t_1} \to \Omega_{t_2}$ $(\forall (t_1,t_2) \in T^2_{\leqq})$ をその決定因果写像とする．$\omega_{t_0} \in \Omega_{t_0}$ とする．このとき，$\{\phi_{t_0,t}(\omega_{t_0})\}_{t \in T}$ を，(初期状態 $\omega_{t_0} (\in \Omega_{t_0})$ における) 状態変化のシュレーディンガー描像と呼ぶ.

次は定理 10.8 の無限測定版である.

定理 12.5. [決定因果作用素列の実現因果観測量] 木半順序集合 $(T(t_0), \leqq)$ を考える．因果観測量列

$$[\mathsf{O}_T] = [\{\mathsf{O}_t\}_{t \in T}, \{\Phi_{t_1,t_2} : C(\Omega_{t_2}) \to C(\Omega_{t_1})\}_{(t_1,t_2) \in T^2_{\leqq}}]$$

において，$\{\Phi_{t_1,t_2} : L^\infty(\Omega_{t_2}) \to L^\infty(\Omega_{t_1})\}_{(t_1,t_2) \in T^2_{\leqq}}$ が決定因果作用素列ならば，次が成立する：

$$\widehat{\mathsf{O}}_{T(t_0)} = \bigtimes_{t \in T} \Phi_{t_0,t} \mathsf{O}_t$$

証明 定理 10.8 の証明と同様なので，省略する． □

定理 12.6.

$$[\mathsf{O}_{T(t_0)}] = [\{\mathsf{O}_t^{(e)}\}_{t \in T}, \{\Phi_{t_1,t_2} : L^\infty(\Omega_{t_2}, \nu_{t_2}) \to L^\infty(\Omega_{t_1}, \nu_{t_1})\}_{(t_1,t_2) \in T^2_{\leqq}}]$$

を決定因果精密観測量列とする．$\phi_{t_1,t_2} : \Omega_{t_1} \to \Omega_{t_2}$ $(\forall (t_1,t_2) \in T^2_{\leqq})$ をその決定因果写像とする．$\widehat{\mathsf{O}}_T = (\bigtimes_{t \in T} X_t, \boxtimes_{t \in T} \mathcal{F}_t, \widehat{F}_T)$ をその実現因果観測量とする．このとき，測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega_{t_0})}(\widehat{\mathsf{O}}_T = (\bigtimes_{t \in T} X_t, \boxtimes_{t \in T} \mathcal{F}_t, \widehat{F}_0), S_{[\omega_{t_0}]})$ により得られる測定値 $(x_t)_{t \in T}$ (すなわち，精密測定値列) は，確率 1 で次を満たす:

$$x_t = \phi_{t_0,t}(\omega_{t_0}) \qquad (\forall t \in T)$$

したがって，決定因果作用素列を考える限りにおいては，

(a) 精密測定値列 $(x_t)_{t \in T}$ =状態変化のシュレーディンガー描像 $(\phi_{t_0,t}(\omega_{t_0}))_{t \in T}$

と見なすことができる．

証明 測定値 $(x_t)_{t \in T}$ の性質を調べる．$D = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\} (\subseteq T)$ を T の任意の有限部分集合とする．$\widetilde{\Xi} = \bigtimes_{t \in T}^{D} \Xi_t = (\bigtimes_{t \in D} \Xi_t) \times (\bigtimes_{t \in T \setminus D} X_t)$ とおく．ここに Ξ_t は $X_t (= \Omega_t)$ 内の任意の開集合で，しかも $\phi_{t_0,t}(\omega_{t_0}) \in \Xi_t$ $(\forall t \in D)$ とする．このとき，

(b) 測定値 $(x_t)_{t \in T}$ が集合 $\widetilde{\Xi} = \bigtimes_{t \in T}^{D} \Xi_t$ に属する確率は 1 である．

なぜならば，定理 12.5 より，

$$
\begin{aligned}
&\big(\widehat{F}_T(\widetilde{\Xi})\big)(\omega_{t_0}) = \Big(\bigtimes_{k=1}^{n} \big(\Phi_{t_0,t_k} F^{(\mathrm{e})}(\Xi_{t_k})\big)\Big)(\omega_{t_0}) \\
=&\Big(\bigtimes_{k=1}^{n} F^{(\mathrm{e})}(\phi_{t_0,t_k}^{-1}(\Xi_{t_k}))\Big)(\omega_{t_0}) = \bigtimes_{k=1}^{n} \chi_{\Xi_{t_k}}(\phi_{t_0,t_k}(\omega_{t_0})) = 1
\end{aligned}
$$

したがって，Ξ_t の任意性から，

(c) 確率 1 で，「$(x_t)_{t \in T} = \phi_{t_0,t}(\omega_{t_0}) \qquad (\forall t \in T)$」

を得る． $\square$

♠ **注釈 12.2.** 上の定理の中で，(b) の意味と (c) の意味は同じ，すなわち，(c) の定義が，(b) である．

よって，次の系を得る．

系 12.7. 各 $t \in T(t_0)$ において，$L^\infty(\Omega_t, \nu_t)$ 内の精密観測量 $\mathsf{O}_t^{(e)} = (X, \mathcal{F}_t, F^{(\mathrm{e})}) (= (\Omega_t, \mathcal{B}_t, \chi))$ と Ω_t 上のシステム量 $g_t : \Omega_t \to Y (= \mathbb{R}^d)$ を考える．システム量 g_t の $L^\infty(\Omega_t)$ 内の観測量表示を，$\mathsf{O}'_t = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}, G_t)$ とする．同時観測量を $\mathsf{O}_t^{(e)} \times \mathsf{O}'_t$ を考えて，$[\mathsf{O}_{T(t_0)}] = [\{\mathsf{O}_t^{(e)} \times \mathsf{O}'_t\}_{t \in T}, \{\Phi_{t_1,t_2} : L^\infty(\Omega_{t_2}, \nu_{t_2}) \to L^\infty(\Omega_{t_1}, \nu_{t_1})\}_{(t_1,t_2) \in T^2_{\leqq}}]$ を決定因果観測量列とする．$\phi_{t_1,t_2} : \Omega_{t_1} \to \Omega_{t_2}$ $(\forall (t_1, t_2) \in T^2_{\leqq})$ をその決定因果写像とする．$\widehat{\mathsf{O}}_T = \big(\bigtimes_{t \in T}(X_t \times \mathbb{R}^d), \boxtimes_{t \in T}(\mathcal{F}_t \boxtimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}), \widehat{F}_T\big)$ をその実現因果観測量とする．このとき，測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega_{t_0})}(\widehat{\mathsf{O}}_T, S_{[\omega_{t_0}]})$ により得られる測定値 $(x_t, y_t)_{t \in T}$ は，確率 1 で次を満たす:

$$
x_t = \phi_{t_0,t}(\omega_{t_0}) \text{ かつ } y_t = g_t(\phi_{t_0,t}(\omega_{t_0})) \qquad (\forall t \in T)
$$

////

以上の準備の下に、次の定義を得る．

定義 12.8. 系 *12.7* において、T が時間軸、$Y(=\mathbb{R}^d)$ が空間のとき *(cf. 8.6* 節*:*ライプニッツ*=*クラークの往復書簡*)*、

$$y_t = g_t(\phi_{t_0,t}(\omega_{t_0}))$$

を運動関数と呼ぶ*.*

注意 12.9. [なぜニュートン力学には、「測定」が無いのか？]. ニュートン力学と量子力学の決定的な違いは、「測定の有無」で、つまり、

$$(\sharp)\quad \begin{cases} \boxed{\text{ニュートン力学}} = \boxed{\text{無し}} + \underset{\text{(ニュートン方程式)}}{\boxed{\text{因果関係}}} \\ \\ \boxed{\text{量子力学}} = \underset{\text{(ボルンの量子測定)}}{\boxed{\text{測定}}} + \underset{\text{(ハイゼンベルグ (とシュレーディンガー) 方程式)}}{\boxed{\text{因果関係}}} \end{cases}$$

である．定理 12.6(または、系 12.7) は、「ニュートン力学は、測定を必要としない」ことの説明 ($x_t = \phi_{t_0,t}(\omega_{t_0})$ だから、x_t は無くても済ますことができる) になっているわけであるが、これは表面的な説明である．アインシュタイン=タゴール会談でのアインシュタインの言葉：

($\sharp$) 月は、見ていても、見ていなくても存在する (=[測定者がいなくても、物理学は成立する])

は、バークリーの言葉「存在するとは、知覚されること」との対比において、深遠と思う．ただし、本書の立場は、「量子言語は、物理学ではないので、測定があっても構わない」なのだから、アインシュタインの機嫌を損ねるようなことを主張しているわけではない．結局、

$$\overset{\text{測定無し}}{\underset{\text{アインシュタイン}}{\boxed{\text{一元論的実在論}}}} \quad \text{v.s.} \quad \overset{\text{測定あり}}{\underset{\text{バークリー}}{\boxed{\text{二元論的観念論}}}}$$

と思えばよい．最初の問「なぜニュートン力学には,『測定』が無いのか？」に戻るならば，ニュートンがアインシュタインと同じように「物理学をわかっていた」からで，

「測定」は物理的概念ではなくて，形而上学的概念であることを見抜いていた

からだと思う．

12.4 運動関数法という形而上学的命題

12.4.1 ヘラクレイトス (BC.540 - BC.480), パルメニデス (BC.515 - 不明)

ヘラクレイトスと言えば,

(A):ヘラクレイトス (BC.540 - BC.480)

万物の根源は, 火である.

そして, さらに,

万物は流転する.

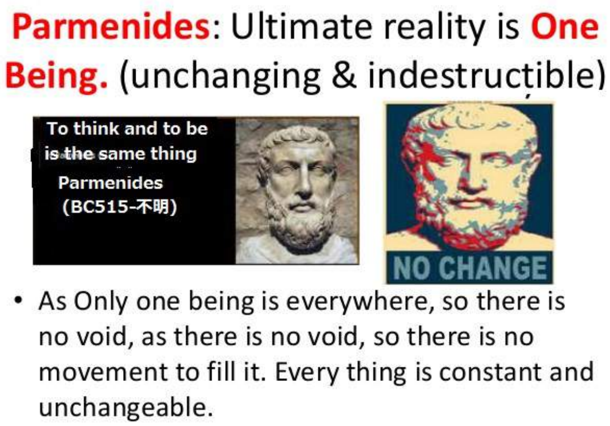
「万物は流転する」とは, 「諸行無常」のようなものだし, 鴨長明（1155 年〜1216 年）の『方丈記』の「ゆく河の流れは絶えずして、しかももとの水にあらず」も同じようなものだろう. 「同じ川には 2 度入れない」も洒落ているが, この種のことなら誰でも言えることかもしれない.

そこで, 本書では「万物は流転する」の意味を

(B)「運動・変化」が科学を記述するキーワードである

と理解したい. これならば, 次のパルメニデスと関連付けることができる.

ヘラクレイトスと同時代に, パルメニデスが登場して, ヘラクレイトスと真逆な言い方をする. すなわち,



(C):パルメニデス (BC.515 - 不明)

パルメニデスの主張は, 以下の通り：

(C$_1$) 万物は変化しない．運動・変化は存在しない．あるものは永遠にあり, ないものは永遠にない, というより, そもそも時間など存在しない．「一」しかなくて, 「多」はない．

である．言語的コペンハーゲン解釈 (*cf.* 3.1 節)(i.e., 状態は変化しない, 測定は一回だけ, 時制は無い, etc.) との類似性に注意せよ．また,

(C2) 世界を理解するのに感覚に頼るべきでなく, 理性によって論理的に考えるべきである．変化・運動しているように見えるとしても, それはそう見える感覚を人間が有しているということだけであって, 運動・変化の存在の保証にはならない．

(注) たとえば, 量子力学の場合, 対象が小さすぎて見えないのだから, 感覚に頼ることなどできないわけで, 計算するしかない．パルメニデスの主張は量子力学を想定すれば, 完全に納得できる．　とは言え,「ソクラテス以前の哲学は断片しか残っていないしどうにでも解釈できるネタを拾いたい人には都合がいいんだろう」と言われてしまえば, そうかもしれない．
////

パルメニデスが「運動・変化は存在しない」などとわざわざ言ったとするならば, 「運動・変化」の重要さを十分認識していたわけで, パルメニデスの主張も,

(D)「運動・変化」が科学を記述するキーワードである

と思いたい．

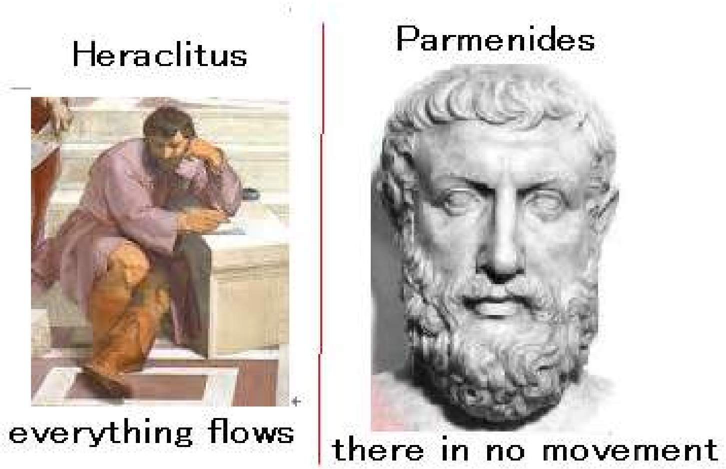
まぎらわしい話になってしまったので, ヘラクレイトスとパルメニデスの相違点を次のように著者流に整理しておく．

(E$_1$) ヘラクレイトスの場合は, 「運動・変化」という言葉以前に, (「万物の根源は火である」の)「火」という感覚で捉えることのできる実在的世界を前提にしている．たとえば, 物理学の運動を想定すればよい．

(E$_2$) パルメニデスの場合は, 「運動・変化」という言葉が先にあって, その言葉「運動・変化」に対応するものを世界の中で見つけて議論せよという言語的世界記述を前提にしている．たとえば, 「運動・

変化」と言っても, 植物の成長とか人口の増加とか経済成長とかを想定すればよい.

と思いたい. こういうフィクションの下に, 本書では話を進めるということで, 本当のことは知らない.



12.4.2 「運動関数法」という形而上学的主張

ピタゴラスは「万物の根源は数である」と言ったが、その意味は,

(F) 世界を記述するのには, 数学は必須であるが, 数学だけでは十分でなくて, 数学と世界を繋げる言葉が必要である. すなわち,

$$\text{世界記述} \quad = \quad \text{数学} \quad + \quad \alpha$$

である. そして,

(G) その言葉 α の有力な候補として,「運動」を考え付いたのが, ヘラクレイトスとパルメニデスであると本書では考えたい.

さらに, ここでは, 次の運動関数法という形而上学的命題をパルメニデスの発見というフィクションを想定して, 話を進める.

(H):運動関数法 (パルメニデスの発見？)

T を時間軸, X を空間とする．関数 $f: T \to Y$ を運動関数と言う．
このとき, 次の世界記述法を運動関数法呼ぶ：
(H$_1$)「運動」は運動関数 $f: T \to Y$ で記述せよ
である．

(注): 運動関数は、すでに定義 12.8 で既出である．前節の議論から継続するならば、
(H$_2$) 運動関数法 (H$_2$) は、量子言語からの帰結である
と言える．

♠ **注釈 12.3.** 上で注目すべきは,
($\sharp_1$)「動いている気分」が消去されている
ことである．そうならば, パルメニデスの言う通りで,
($\sharp_2$) 感覚に頼らずに, 数学とか論理に集中すると, 運動が見えなくなる

運動関数法とは, 小学生の「旅人算」のことと思えばよい．これは, 次の小学生の問題を見れば明らかだろう．

問題 12.10. *1400m はなれた A, B の 2 地点から, A 子さんは A 地点から分速 80m で, B 男君は B 地点から分速 60m で同時に出発しました． 2 人が出会うのは何分後ですか．*

[解答] A 子さんの運動関数 $f_A: \mathbb{R}$(時間軸) $\to \mathbb{R}$(一次元実空間軸) は, $f_A(t) = 60t$, B 男君の運動関数 $f_B: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は, $f_B(t) = 1400 - 80t$. よって, $f_A(t) = f_B(t)$ を解いて,

$$60t = 1400 - 80t \qquad \text{よって,} \quad t = 10$$

よって, 10 分後に二人は出会う．

////

♠ **注釈 12.4.** f_A と f_B の二つの運動関数は, パルメニデスの「多はない．一しかない (*cf.* 言語的コペンハーゲン解釈 (*cf.* 3.1 節))」に矛盾すると言うならば,
($\sharp$) $(f_A, f_B): \mathbb{R}$(実時間軸) $\to \mathbb{R}^2$(二次元実空間軸)
とすればよい．

♠ **注釈 12.5.** (a): ここではパルメニデスを主人公として話を進めるが,「運動関数法」という世界記述法の発見者が誰かは, 著者は知らない．関数概念などライプニッツ以降かもしれないので, 厳密なことを言えば, 古代ギリシャの発見ではないだろう．しかし,「運動関数法」の精神ならば, ピタゴラスやアリストテレスは理解していたと思う．
(b):もちろん, 科学的言語的世界記述法としては, 上述の運動関数法は不完全で, 暫定的なものである．「時間とは何か？」と「空間とは何か？」に答えてからでないと, 運動関数 $f: T$(時間) $\to X$(空間) は定めることができないからである．「時空とは, 何か？」は, 有名なライプニッツ＝クラーク

論争 (*cf.* 8.6 節) を思い出させるかもしれない．この問題に対する量子言語による解答は 8.6 節 [時空とは何か？] と 12.3 節 [運動関数法] で用意してある．

♠ **注釈 12.6.** ニュートン力学以前の世界記述法として, 科学として最大級なのは

「運動関数法」と「アルキメデスの『てこの原理』と『浮力』」

である．それでは,

- なぜ, 「運動関数法」は発見者が特定されないぐらいに有名でないのか？

は当然の疑問だろう．その理由としては,

- 実在的世界記述法 (=物理学) は一人の天才 (アルキメデス, ニュートン, アインシュタイン) によって作られる．しかし, 科学的言語的世界記述法は, 何となく多数の手によっていつの間にか形成されることが多いからである．確率論とか統計学も厳密には発見者を一人に絞ることはできない．本書的には, 量子論も科学的言語的世界記述法と見なしたいわけであるが, 発見者 (ハイゼンベルグ, シュレーディンガー, ボルン) が複数いるということは一つの根拠になるかもしれない．

と考える．

12.5 ゼノンのパラドックス (BC490 - BC430)

ゼノンはパルメニデスの弟子で, パルメニデスより 20 歳ぐらい若かった． 有名な「ゼノンのパラドックス」はパルメニデスとの合作という説もあるぐらいで, 二人は一蓮托生の仲だったのだろう．

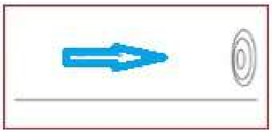
この節では，ゼノンのパラドックス – 最古の科学パラドックス – について議論する．

12.5.1 ゼノンのパラドックスとは何か？

ゼノンのパラドックスとしては, “アキレスと亀” と “飛ぶ矢” が有名かもしれないが，他にも，“二分法”, “競技場” などがある． これらは, 「すべて同じ種類の問題」と考える． したがって, 一つが解ければ, 他も同様に解ける． 一番の傑作は “飛ぶ矢” と思うが, “アキレスと亀” も有名なので，この節では, この二つについて説明する．

以下は, ゼノンが提示した「ゼノンのパラドックス」である．文芸の楽しさを味わってもらいたい．

逆理 12.11. [ゼノンのパラドックス]
文芸としての議論 (「飛ぶ矢」の二律背反)
[飛ぶ矢は止まっている] ことの文芸的証明



- 矢が飛んでいるとしよう． この矢は, いつの時点でもその瞬間は止まっている． いつの時点でもその瞬間は止まっているならば，いつも止まっているわけで，したがって, 矢は止まっていて動かない．

[飛ぶ矢は止まっているわけではない] ことの文芸的証明

- 「部分の総和は, 全体ではない」のだ．各瞬間の矢のありようが部分に当たる．それら部分をいくら足し合わせても, 全体に達しない．この全体とは, 時間を通して動いている矢のありようである．「部分を足していっても, 全体には達しない」．よって, 矢は止まっているわけではない．

とか

- 各瞬間の矢のありようは, 確かに, 或る一つの位置を占めている．しかし, それは「止まっている」のではない．『動いている最中』なのである．よって, 矢は止まっているわけではない．

とか

- 矢がそこを通過することは認めなければならないだろう．しかし矢がそこを通過することと矢がそこに存在することとは等価ではない．それでは通過するとはどういうことか．それはそこにあると同時にそこにないことである．よって, 矢は止まっているわけではない．

さて,「ゼノンのパラドックスとは, 何か？」であるが, 「飛んでいる」ことの証明もできるし, そうでないことの証明もできてしまうのだから, アンチノミー (二律背反) の一種である. すなわち, ゼノンのパラドックスは, 日常言語という言語体系では論理は当てにならないことを指摘している. そうならば, 本書の主張通りで,

- まず, 世界記述法を宣言して, その世界記述法が指定する論理で議論せよ

である.

すなわち,「ゼノンのパラドックスを解く」とは次の問題を解くことである.

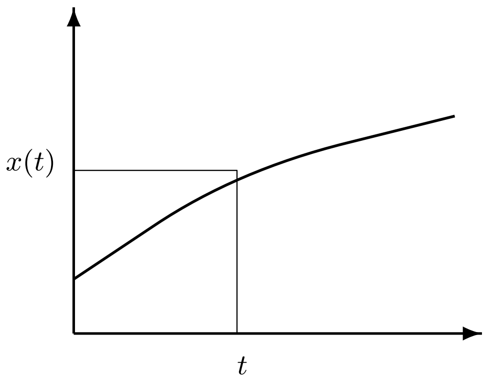
問題 12.12. 「ゼノンのパラドックス」を世界記述主義で解け. すなわち, ある科学的言語的世界記述法を提案して, 「ゼノンのパラドックス」を議論せよ.

12.5.2 運動関数法で記述せよ

運動関数法という科学的言語的世界記述法に従うならば,「飛ぶ矢」の証明は以下のように簡単にできる.

解答 12.13. [問題 12.12 の解答 (科学としての解答)] 運動関数法という科学的言語的世界記述法の下に,「ゼノンのパラドックス」を次のように議論しよう.

- 各時刻 t に対して, 矢の位置 x(t) が対応している運動関数 x(t) を考えよう. 各時刻 t に対して, 矢の位置 x(t) が対応しているからといって, 定数関数とは限らないのだから, 矢が止まっているわけではない



である.

////

♠ **注釈 12.7.** 逆理 12.11[ゼノンのパラドックス] であれほど混乱したのに, 運動関数法という科学的言語的世界記述法の下では, 数行で解けてしまった. 運動関数法の提案者は確実に天才である. 本書では, パルメニデスとしたが, ピタゴラスかもアリストテレスかもしれない. もし彼らでなかったとしたら, 著者の知らない天才がいたことになる. 世界記述法が定まれば, ゼノンのパラドックスが解けるわけで, 運動関数法に限るわけではない. たとえば, ニュートン力学や相対性理論の下にゼノン

のパラドックスを解くことは良い演習問題だろう.

12.5.3 おまけ:「アキレスと亀」

次も文芸として楽しめる.

逆理 12.14. [ゼノンのパラドックス (文芸としての解答)]
[アキレスと亀]

「アキレスと亀のパラドックス」についてのゼノンの論法は以下の通りである:,

- アキレスと亀の競争を考える. アキレス (速い走者) のスタート点より, 亀 (遅い走者) のスタート点は前方とする. 「ヨーイ. ドン」で両者が同時にスタートしたとしよう. このとき, アキレスが亀に追い抜こうとするならば, アキレスは, いま亀がいるところまで行かなければならない. そうしたとしてもそのときは, 亀がもっと先に行ってるはずである. アキレスは, 更にいま亀がいるところまで行かなければならない. これを限りなく続けても, 決してアキレスは亀に追いつくことができない.

[「アキレスと亀」の科学としての解答 (旅人算による解答)]

アキレスと亀の運動関数

$$x = q_1(t) = vt, \qquad y = q_2(t) = \gamma vt + a \tag{12.9}$$

とする (ここに, $0 < \gamma v < v$, $a > 0$).

(i): 方程式 (12.9) を代数的に解くことは簡単で, $q_1(s_0) = q_2(s_0)$ の解は,

$$s_0 = \frac{a}{(1-\gamma)v}$$

となるから, 時刻 $s_0 = \frac{a}{(1-\gamma)v}$ にアキレスは亀に追いつくことができる.

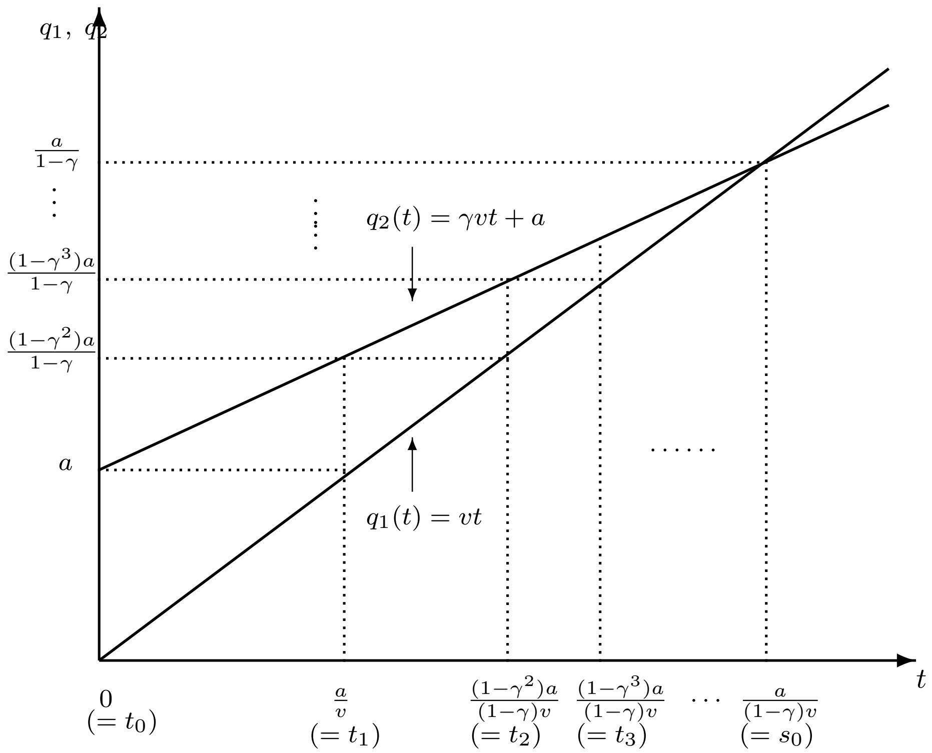
(ii): 方程式 (12.9) を無限等比級数を使って解くこともできる. たとえば,

$$s_0 = \frac{a}{v}(1 + \gamma + \gamma^2 + \gamma^3 + \ldots) = \frac{a}{(1-\gamma)v}$$

と計算できる.

当たり前のことであるが, 考え方 (=運動関数法という世界記述法) は一つである. しかし, 上の (i) と (ii) で示したように, 方程式 (2.1) の解き方は一つとは限らない.

////



グラフ：$q_1(t) = vt,\ q_2(t) = \gamma vt + a$

////

♠ **注釈 12.8.** さて，本書の目的は, 量子言語の枠組み中に諸哲学を強引に押し込んで理解することであった．したがって,

($\sharp_3$) “2500 年も昔のギリシャの哲学者ゼノン (BC. 490 - 430) が如何に考えたか？” については拘泥しない．

定説では,

($\sharp_4$) パルメニデス＝ゼノンは時間の無限分割・空間の無限分割について考察して，ゼノンのパラドックスを提唱した

とされているが，これだと問題の意味は直ちにわかった気分になるが，実際に解答するとなる現代物理でも解けない問題になってしまう． もしゼノンのパラドックスがこういう物理学の問題ならば, これを 2500 年間も考え続けてきた哲学者は馬鹿ということになる．なぜならば, 時空の分割問題に挑戦する前に準備するべき問題が山ほどあることぐらい物理学者ならば誰だってわかっていることだからである． したがって, 本書ではゼノンのパラドックスは物理学の問題ではなくて言語的世界記述の問題とした． すなわち、言語的世界記述法の発展の歴史を次のように考えたい．

$$\boxed{\text{運動関数法}} \longrightarrow \boxed{\text{統計学}} \longrightarrow \boxed{\text{量子言語}}$$

これを主張するためには、運動関数法を量子言語で記述しなければならないが、これを 12.3 節で行った．

目次; 他

注意 12.15. 「運動関数法」は形而上学的命題であるが、難しいことではなくて、小学校で習う「旅人算」と同じようなものである．正確には、最初に「運動関数法」が前提にあって、その下に旅人算が意味を持つ．また、「旅人算」は結局、次の「ハジキ」の公式と同じようなものである．

$$\text{速さ} \quad \times \text{時間} \quad = \text{距離} \tag{12.10}$$

この「ハジキの公式」は小学算数の中で最も難しい公式・概念なのかもしれない．著者もこの公式を使えるようになるまでにはかなり苦労した．と言うより、今でも時々混乱することがある．著者が小学生のころには無かった次の記憶法は今ではかなりポピュラーで、

ハジキの公式

この図はあまり出来の良い記憶法とは思えないにも関わらずかなり知られている．小学生の算数の教科書に書いてあるわけではないので、多分学習塾で習ったのだと思うが、卒業研究の 4 年生に聞いてみると、5 割くらいの学生が知っていたことに驚いたものである．念の為に、大袈裟な言い方で、繰り返すと、

- 「ハジキの公式 (12.10)」は小学算数の中で最も難しい公式・概念というよりも、大学院までで習うあらゆる公式の中で最も難しいものと思う．

ほとんどの (と言うより、すべての) 学生や研究者が、

- 「ハジキの公式 (12.10)」のバックグラウンドに「運動関数法」という形而上学的主張が控えていることを意識していない

と思うからである．「ハジキの公式 (12.10)」は、純粋数学の公式 (たとえば、$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ のような公式) ではない．

結局、本書的には

- ゼノンのパラドックスを理解するとは、ハジキの公式 (12.10) を理解することである

と考える．そうならば、「ハジキの公式 (12.10) を理解する」とは「運動関数法を理解する」ことで、「運動関数法を理解する」とは「量子言語を理解する」ことなのだから、ゼノンのパラドックスはかなり深い．しかもその運動関数法は量子言語によって正当化されているのだから (12.3 節)、思いのほか深い．