

Title	第9講：単純測定と因果関係
Sub Title	
Author	石川, 史郎(Ishikawa, Shiro)
Publisher	
Publication year	2018
Jtitle	コペンハーゲン解釈; 量子哲学 (2018. 3) ,p.319- 356
JaLC DOI	
Abstract	
Notes	慶應義塾大学工学部大学院講義ノート(Web版)
Genre	Book
URL	<a href="https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KO52003002-00000000-0319">https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KO52003002-00000000-0319</a>

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

## 第9講

# 単純測定と因果関係

前章までで、「量子言語」のすべてを説明した。

$$\begin{array}{l}
 \text{(\#)} \left\{ \begin{array}{l}
 \text{(\#}_1\text{): } \boxed{\text{純粋型測定理論}} \text{ (}=\text{量子言語)} \text{ := } \overbrace{\boxed{\text{純粋型測定}} \text{ (cf. 2.7 節)} + \boxed{\text{因果関係}} \text{ (cf. 8.3 節)}}^{\text{一種の呪文 (}=\text{量子力学の言葉遣い)}} + \overbrace{\boxed{\text{言語的解釈}} \text{ (cf. 3.1 節)}}^{\text{呪文の使い方のマニュアル}} \\
 \text{(\#}_2\text{): } \boxed{\text{混合型測定理論}} \text{ (}=\text{量子言語)} \text{ := } \overbrace{\boxed{\text{混合型測定}} \text{ (cf. 7.1 節)} + \boxed{\text{因果関係}} \text{ (cf. 8.3 節)}}^{\text{一種の呪文 (}=\text{量子力学の言葉遣い)}} + \overbrace{\boxed{\text{言語的解釈}} \text{ (cf. 3.1 節)}}^{\text{呪文の使い方のマニュアル}}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

を説明した。これが「量子言語のすべて」であるが、

(●) 重要なことは、**演習・訓練**で、特に、

### 「測定と因果関係の絡み」の演習・訓練

で、これが、測定理論 (二元論的言語) の「実質的なすべて」と言える。  
 本章から、これを行う。この意味では、これからが本番である。ただし、本章では、  
**「ある時刻の状態に関する測定」**

に限定した議論を行う。この限定は、かなり強い制限と思うかもしれないが、量子系の測定ではむしろ普通で、したがって、本章では「量子系の測定」を主に扱う。

## 9.1 ハイゼンベルグ描像と「シュレーディンガー描像という計算法」

### 9.1.1 状態は変化しない — ハイゼンベルグ描像 —

言語的解釈— 3.1 節の言語的コペンハーゲン解釈 (E<sub>4</sub>) —の「測定は一回だけ」から、「状態は一つだけ」と「観測量は一つだけ」が要請された。「状態は一つだけ」ならば、

**状態は変化しない.** (9.1)

が必然となる。これが測定理論 (=量子言語) の正式な方法 (ハイゼンベルグ描像) である。これから、パルメニデスを連想する読者も多いと思う。

**パルメニデスの「運動は存在しない」**

**Parmenides: Ultimate reality is One Being. (unchanging & indestructible)**

To think and to be  
is the same thing  
Parmenides  
(BC515-不明)



- As Only one being is everywhere, so there is no void, as there is no void, so there is no movement to fill it. Every thing is constant and unchangeable.

**定理 9.1. [因果作用素と観測量]** 一般の基本構造

$$[\mathcal{A}_k \subseteq \overline{\mathcal{A}}_k \subseteq B(H_k)] \quad (k = 1, 2)$$

を考える。  $\Phi_{1,2} : \overline{\mathcal{A}}_2 \rightarrow \overline{\mathcal{A}}_1$  を因果作用素とする。このとき、 $\overline{\mathcal{A}}_2$  内の任意の観測量  $O_2 = (X, \mathcal{F}, F_2)$  に対して、 $(X, \mathcal{F}, \Phi_{1,2}F_2)$  は  $\overline{\mathcal{A}}_1$  内の観測量である。これを  $\Phi_{1,2}O_2 = (X, \mathcal{F}, \Phi_{1,2}F_2)$  と記す。

**証明**  $\Xi (\in \mathcal{F})$  の可算分割  $\{\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n, \dots\}$  (すなわち,  $\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Xi_n, \Xi_n \in \mathcal{F}, (n =$

$1, 2, \dots$ ),  $\Xi_m \cap \Xi_n = \emptyset$  ( $m \neq n$ ) を考える. 因果作用素の定義 8.4 に注意して, 任意の  $\rho_1 \in \mathcal{A}_1^*$  に対して,

$$\begin{aligned} (\bar{\mathcal{A}}_1)_* \left( \rho_1, \Phi_{1,2} F_2 \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \Xi_n \right) \right)_{\bar{\mathcal{A}}_1} &= (\bar{\mathcal{A}}_1)_* \left( \Phi_{1,2}^* \rho_1, F_2 \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \Xi_n \right) \right)_{\bar{\mathcal{A}}_2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{\mathcal{A}}_1)_* \left( \Phi_{1,2}^* \rho_1, F_2(\Xi_n) \right)_{\bar{\mathcal{A}}_2} = \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{\mathcal{A}}_1)_* \left( \rho_1, \Phi_{1,2} F_2(\Xi_n) \right)_{\bar{\mathcal{A}}_2} \end{aligned}$$

よって,  $\Phi_{1,2} \mathcal{O}_2 = (X, \mathcal{F}, \Phi_{1,2} F_2)$  が,  $C(\Omega_1)$  内の観測量であることが証明された.  $\square$

簡単な例から始める.  $T = \{0, 1\}$  として, 一般の基本構造

$$[\mathcal{A}_t \subseteq \bar{\mathcal{A}}_t \subseteq B(H_t)] \quad (t = 0, 1)$$

を考える. 因果作用素  $\Phi_{0,1} : \bar{\mathcal{A}}_1 \rightarrow \bar{\mathcal{A}}_0$  を考える. すなわち,

$$\bar{\mathcal{A}}_0 \xleftarrow{\Phi_{0,1}} \bar{\mathcal{A}}_1 \tag{9.2}$$

したがって, 前双対作用素  $(\Phi_{0,1})_*$  と双対作用素  $\Phi_{0,1}^*$ :

$$(\bar{\mathcal{A}}_0)_* \xrightarrow{(\Phi_{0,1})_*} (\bar{\mathcal{A}}_1)_* \quad \mathcal{A}_0^* \xrightarrow{\Phi_{0,1}^*} \mathcal{A}_1^* \tag{9.3}$$

を考える. もし  $\Phi_{0,1} : \bar{\mathcal{A}}_1 \rightarrow \bar{\mathcal{A}}_0$  が決定的ならば, 次を得る.

$$\mathcal{A}_0^* \supset \mathfrak{S}^p(\mathcal{A}_0^*) \ni \rho \xrightarrow{\Phi_{0,1}^*} \Phi_{0,1}^* \rho \in \mathfrak{S}^p(\mathcal{A}_1^*) \subset \mathcal{A}_1^* \tag{9.4}$$

上述の準備の下に, 「ハイゼンベルグ描像」を説明しよう.

次を仮定しよう.

- (A<sub>1</sub>) 決定的因果作用素  $\Phi_{0,1} : \bar{\mathcal{A}}_1 \rightarrow \bar{\mathcal{A}}_0$  を想定する.
- (A<sub>2</sub>) 状態  $\rho_0 \in \mathfrak{S}^p(\mathcal{A}_0^*)$ : 純粋状態を固定する.
- (A<sub>3</sub>)  $\bar{\mathcal{A}}_1$  内の観測量  $\mathcal{O}_1 = (X_1, \mathcal{F}_1, F_1)$  を固定する.

このとき, 次を考える.

説明 9.2. [ハイゼンベルグ描像]. ハイゼンベルグ描像とは, 次の (a) のことである.

(a1)  $\overline{\mathcal{A}}_1$  内の観測量  $O_1$  を  $\overline{\mathcal{A}}_0$  内の観測量  $\Phi_{0,1}O_1$  と同一視する. すなわち.

$$\begin{array}{ccc} \Phi_{0,1}\overline{O}_1 & \xleftarrow[\text{同一視}]{\Phi_{0,1}} & O_1 \\ (\text{in } \overline{\mathcal{A}}_0) & & (\text{in } \overline{\mathcal{A}}_1) \end{array}$$

したがって,

(a2) (時刻  $t = 0$  における) 状態  $\rho_0 \in \mathfrak{G}^p(\mathcal{A}_0^*)$  を持つシステムに対する (時刻  $t = 1$  における) 観測量  $O_1$  の測定は

$$M_{\overline{\mathcal{A}}_0}(\Phi_{0,1}O_1, S_{[\rho_0]})$$

と表現できる.

したがって, 言語ルール 1(測定: §2.7) によって,

(a3) 測定値が  $\Xi(\in \mathcal{F})$  に属する確率は次で与えられる

$$\mathcal{A}_0^* \left( \rho_0, \Phi_{0,1}(F_1(\Xi)) \right)_{\overline{\mathcal{A}}_0} \quad (9.5)$$

説明 9.3. [シュレーディンガー描像]. シュレーディンガー描像とは, 次の (b) のことである.

(b1) 純粋状態  $\Phi_{0,1}^*\rho_0 (\in \mathfrak{G}^p(\mathcal{A}_1^*))$  を  $\rho_0 (\in \mathfrak{G}^p(\mathcal{A}_0^*))$  と見なすこと, すなわち,

$$\mathcal{A}_0^* \supset \mathfrak{G}^p(\mathcal{A}_0^*) \ni \rho_0 \xrightarrow[\text{同一視}]{\Phi_{0,1}^*} \Phi_{0,1}^*\rho_0 \in \mathfrak{G}^p(\mathcal{A}_1^*) \subset \mathcal{A}_1^*$$

したがって,

(b2) (時刻  $t = 1$  における) 純粋状態  $\Phi_{0,1}^*\rho_0 \in \mathfrak{G}^p(\mathcal{A}_1^*)$  に対する (時刻  $t = 1$  における) 観測量  $O_1$  の測定は次のように表現できる:

$$M_{\overline{\mathcal{A}}_1}(O_1, S_{[\Phi_{0,1}^*\rho_0]})$$

よって, 言語ルール 1(測定: §2.7) によって,

(b3) 測定値が  $\Xi(\in \mathcal{F})$  に属する確率は次で与えられる

$$\mathcal{A}_1^* \left( \Phi_{0,1}^*\rho_0, F_1(\Xi) \right)_{\overline{\mathcal{A}}_1} \quad (9.6)$$

これは次に等しい:

$$\mathcal{A}_0^* \left( \rho_0, \Phi_{0,1}(F_1(\Xi)) \right)_{\overline{\mathcal{A}}_0} \quad (9.7)$$

この意味で、(すなわち、(9.6) and (9.7) ), 仮定 (A<sub>1</sub>) の下に、

**ハイゼンベルグ描像とシュレーディンガー描像は同値である**

すなわち、

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \text{観測量が動く} \\ \boxed{M_{\bar{\mathcal{A}}_0}(\Phi_{0,1}O_1, S_{[\rho_0]})} \\ \text{(ハイゼンベルグ描像)} \end{array} & \begin{array}{c} \longleftrightarrow \\ \text{(同一視)} \end{array} & \begin{array}{c} \text{状態が動く} \\ \boxed{M_{\bar{\mathcal{A}}_1}(O_1, S_{[\Phi_{0,1}^*\rho_0]})} \\ \text{(シュレーディンガー描像)} \end{array} & (9.8)
 \end{array}$$

となる。

**注意 9.4.** 上の議論で、条件 (A<sub>1</sub>)– 決定的因果作用素  $\Phi_{0,1} : \bar{\mathcal{A}}_1 \rightarrow \bar{\mathcal{A}}_0$  – は不可欠である。そうでないと、 $\Phi_{0,1}^*\rho_0$  が必ずしも純粋状態ではなくなって、シュレーディンガー描像が定義できなくなってしまう。他方、ハイゼンベルグ描像はこの場合でも定義できる。したがって、

- $\left\{ \begin{array}{l} \text{ハイゼンベルグ描像は正式} \\ \text{シュレーディンガー描像は場合の手法} \end{array} \right.$

と言える。

## 9.2 射影公準：量子言語における「波束の収縮」

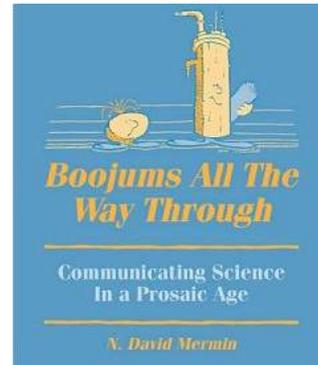
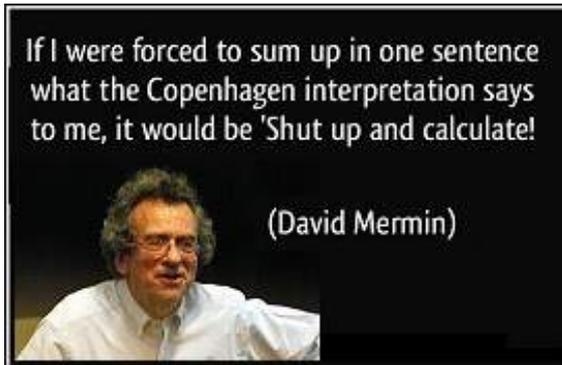
「いわゆるコペンハーゲン解釈」が意味不明なものであることは、「波束の収縮を認める派」と「認めない派」が混在していることでもわかる。これでは、「解釈」の体を成していない。すなわち、「いわゆるコペンハーゲン解釈」なんて、存在しないのだと思う。事実、マーミン (cf. 文献 [64]) も

- コペンハーゲン解釈を一言で言えば、

『ツベコベ言わずに黙って、計算せよ』

である

と言ってるぐらいだから、いわゆるコペンハーゲン解釈など有名無実で、無いに等しいのだと思う\*1.



しかし、

- 言語的コペンハーゲン解釈では、波束の収縮について完全な解答をすることができる

以下、これを説明しよう。

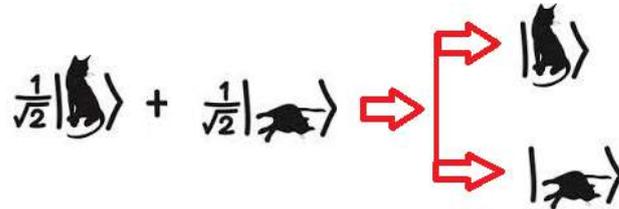
量子言語では、「測定後の状態を考えない」のだから、一般論としては波束の収縮は考えない。しかし、「波束の収縮もどきを実現させる技法」はある。(cf. [48]) \*2.

「コペンハーゲン解釈」を名乗るならば、射影公準「波束の収縮もどきを実現させる技法」を初めに発表すべきであったが大幅に遅れてしまった。これは、研究当初の問題意識が「統計学の二元論的定式化」とか「二元論の復権」であり、「コペンハーゲン解釈の定式化」という意識が希薄であったことに起因するが、著者の力量不足と言われればそうかもしれない。

\*1 『『コペンハーゲン解釈』なんてない。あるのはコペンハーゲン学派 (ボーアやハイゼンベルグ等) だけで、コペンハーゲン学派のみんなの意見が一致していたわけではない。(文献 [20]D.Howard, Philosophy of Science, 71, 2004, 669-682)』という説に同意する

324\*2 [S. Ishikawa, Linguistic interpretation of quantum mechanics; Projection postulate, JQIS, 5(4)2015]

9.2.1 問題：射影仮説 (フォン・ノイマン=リューダースの射影仮説)



量子基本構造  $[\mathcal{C}(H), B(H)]_{B(H)}$  を考えよう.  $\Lambda$  を加算集合とする.  $O_P = (\Lambda, 2^\Lambda, P)$  を  $B(H)$  内の射影観測量とする. ここで、

$$P_\lambda = P(\{\lambda\}) \quad (\forall \lambda \in \Lambda) \tag{9.9}$$

と置く. 言語ルール 1 (測定: §2.7) によれば、

(A<sub>1</sub>) 測定  $M_{B(H)}(O_P := (\Lambda, 2^\Lambda, P), S_{[\rho]})$  によって、測定値  $\lambda_0 (\in \Lambda)$  が得られる確率は次で与えられる：

$$\text{Tr}_H(\rho P_{\lambda_0}) (= \langle u, P_{\lambda_0} u \rangle = \|P_{\lambda_0} u\|^2), \quad (\text{where } \rho = |u\rangle\langle u|) \tag{9.10}$$

また、フォン・ノイマン=リューダースの射影仮説 (cf. [73, 60]) は次を要請する：

(A<sub>2</sub>) 測定  $M_{B(H)}(O_P := (\Lambda, 2^\Lambda, P), S_{[\rho]})$  によって、測定値  $\lambda_0 (\in \Lambda)$  が得られたとき、測定後の状態  $\rho_{\text{post}}$  は次で与えられる：

$$\rho_{\text{post}} = \frac{P_{\lambda_0} |u\rangle\langle u| P_{\lambda_0}}{\|P_{\lambda_0} u\|^2}$$

したがって、更なる測定  $M_{B(H)}(O_F := (X, \mathcal{F}, F), S_{[\rho_{\text{post}}]})$  を行うとき (ここに、 $O_F$  は  $B(H)$  内の任意の観測量)、測定値が  $\Xi (\in \mathcal{F})$  に属する確率は次で与えられる：

$$\text{Tr}_H(\rho_{\text{post}} F(\Xi)) \left( = \left\langle \frac{P_{\lambda_0} u}{\|P_{\lambda_0} u\|}, F(\Xi) \frac{P_{\lambda_0} u}{\|P_{\lambda_0} u\|} \right\rangle \right) \tag{9.11}$$

ここで、次の問題を得る：

**問題 9.5.** ここまででもしばしば述べているように、言語的解釈では  $(A_2)$  で述べたフレーズ “測定後の状態” は無意味である。また、上  $(= (A_1) + (A_2))$  は同時測定  $M_{B(H)}(\mathcal{O}_F \times \mathcal{O}_P, S_{[\rho]})$  と等しい (これは  $\mathcal{O}_P$  と  $\mathcal{O}_F$  が可換でなければ意味を持たない)。よって、 $(A_2)$  は一般には意味を成さない。したがって、次の問題が発生する：

(B)  $M_{B(H)}(\mathcal{O}_F \times \mathcal{O}_P, S_{[\rho]})$  内の  $\mathcal{O}_F \times \mathcal{O}_P$  の代わりに如何なる観測量が選ばれるべきか？

次節でこの問題に答える。

### 9.2.2 フォン・ノイマン＝リューダースの射影仮説 (もどき) の導出

二つの量子基本構造  $[\mathcal{C}(H), B(H)]_{B(H)}$  と  $[\mathcal{C}(H \otimes K), B(H \otimes K)]_{B(H \otimes K)}$  を考えよう。  $B(H)$  内のスペクトル分解  $\{P_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  を 11.2.1 節で述べたように定める。  $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  をヒルベルト空間  $K$  内の完全正規直交系 とする。前マルコフ作用素  $\Psi_* : Tr(H) \rightarrow Tr(H \otimes K)$  を次のように定める：

$$\Psi_*(|u\rangle\langle u|) = \left| \sum_{\lambda \in \Lambda} (P_\lambda u \otimes e_\lambda) \right\rangle \left\langle \sum_{\lambda \in \Lambda} (P_\lambda u \otimes e_\lambda) \right| \quad (\forall u \in H) \quad (9.12)$$

(エンタングルメント)

または、

$$\Psi_*(|u\rangle\langle u|) = \sum_{\lambda \in \Lambda} |P_\lambda u \otimes e_\lambda\rangle \langle P_\lambda u \otimes e_\lambda| \quad (\forall u \in H) \quad (\text{デコヒーレンス}) \quad (9.13)$$

したがって、マルコフ作用素  $\Psi : B(H \otimes K) \rightarrow B(H)$  (言語ルール 2(因果関係: §8.3)) を  $\Psi = (\Psi_*)^*$  で定義できる。

$B(K)$  内の射影観測量  $\mathcal{O}_G = (\Lambda, 2^\Lambda, G)$  を次のように定める：

$$G(\{\lambda\}) = |e_\lambda\rangle\langle e_\lambda| \quad (\lambda \in \Lambda)$$

ここで、 $\mathcal{O}_F = (X, \mathcal{F}, F)$  を  $B(H)$  内の任意の観測量として、 $B(H \otimes K)$  内のテンソル観測量  $\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_G = (X \times \Lambda, \mathcal{F} \boxtimes 2^\Lambda, F \otimes G)$  を得る ( $\mathcal{F} \boxtimes 2^\Lambda$  は積  $\sigma$ -集合体)。

純粋状態  $\rho = |u\rangle\langle u|$  ( $u \in H, \|u\|_H = 1$ ) を固定して、測定  $M_{B(H)}(\Psi(\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_G), S_{[\rho]})$  を考えよう。このとき、言語ルール 1 (測定; §2.7) により、次を得る

(C)  $M_{B(H)}(\Psi(\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_G), S_{[\rho]})$  によって得られる測定値  $(x, \lambda)$  が  $\Xi \times \{\lambda_0\}$  に属する確率は次のようになる：

$$\text{Tr}_H[ (|u\rangle\langle u|) \Psi(F(\Xi) \otimes G(\{\lambda_0\})) ] = \text{Tr}_{Tr(H)} (|u\rangle\langle u|, \Psi(F(\Xi) \otimes G(\{\lambda_0\})))_{B(H)}$$

$$\begin{aligned}
 &=_{\text{Tr}_{(H \otimes K)}} (\Psi_*(|u\rangle\langle u|), F(\Xi) \otimes G(\{\lambda_0\}))_{B(H \otimes K)} \\
 &= \text{Tr}_{H \otimes K} [(\Psi_*(|u\rangle\langle u|))(F(\Xi) \otimes G(\{\lambda_0\}))] \\
 &= \text{Tr}_{H \otimes K} [(\sum_{\lambda \in \Lambda} (P_\lambda u \otimes e_\lambda)) \langle \sum_{\lambda \in \Lambda} (P_\lambda u \otimes e_\lambda) | (F(\Xi) \otimes |e_{\lambda_0}\rangle\langle e_{\lambda_0}|)] \\
 &= \langle P_{\lambda_0} u, F(\Xi) P_{\lambda_0} u \rangle \quad (\forall \Xi \in \mathcal{F})
 \end{aligned}$$

( (9.13) の場合も同じように計算できる).

したがって、次を結論できる.

(D<sub>1</sub>) もし  $\Xi = X$  ならば、次が成立する :

$$\text{Tr}_H [(|u\rangle\langle u|)\Psi(F(X) \otimes G(\{\lambda_0\}))] = \langle P_{\lambda_0} u, P_{\lambda_0} u \rangle = \|P_{\lambda_0} u\|^2 \tag{9.14}$$

(D<sub>2</sub>) 測定値  $(x, \lambda)$  が  $X \times \{\lambda_0\}$  に属したとき、 $x \in \Xi$  である条件付き確率は、次で与えられる :

$$\frac{\langle P_{\lambda_0} u, F(\Xi) P_{\lambda_0} u \rangle}{\|P_{\lambda_0} u\|^2} \left( = \left\langle \frac{P_{\lambda_0} u}{\|P_{\lambda_0} u\|}, F(\Xi) \frac{P_{\lambda_0} u}{\|P_{\lambda_0} u\|} \right\rangle \right) \quad (\forall \Xi \in \mathcal{F}) \tag{9.15}$$

ここで、観測量  $O_F$  は任意であったことに注意しよう. また、上 (i.e., 射影仮説 (D)) は言語ルール 1 と 2 の帰結であることにも注意しよう

対応 (A)  $\Leftrightarrow$  (D)、すなわち、

$$\begin{aligned}
 &M_{B(H)}(O_P, S_{[\rho]}) \left( \text{or, 無意味な } M_{B(H)}(O_F \times O_P, S_{[\rho]}) \right) \\
 &\Leftrightarrow M_{B(H)}(\Psi(O_F \otimes O_G), S_{[\rho]}),
 \end{aligned}$$

つまり、

$$(9.9) \Leftrightarrow (9.14), \quad (9.11) \Leftrightarrow (9.15)$$

の下に、(A) の真の意味は (D) であると結論することには一理ある. ここで、禁句「測定後の状態」が (D<sub>2</sub>) では使われていないことを確認せよ. したがって、問題 9.5 の解答は  $\Psi(O_F \otimes O_G)$  である.

**注意 9.6.** いわゆるコペンハーゲン解釈は、「測定後の状態 (i.e., 波束の収縮)」を認めている (cf. [20]). そうならば、読者は、(D<sub>2</sub>) の帰結として、観測量  $O_F$  の任意性より「測定後の状態  $= \frac{P_{\lambda_0}|u\rangle\langle u|P_{\lambda_0}}{\|P_{\lambda_0}u\|^2}$ 」と結論するかもしれない. しかし、言語的解釈「測定は一回だけ」では、この結論は間違いである. もし「測定後の状態」を認めてしまったら、困った問題が続出する. たとえば、「測定はいつ成されたのか?」、「波束の収縮はいつ起きるのか?、その速さは?」等であり、これらは当然のことであるが、言語ルール 1 と 2 の範囲外である. 量子言語は言語なのだか

ら、ウィトゲンシュタインの言葉

**The limits of my language mean the limits of my world**

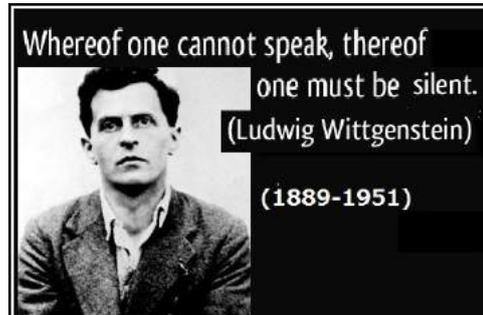
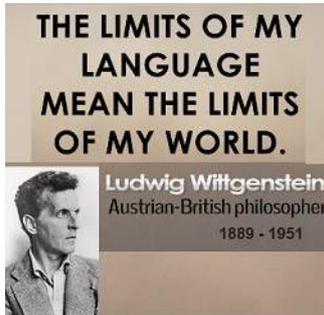
(私の言語の限界が、私の世界の限界)

とか

**What we cannot speak about we must pass over in silence.**

(語りえぬものには、沈黙しなければならない)

を思い出すべきである。



////

議論 (A<sub>2</sub>) は間違っているわけであるが、「(A<sub>2</sub>) を正しい議論 (D<sub>2</sub>) の省略形と見なす」ならば (A<sub>2</sub>) は使える。これを射影仮説 9.7 として、以下に述べておく。

**仮説 9.7. [射影仮説]** 命題 (A<sub>2</sub>) (= フォン・ノイマン=リューダースの射影仮説) は間違いである。しかしながら、上の (D<sub>2</sub>) の意味で、命題 (A<sub>2</sub>) を使うならば記述が簡潔になる。すなわち、(D<sub>2</sub>) の意味で次のような記述をしばしば行う：

(E) 測定  $M_{B(H)}(O_P := (\Lambda, 2^\lambda, P), S_{[\rho]})$  によって、測定値  $\lambda_0 (\in \Lambda)$  が得られたとき、測定後の状態  $\rho_{\text{post}}$  は次で与えられる：

$$\rho_{\text{post}} = \frac{P_{\lambda_0} |u\rangle \langle u| P_{\lambda_0}}{\|P_{\lambda_0} u\|^2} \tag{9.16}$$

### 9.3 ド・ブロイのパラドックス (非局所性 (=超光速))

この節では,  $B(L^2(\mathbb{R}))$  内のド・ブロイのパラドックスの説明する (cf. 2.10 節:  $B(\mathbb{C}^2)$  内のド・ブロイのパラドックス).

$\mathbb{q} = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$  として,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_3^2}$$

と定めて, 一粒子系のシュレーディンガー方程式:

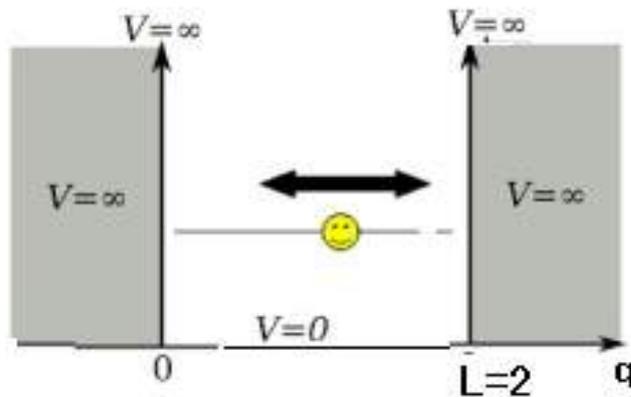
$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbb{q}, t) = \left[ \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbb{q}, t) \right] \psi(\mathbb{q}, t) \tag{9.17}$$

を考える. ここに,  $m$  は粒子の質量,  $V$  はポテンシャルエネルギーとする.

図示のため,  $\mathbb{R}^3$  を  $\mathbb{R}$  とする. したがって, ヒルベルト空間  $H = L^2(\mathbb{R}, dq)$  を考える. 任意の時刻  $t \in \mathbb{R}$  において,  $H_t = H$  として, 量子系の基本構造

$$[\mathcal{C}(H) \subseteq B(H) \subseteq B(H)]$$

を想定しよう.



準備 9.8. [シュレーディンガー方程式]. 質量  $m$  の粒子  $P$  が, 箱 (すなわち, 閉区間  $[0, 2]$ ) に入っているとしよう. 時刻  $t = t_0$  の (初期) 状態を  $\rho_{t_0} = |\psi_{t_0}\rangle\langle\psi_{t_0}| \in \mathfrak{S}^p(\mathcal{C}(H)^*)$  としよう. 時刻  $t (\geq t_0)$  での粒子  $P$  の状態  $\rho_t = |\psi_t\rangle\langle\psi_t|$  とする. ここに,  $\psi_t = \psi(\cdot, t) \in H = L^2(\mathbb{R}, dq)$

は次のシュレーディンガー方程式を満たす.

$$\begin{cases} \text{初期条件} : \psi(\cdot, t_0) = \psi_{t_0} \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(q, t) = \left[ \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q, t) \right] \psi(q, t) \end{cases} \quad (9.18)$$

ここで, ポテンシャル  $V(q, t)$  は, 以下のように定める.  $t = t_0$  では,

$$V(q, t_0) = V_0(q) = \begin{cases} 0 & (0 \leq q \leq 2) \\ \infty & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

で以下の通り :

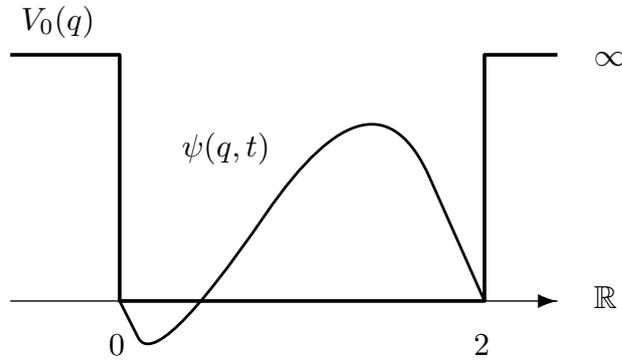


図 9.1(1) : (時刻  $t_0$ )

次に, 箱  $[0, 2]$  の中に仕切り板を置いて, 二つの箱  $[0, 1]$  と  $[1, 2]$  に分割する. これは, ポテンシャル  $V(t)$  を  $V_0(q)$  から  $V_1(q)$  に変化させることと同じである. ここに,

$$V_1(q) = \begin{cases} 0 & (0 \leq q < 1) \\ \infty & (q = 1) \\ 0 & (1 < q \leq 2) \\ \infty & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (9.19)$$

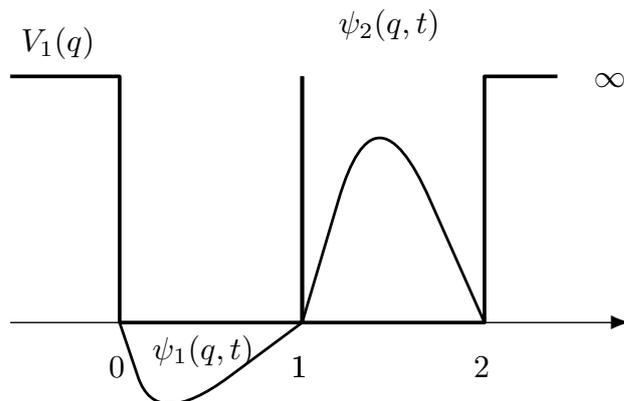


図 9.1(2) : (仕切り板を入れる)

次に、二つの箱  $[0, 1]$  と  $[1, 2]$  を切り離して、 $[1, 2]$  を遠く離れた  $T$  地点 (ニューヨーク) に持って行き、これを  $[a, a + 1]$  とする。ここで、 $|a|$  はかなり大きいとする。

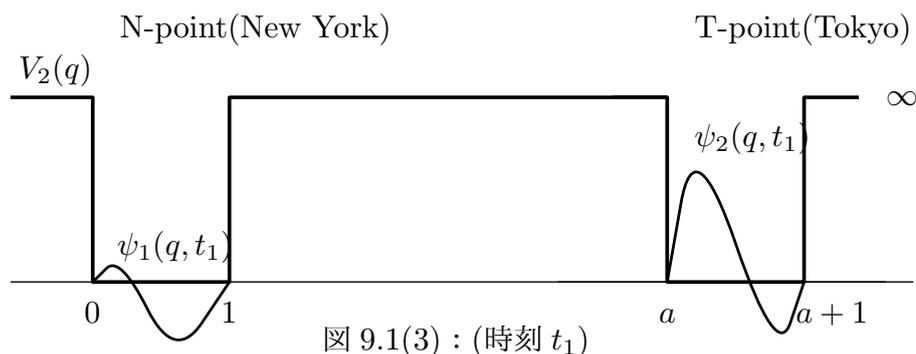


図 9.1(3) : (時刻  $t_1$ )

シュレーディンガー方程式 (9.18) を解いて

$$\psi_1(\cdot, t_1) + \psi_2(\cdot, t_1) = U_{t_0, t_1} \psi_{t_0}$$

と置く。ここに、 $U_{t_0, t_1} : L^2(\mathbb{R}_{t_1}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_{t_0})$  はユニタリ作用素となる。因果作用素  $\Phi_{t_0, t_1} : B(L^2(\mathbb{R}_{t_2})) \rightarrow B(L^2(\mathbb{R}_{t_1}))$  は次のように定まる：

$$\Phi_{t_0, t_1}(A) = U_{t_0, t_1}^* A U_{t_0, t_1} \quad (\forall A \in B(L^2(\mathbb{R}_{t_2})))$$

さて、ヒルベルト空間  $H = L^2(\mathbb{R}, dq)$  であったことを思い出して、 $B(H)$  内の観測量  $O = (X = \{N, T, E\}, 2^X, F)$  を次のように定義する。

$$[F(\{N\})](q) = \begin{cases} 1 & (q \in [0, 1]) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$$[F(\{T\})](q) = \begin{cases} 1 & (q \in [a, a + 1]) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$$[F(\{E\})](q) = 1 - [F(\{N\})](q) - [F(\{T\})](q)$$

**結論 9.9.**

ハイゼンベルグ描像でかけば, 言語ルール 1 (測定: §2.7) によって、

(A<sub>1</sub>) 測定  $M_{B(L^2(\mathbb{R}_{t_0}))}(\Phi_{t_0, t_1} \mathbf{O}, S_{[|\psi_{t_0}\rangle\langle\psi_{t_0}|]})$  によって、測定値  $\begin{bmatrix} N \\ T \\ E \end{bmatrix}$  が得られる確率は、  
次で与えられる。

$$\begin{bmatrix} \langle u_{t_0}, \Phi_{t_0, t_1} F(\{N\}) u_{t_0} \rangle = \int_0^1 |\psi_1(q, t_1)|^2 dq \\ \langle u_{t_0}, \Phi_{t_0, t_1} F(\{T\}) u_{t_0} \rangle = \int_{a+1}^{a+2} |\psi_2(q, t_1)|^2 dq \\ \langle u_{t_0}, \Phi_{t_0, t_1} F(\{E\}) u_{t_0} \rangle = 0 \end{bmatrix}$$

また、シュレーディンガー描像でかけば, 言語ルール 1 (測定: §2.7) によって、

(A<sub>1</sub>) 測定  $M_{B(L^2(\mathbb{R}_{t_0}))}(\mathbf{O}, S_{[\Phi_{t_0, t_1}^* (|\psi_{t_0}\rangle\langle\psi_{t_0}|)])}$  によって、測定値  $\begin{bmatrix} N \\ T \\ E \end{bmatrix}$  が得られる確率は、  
次で与えられる。

$$\begin{bmatrix} \text{Tr}(\Phi_{t_0, t_1}^* (|\psi_{t_0}\rangle\langle\psi_{t_0}|) \cdot F(\{N\})) \\ \text{Tr}(\Phi_{t_0, t_1}^* (|\psi_{t_0}\rangle\langle\psi_{t_0}|) \cdot F(\{T\})) \\ \text{Tr}(\Phi_{t_0, t_1}^* (|\psi_{t_0}\rangle\langle\psi_{t_0}|) \cdot F(\{E\})) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \int_0^1 |\psi_1(q, t_1)|^2 dq \\ \int_{a+1}^{a+2} |\psi_2(q, t_1)|^2 dq \\ 0 \end{bmatrix}$$

ここで、当然のことであるが、

$$(A_1) = (A_2)$$

であることに注意せよ。

**注意 9.10.** 上で、測定値 “N” を得たと仮定しよう。すなわち、箱  $[0, 1]$  内に電子を発見したとしよう。このとき、射影仮説 9.7 の意味で、波動関数  $\psi_2$  が消滅したと考えるかもしれない。すなわち、

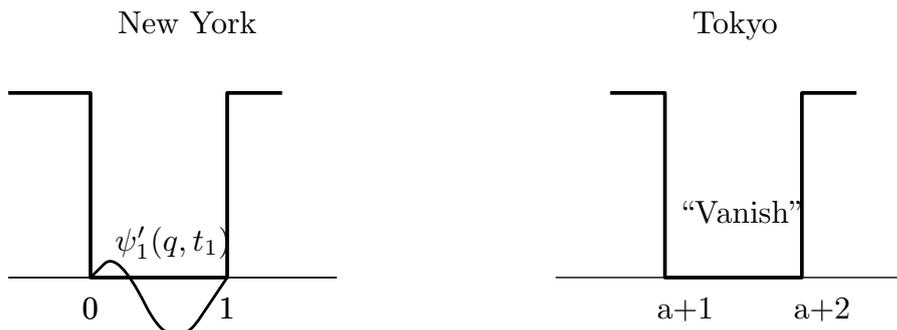


図 9.1(4) 測定後 (の状態?)

ここで、

$$\psi'_1(q, t_1) = \frac{\psi_1(q, t_1)}{\|\psi'_1(\cdot, t_1)\|}$$

これは、次のような“波動関数の収縮 (=測定後の状態)”

$$\psi_1(\cdot, t_1) + \psi_2(\cdot, t_1) \xrightarrow{\text{波動関数の収縮 (=測定後の状態)}} \psi'_1(\cdot, t_1) \quad (9.20)$$

と呼ばれる「現象 (射影仮説 9.7 の意味での現象)」である。しかしながら、量子言語では、「状態は不変」のはずで、したがって、普通は“波動関数の収縮 (=測定後の状態)”は考えない。この意味では、

- ハイゼンベルグ描像 ( $A_1$ ) だけに徹した方が間違えにくい

また、ニューヨーク [resp. 東京] を地球 [resp. 北極星] と考えてもよいわけで、

- 結論 9.9 は、「光より速い何かが存在する (=非局所性)」ことを示唆している

わけで、これは“ド・ブロイのパラドックス”と呼ばれる (cf. [13, 71]). これは正真正銘のパラドックスで、量子言語でも解決できるわけではない。

## 9.4 量子ゼノン効果: 「見ていると餅はなかなか焼けない」わけではない

この節は次の論文 (というより、メモ) からの抜粋である :

- Ref. [40]: S. Ishikawa; Heisenberg uncertainty principle and quantum Zeno effects in the linguistic interpretation of quantum mechanics ( arXiv:1308.5469 [quant-ph] 2014 )

### 9.4.1 量子デコヒーレンス: 非決定的因果作用素列

基本構造  $[\mathcal{C}(H), B(H)]_{B(H)}$  を考える.  $B(H)$  内のスペクトル分解  $\mathbb{P} = [P_n]_{n=1}^{\infty}$ , すなわち,

$$P_n \text{ は射影作用素で, } \sum_{n=1}^{\infty} P_n = I$$

とする. 写像  $(\Psi_{\mathbb{P}})_* : Tr(H) \rightarrow Tr(H)$  を次のように定める :

$$(\Psi_{\mathbb{P}})_*(|u\rangle\langle u|) = \sum_{n=1}^{\infty} |P_n u\rangle\langle P_n u| \quad (\forall u \in H)$$

明らかに,

$$\langle v, (\Psi_{\mathbb{P}})_*(|u\rangle\langle u|)v \rangle = \langle v, \left( \sum_{n=1}^{\infty} |P_n u\rangle\langle P_n u| \right) v \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle v, P_n u \rangle|^2 \geq 0$$

$$(\forall u, v \in H)$$

しかも,

$$\begin{aligned} & \text{Tr}((\Psi_{\mathbb{P}})_*(|u\rangle\langle u|)) \\ &= \text{Tr}\left(\sum_{n=1}^{\infty} |P_n u\rangle\langle P_n u|\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, P_n u \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n u\|^2 = \|u\|^2 \end{aligned}$$

$$(\forall u \in H)$$

よって,

$$(\Psi_{\mathbb{P}})_*(\mathcal{T}r_{+1}^p(H)) \subseteq \mathcal{T}r_{+1}(H)$$

したがって,

- $\Psi_{\mathbb{P}} (= ((\Psi_{\mathbb{P}})_*)^*) : B(H) \rightarrow B(H)$  は因果作用素であるが、決定的因果作用素ではない。

このような「非決定的因果作用素(列)」のことを、量子デコヒーレンスと呼ぶ。

**例 9.11.** [量子デコヒーレンス cf. [37]]. 因果作用素  $(\Psi_S^{\Delta t})_* : \mathcal{T}r(H) \rightarrow \mathcal{T}r(H)$  を次のように定める：

$$(\Psi_S^{\Delta t})_*(|u\rangle\langle u|) = |e^{-\frac{i\mathcal{H}\Delta t}{\hbar}}u\rangle\langle e^{-\frac{i\mathcal{H}\Delta t}{\hbar}}u| \quad (\forall u \in H)$$

ここに、ハミルトニアン  $\mathcal{H}$  (cf. (8.23)) は以下のように定める：

$$\mathcal{H} = \left[ \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q, t) \right]$$

$\mathbb{P} = [P_n]_{n=1}^{\infty}$  を  $B(H)$  内のスペクトル分解とする。すなわち、各  $n$  に対して、 $P_n \in B(H)$  は次を満たす射影作用素：

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = I$$

ここで、 $(\Psi_{\mathbb{P}})_* : \mathcal{T}r(H) \rightarrow \mathcal{T}r(H)$  を次のように定める：

$$(\Psi_{\mathbb{P}})_*(|u\rangle\langle u|) = \sum_{n=1}^{\infty} |P_n u\rangle\langle P_n u| \quad (\forall u \in H)$$

また、シュレーディンガー描像による時間発展  $(\Psi_S^{\Delta t})_* : \mathcal{T}r(H) \rightarrow \mathcal{T}r(H)$  を以下のように定める：

$$(\Psi_S^{\Delta t})_*(|u\rangle\langle u|) = |e^{-\frac{i\mathcal{H}\Delta t}{\hbar}}u\rangle\langle e^{-\frac{i\mathcal{H}\Delta t}{\hbar}}u| \quad (\forall u \in H)$$

時刻  $t = 0, 1$  を考えて、 $\Delta t = \frac{1}{N}$ ,  $H = H_0 = H_1$  と置いて、前共役因果作用素  $(\Phi_{0,1}^{(N)})_* : \mathcal{T}r(H_0) \rightarrow \mathcal{T}r(H_1)$  を次のように定める：

$$(\Phi_{0,1}^{(N)})_* = ((\Psi_S^{1/N})_*(\Psi_{\mathbb{P}})_*)^N$$

これの共役作用素  $\Phi_{0,1}^{(N)} = ((\Phi_{0,1}^{(N)})_*)^*$  から、因果作用素  $\Phi_{0,1}^{(N)} : B(H_1) \rightarrow B(H_0)$ 。

$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  を時刻 0 における初期状態とする。  $B(H_1)$  内の観測量  $O_1 := (X, \mathcal{F}, F)$  を固定して、ハイゼンベルグ描像によって、

$$\boxed{B(H_0)} \xleftarrow{\Phi_{0,1}^{(N)}} \boxed{B(H_1)}_{O_1 := (X, \mathcal{F}, F)}$$

$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$

次の測定を得る.

$$M_{B(H_0)}(\Phi_{0,1}^{(N)} O_1, S_{[\rho]})$$

(もうすこし正確に書くと、 $M_{B(H_0)}(\Phi_{0,1}^{(N)} O := (X, \mathcal{F}, \Phi_{0,1}^{(N)} F), S_{[|\psi\rangle\langle\psi|]})$ )

ここで、言語ルール 1 (§2.7) によれば、

(A) 測定値が  $\Xi (\in \mathcal{F})$  に属す確率は次で与えられる :

$$\text{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi| \cdot \Phi_{0,1}^{(N)} F(\Xi)) \tag{9.21}$$

以上の準備の下に、“量子ゼノン効果”を説明しよう.

**例 9.12.** [量子ゼノン効果]  $\psi \in H$  ( $\|\psi\| = 1$ ) を固定する. スペクトル分解を

$$\mathbb{P} = [P_1 (= |\psi\rangle\langle\psi|), P_2 (= I - P_1)] \tag{9.22}$$

と定める. さらに、 $B(H_1)$  内の観測量  $O_1 := (X, \mathcal{F}, F)$  を次のように定める :

$$X = \{x_1, x_2\}, \quad \mathcal{F} = 2^X$$

かつ

$$F(\{x_1\}) = |\psi\rangle\langle\psi| (= P_1), \quad F(\{x_2\}) = I - |\psi\rangle\langle\psi| (= P_2),$$

さて、式 (9.21) (i.e., 測定値  $x_1$  が得られる確率) を計算しよう.

$$\begin{aligned} (9.21) &= \text{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi| \cdot \Phi_{0,1}^{(N)} F(\{x_1\})) \\ &= \langle\psi, ((\Psi_S^{1/N})_* (\Psi_{\mathbb{P}})_*)^N (|\psi\rangle\langle\psi|)\psi\rangle \\ &\geq |\langle\psi, e^{-\frac{i\mathcal{H}}{\hbar N}} \psi\rangle \langle\psi, e^{\frac{i\mathcal{H}}{\hbar N}} \psi\rangle|^N \\ &\approx \left(1 - \frac{1}{N^2} \left(\|(\frac{\mathcal{H}}{\hbar})\psi\|^2 - |\langle\psi, (\frac{\mathcal{H}}{\hbar})\psi\rangle|^2\right)\right)^N \rightarrow 1 \end{aligned} \tag{9.23}$$

( $N \rightarrow \infty$ )



したがって、, 十分大きな  $N$  に対しては、

$$M_{B(H_0)}(\Phi_{0,1}^{(N)} O_1, S_{[|\psi\rangle\langle\psi|]}) \approx M_{B(H_0)}(\Phi_I O_1, S_{[|\psi\rangle\langle\psi|]})$$

(ここに、 $\Phi_I : B(H_1) \rightarrow B(H_0)$  は恒等作用素)

$$= M_{B(H_0)}(O_1, S_{[|\psi\rangle\langle\psi|]})$$

よって、シュレーディンガー描像で言うならば、

状態  $|\psi\rangle\langle\psi|$  は動かない。

**注意 9.13.** 上の議論は B. Misra と E.C.G. Sudarshan [63] による。しかしながら、彼らの論文のタイトル “The Zeno’s paradox in quantum theory” は魅力的であるが正確ではない。なぜならば、

(B) 上の議論においては、スペクトル分解  $\mathbb{P}$  は観測量と見なせない

からである。つまり、**Example 9.12** の効果は、“ブレーキ効果” であって、“「見ているとなかなか餅が焼けない」という効果” ではない。言語的コペンハーゲン解釈 (cf. 3.1 節) の「測定者は現象に影響を与えない」を思い出そう。

---

## 9.5 シュレーディンガーの猫、ウィグナーの友人とラプラスの魔

### 9.5.1 シュレーディンガーの猫とウィグナーの友人

「シュレーディンガーの猫」のパラドックスを、シュレーディンガー描像の下に説明する。

「シュレーディンガーの猫」は量子力学で最も有名なパラドックスである。これを問題形式で説明する。

#### 問題 9.14. [シュレーディンガーの猫]

- (a) 箱の中に猫を入れておく。放射性元素、ガイガーカウンター、毒ガスの入っている小さい箱も入れておく。1時間後に放射性元素からは放射能が出る可能性は**半々**とする。もし放射能が出ると、ガイガーカウンターが鳴って、それが引き金になって毒ガスの入っている小さい箱の扉が開く。そうすれば、毒ガスが充満して、必然的に猫が死ぬという仕掛けである。また、放射能が出なければ、猫は元気に生きているというわけである。もちろん、箱の窓は閉じているので、あなたは猫がどうなっているのかを知らない。

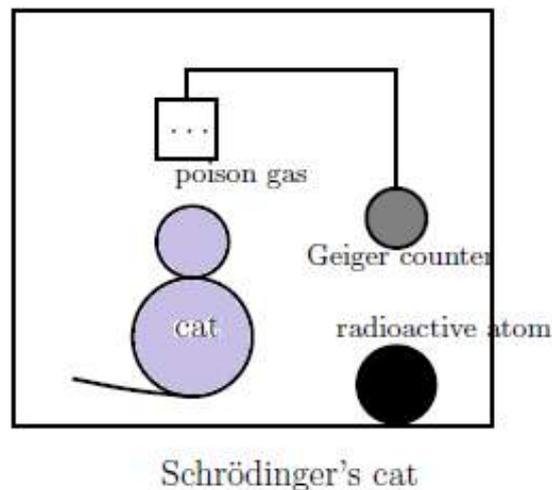


図 9.2 : シュレーディンガーの猫

さて、ここで次の問題を考えよう：

- (b) 一時間後に、あなたが箱の中を見たとして、猫はどうなっているのだろうか？ 生きているのか？ 死んでいるのか？もちろん、「**半々**」に違いないが、この「**半々**」の意味を明確にせよ。

♠ 注釈 9.1. [ウィグナーの友人]: 上の (b) の代わりに

(b') 一時間後に、「ウィグナーの友人」が箱の中を見たとして、それをさらに一時間後にあなたに伝えたとする。「ウィグナーの友人」が箱の中を見たときとかそれを「ウィグナーの友人」があなたに伝えたときとかに、猫はどうなっているのだろうか？

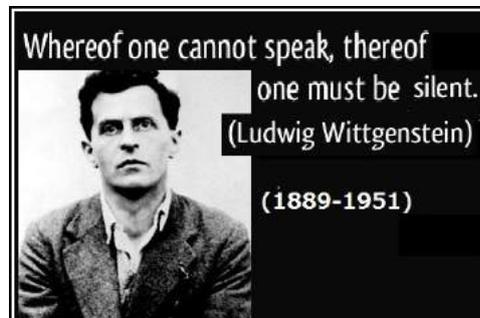
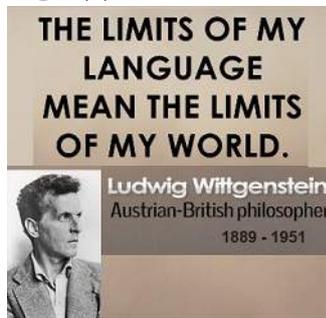
一見、難問と思うかもしれないが、言語的解釈では「測定した瞬間」という概念がないのだから、(b') は量子言語で記述できない。言語的科学観の精神 (ウィトゲンシュタインの言葉)

The limits of my language mean the limits of my world

とか

What we cannot speak about we must pass over in silence.

を思い出そう。



### 9.5.2 通常の解答 (量子デコヒーレンスを使わない解答)

解答 9.15. [問題 9.14 の通常の解答 ((射影仮説 9.7 を使う)].

$\mathbb{1} = (q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{21}, q_{22}, q_{23}, \dots, q_{n1}, q_{n2}, q_{n3}) \in \mathbb{R}^{3n}$  として,

$$\nabla_i^2 = \frac{\partial^2}{\partial q_{i1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_{i2}^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_{i3}^2}$$

と定めて、量子系の基本構造 :

$$\mathcal{C}(H) \subseteq B(H) \subseteq B(H) \quad (\text{ここで, } H = L^2(\mathbb{R}^{3n}, d_{\mathbb{1}}) \text{ とする})$$

内で、多粒子系 ( $n$  個の粒子系) のシュレーディンガー方程式 :

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbb{1}, t) = \left[ \sum_{i=1}^n \frac{-\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 + V(\mathbb{1}, t) \right] \psi(\mathbb{1}, t) \\ \psi_0(\mathbb{1}) = \psi(\mathbb{1}, 0) : \text{初期条件} \end{cases} \quad (9.24)$$

を考える。ここに、 $m_i$  は粒子  $P_i$  の質量、 $V$  はポテンシャルエネルギーとする。

量子力学を信じるとしたならば、上のシュレーディンガー方程式 (9.21) を解けばよい。すな

わち、

(A<sub>1</sub>) 一時間後 ( $t = 60^2$  秒後) の  $\psi_{(11, 60^2)}$  が計算できたとしよう。したがって、一時間後の箱の中の状態は、 $\rho_{60^2} (\in \mathcal{T}r_{+1}^p(H))$  は

$$\rho_{60^2} = |\psi_{60^2}\rangle\langle\psi_{60^2}| \tag{9.25}$$

となる (ここに、 $\psi_{60^2} = \psi(\cdot, 60^2)$ ) .

さて、 $B(H)$  内の次は観測量  $O = (X = \{ \text{生}, \text{死} \}, 2^X, F)$  を次のように定める。

(A<sub>2</sub>) つまり、

$$V_{\text{生}}(\subseteq H) = \left\{ u \in H \mid \text{”箱内の状態は } \frac{|u\rangle\langle u|}{\|u\|^2} \text{”} \Leftrightarrow \text{”猫は生きている”} \right\}$$

$$V_{\text{死}}(\subseteq H) = V_{\text{生}} \text{ の直交補空間}$$

として、 $F(\{ \text{生} \}) (\in B(H))$  は閉部分空間  $V_{\text{生}}$  への射影作用素、また、 $F(\{ \text{死} \}) = I - F(\{ \text{生} \})$ 、すなわち、閉部分空間  $V_{\text{死}}$  への射影作用素と定める。

ここで、

(A<sub>3</sub>) 測定  $M_{B(H)}(O = (X, 2^X, F), S[\rho_{60^2}])$  を考える。測定値「生」、 「死」を得る確率は、**「半々」** なのだから、

$$\mathcal{T}r_{(H)}(\rho_{60^2}, F(\{ \text{生} \}))_{B(H)} = \langle \psi_{60^2}, F(\{ \text{生} \}) \psi_{60^2} \rangle = 0.5$$

$$\mathcal{T}r_{(H)}(\rho_{60^2}, F(\{ \text{死} \}))_{B(H)} = \langle \psi_{60^2}, F(\{ \text{死} \}) \psi_{60^2} \rangle = 0.5$$

となるはずである。

そうだとしたら、

$$\psi_{60^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{\text{生}} + \psi_{\text{死}}) \tag{9.26}$$

(ここに、 $\psi_{\text{生}} \in V_{\text{生}}, \|\psi_{\text{生}}\| = 1$   $\psi_{\text{死}} \in V_{\text{死}}, \|\psi_{\text{死}}\| = 1$ )

と表現されるはずである。

次が結論できる。

(A<sub>4</sub>) 一時間後に、猫は**「(9.23) 式の意味で半死半生」**の状態である。誤解を恐れずに書くなれば、

$$\frac{\text{“ 図 } (\#_1) \text{”} + \text{“ 図 } (\#_2) \text{”}}{\sqrt{2}}$$

のような状態である.

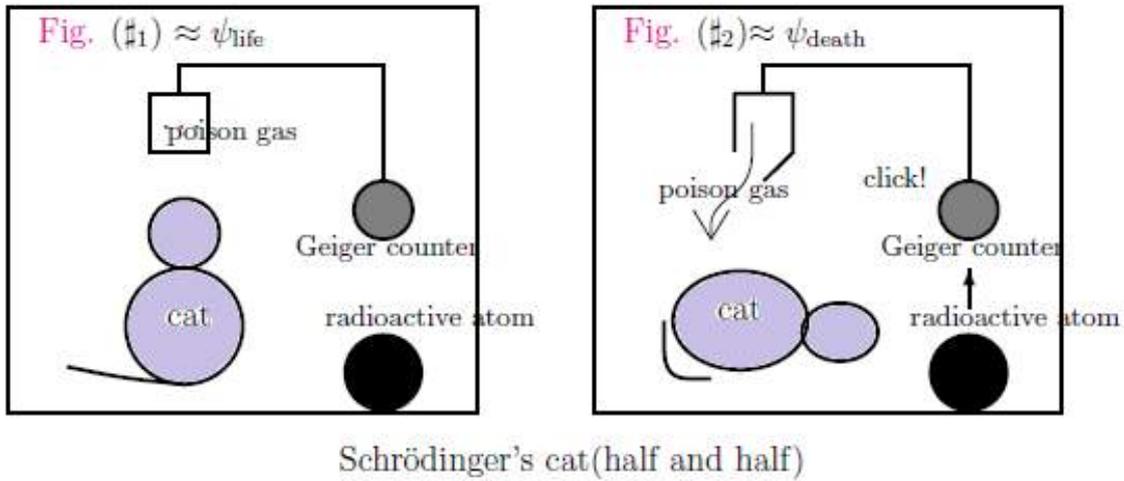


図 9.3: シュレーディンガーの猫 (半々)

そして,

(A5) 一時間後に, 箱の窓を開けて中を見た瞬間 (すなわち, 測定した瞬間) に, 「元気に生きている」か「死んでいる」かのどちらかが決定する. すなわち,

$$|\Psi\rangle = \frac{|\text{alive}\rangle + |\text{dead}\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\text{半死半生} (= \frac{1}{2}(|\psi_{\text{生}} + \psi_{\text{死}}\rangle\langle\psi_{\text{生}} + \psi_{\text{死}}|))$$

ここで、射影仮説 9.7 によって

$$\xrightarrow[\text{波動関数の収縮が起きる}]{\text{測定した瞬間に}} \begin{cases} \text{元気に生きている} (= |\psi_{\text{生}}\rangle\langle\psi_{\text{生}}|) \\ \text{死んでいる} (= |\psi_{\text{死}}\rangle\langle\psi_{\text{死}}|) \end{cases}$$

となる.



□

### 9.5.3 量子言語の解答 (量子デコヒーレンスを使う解答)

解答 9.16. [問題 9.14 の量子言語による解答].

量子言語では量子デコヒーレンスを求めるので、

( $B_1$ ) 時間発展して、一時間後には  $\rho'_{60^2}$  は、

$$\rho'_{60^2} = \frac{1}{2} (|\psi_{生}\rangle\langle\psi_{生}| + |\psi_{死}\rangle\langle\psi_{死}|)$$

のような混合状態になったとしてもよい。

ここで、

( $B_2$ ) 測定  $M_{B(H)}(O = (X, 2^X, F), S[\rho'_{60^2}])$  を考える。測定値「生」、 「死」を得る確率は、

$$\mathcal{T}_{r(H)}(\rho'_{60^2}, F(\{\text{生}\}))_{B(H)} = \langle\psi_{60^2}, F(\{\text{生}\})\psi_{60^2}\rangle = 0.5$$

$$\mathcal{T}_{r(H)}(\rho'_{60^2}, F(\{\text{死}\}))_{B(H)} = \langle\psi_{60^2}, F(\{\text{死}\})\psi_{60^2}\rangle = 0.5$$

となる。

また、「測定した瞬間」とか「波動関数の収縮」とかは、量子言語では禁忌であるが、( $B_2$ ) は言える。 □

### 9.5.4 まとめ (ラプラスの魔)

総括 9.17. [シュレーディンガーの猫の量子言語的総括]

さて,

**解答 9.15[問題 9.14 の通常解答]** v.s. **解答 9.16[問題 9.14 の量子言語による解答]**

を検討しよう.

(C<sub>1</sub>) 答え (A5) を主張して, 頑張れば頑張り切る

としても, やはり気が引ける. 妥当な線としては, 次だろう.

(C<sub>2</sub>) いかなる理論にも, 「適用範囲」ある. たとえば,

- ニュートン力学を宇宙全体に適用すれば, 「ラプラスの魔 ( cf. 注釈 9.2 )」になって, 無理が生じる. ニュートン力学を微細な世界に適用すれば, カオスが発生して, 訳がわからない現象が現れる. これらは, ニュートン力学の適用範囲外が妥当と考える.
- 適用範囲外の場合の有効な対処法としては, ブラウン運動 (確率微分方程式) を用いる方法であるが, これはニュートン力学を拡大解釈して (すなわち, 動的システム理論と考えると), すでに物理学からは離れた理論であることに注意すべきである. すなわち,

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{\text{ニュートン力学}} & \xrightarrow[\text{言語的転回}]{\text{適用範囲外}} & \boxed{\text{動的システム理論; 統計学}} \\
 \text{物理学} & & \text{形而上学}
 \end{array} \tag{9.27}$$

そうだとしたら, 量子力学にも「適用範囲」があると考えるのは自然だろう. すなわち,

- シュレーディンガの猫は量子力学 (特に, シュレーディンガー方程式) の適用範囲外が妥当と考える.
- 適用範囲外の場合の有効な対処法としては, (B<sub>1</sub>) のような量子デコヒーレンスを用いる方法であるが, これは量子力学を拡大解釈して (すなわち, 量子システム理論と考えると), すでに物理学からは離れた理論であることに注意すべきである.

以上, (C<sub>1</sub>) でもよいが, (C<sub>2</sub>) を推奨したい. なぜならば,

(C<sub>3</sub>) 次の二つの理論 :

- ニュートン力学を拡大解釈して (すなわち, 動的システム理論と考えると), すでに物理学からは離れた理論
  - 量子力学を拡大解釈して (すなわち, 量子システム理論と考えると), すでに物理学からは離れた理論
- を一つに統合した理論こそ, 量子言語だからである.

以上のように、シュレーディンガーの猫は、量子言語内で一応記述できる。

- ♠ 注釈 9.2. [ラプラスの魔]: 宇宙全体のすべての物体の運動でも国の経済成長でも、所詮は、(無限に近い)多数の粒子系の運動方程式で厳密に記述できて、しかも、それを解析することができる知性が存在するならば、この知性にとっては、不確実なことは何もなくなり、その目には未来も過去も全て見えていると考えて、このような「知性」のことをラプラスの魔と呼ぶ。ラプラスの魔は、「度が過ぎた実在的科学観(すなわち、極端な物理至上主義)」の象徴として、しばしば議論される。すなわち、

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{\text{ニュートン力学}} & \xrightarrow[\text{極端な物理至上主義}]{\text{適用範囲外}} & \boxed{\text{ラプラスの魔}} \\
 \text{物理学} & & \text{物理学?}
 \end{array} \tag{9.28}$$

で、これと式(9.27)は「真逆の方向として対比」されるべきである。

### The demon of Laplace (1794-1827)

We may regard the present state of the universe as the effect of its past and the cause of its future. An intellect which at a certain moment would know all forces that set nature in motion, and all positions of all items of which nature is composed, if this intellect were also vast enough to submit these data to analysis, it would embrace in a single formula the movements of the greatest bodies of the universe and those of the tiniest atom; for such an intellect nothing would be uncertain and the future just like the past would be present before its eyes.

*A Philosophical Essay on Probabilities, 1814*



## 9.6 遅延選択実験: 「粒子か? 波か?」は愚問

### 9.6.1 「粒子か波か?」が混乱の元凶

この節は、次の論文からの抜粋である:

(#) [45] S. Ishikawa, *The double-slit quantum eraser experiments and Hardy's paradox in the quantum linguistic interpretation*, arxiv:1407.5143[quantum-ph], (2014)

旧来の量子力学では、「粒子か波か?」という問いかけが頻繁にされている。しかし、次表に見るようにこの問いかけは愚問である。

表 9.1 粒子か? 波か? (cf. 表 2.1, 表 2.2)

理論 \ 粒子 or 波	粒子 (モノ)	波 (コト)
アリストテレス	質料	形相
ニュートン力学	質点	状態 (= (位置, 運動量))
統計学	母集団	パラメーター
量子力学	粒子	状態 ( $\approx$ 波動関数)
量子言語	システム (= 測定対象)	状態

この表 9.1 で、一番理解し易いのは、ニュートン力学 (i.e., 質点  $\leftrightarrow$  状態) である。これが分かれば、他も容易に理解できると思う。「容易」とは言っても、

- 一番混乱しているのは統計学の「母集団」で、これをわかるように書いてある統計学の書を著者は知らない。「母集団とは何か?」に答えたことは、量子言語の大きな成果の一つである。

量子力学では、「粒子か波か?」という問いかけが、ウィーラーの遅延選択測定との関係で議論されることが多い。したがって、この節では、

(A1) ウィーラーの遅延選択測定を量子言語で記述する

ことを考える。

## 9.6.2 準備

$H$  を 2 次元ヒルベルト空間, すなわち,  $H = \mathbb{C}^2$  とする. ここで, 基本構造  $[\mathcal{C}(H), B(H)]_{B(H)}$  を

$$[\mathcal{C}(H), B(H)]_{B(H)} = [B(\mathbb{C}^2), B(\mathbb{C}^2)]_{B(\mathbb{C}^2)}$$

と定める.  $f_1, f_2 \in H$  を

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とする.

さて,

$$u = \frac{f_1 + f_2}{\sqrt{2}}$$

として, 状態  $\rho = |u\rangle\langle u|$  ( $\in \mathfrak{S}^p(B(\mathbb{C}^2))$ ) を固定する.

ユニタリ作用素  $U \in B(\mathbb{C}^2)$  は次を満たすとする.

$$U((\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)) = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 \sqrt{-1} f_2$$

因果作用素  $\Phi : B(\mathbb{C}^2) \rightarrow B(\mathbb{C}^2)$  を

$$\Phi(F) = U^* F U, \quad (\forall F \in B(\mathbb{C}^2))$$

とする. すなわち,

$$B(\mathbb{C}^2) \ni \Phi(F) = U^* F U \longleftarrow F \in B(\mathbb{C}^2)$$

とする.

ここで,  $B(\mathbb{C}^2)$  内の二つの観測量  $O_f = (\{1, 2\}, 2^{\{1,2\}}, F)$  と  $O_g = (\{1, 2\}, 2^{\{1,2\}}, G)$  を次のように定める.

$$F(\{1\}) = |f_1\rangle\langle f_1|, \quad F(\{2\}) = |f_2\rangle\langle f_2|$$

と

$$G(\{1\}) = |g_1\rangle\langle g_1|, \quad G(\{2\}) = |g_2\rangle\langle g_2|$$

ここで,

$$g_1 = \frac{f_1 + f_2}{\sqrt{2}}, \quad g_2 = \frac{f_1 - f_2}{\sqrt{2}}$$

### 9.6.3 ド・ブロイのパラドックスの $B(\mathbb{C}^2)$ 版 (干渉なし)

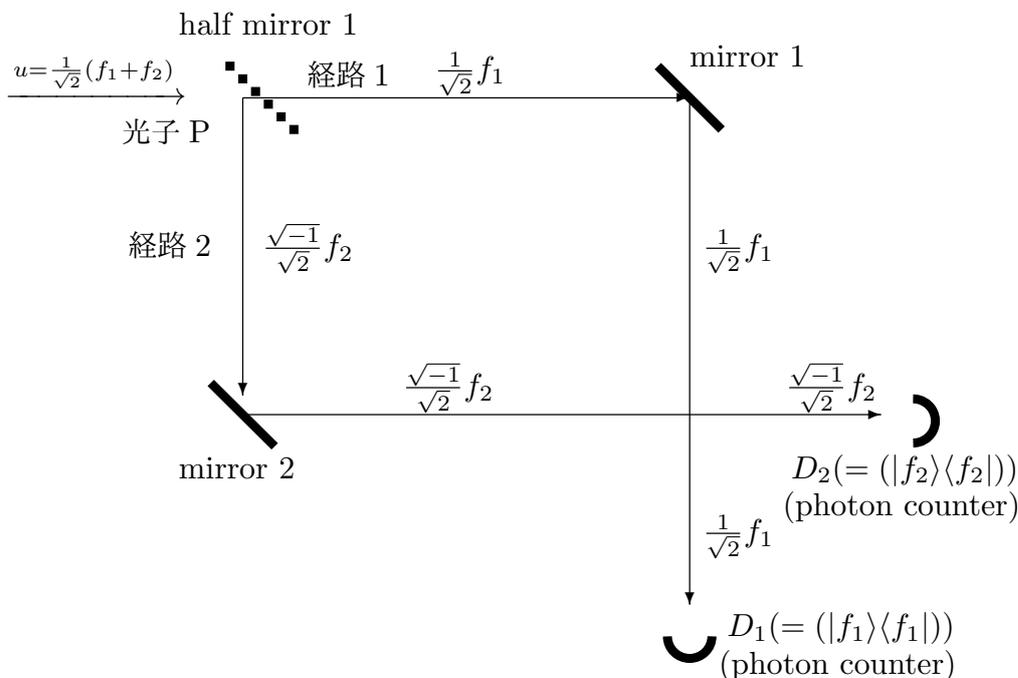


図 9.4(1).  $[D_1 + D_2] = \text{Observable} O_f$

上図の気分をシュレーディンガー描像で説明しよう。状態  $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_1 + f_2)$  (正確には,  $\rho = |u\rangle\langle u|$ ) を持つ光子  $P$  がハーフミラー 1 に突入するとしよう。

( $B_1$ )  $f_1$  部分はハーフミラー 1 を通過して経路 1 に沿って運動してミラー 2 で反射する。それから, 光子カウンター  $D_1$  に向かう。

( $B_2$ )  $f_2$  はハーフミラー 1 で反射して,  $\sqrt{-1}f_2$  となって経路 2 に沿って運動してミラー 1 で反射する (位相が 90 度ずれるので  $\sqrt{-1}$  を掛けたが, これを気にすることはない)。それから, 光子カウンター  $D_2$  に向かう。

これをハイゼンベルグ描像で書けば, 次の測定:

$$M_{B(\mathbb{C}^2)}(\Phi O_f, S_{[\rho]}) \tag{9.29}$$

を得る。このとき,

(C) 測定  $M_{B(\mathbb{C}^2)}(\Phi O_f, S_{[\rho]})$  によって,  $\begin{bmatrix} \text{測定値 1} \\ \text{測定値 2} \end{bmatrix}$  が得られる確率は,

$$\frac{\text{Tr}(\rho \cdot \Phi F(\{1\}))}{\text{Tr}(\rho \cdot \Phi F(\{2\}))} = \frac{\langle Uu, F(\{1\})Uu \rangle}{\langle Uu, F(\{2\})Uu \rangle} = \frac{|\langle Uu, f_1 \rangle|^2}{|\langle Uu, f_2 \rangle|^2} = \left[ \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \right] \quad (9.30)$$

で与えられる.

結局, 光子カウンター  $D_1$  と  $D_2$  のいずれか一方が, 半々の確率で, カウントされることになる.

### 9.6.4 マッハ=ツェンダー干渉計 (干渉あり)

次に, ハーフミラー 2 を付け加えた下図を想定する.

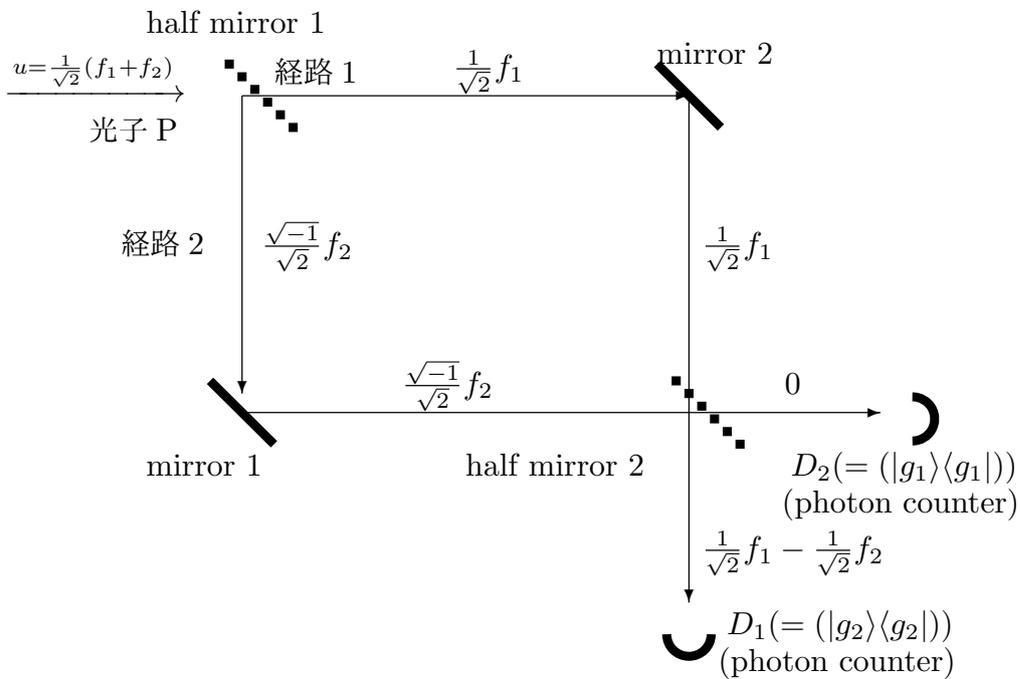
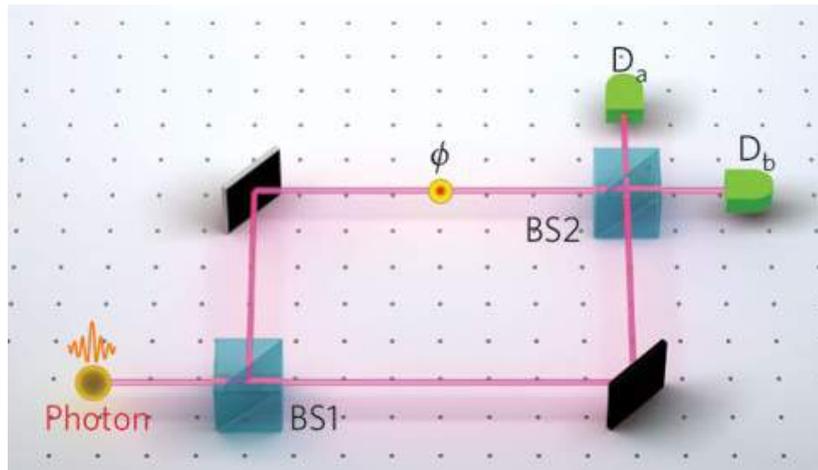


図 9.4(2).  $[D_1 + D_2] = \text{Observable} O_g$



上図の気分をシュレーディンガー描像で説明しよう． 状態  $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_1 + f_2)$  (正確には,  $\rho = |u\rangle\langle u|$ ) を持つ光子  $P$  がハーフミラー 1 に突入するとしよう．

- (D<sub>1</sub>)  $f_1$  部分はハーフミラー 1 を通過して経路 1 に沿って運動してミラー 2 で反射する． それから, ハーフミラー 2 を通過して光子カウンター  $D_1$  に向かう．
- (D<sub>2</sub>)  $f_2$  はハーフミラー 1 で反射して,  $\sqrt{-1}f_2$  となって経路 2 に沿って運動してミラー 1 で反射する (位相が 90 度ずれるので  $\sqrt{-1}$  を掛けたが, これを気にすることはない)． それから, ハーフミラー 2 に反射して光子カウンター  $D_1$  に向かう． したがって, **離れ離れになった  $f_1$  と  $f_2$  は再会して合体して (すなわち, 干渉して), 光子カウンター  $D_1$  に向かう．**

これをハイゼンベルグ描像で書けば, 次の測定:  $M_{B(\mathbb{C}^2)}(\Phi^2 O_g, S_{[\rho]})$  を得る． このとき,

(E) 測定  $M_{B(\mathbb{C}^2)}(\Phi^2 O_g, S_{[\rho]})$  によって,  $\begin{bmatrix} \text{測定値 1} \\ \text{測定値 2} \end{bmatrix}$  が得られる確率は

$$\begin{bmatrix} \text{Tr}(\rho \cdot \Phi^2 G(\{1\})) \\ \text{Tr}(\rho \cdot \Phi^2 G(\{2\})) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle u, \Phi^2 G(\{1\})u \rangle \\ \langle u, \Phi^2 G(\{2\})u \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\langle u, UUg_1 \rangle|^2 \\ |\langle u, UUg_2 \rangle|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9.31)$$

となる．

結局, 光子カウンター  $D_1$  がカウントされることになる．

9.6.5 もう一つ付け加えると

次の図 9.4(3) の状況を考えよう.

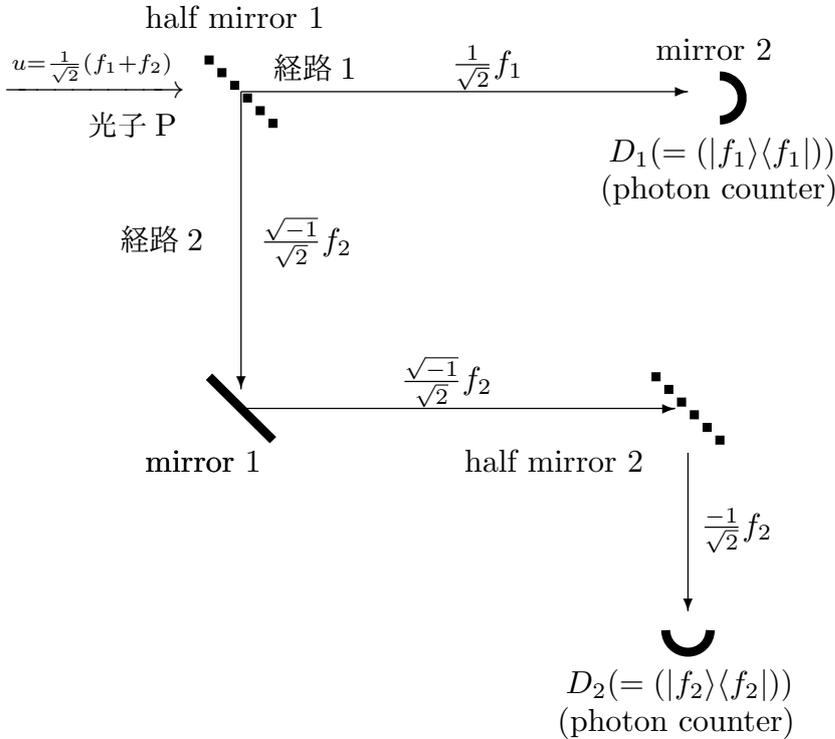


図 9.4(3).  $[D_2 + D_1] = \text{Observable}O_f$

上図の気分をシュレーディンガー描像で説明しよう. 状態  $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_1 + f_2)$ (正確には,  $\rho = |u\rangle\langle u|$ ) を持つ光子  $P$  がハーフミラー 1 に突入するとしよう.

- (F<sub>1</sub>)  $f_1$  部分はハーフミラー 1 を通過して経路 1 に沿って運動して, 光子カウンター  $D_1$  に向かう.
- (F<sub>2</sub>)  $f_2$  はハーフミラー 1 で反射して,  $\sqrt{-1}f_2$  となって経路 2 に沿って運動してミラー 1 で反射する (位相が 90 度ずれるので  $\sqrt{-1}$  を掛けたが, これを気にすることはない). それから, ハーフミラー 2 に反射して光子カウンター  $D_2$  に向かう.

もちろん, これは図 9.4(1) の状況と等しい. したがって, 同じ測定

$$M_{B(\mathbb{C}^2)}(\Phi^2 O_f, S_{[\rho]}) \tag{9.32}$$

を考えればよい. したがって, (C) と同じだが,

(G) 測定  $M_{B(\mathbb{C}^2)}(\Phi^2 O_f, S_{[\rho]})$  によって、 $\begin{bmatrix} \text{測定値 1} \\ \text{測定値 2} \end{bmatrix}$  が得られる確率は、

$$\frac{\text{Tr}(\rho \cdot \Phi F(\{1\}))}{\text{Tr}(\rho \cdot \Phi F(\{2\}))} = \frac{\langle Uu, F(\{1\})Uu \rangle}{\langle Uu, F(\{2\})Uu \rangle} = \frac{|\langle Uu, f_1 \rangle|^2}{|\langle Uu, f_2 \rangle|^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

で与えられる。したがって、光子カウンター  $D_1$  が反応しなかったら、確実に光子カウンター  $D_2$  が反応することが予期できる。これは、光子を全く擾乱させずに測定できたことを意味する。

### 9.6.6 まとめ

上述は「ウィーラーの遅延選択実験 (cf. ref.[75])」と言われる有名なパラドックスで、ウィーラーの遅延選択実験の説明

(H) 光子が”half mirror 1”を通過してから、図 9.4(1), 図 9.4(2) のどれかを選ぶとして、たとえば、図 9.4(2) を選べば、光子はどちらかの経路を通過しているはずなのだから、ここで突然、”half mirror 2”を挿入しても、干渉しようがないだろう

を聞くと、パラドックスとってしまうかもしれない。しかし、これは、「ウィーラーの説明 (H) が量子言語の正式なハイゼンベルグ描像でなされていない」からである。シュレーディンガー描像  $(B_1), (B_2), (D_1), (D_2), (F_1), (F_2)$  も正式ではない。量子言語の正式な記述は、(C), (E), (G) だけである。

(I) 上の (H) やシュレーディンガー描像では、気分を伝えるためにサービス精神を発揮してしまって、語り得ぬことを語ってしまった。量子言語の正式な記述「ハイゼンベルグ描像：(C), (E), (G)」だけを語ればよかった。すなわち、量子言語の主張は

計算式「(C), (E), (G)」が間違っていれば、謝りますよ。

しかし、これ以外は、責任を負いませんよ。

である、語り得ぬことを語ってしまったから、パラドックスみたいになってしまった。ここでも、ウィトゲンシュタインの言葉：

**What we cannot speak about we must pass over in silence.**

(語りえぬものには、沈黙しなければならない)

を思い出すべきである。

♠ 注釈 9.3. もちろん, 超光速 (非局所性) は, 量子力学ではいつでも驚くべきパラドックスであって, これが量子言語で解消されることはないが, 他のパラドックスは, 量子言語の記述により解消されると信じる. 「解消」とは言っても, 本質的に解決したわけではなくて, 露わにならないように「蓋をした」だけと言われればその通りで, 結局,

- 量子言語とは、「臭いものに蓋をする」こと

なのだと思う. 言語ルール 1 と 2 で, 「言葉遣い」を明確に定めておいて, それ以外の言葉遣いを禁じて, パラドックスを語りえぬものとして, 「語りえぬものには, 沈黙しなければならない」というのが, 量子言語である.

---

## 9.7 量子消しゴム

量子消しゴム (cf. [74]) を量子言語で記述しておこう.

### 9.7.1 テンソルヒルベルト空間

$\mathbb{C}^2$  を二次元ヒルベルト空間とする. すなわち,  $\mathbb{C}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\}$ . And put

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$B(\mathbb{C}^2)$  内の観測量  $O_x = (\{-1, 1\}, 2^{\{-1, 1\}}, F_x)$  を次のように定める.

$$F_x(\{1\}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_x(\{-1\}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

次は, 明らか.

$$\begin{aligned} F_x(\{1\})e_1 &= \frac{1}{2}(e_1 + e_2), & F_x(\{1\})e_2 &= \frac{1}{2}(e_1 + e_2) \\ F_x(\{-1\})e_1 &= \frac{1}{2}(e_1 - e_2), & F_x(\{-1\})e_2 &= \frac{1}{2}(-e_1 + e_2) \end{aligned}$$

また,  $B(\mathbb{C}^2)$  内の存在観測量  $O_E = (\{1\}, 2^{\{1\}}, F_E)$  をいつものように, 次で定める.

$$F_E(\{1\}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F_E(\emptyset) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$H$  をヒルベルト空間とする. たとえば,

$$H = L^2(\mathbb{R}_q) = \left\{ u : \mathbb{R}_q \rightarrow \mathbb{C} \mid \left[ \int_{\mathbb{R}_q} |u(q)|^2 dq \right]^{1/2} < \infty \right\}$$

とする.  $B(H)$  内の観測量  $O = (X, \mathcal{F}, F)$  を考える. たとえば,  $H = L^2(\mathbb{R}_q)$ ,  $X = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  として,

$$[F(\Xi)](q) = \begin{cases} 1 & (q \in \Xi \in \mathcal{F}) \\ 0 & (q \notin \Xi \in \mathcal{F}) \end{cases}$$

とする.

$u_1, u_2 \in H$  を正規直交系とする. すなわち,

$$\|u_1\|_H = \|u_2\|_H = 1, \quad \langle u_1, u_2 \rangle_H = 0$$

とする.

テンソルヒルベルト空間  $\mathbb{C}^2 \otimes H$  を考える. さて,  $\psi \in \mathbb{C}^2 \otimes H$  (を次のように定める.

$$\psi = \alpha_1 e_1 \otimes u_1 + \alpha_2 e_2 \otimes u_2$$

ここに,  $\alpha_i \in \mathbb{C}$ ,  $|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 = 1$ .

### 9.7.2 干渉あり

次の測定を考える :

$$M_{B(\mathbb{C}^2 \otimes H)}(O_x \otimes O, S_{[|\psi\rangle\langle\psi|]}) \quad (9.33)$$

言語ルール 1(測定) より

(A<sub>1</sub>) 測定値  $(1, x) (\in \{-1, 1\} \times X)$  が,  $\{1\} \times \Xi$  に属する確率は, 次のように計算できる :

$$\begin{aligned} & \langle \psi, (F_x(\{1\}) \otimes F(\Xi)) \psi \rangle \\ = & \langle \alpha_1 e_1 \otimes u_1 + \alpha_2 e_2 \otimes u_2, (F_x(\{1\}) \otimes F(\Xi)) (\alpha_1 e_1 \otimes u_1 + \alpha_2 e_2 \otimes u_2) \rangle \\ = & \frac{1}{2} \langle \alpha_1 e_1 \otimes u_1 + \alpha_2 e_2 \otimes u_2, \alpha_1 (e_1 + e_2) \otimes F(\Xi) u_1 + \alpha_2 (e_1 + e_2) \otimes F(\Xi) u_2 \rangle \\ = & \frac{1}{2} \left( |\alpha_1|^2 \langle u_1, F(\Xi) u_1 \rangle + |\alpha_2|^2 \langle u_2, F(\Xi) u_2 \rangle \right. \\ & \quad \left. + \bar{\alpha}_1 \alpha_2 \langle u_1, F(\Xi) u_2 \rangle + \alpha_1 \bar{\alpha}_2 \langle u_2, F(\Xi) u_1 \rangle \right) \\ = & \frac{1}{2} \left( |\alpha_1|^2 \langle u_1, F(\Xi) u_1 \rangle + |\alpha_2|^2 \langle u_2, F(\Xi) u_2 \rangle \right. \\ & \quad \left. + 2[\text{Real part}](\bar{\alpha}_1 \alpha_2 \langle u_1, F(\Xi) u_2 \rangle) \right) \end{aligned}$$

ここに, 第三項 (干渉項) に注意せよ. さらに, 次のように確率密度関数  $\rho_1$  を定める

$$=: \int_{\Xi} \rho_1(q) dq \quad (\forall \Xi \in \mathcal{F})$$

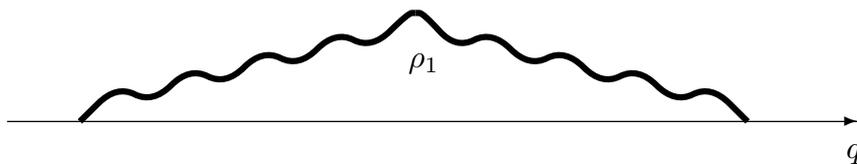


図 9.5(1)  $\rho_1$  のグラフ

また、次を得る。

(A<sub>2</sub>) 測定値  $(-1, x) (\in \{-1, 1\} \times X)$  が  $\{1\} \times \Xi$  に属する確率は、次のように計算できる：

$$\begin{aligned}
 & \langle \psi, (F_x(\{-1\}) \otimes F(\Xi))\psi \rangle \\
 = & \langle \alpha_1 e_1 \otimes u_1 + \alpha_2 e_2 \otimes u_2, (F_x(\{-1\}) \otimes F(\Xi))(\alpha_1 e_1 \otimes u_1 + \alpha_2 e_2 \otimes u_2) \rangle \\
 = & \frac{1}{2} \langle \alpha_1 e_1 \otimes u_1 + \alpha_2 e_2 \otimes u_2, \alpha_1 (e_1 - e_2) \otimes F(\Xi)u_1 + \alpha_2 (-e_1 + e_2) \otimes F(\Xi)u_2 \rangle \\
 = & \frac{1}{2} \left( |\alpha_1|^2 \langle u_1, F(\Xi)u_1 \rangle + |\alpha_2|^2 \langle u_2, F(\Xi)u_2 \rangle \right. \\
 & \quad \left. - \bar{\alpha}_1 \alpha_2 \langle u_1, F(\Xi)u_2 \rangle - \alpha_1 \bar{\alpha}_2 \langle u_2, F(\Xi)u_1 \rangle \right) \\
 = & \frac{1}{2} \left( |\alpha_1|^2 \langle u_1, F(\Xi)u_1 \rangle + |\alpha_2|^2 \langle u_2, F(\Xi)u_2 \rangle \right. \\
 & \quad \left. - 2[\text{Real part}](\bar{\alpha}_1 \alpha_2 \langle u_1, F(\Xi)u_2 \rangle) \right)
 \end{aligned}$$

ここに、第三項 (干渉項) に注意せよ。さらに、次のように確率密度関数  $\rho_2$  を定める

$$=: \int_{\Xi} \rho_2(q) dq \quad (\forall \Xi \in \mathcal{F})$$

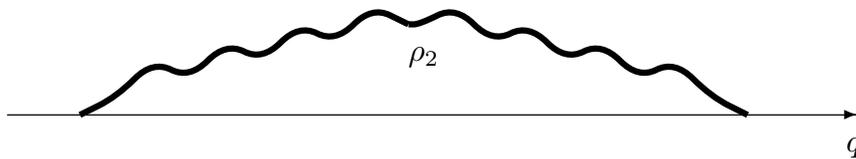


図 9.5(2)  $\rho_2$  のグラフ

### 9.7.3 干渉なし

次の測定測定:

$$M_{B(\mathbb{C}^2 \otimes H)}(\mathbf{O}_E \otimes \mathbf{O}, S_{[|\psi\rangle\langle\psi|]}) \tag{9.34}$$

を考える。言語ルール 1(測定) から、

(A<sub>3</sub>) 測定値  $(1, x) (\in \{1\} \times X)$  が  $\{1\} \times \Xi$  に属する確率は

$$\langle \psi, (I \otimes F(\Xi))\psi \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle \alpha_1 e_1 \otimes u_1 + \alpha_2 e_2 \otimes u_2, (I \otimes F(\Xi))(\alpha_1 e_1 \otimes u_1 + \alpha_2 e_2 \otimes u_2) \rangle \\
&= \langle \alpha_1 e_1 \otimes u_1 + \alpha_2 e_2 \otimes u_2, \alpha_1 e_1 \otimes F(\Xi)u_1 + \alpha_2 e_2 \otimes F(\Xi)u_2 \rangle \\
&= |\alpha_1|^2 \langle u_1, F(\Xi)u_1 \rangle + |\alpha_2|^2 \langle u_2, F(\Xi)u_2 \rangle
\end{aligned}$$

ここに、第三項 (干渉項) が無いことに注意せよ。さらに、次のように確率密度関数  $\rho_3$  を定める

$$=: \int_{\Xi} \rho_3(q) dq \quad (\forall \Xi \in \mathcal{F})$$

注意 9.18. 上で

$$\begin{array}{ccc}
(A_3) & & (A_1) + (A_2) \\
\boxed{\rho_3} & = & \boxed{\rho_1 + \rho_2} \\
\text{干渉項なし} & & \text{干渉項が相殺}
\end{array}$$

に注意せよ。

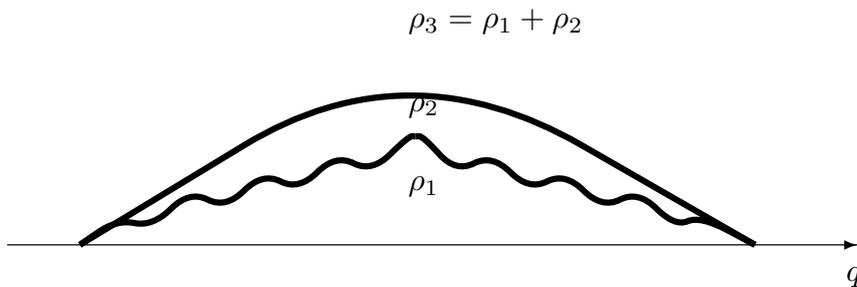


図 9.5(3)  $\rho_3 = \rho_1 + \rho_2$  のグラフ