慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	第8講 : 言語ルール2 : 因果関係
Sub Title	
Author	石川, 史郎(Ishikawa, Shiro)
Publisher	
Publication year	2018
Jtitle	コペンハーゲン解釈; 量子哲学 (2018. 3) ,p.283- 317
JaLC DOI	
Abstract	
Notes	慶應義塾大学理工学部大学院講義ノート(Web版)
Genre	Book
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KO52003002-00000000-0283

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

第 8 講

言語ルール 2—因果関係

1.2.1 節で述べたように, 測定理論は以下のように, 分類できる.

$$
\text{(A)}\ \underset{(=\text{量子言語})}{\text{測定理論}}
\begin{cases}
(\mathrm{A}_1):\ \text{純粋型}\begin{cases}\text{古典系：}\quad \text{フィッシャー統計}\\ \text{量子系：}\quad \text{通常の量子力学}\end{cases}\\[3ex]
(\mathrm{A}_2):\ \text{混合型}\begin{cases}\text{古典系：}\quad \text{ベイズ統計を含む}\\ \text{量子系：}\quad \text{量子デコヒーレンス, 量子ゼノン効果}\end{cases}
\end{cases}
$$

その内訳は, 以下のようになる.

$$
\begin{cases}
(B_1): \underset{(=\text{量子言語})}{\boxed{\text{純粋型測定理論}}} := \underbrace{\overset{[\text{純粋型言語ルール 1}]}{\underset{(cf.\ \ 2.7\text{ 節})}{\boxed{\text{純粋型測定}}}} + \overset{[\text{言語ルール 2}]}{\underset{(cf.\ \ 8.3\text{ 節})}{\boxed{\text{因果関係}}}}}_{\text{一種の呪文 (=量子力学の言葉遣い)}} + \underbrace{\overset{[\text{言語的コペンハーゲン解釈}]}{\underset{(cf.\ \ 3.1\text{ 節})}{\boxed{\text{言語的解釈}}}}}_{\text{呪文の使い方のマニュアル}}\\[6ex]
(B_2): \underset{(=\text{量子言語})}{\boxed{\text{混合型測定理論}}} := \underbrace{\overset{[\text{混合型言語ルール 1}]}{\underset{(cf.\ \ 7.1\text{ 節})}{\boxed{\text{混合型測定}}}} + \overset{[\text{言語ルール 2}]}{\underset{(cf.\ \ 8.3\text{ 節})}{\boxed{\text{因果関係}}}}}_{\text{一種の呪文 (=量子力学の言葉遣い)}} + \underbrace{\overset{[\text{言語的コペンハーゲン解釈}]}{\underset{(cf.\ \ 3.1\text{ 節})}{\boxed{\text{言語的解釈}}}}}_{\text{呪文の使い方のマニュアル}}
\end{cases}
$$

前章まででかなりのことを説明した. 残るは, (B_1) と (B_2) に共通な

$$
\overset{[\text{言語ルール 2}]}{\underset{(cf.\ \ 8.3\text{ 節})}{\boxed{\text{因果関係}}}}
$$

だけで, これを本章で説明する.

8.1 未解決問題—因果関係とは，何か？

次は科学におけるもっとも基本的な古典的金言である．

(C_1) 測定なくして, 科学なし
(C_2) 科学とは因果関係についての知識である

しかし、今から思うと、この二つの金言は量子言語のために用意されたと言っても過言ではない．もちろん、

$$(\mathrm{C}_1) \longrightarrow \text{言語ルール 1(測定)、} \qquad (\mathrm{C}_2) \longrightarrow \text{言語ルール 2(因果関係)}$$

だからである．だから、

(C_3) **科学とは、現象を量子言語で記述することである**

と断言したくなる．

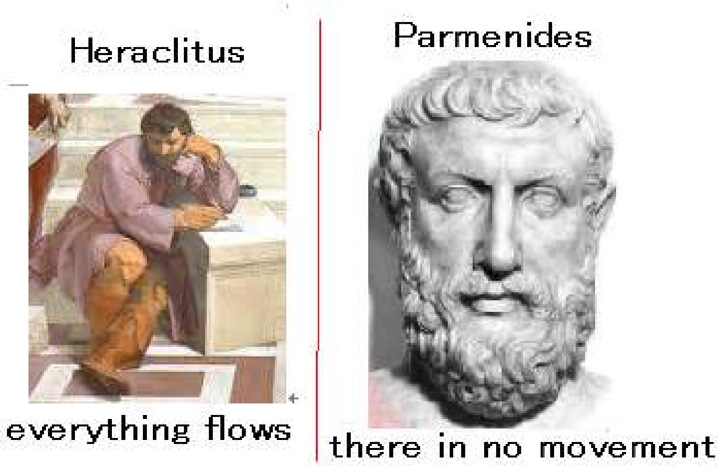
前章までは、測定に関わった．本章では因果関係に集中する．

8.1.1 「因果関係」の発見によって，近代科学が始まった

あることが起こるのには，その原因がある．これを**因果関係** (causality) という．「火の無いところに，煙は立たない」の格言を思い出せばよい．当たり前のように思うかもしれないが，そんなに単純なことではない．たとえば，

> 今朝，気分が溌剌としているのは，昨夜ぐっすり寝たからなのか？　または，今から，好きなゴルフに行くからなのか？

等を考えれば，「因果関係」という言葉の使い方の難しさはわかると思う．日常会話では，「原因 (過去)」，「理由 (含意)」，「目的・動機 (未来)」が混同されて使われることが多いからである．



運動・変化の探究の嚆矢は，ヘラクレイトス (BC.540 年頃 -BC.480 年頃) の「万物は流転する」やゼノンの師であるパルメニデス (BC.515 年頃に生誕) の「運動は存在しない」とされている．当然の疑問として，どのようにでも解釈できる「万物は流転する」とか「運動は存在しない」などと言っただけなのに、

2500 年も経った今でも, 何故, 彼らの名前が残っているのか？

と思うだろうが，それは, 本講 (正確には, 本書全体) を読めばわかることであるが．ここで結論を言ってしまうならば，「運動・変化」が，科学 (=「世界記述」) における最重要キーワードであること，すなわち，基本的には，

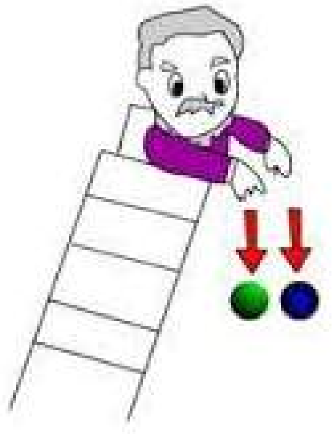
[世界記述]= [運動・変化の記述]

であることに最初に気づいたのが，この二人の先駆者 —ヘラクレイトスとパルメニデス—だったからである．

しかし，運動・変化の本質について，更に追究したのは，アリストテレス (BC384 年–BC322 年) で，アリストテレスはすべての運動に「目的」がある，と考えた．たとえば石が落下するのは，その石が下に行こうとする目的があるからである．煙が上がってゆくのも，煙は上に上がるという目的があるとした．アリストテレスの影響の下に，「目的因」は，1500 年以上もの長きの間，「運動」の主流の考えとして生き続けた．たとえば,

(A) 重い石は,「下に落ちよう」という強い目的を持っているから,

速く落ちる[*1]



と信じらてきた.
アリストテレスの「更なる追究 (目的因)」は，称えられるべきことであるが，「目的因が的を射ていた」とは言えなかった．目的因から脱却して，運動・変化の本質が「因果関係」であることを人類が発見するには，ガリレオ，ベーコン，デカルト，ニュートン等の出現を待たねばならなかった.

「目的因」から「因果関係」への転回

は，科学史上最大のパラダイムシフト—「近代科学の誕生」と言っても過言でない程—で，それ以後の「科学革命」を約束した.

世界記述の誕生
$\boxed{\text{運動}}$
(ヘラクレイトス，パルメニデス，ゼノン)

$\xrightarrow{\text{“目的因”}}$
アリストテレス:(約 1500 年間)

近代科学の誕生
$\boxed{\text{因果関係}}$
(ガリレオ，ベーコン，デカルト，ニュートン)

ここに至って、初めて、

- **科学とは、因果関係に関する知識である**

という悟りに人類が到達したと言える.

♠ **注釈 8.1.** 現代的には,「因果関係」は常識化されているので，当たり前と思うかもしれないが,「因果関係」の発見は,「地動説」や「進化論」と並ぶ科学史上最大のパラダイムシフト—3 つともアリストテレス以来の世界観を打ち破った—である．この 3 つの中でも,「因果関係」は図抜けている．なぜならば，

(♯) 科学とは因果関係についての知識，すなわち,「因果関係」という言葉— 「火の無いところに，煙は立たない」という格言— で表現できる現象に関する学問である．極言すれば、

因果関係の発見＝科学の発見[*2]

と言っても過言でないからである．科学は，数千年以上の歴史があるかもしれないが，因果関係の発見以前と以後では，科学の質が違うと考えて,「近代科学」とした.

[*1] この迷信が信じられていたから,「ガリレオのピサの斜塔」伝説が有名になった.
[*2] 本書的には、「測定と因果関係の発見＝科学の発見」である.

8.1.2 「因果関係とは，何か？」に対する 4 つの解答

以上のように，「運動・変化の本質は何か？」については，「因果関係」という言葉で，一応，決着した．しかし，これですべてが解決されたわけではない．我々は，未だ「因果関係」について十分な理解に至っていない．実は，

> **問題 8.1. 問題：**
>
> 「因果関係とは何か？」
>
> **は科学における最も重要な未解決問題である．　これに答えよ．**

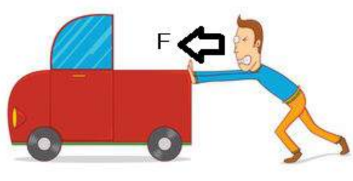
もちろん，古い話をしているのではない．

今日的意味での未解決問題である．

こう言うと，意外に思う読者がいるかもしれない．以下に，この問題に対する解答の歴史を整理しておく．

(a) **[実在的因果関係]:** ガリレオ，ベーコン，デカルト等のアイデアの総決算として，ニュートンは，ニュートン力学という実在的記述法を提唱して，次のように考えた:

- 世界には，実際に「因果関係」が存在している．この実際に存在する「因果関係」を，微分方程式—因果関係の連鎖の方程式—で忠実に記述したのが，ニュートンの運動方程式である．



この実在的因果関係は，極めて自然な考えで，これ以外に考えようがないと思うかもしれない，事実，

ニュートン力学 $\longrightarrow$ 電磁気学 $\longrightarrow$ 相対性理論 $\longrightarrow \cdots$

と続く実在的因果関係の潮流は，科学の華と言っていいだろう．

しかし，別の考えもあって，以下のように 3 つの「非実在的因果関係」がある．

(b) **[認識的因果関係]:** 哲学者ヒューム，カント等は，次のように考えた:

- 世界には，実際に「因果関係」が存在するとかそうでないとか言えない．そして，世界の「何か」を，我々が『因果関係』と感じたとき，その「何か」に「因果関係」が

あると信じればよい

と主張した．

これを「一種のレトリック」と思う読者がいるかもしれないし，逆に，「そう言われてみればそうかもしれない」と納得してしまうかもしれない．確かに，「因果関係」という色メガネで見ているから，そう見えるだけのことかもしれない．因果関係の認識回路が脳内に設置されていて，それが「何か」に刺激されて反応するときに，「因果関係がある」とするのが，カントの有名な「コペルニクス的転回 (すなわち，「認識が世界を構成する」)」である．この (b) がそれ以後の科学に与えた実質的な影響については，疑問を呈する方が多数派だと思うが，本書では (下の (d) で述べるように)，カントに最大限に好意的なストーリーを採用する．

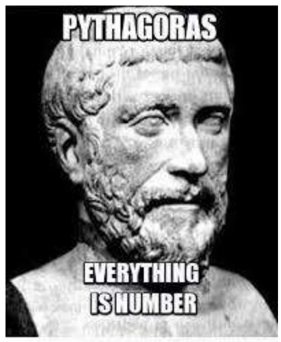
(c) **[数学的因果関係 (動的システム理論 (=統計学))]:** 動的システム理論は，工学における数学的手法として発展してきたので，「因果関係とは何か？」を突き詰めた形で答えていない．しかし，

- 動的システム理論では，状態方程式、すなわち，時変数一階連立微分方程式：

$$
\begin{cases}
\frac{d\omega_1}{dt}(t) = v_1(\omega_1(t), \omega_2(t), \ldots, \omega_n(t), t) \\
\frac{d\omega_2}{dt}(t) = v_2(\omega_1(t), \omega_2(t), \ldots, \omega_n(t), t) \\
\cdots\cdots \\
\frac{d\omega_n}{dt}(t) = v_n(\omega_1(t), \omega_2(t), \ldots, \omega_n(t), t)
\end{cases}
\tag{8.1}
$$

  という数学が先にあって，その方程式で記述される現象に，「因果関係」があると考える．

となる．



BC.582--BC.496

理系の普通の感覚では，「時変数微分方程式=因果関係の時間的連鎖」と何となく思っているのだから，この (c) は了解し易いかもしれないが，日常言語の中に埋没した数学という形の典型的な例であることには注意すべきである．ただし，「役に立つ」という意味では，(c) はもっと評価されるべきと考える．

(d) **[言語的因果関係 (測定理論 (=量子言語))]:** 測定理論 (=量子言語) の因果関係は，本章の言語ルール 2 (因果関係;8.3 節) で決まる，詳しくは:

- 測定理論は 2 つの言語ルール 1 (測定;2.7 節) と言語ルール 2 (因果関係;8.3 節) からなるが，因果関係に関わるのは言語ルール 2 である．ある現象を測定理論という言語で記述して，言語ルール 2 を用いる場合に，その現象は因果関係を持つとする．すな

わち, ヒュームやカントの「脳内の因果関係の認識回路」を,「言語ルール 2 という呪文」に置き換えて, つまり,

$$\underset{\text{ヒューム・カント}}{\boxed{\text{脳内の認識回路としての因果関係}}} \xrightarrow[\text{言語論的転回}]{} \underset{\text{量子言語}}{\boxed{\text{言語としての因果関係}}}$$

である.

要約 8.2. (a)–(d) をまとめると,

(a) 世界が先　(b) 認識が先
(c) (日常言語の中に埋没している) 数学が先
(d) 言語 (量子言語) が先

の違いである.
さて, 何度も言っているように, 測定理論 (=量子言語) は次を主張する:

($\sharp$)　　量子言語は, 諸科学を記述する基礎言語である.

もしこれが承認されるならば, 次が主張できる. すなわち,

($\flat$)　　**諸科学において, 因果関係とは上の (d) で主張したものである.**

と言える. これが,「因果関係とは, 何か?」に対する測定理論の解答であり, 次節以降に, この詳細を説明する.

♠ **注釈 8.2.** 測定理論の副産物の 1 つとして, 形而上学的立場 (アンチ物理至上主義の言語的立場) からの未解決問題:
($\sharp_1$) 時間, 空間, 因果関係, 確率とは何か?
に答えることができる. 形而上学では,「○○とは何か?」に解答することは, ○○という言葉の使い方が定まる言語を作ることである (注釈 1.3). したがって,
上の ($\sharp_1$) は, 次の ($\sharp_2$) と同値で,
($\sharp_2$) 時間, 空間, 因果関係, 確率という言葉を含む言語的世界記述法を提案すること
となる. もちろん, この答えとして, 本書では, 測定理論 (すなわち, 言語的方法の確立) を提案しているわけである. そうならば, いまのところ,

言語ルール 1 によって,「確率とは何か?」には答えている

ことになる. この章では,「因果関係, 時間, 空間」について, 答える.

8.2 因果関係—火の無いところに，煙は立たない

8.2.1 ハイゼンベルグ描像とシュレーディンガー描像

さて，測定理論における因果関係の具体的な議論に入ろう．第 2 章と同様に本章でも，数学用語・定理で止まらないで，簡単な例を多く述べるので，例の中で「因果関係の本質」を理解して，進んでもらいたい．

基本構造 $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}} \subseteq B(H)]$ (または，$[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}]_{B(H)}$ ）を以下に復習して置く．

(A)：一般基本構造 $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}} \subseteq B(H)]$ と状態空間 (*cf.* 2.1.3 節)

$$
\begin{tikzcd}
\underset{C^*-\text{純粋状態}}{\mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*)} \subset \underset{C^*-\text{混合状態}}{\mathfrak{S}^m(\mathcal{A}^*)} \subset & \mathcal{A}^* & & \\
& \boxed{\mathcal{A}} \arrow[u, "\text{共役}"'] \arrow[r, "\subseteq", "\text{部分代数・弱閉包}"'] & \boxed{\overline{\mathcal{A}}} \arrow[r, "\subseteq", "\text{部分代数}"'] \arrow[d, "\text{前共役}"] & \boxed{B(H)} \\
& & \underset{W^*-\text{混合状態}}{\overline{\mathfrak{S}}^m(\overline{\mathcal{A}}_*)} \subset \overline{\mathcal{A}}_* &
\end{tikzcd}
\tag{8.2}
$$

注意 8.3. $[\overline{\mathcal{A}}_* \subseteq \mathcal{A}^*]$： 基本構造 $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}]_{B(H)}$ を考える． $\rho \in \overline{\mathcal{A}}_*$, $F \in \mathcal{A}(\subseteq \overline{\mathcal{A}} \subseteq B(H))$ とする． このとき

$$
\Big|_{\overline{\mathcal{A}}_*}\Big(\rho, F\Big)_{\overline{\mathcal{A}}}\Big| \le C\|F\|_{B(H)} = C\|F\|_{\mathcal{A}} \qquad (\forall F \in \mathcal{A}(\subseteq \overline{\mathcal{A}})) \tag{8.3}
$$

なので, $\rho \in \mathcal{A}^*$ と見なすこともできる． すなわち，(8.3) 式の意味で,

$$
\overline{\mathcal{A}}_* \subseteq \mathcal{A}^* \tag{8.4}
$$

と見なすことができる．$\rho(\in \overline{\mathcal{A}}_*)$ を $\mathcal{A}^*$ の元と見なすとき, $\widehat{\rho}$ と書く． したがって,

$$
{}_{\overline{\mathcal{A}}_*}\Big(\rho, F\Big)_{\overline{\mathcal{A}}} = {}_{\mathcal{A}^*}\Big(\widehat{\rho}, F\Big)_{\mathcal{A}} \qquad (\forall F \in \mathcal{A}(\subseteq \overline{\mathcal{A}})) \tag{8.5}
$$

である．

定義 8.4. [因果作用素 (Causal operator(=Markov operator))] 二つの基本構造 $[\mathcal{A}_1 \subseteq \overline{\mathcal{A}}_1]_{B(H_1)}$ と $[\mathcal{A}_2 \subseteq \overline{\mathcal{A}}_2]_{B(H_2)}$ を考える． 連続線形作用素 $\Phi_{1,2} : \overline{\mathcal{A}}_2 \to \overline{\mathcal{A}}_1$ が次の (i)—(iv) を満たすとき，$\Phi_{1,2}$ を**因果作用素** (または，**マルコフ因果作用素，因果関係のハイゼンベルグ描像**) と呼ぶ:

(i) $F_2 \in \overline{\mathcal{A}}_2 \;\; F_2 \geqq 0 \Longrightarrow \Phi_{12} F_2 \geqq 0$

(ii) $\Phi_{12} I_{\overline{\mathcal{A}}_2} = I_{\overline{\mathcal{A}}_1}$ 　　(ここに，$I_{\overline{\mathcal{A}}_1} (\in \overline{\mathcal{A}}_1)$ は恒等元)

(iii) 次を満たす連続線形作用素 $(\Phi_{1,2})_* : (\overline{\mathcal{A}}_1)_* \to (\overline{\mathcal{A}}_2)_*$ が存在する

$$\text{(a)} \quad {}_{(\overline{\mathcal{A}}_1)_*}\Big(\rho_1, \Phi_{1,2} F_2\Big)_{\overline{\mathcal{A}}_1} = {}_{(\overline{\mathcal{A}}_2)_*}\Big((\Phi_{1,2})_* \rho_1, F_2\Big)_{\overline{\mathcal{A}}_2} \qquad (\forall \rho_1 \in (\overline{\mathcal{A}}_1)_*, \forall F_2 \in \overline{\mathcal{A}}_2) \tag{8.6}$$

$$\text{(b)} \quad (\Phi_{1,2})_* (\overline{\mathfrak{S}}^m ((\overline{\mathcal{A}}_1)_*)) \subseteq \overline{\mathfrak{S}}^m ((\overline{\mathcal{A}}_2)_*) \tag{8.7}$$

この連続線形作用素 $(\Phi_{1,2})_*$ を $\Phi_{1,2}$ の**前双対因果作用素**（または，**マルコフ前双対因果作用素，因果関係のシュレーディンガー描像**）と呼ぶ．

(iv) $\Phi_{1,2} : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_1$ で，次を満たす連続線形作用素 $\Phi_{1,2}^* : \mathcal{A}_1^* \to \mathcal{A}_2^*$ が存在する．

$$\text{(a)} \quad {}_{(\overline{\mathcal{A}}_1)_*}\Big(\rho_1, \Phi_{1,2} F_2\Big)_{\overline{\mathcal{A}}_1} = {}_{\mathcal{A}_2^*}\Big(\Phi_{1,2}^* \widehat{\rho}_1, F_2\Big)_{\mathcal{A}_2} \qquad (\forall \rho_1 = \widehat{\rho}_1 \in (\overline{\mathcal{A}}_1)_* (\subseteq \mathcal{A}_1^*), \forall F_2 \in \mathcal{A}_2) \tag{8.8}$$

$$\text{(b)} \quad (\Phi_{1,2})^* (\mathfrak{S}^p (\mathcal{A}_1^*)) \subseteq \mathfrak{S}^m (\mathcal{A}_2^*) \tag{8.9}$$

この連続線形作用素 $\Phi_{1,2}^*$ は $\Phi_{1,2}$ の**双対因果作用素**（または，**マルコフ双対因果作用素，因果関係のシュレーディンガー描像**）と呼ぶ．

特に，次を満たすとき，因果作用素 $\Phi_{1,2}$ を**決定因果作用素**と呼ぶ．

$$(\Phi_{1,2})^* (\mathfrak{S}^p (\mathcal{A}_1^*)) \subseteq \mathfrak{S}^p (\mathcal{A}_2^*) \tag{8.10}$$

♠ **注釈 8.3.** **[古典系の因果作用素]** 古典系の基本構造 $[C_0(\Omega_1) \subseteq L^\infty(\Omega_1, \nu_1)]_{B(H_1)}$ と $[C_0(\Omega_2) \subseteq L^\infty(\Omega_2, \nu_2)]_{B(H_2)}$ を考える． 連続線形作用素 $\Phi_{1,2} : L^\infty(\Omega_2) \to L^\infty(\Omega_1)$ が次の (i)—(iii) を満たすとき，$\Phi_{1,2}$ を**因果作用素**（または，**マルコフ因果作用素，因果関係のハイゼンベルグ描像**）と呼ぶ:

(i) $f_2 \in L^\infty(\Omega_2)$，$f_2 \geqq 0 \Longrightarrow \Phi_{12} f_2 \geqq 0$

(ii) $\Phi_{12} 1_2 = 1_1$ ここに，$1_k(\omega_k) = 1 \; (\forall \omega_k \in \Omega_k, k = 1, 2)$

(iii) 次を満たす連続線形作用素 $(\Phi_{1,2})_* : L^1(\Omega_1) \to L^1(\Omega_2)$ が存在する：

$$\int_{\Omega_1} [\Phi_{1,2} f_2](\omega_1) \;\; \rho_1(\omega_1) \nu_1(d\omega_1) = \int_{\Omega_2} f_2(\omega_2) \;\; [(\Phi_{1,2})_* \rho_1](\omega_2) \nu_2(d\omega_2)$$
$$(\forall \rho_1 \in L^1(\Omega_1), \forall f_2 \in L^\infty(\Omega_2))$$

この連続線形作用素 $(\Phi_{1,2})_*$ を $\Phi_{1,2}$ の**前双対因果作用素**（または，**マルコフ双対因果作用素，因果関係のシュレーディンガー描像**）と呼ぶ．

(iv) $\Phi_{1,2} : C_0(\Omega_2) \to C_0(\Omega_1)$ で，次を満たす連続線形作用素 $\Phi_{1,2}^* : \mathcal{M}(\Omega_1) \to \mathcal{M}(\Omega_2)$ が存在

する：

$$
{}_{L^1(\Omega_1)}\Big(\rho_1, \Phi_{1,2}F_2\Big)_{L^\infty(\Omega_1)} = {}_{\mathcal{M}(\Omega_2)}\Big(\Phi_{1,2}^*\widehat{\rho}_1, F_2\Big)_{C_0(\Omega_2)}
$$
$$
(\forall \rho_1 = \widehat{\rho}_1 \in \mathcal{M}(\Omega_1), \forall F_2 \in C_0(\Omega_2))
$$

ここに，$\widehat{\rho}_1(D) = \int_D \rho_1(\omega_1)\nu_1(d\omega_1)$ $(\forall D \in \mathcal{B}_{\Omega_1})$．この連続線形作用素 $(\Phi_{1,2})_*$ を $\Phi_{1,2}$ の**前双対因果作用素**（または，**マルコフ双対因果作用素**，**因果関係のシュレーディンガー描像**）と呼ぶ．

特に，次を満たすような連続写像 $\phi_{1,2} : \Omega_1 \to \Omega_2$ が存在するとき，因果作用素 $\Phi_{1,2}$ を**決定因果作用素**と呼ぶ．

$$
[\Phi_{1,2}f_2](\omega_1) = f_2(\phi_{1,2}(\omega_1)) \quad (\forall f_2 \in C(\Omega_2), \forall \omega_1 \in \Omega_1) \tag{8.11}
$$

また，この連続写像 $\phi_{1,2} : \Omega_1 \to \Omega_2$ を**決定因果写像**と呼ぶ．当然のことであるが，

$$
\Omega_1 \approx \mathfrak{S}^p(C_0(\Omega_1)^*) \ni \delta_{\omega_1} \xrightarrow[\Phi_{12}^*]{} \delta_{\phi_{12}(\omega_1)} \in \mathfrak{S}^p(C_0(\Omega_2)^*) \approx \Omega_2
$$

が成り立つ．

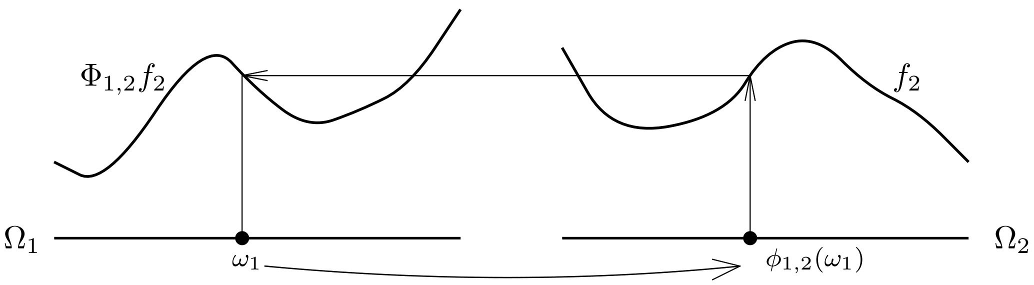


図 8.1:決定因果写像 $\phi_{1,2}$ と決定因果作用素 $\Phi_{1,2}$

定理 8.5. [連続写像＝決定因果写像]．連続写像 $\phi_{1,2} : \Omega_1 \to \Omega_2$ を考える．作用素 $\Phi_{1,2} : L^\infty(\Omega_2, \nu_2) \to L^\infty(\Omega_1, \nu_1)$ を (8.11) 式のように，すなわち，次のように定義する:

$$
[\Phi_{1,2}f_2](\omega_1) = f_2(\phi_{1,2}(\omega_1)) \quad (\forall f_2 \in L^\infty(\Omega_2), \forall \omega_1 \in \Omega_1)
$$

このとき，作用素 $\Phi_{1,2} : L^\infty(\Omega_2) \to L^\infty(\Omega_1)$ は決定因果作用素である．したがって，「連続写像＝決定因果写像」と思ってよい．

証明 双対因果作用素 $\Phi_{1,2}^* : \mathcal{M}(\Omega_1) \to \mathcal{M}(\Omega_2)$ の存在を示せば十分であるが，これは

$$
[\Phi_{1,2}^*\widehat{\rho}_1](D_2) = \widehat{\rho}_1(\phi_{12}^{-1}(D_2)) \qquad (\forall D_2 \in \mathcal{B}_{\Omega_2}, \forall \widehat{\rho}_1 \in \mathcal{M}(\Omega_1)) \tag{8.12}
$$

と定めればよい． □

定理 8.6. $\Phi_{1,2} : L^\infty(\Omega_2) \to L^\infty(\Omega_1)$ を決定因果作用素とする．このとき次が成り立つ：

$$\Phi_{1,2}(f_2 \cdot g_2) = \Phi_{1,2}(f_2) \cdot \Phi_{1,2}(g_2) \qquad (\forall f_2, \forall g_2 \in L^\infty(\Omega_2))$$

証明 f_2 と g_2 を $L^\infty(\Omega_2)$ の任意の元とする．このとき，決定因果作用素 $\Phi_{1,2}$ の決定因果写像を $\phi_{1,2} : \Omega_1 \to \Omega_2$ として，次を得る：

$$\begin{aligned}&[\Phi_{1,2}(f_2 \cdot g_2)](\omega_1) = (f_2 \cdot g_2)(\phi_{1,2}(\omega_1)) = f_2(\phi_{1,2}(\omega_1)) \cdot g_2(\phi_{1,2}(\omega_1))\\ =&[\Phi_{1,2}(f_2)](\omega_1) \cdot [\Phi_{1,2}(g_2)](\omega_1) = [\Phi_{1,2}(f_2) \cdot \Phi_{1,2}(g_2)](\omega_1) \qquad (\forall \omega_1 \in \Omega_1)\end{aligned}$$

よって，証明された． □

8.2.2 簡単な例—有限状態空間ならば，因果作用素は行列表現可能

例 8.7. [決定因果作用素，決定双対因果作用素，決定因果写像] 2 つの状態空間 Ω_1 と Ω_2 を実直線 $\mathbb{R}$，すなわち，$\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}$ として，測度 ν_1 と ν_2 はルベーグ測度とする．古典系の基本構造：

$$[C_0(\Omega_1(\equiv \mathbb{R})) \subseteq L^\infty(\Omega_1, \nu_1) \subseteq B(L^2(\Omega_1, \nu_1))]$$

と

$$[C_0(\Omega_2(\equiv \mathbb{R})) \subseteq L^\infty(\Omega_2, \nu_2) \subseteq B(L^2(\Omega_2, \nu_2))]$$

を考える． 決定因果写像 $\phi_{1,2} : \Omega_1 \to \Omega_2$ を，たとえば，二次関数:

$$\omega_2 = \phi_{1,2}(\omega_1) = 3(\omega_1)^2 + 2 \qquad (\forall \omega_1 \in \Omega_1 = \mathbb{R})$$

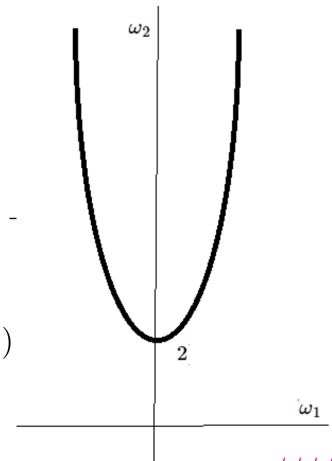
で定める．このとき，点測度 $\delta_{(\cdot)}$ を用いて書けば，決定双対因果作用素 $\Phi_{1,2}^* : \mathcal{M}(\Omega_1) \to \mathcal{M}(\Omega_2)$ が次のように定義できる．

$$\Phi_{1,2}^* \delta_{\omega_1} = \delta_{3(\omega_1)^2+2} \qquad (\forall \omega_1 \in \Omega_1)$$

であり，決定因果作用素 $\Phi_{1,2} : L^\infty(\Omega_2)$ -

$$[\Phi_{1,2}(f_2)](\omega_1) = f_2(3(\omega_1)^2 + 2) \qquad (\forall f_2 \in L^\infty(\Omega_2), \forall \omega_1 \in \Omega_1)$$

によって定まる．



$\omega_2 = \phi_{1,2}(\omega_1) = 3(\omega_1)^2 + 2$

例 8.8. [双対因果作用素・因果作用素]　2 つの有限状態空間 Ω_1 と Ω_2 を，$\Omega_1 = \{\omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3\}$ と $\Omega_2 = \{\omega_2^1, \omega_2^2\}$ と定める．$\rho_1 (\in \mathcal{M}_{+1}(\Omega_1))$ を，点測度 $\delta_{(\cdot)} (\in \mathcal{M}_{+1}(\Omega_1))$ を用いて，

$$\rho_1 = a_1 \delta_{\omega_1^1} + a_2 \delta_{\omega_1^2} + a_3 \delta_{\omega_1^3} \quad (0 \leqq a_1, a_2, a_3 \leqq 1, a_1 + a_2 + a_3 = 1)$$

で定める．このとき，双対因果作用素 $\Phi_{1,2}^* : \mathcal{M}_{+1}(\Omega_1) \to \mathcal{M}_{+1}(\Omega_2)$ は

$$\begin{aligned}\Phi_{1,2}^*(\rho_1) =& (c_{11}a_1 + c_{12}a_2 + c_{13}a_3)\delta_{\omega_2^1} + (c_{21}a_1 + c_{22}a_2 + c_{23}a_3)\delta_{\omega_2^2} \\ & \qquad (0 \leqq c_{ij} \leqq 1, \sum_{i=1}^{2} c_{ij} = 1)\end{aligned}$$

と表現できる．ここで，同一視：$\mathcal{M}(\Omega_1) \approx \mathbb{C}^3$，$\mathcal{M}(\Omega_2) \approx \mathbb{C}^2$，すなわち，

$$\mathcal{M}(\Omega_1) \ni \alpha_1 \delta_{\omega_1^1} + \alpha_2 \delta_{\omega_1^2} + \alpha_3 \delta_{\omega_1^3} \underset{\text{同一視}}{\longleftrightarrow} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

$$\mathcal{M}(\Omega_2) \ni \beta_1 \delta_{\omega_2^1} + \beta_2 \delta_{\omega_2^2} \underset{\text{同一視}}{\longleftrightarrow} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

を考える．このとき，

$$\Phi_{1,2}^*(\rho_1) = \beta_1 \delta_{\omega_2^1} + \beta_2 \delta_{\omega_2^1} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix},$$

$$\rho_1 = \alpha_1 \delta_{\omega_1^1} + \alpha_2 \delta_{\omega_1^2} + \alpha_3 \delta_{\omega_1^3} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

とおいて，行列形式で書けば，

$$\Phi_{1,2}^*(\rho_1) = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

次に，この双対因果作用素 $\Phi_{1,2}^* : \mathcal{M}(\Omega_1) \to \mathcal{M}(\Omega_2)$ から，因果作用素 $\Phi_{1,2} : L^\infty(\Omega_2, \nu_2) \to L^\infty(\Omega_1, \nu_1)$ を構成しよう．$\nu_1(\{\omega_1^k\}) = 1$ ($k = 1, 2, 3$)，$\nu_2(\{\omega_2^k\}) = 1$ ($k = 1, 2$) としておく．同一視：$L^\infty(\Omega_1) \approx \mathbb{C}^3$，$L^\infty(\Omega_2) \approx \mathbb{C}^2$，すなわち，

$$L^\infty(\Omega_1) \ni f_1 \underset{\text{同一視}}{\longleftrightarrow} \begin{bmatrix} f_1(\omega_1^1) \\ f_1(\omega_1^2) \\ f_1(\omega_1^3) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3, \qquad L^\infty(\Omega_2) \ni f_2 \underset{\text{同一視}}{\longleftrightarrow} \begin{bmatrix} f_2(\omega_2^1) \\ f_2(\omega_2^2) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

を考える．$f_2 \in L^\infty(\Omega_2)$，$f_1 = \Phi_{1,2} f_2$ として，行列形式で書けば，

$$\begin{bmatrix} f_1(\omega_1^1) \\ f_1(\omega_1^2) \\ f_1(\omega_1^3) \end{bmatrix} = f_1 = \Phi_{1,2}(f_2) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \\ c_{13} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2(\omega_2^1) \\ f_2(\omega_2^2) \end{bmatrix}$$

となる．したがって，双対因果作用素 $\Phi_{1,2}^*$ と因果作用素 $\Phi_{1,2}$ の関係は，行列表現をもつ場合 (すなわち，Ω_1 と Ω_2 が有限集合の場合) は「転置」の関係になる．

////

例 8.9. [決定双対因果作用素，決定因果写像，決定因果作用素]　上の例から引き継いで，双対因果作用素 $\Phi_{1,2}^* : \mathcal{M}(\Omega_1)(\approx \mathbb{C}^3) \to \mathcal{M}(\Omega_2)(\approx \mathbb{C}^2)$ が，たとえば，行列形式で，

$$\Phi_{1,2}^*(\rho_1) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

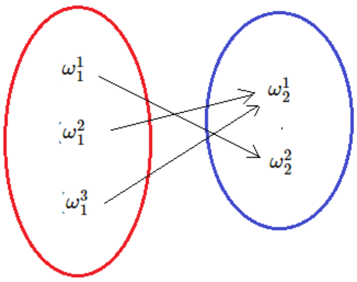
と表現される場合は，決定双対因果作用素になる．この決定因果作用素 $\Phi_{1,2} : C(\Omega_2) \to C(\Omega_1)$ を行列形式で書けば，

$$\begin{bmatrix} f_1(\omega_1^1) \\ f_1(\omega_1^2) \\ f_1(\omega_1^3) \end{bmatrix} = f_1 = \Phi_{1,2}(f_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2(\omega_2^1) \\ f_2(\omega_2^2) \end{bmatrix}$$

となる．
もちろん，その決定因果写像 $\phi_{1,2} : \Omega_1 \to \Omega_2$ は

$$\phi_{1,2}(\omega_1^1) = \omega_2^2, \quad \phi_{1,2}(\omega_1^2) = \omega_2^1, \quad \phi_{1,2}(\omega_1^3) = \omega_2^1$$

で表される．



$\phi_{1,2} : \Omega_1 \to \Omega_2$

////

8.2.3　因果作用素列—因果関係の連鎖

$(T, \leqq)$ を木半順序集合，すなわち，半順序集合で，任意の $t_1, t_2, t_3 (\in T)$ に対して，

$$t_1 \leqq t_3,\ \ t_2 \leqq t_3 \Longrightarrow t_1 \leqq t_2 \text{ または } t_2 \leqq t_1$$

を満たすとする．$T^2_{\leqq} = \{(t_1, t_2) \in T^2 \mid t_1 \leqq t_2\}$ とおく．要素 $t_0 \in T$ が，条件：「$t_0 \leqq t$ $(\forall t \in T)$」を満たすとき，t_0 を T の**ルート**と呼ぶ．このとき，$(T, \leqq)$ を $(T(t_0), \leqq)$ と書くこともある．

木半順序集合 T が有限と仮定するならば，**親写像** $\pi : T \setminus \{t_0\} \to T$ を $\pi(t) = \max\{s \in T \mid s <$

$t\}$ で定義できる．ルート t_0 をもつ木半順序集合 $(T(t_0), \leqq)$ は，対 $(T{=}\{t_0, t_1, \ldots, t_N\}, \pi : T \setminus \{t_0\} \to T)$ で表現することもある．この表現 $(T{=}\{t_0, t_1, \ldots, t_N\}, \pi : T \setminus \{t_0\} \to T)$ を，$(T(t_0), \leqq)$ の**親写像表現**と呼ぶ．

図 8.2 は，t_0 がルートで，$\pi(t_3) = \pi(t_4) = t_2$, $\pi(t_2) = \pi(t_5) = t_1$, $\pi(t_1) = \pi(t_6) = \pi(t_7) = t_0$ の例である．

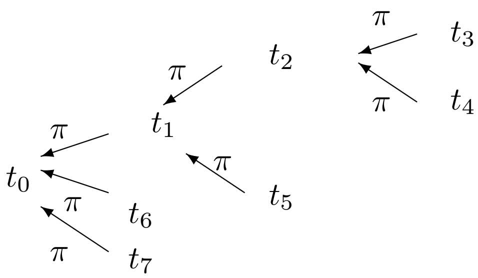
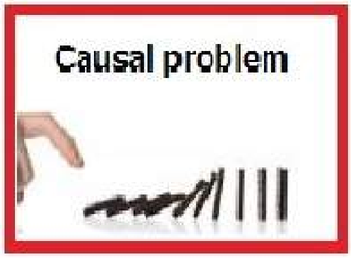


図 8.2: 木半順序集合の例

定義 8.10. [因果作用素列]



T を木半順序集合とする． 各 $t \in T$ に対して，基本構造

$$[\mathcal{A}_t \subseteq \overline{\mathcal{A}}_t \subseteq B(H_t)]$$

を考える． 族 $\{\Phi_{t_1,t_2} : \overline{\mathcal{A}}_{t_2} \to \overline{\mathcal{A}}_{t_1}\}_{(t_1,t_2)\in T^2_{\leqq}}$ $\Big($ または，$\{\overline{\mathcal{A}}_{t_2} \overset{\Phi_{t_1,t_2}}{\to} \overline{\mathcal{A}}_{t_1}\}_{(t_1,t_2)\in T^2_{\leqq}}$ とも記される$\Big)$ は次を満たすとき，**因果作用素列** (または，**因果関係列のハイゼンベルグ描像**) という (図 8.3)：

(i) 任意の $(t_1, t_2) \in T^2_{\leqq}$ に対して，因果作用素 $\Phi_{t_1,t_2} : \overline{\mathcal{A}}_{t_2} \to \overline{\mathcal{A}}_{t_1}$ が定義されて，$\Phi_{t_1,t_2}\Phi_{t_2,t_3} = \Phi_{t_1,t_3}$ $(\forall(t_1,t_2), \forall(t_2,t_3) \in T^2_{\leqq})$ を満たす．ここに，$\Phi_{t,t} : \overline{\mathcal{A}}_t \to \overline{\mathcal{A}}_t$ は恒等作用素とする．

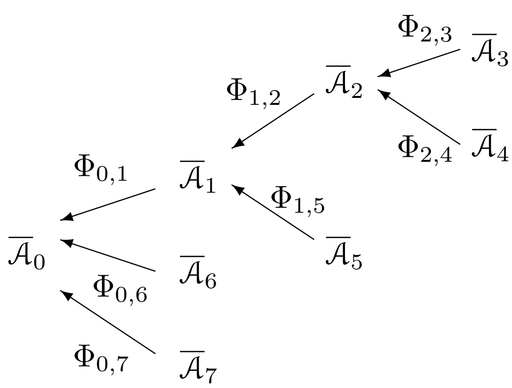
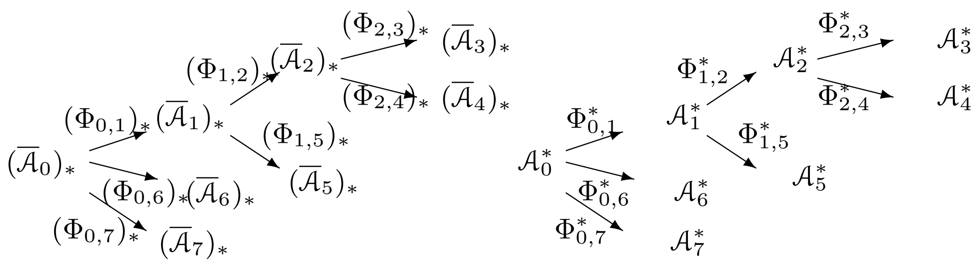


図 8.3: ハイゼンベルグ描像 (図 8.2 の場合の因果作用素列)

////

定義 8.11. (i): [前双対因果作用素列]　族 $\{(\Phi_{t_1,t_2})_* : (\overline{\mathcal{A}}_{t_1})_* \to (\overline{\mathcal{A}}_{t_1})_*\}_{(t_1,t_2)\in T^2_{\leqq}}$ を，$\{\Phi_{t_1,t_2} : \overline{\mathcal{A}}_{t_2} \to \overline{\mathcal{A}}t_1\}_{(t_1,t_2)\in T^2_{\leqq}}$ の前双対因果作用素列 (または，因果関係列のシュレーディンガー描像) という．

(ii): [双対因果作用素列]　族 $\{\Phi^*_{t_1,t_2} : \mathcal{A}^*_{t_1} \to \mathcal{A}^*_{t_1}\}_{(t_1,t_2)\in T^2_{\leqq}}$ を，$\{\Phi_{t_1,t_2} : \overline{\mathcal{A}}_{t_2} \to \overline{\mathcal{A}}t_1\}_{(t_1,t_2)\in T^2_{\leqq}}$ の双対因果作用素列 (または，因果関係列のシュレーディンガー描像) という．



(i):前双対因果作用素列　　　(ii):双対因果作用素列

図 8.4: シュレーディンガー描像 ((前) 双対因果作用素列)

注意 8.12. [ハイゼンベルグ描像が正式]　シュレーディンガー描像は, 直観的で, わかりやす.　シュレーディンガー描像 $\{\Phi^*_{t_1,t_2} : \mathcal{A}^*_{t_1} \to \mathcal{A}^*_{t_1}\}_{(t_1,t_2)\in T^2_{\leqq}}$ を考えて, $t_1(\in T)$ において, C^*-混合状態 $\rho_{t_1}(\in \mathfrak{S}^m(\mathcal{A}^*_{t_1})$ を想定すれば,

- $t_2(\geq t_1)$ における C^*-混合状態 $\rho_{t_2}(\in \mathfrak{S}^m(\mathcal{A}^*_{t_2}))$ は

$$\rho_{t_2} = \Phi^*_{t_1,t_2}\rho_{t_1}$$

となる.

と思えばよい.　しかし, 注意点は, 言語的コペンハーゲン解釈 (*cf.* 3.1 節)「状態は動かない」の帰結として,

- **ハイゼンベルグ描像が正式で, シュレーディンガー描像は場合の手法**

ということである. このことは, 後で述べる.

8.3 言語ルール 2 —マルコフ連鎖

測定理論は次のように定式化される.

- $$\underset{(=\text{量子言語})}{\boxed{\text{測定理論}}} := \underbrace{\overset{[\text{言語ルール 1}]}{\underset{(cf.\ \ 2.7\text{ 節})}{\boxed{\text{測定}}}} + \overset{[\text{言語ルール 2}]}{\underset{(cf.\ \ 8.3\text{ 節})}{\boxed{\text{因果関係}}}}}_{\text{一種の呪文 (ア・プリオリな認識)}} + \underbrace{\overset{[\text{言語的コペンハーゲン解釈}]}{\underset{(cf.\ \ 3.1\text{ 節})}{\boxed{\text{言語的解釈}}}}}_{\text{呪文の使い方のマニュアル}}$$

この節で、やっと言語ルール 2 を紹介できる.

8.3.1 言語ルール 2(マルコフ因果関係の連鎖)

前節の議論をまとめて, 次の言語ルール 2 (因果関係;8.3 節) を主張する. これは, 因果関係— 「火の無いところに, 煙は立たない」という格言— の測定理論による表現と思えば良いだろう.

(C): 言語ルール 2(因果関係の連鎖) ($cf.$ 前節までの準備で読めるようになっているはず)

T を木半順序集合として, 各 $t(\in T)$ に対して, 基本構造 $[\mathcal{A}_t \subseteq \overline{\mathcal{A}}_t]_{B(H_t)}$ が定まっているとする. このとき, 因果関係の連鎖は因果作用素列 $\{\Phi_{t_1,t_2} : \overline{\mathcal{A}}_{t_2} \to \overline{\mathcal{A}}_{t_1}\}_{(t_1,t_2)\in T^2_{\leqq}}$ により表現される[a].

[a] 本書では, C^*-因果作用素列 $\{\Phi_{t_1,t_2} : \mathcal{A}_{t_2} \to \mathcal{A}_{t_1}\}_{(t_1,t_2)\in T^2_{\leqq}}$ は扱わない.

♠ **注釈 8.4.** 言語ルール 1(測定) と同様に、この言語ルール 2(因果関係) も一種の呪文である. 量子言語以外でも、「運動 (や発展)」に関する呪文 (ことわざ、金言) はいろいろとある. 「法則」と「諺」の区切りは気分的であるが、たとえば、

($\sharp_1$) [アリストレレス]: 目的因 (運動には目的がある)

($\sharp_2$) [ダーウィン]: 進化論 (適者生存)
($\sharp_3$) [ヘーゲル]: 弁証法 (正 (テーゼ), 反 (アンチテーゼ), 合)
($\sharp_4$) エントロピー増大則 (*cf.* 注意 13.6)
等である．($\sharp_1$)–($\sharp_3$) は、非数量的であるが、($\sharp_4$) は数量的である．いずれもが世界を動かした「運動 (や発展) に関する呪文」であることは誰も異を唱えないと思う．しかし、本書では言語ルール 2(因果関係) に集中する．

8.3.2 因果作用素列の例—「連立一階微分方程式」等

以下で,「因果関係の連鎖」を，測定理論 (=量子言語) の言葉で記述する演習を行なう．

例 8.13. [連立一階微分方程式] 連続時間 $T=\mathbb{R}$ (時間軸) を考える．順序「$\leqq$」は通常の「大小関係」とする．各 $t(\in T)$ に対して，状態空間 Ω_t を $\Omega_t=\mathbb{R}^n$ (n-次元ルベーグ測度空間) と定める．**状態方程式**，すなわち，次の時変数の連立 1 階微分方程式 (8.13) を考える：

$$\begin{cases} \frac{d\omega_1}{dt}(t)=v_1(\omega_1(t),\omega_2(t),\ldots,\omega_n(t),t) \\ \frac{d\omega_2}{dt}(t)=v_2(\omega_1(t),\omega_2(t),\ldots,\omega_n(t),t) \\ \cdots\cdots \\ \frac{d\omega_n}{dt}(t)=v_n(\omega_1(t),\omega_2(t),\ldots,\omega_n(t),t) \end{cases} \tag{8.13}$$

この微分方程式が生成する決定因果写像を $\phi_{t_1,t_2}:\Omega_{t_1}\to\Omega_{t_2}$，$(t_1\leqq t_2)$ とする．このとき，$\phi_{t_2,t_3}(\phi_{t_1,t_2}(\omega_{t_1}))=\phi_{t_1,t_3}(\omega_{t_1})$ $(\omega_{t_1}\in\Omega_{t_1},t_1\leqq t_2\leqq t_3)$ は明らかなので，定理 8.5 より，決定因果作用素列 $\{\Phi_{t_1,t_2}:L^\infty(\Omega_{t_2})\to L^\infty(\Omega_{t_1})\}_{(t_1,t_2)\in T^2_{\leqq}}$ を得る．

////

例 8.14. [2 階差分方程式] 離散時間 $T=\{0,1,2,\ldots\}$ を考える．親写像 $\pi:T\setminus\{0\}\to T$ を $\pi(t)=t-1$ $(\forall t=1,2,...)$ とする．各 $t(\in T)$ に対して，状態空間 Ω_t を $\Omega_t=\mathbb{R}$ と定める．たとえば，次の差分方程式を考える．すなわち，$\phi:\Omega_t\times\Omega_{t+1}\to\Omega_{t+2}$ は次を満たす:

$$\omega_{t+2}=\phi(\omega_t,\omega_{t+1})=\omega_t+\omega_{t+1}+2 \qquad (\forall t\in T)$$

ここで，状態 ω_{t+2} が 1 単位時間前の状態 ω_{t+1} だけではなくて 2 単位時間前の状態 ω_t にも依存することに注意しよう (一般には,「**多重マルコフ性**」と呼ばれる)．このような場合は，以下のように多少の工夫が必要である．各 $t(\in T)$ に対して，新たな状態空間を $\widetilde{\Omega}_t=\Omega_t\times\Omega_{t+1}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ で定めて，決定因果写像 $\widetilde{\phi}_{t,t+1}:\widetilde{\Omega}_t\to\widetilde{\Omega}_{t+1}$ は次のように定める:

$$(\omega_{t+1},\omega_{t+2})=\widetilde{\phi}_{t,t+1}(\omega_t,\omega_{t+1})=(\omega_{t+1},\omega_t+\omega_{t+1}+2) \qquad (\forall(\omega_t,\omega_{t+1})\in\widetilde{\Omega}_t,\forall t\in T)$$

したがって，定理 8.5 より，決定因果作用素 $\widetilde{\Phi}_{t,t+1} : L^\infty(\widetilde{\Omega}_{t+1}) \to L^\infty(\widetilde{\Omega}_t)$ は，

$$[\widetilde{\Phi}_{t,t+1}\tilde{f}_t](\omega_t, \omega_{t+1}) = \tilde{f}_t(\omega_{t+1}, \omega_t + \omega_{t+1} + 2)$$
$$(\forall(\omega_t, \omega_{t+1}) \in \widetilde{\Omega}_t, \forall \tilde{f}_t \in L^\infty(\widetilde{\Omega}_{t+1}), \forall t \in T \setminus \{0\}))$$

によって定義できて，決定因果作用素列 $\{\widetilde{\Phi}_{t,t+1} : L^\infty(\widetilde{\Omega}_{t+1}) \to L^\infty(\widetilde{\Omega}_t)\}_{t \in T\setminus\{0\}}$ を得る．

////

♠ **注釈 8.5.** 諸科学の運動・変化において，「現在」ばかりでなくて，「過去」の状態までが，次の状態に影響すると考えたいことはよくあることなので，「多重マルコフ性」の例を述べた．多重マルコフの系や時間遅れの系も，状態空間を工夫して，因果作用素列で表すのが，測定理論の基本である．状態方程式 (8.13) を連立一階微分方程式で書いたのもこの理由による．もちろん，原則・理論としての話で，応用・計算等ではその限りではない．

8.4 運動方程式 (古典系と量子系)

8.4.1 ハミルトニアン (簡単の為, 非時変形とする)

普通は，1-粒子系では，$\Omega = \mathbb{R}^6 = \{(q_x, q_y, q_z, p_x, p_y, p_z)\}$．$N$-粒子系では，$\Omega = \mathbb{R}^{6N}$ であるが, ここでは一番簡単な場合 $\mathbb{R}^2$ を扱う． 質量 m の質点 P を考えて,

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}_q \times \mathbb{R}_p = \{(q,p) = (\text{位置}, \text{運動量}) \mid q, p \in \mathbb{R}\} \tag{8.14}$$

とする．もちろん，[運動量 : p] = [質量 : m] × [速度 : $\frac{dq}{dt}$] である．

全エネルギー (=E) をハミルトニアン $\mathcal{H}(q,p)$ とすれば, 典型的な例としては，以下のようになる．

$$\begin{aligned} &[\text{ハミルトニアン } (= \mathcal{H}(q,p))] \\ =&[\text{運動エネルギー } (= \frac{p^2}{2m})] + [\text{ポテンシャルエネルギー } (= V(q))] \end{aligned} \tag{8.15}$$

8.4.2 ニュートンの運動方程式 (=ハミルトンの正準方程式)

ハミルトニアン $\mathcal{H}(q,p)$ を持つ「古典系の運動方程式 (ハミルトンの正準方程式)」は，以下のように定義される．

$$\text{正準方程式} = \begin{cases} \frac{dp}{dt} = -\frac{\mathcal{H}(q,p)}{\partial q} \\ \\ \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{H}(q,p)}{\partial p} \end{cases} \tag{8.16}$$

(8.15) 式の場合は,

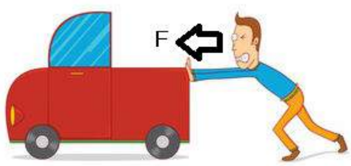
$$\text{正準方程式} = \begin{cases} \frac{dp}{dt} = -\frac{\mathcal{H}(q,p)}{\partial q} = -\frac{\partial V(q,p)}{\partial q} \\ \\ \frac{dq}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}(q,p)}{\partial p} = \frac{p}{m} \end{cases} \tag{8.17}$$

となり, これはニュートンの運動方程式と同じ, すなわち,

$$m\frac{d^2q}{dt^2} = [\text{質量}] \times [\text{加速度}] = -\frac{\partial V(q,p)}{\partial q} (= \text{力})$$

となる．

さて, 上の (8.17) 式を, 量子言語で記述することを考えよう．



各 $t \in T = \mathbb{R}$ に対して，状態空間 Ω_t を

$$\Omega_t = \Omega = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}_q \times \mathbb{R}_p = \{(q,p) = (\text{位置}, \text{運動量}) \mid q, p \in \mathbb{R}\} \tag{8.18}$$

とおく． 測度 ν はルベーグ測度としておこう．

このとき, 古典系の基本構造

$$C_0(\Omega_t) \subseteq L^\infty(\Omega_t) \subseteq B(L^2(\Omega_t)) \qquad (\forall t \in T = \mathbb{R}$$

内で, 議論をしよう．

正準方程式 (8.17) の解を

$$\Omega_{t_1} \ni \omega_{t_1} \mapsto \phi_{t_1,t_2}(\omega_{t_1}) = \omega_{t_2} \in \Omega_{t_2} \tag{8.19}$$

とする． したがって，因果作用素列 $\{\Phi_{t_1,t_2} : L^\infty(\Omega_{t_2}) \to L^\infty(\Omega_{t_1})\}_{(t_1,t_2)\in T^2_\leq}$ は,

$$[\Phi_{t_1,t_2}(f_{t_2})](\omega_{t_1}) = f_{t_2}(\phi_{t_1,t_2}(\omega_{t_1})) \qquad (\forall f_{t_2} \in L^\infty(\Omega_2), \forall \omega_{t_1} \in \Omega_{t_1}, t_1 \leq t_2) \tag{8.20}$$

と定義できる． また, (8.19) 式は決定因果写像を定めるから，因果作用素列 $\{\Phi_{t_1,t_2} : L^\infty(\Omega_{t_2}) \to L^\infty(\Omega_{t_1})\}_{(t_1,t_2)\in T^2_\leq}$ は決定因果作用素列である．

8.4.3 シュレーディンガー方程式 (ハミルトニアンの量子化)

量子化とは次の手続きを言う．

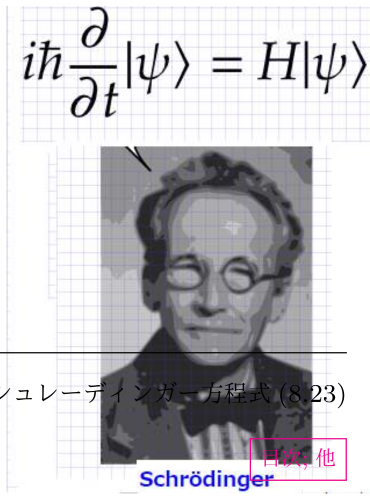
$$\text{量子化}^{*3} \begin{cases} \text{全エネルギー } E & \xrightarrow[\text{量子化}]{} \dfrac{\hbar\sqrt{-1}\partial}{\partial t} \\ \text{運動量 } p & \xrightarrow[\text{量子化}]{} \dfrac{\hbar\partial}{\sqrt{-1}\partial q} \\ \text{位置 } q & \xrightarrow[\text{量子化}]{} q \end{cases} \tag{8.21}$$

これを, ハミルトニアン：

$$E = \mathcal{H}(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

に代入すれば (すなわち, 量子化すれば),

$$\hbar\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial t} = \mathcal{H}(q, \frac{\hbar}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial q}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q) \quad (8.22)$$



*3 「量子化」の物理的意味は誰も知らない． しかし, これを丸暗記しておけば，シュレーディンガー方程式 (8.23) を導くことができる．

目次, 他

をえる． ここでは, 何を言っているのか」わからないで,「後ろから $u(t,q)$」を掛けて, 次のシュレーディンガー方程式を得る．

$$\hbar\sqrt{-1}\frac{\partial u(t,q)}{\partial t} = \mathcal{H}(q, \frac{\hbar}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial q})u(t,q) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2}u(t,q) + V(q)u(t,q) \tag{8.23}$$

各 $t \in T = \mathcal{R}$ に対して, $u(t,\cdot) = u_t \in L^2(\mathbb{R})$ と定めれば, シュレーディンガー方程式 (8.23) は,

$$u_t = \frac{1}{\hbar\sqrt{-1}}\mathcal{H}u_t$$

となる． これを形式的に解いて,

$$u_t = e^{\frac{\mathcal{H}}{\hbar\sqrt{-1}}t}u_0$$

$$\text{(「状態表示」すれば, } |u_t\rangle\langle u_t| = |e^{\frac{\mathcal{H}}{\hbar\sqrt{-1}}t}u_0\rangle\langle e^{\frac{\mathcal{H}}{\hbar\sqrt{-1}}t}u_0| \text{)} \tag{8.24}$$

ここに, $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ は初期条件．

さて, ヒルベルト空間 $H = L^2(\mathbb{R})$ を設定して, 量子系の基本構造

$$\mathcal{C}(L^2(\mathbb{R})) \subseteq B(L^2(\mathbb{R})) \subseteq B(L^2(\mathbb{R}))$$

内の議論をしよう． 双対因果作用素列 $\{\Phi^*_{t_1,t_2} : \mathcal{T}r(H) \to \mathcal{T}r(H)\}_{(t_1,t_2)\in T^2_{\leq}}$ (また, これは前双対因果作用素列 $\{(\Phi_{t_1,t_2})_* : \mathcal{T}r(H) \to \mathcal{T}r(H)\}_{(t_1,t_2)\in T^2_{\leq}}$ でもある) は,

$$\Phi^*_{t_1,t_2}(\rho) = e^{\frac{\mathcal{H}}{\hbar\sqrt{-1}}(t_2-t_1)}\rho e^{\frac{-\mathcal{H}}{\hbar\sqrt{-1}}(t_2-t_1)} \qquad (\forall \rho \in \mathcal{T}r(H)) \tag{8.25}$$

となる． したがって, 因果作用素列 $\{\Phi_{t_1,t_2} : B(H) \to B(H)\}_{(t_1,t_2)\in T^2_{\leq}}$ は,

$$\Phi_{t_1,t_2}(A) = e^{\frac{-\mathcal{H}}{\hbar\sqrt{-1}}(t_2-t_1)}Ae^{\frac{\mathcal{H}}{\hbar\sqrt{-1}}(t_2-t_1)} \qquad (\forall A \in B(H)) \tag{8.26}$$

となる． また,

$$\Phi^*_{t_1,t_2}(\mathfrak{S}^p(\mathcal{C}(H)^*) \subseteq \mathfrak{S}^p(\mathcal{C}(H)^*)$$

であるから, これは決定因果作用素列となる． 上では, 非時変系を扱ったので, $t = t_2 - t_1$ とおいて, (8.26) 式は,

$$A_t = \Phi_t(A_0) = e^{\frac{-\mathcal{H}}{\hbar\sqrt{-1}}t}A_0e^{\frac{\mathcal{H}}{\hbar\sqrt{-1}}t} \tag{8.27}$$

なので, 微分方程式で書けば,

$$\frac{dA_t}{dt} = \frac{-\mathcal{H}}{\hbar\sqrt{-1}}e^{\frac{-\mathcal{H}}{\hbar\sqrt{-1}}t}A_0e^{\frac{\mathcal{H}}{\hbar\sqrt{-1}}t} + \frac{-\mathcal{H}}{\hbar\sqrt{-1}}e^{\frac{-\mathcal{H}}{\hbar\sqrt{-1}}t}A_0e^{\frac{\mathcal{H}}{\hbar\sqrt{-1}}t}\frac{\mathcal{H}}{\hbar\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{-\mathcal{H}}{\hbar\sqrt{-1}}A_t + A_t\frac{\mathcal{H}}{\hbar\sqrt{-1}} = \frac{1}{\hbar\sqrt{-1}}\Big(A_t\mathcal{H} - \mathcal{H}A_t\Big) \tag{8.28}$$

となり, これが, ハイゼンベルグの運動方程式である.

シュレーディンガー方程式とハイゼンベルグの運動方程式は通常は同値とされているが、量子言語 (=言語的コペンハーゲン解釈 (状態は動かない (*cf.* 3.1 節)) の立場は,

- **ハイゼンベルグ描像が正式で, シュレーディンガー描像は場合の手法**

である.

8.5 量子デコヒーレンスと酔歩

8.5.1 拡散過程

例 8.15. [酔歩] 状態空間 $\Omega = \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ を考える． 個数測度 ν を仮定しておこう．ここで，因果作用素 $\Phi : L^\infty(\mathbb{Z}) \to L^\infty(\mathbb{Z})$ を

$$[\Phi(f)](i) = \frac{f(i-1) + f(i+1)}{2} \qquad (\forall f \in L^\infty(\mathbb{Z}), \forall i \in \mathbb{Z})$$

で定める．マルコフ双対因果作用素 $\Phi^* : \mathcal{M}_{+1}(\mathbb{Z}) \to \mathcal{M}_{+1}(\mathbb{Z})$ を，点測度 $\delta_{(\cdot)}(\in \mathcal{M}_{+1}(\mathbb{Z}))$ を使って，次のように定める：

$$\Phi^*(\delta_i) = \frac{\delta_{i-1} + \delta_{i+1}}{2} \qquad (i \in \mathbb{Z})$$

これは, 明らかに, 「非決定的」である．

ここで，離散時間 $T = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$ を考えて，親写像 $\pi : T \setminus \{0\} \to T$ を $\pi(t) = t - 1$ とする．各 $t(\in T)$ に対して，状態空間 Ω_t を $\Omega_t = \mathbb{Z}$ で定める．このとき，因果作用素列 $\{\Phi_{\pi(t),t}(= \Phi) : L^\infty(\Omega_t) \to L^\infty(\Omega_{\pi(t)})\}_{t \in T \setminus \{0\}}$ を得る．これは，酔歩—酔っ払いが，左右にフラフラしながら歩いている様—の測定理論的表現である．

////

8.5.2 量子デコヒーレンス：量子系の非決定因果作用素列

基本構造 $[\mathcal{C}(H), B(H)]_{B(H)}$ を考える．$B(H)$ 内のスペクトル分解 $\mathbb{P} = [P_n]_{n=1}^\infty$， すなわち,

$$P_n \text{は射影作用素で}, \sum_{n=1}^\infty P_n = I$$

とする．写像 $(\Psi_\mathbb{P})_* : Tr(H) \to Tr(H)$ を次のように定める：

$$(\Psi_\mathbb{P})_*(|u\rangle\langle u|) = \sum_{n=1}^\infty |P_n u\rangle\langle P_n u| \quad (\forall u \in H)$$

明らかに,

$$\langle v, (\Psi_\mathbb{P})_*(|u\rangle\langle u|)v\rangle = \langle v, (\sum_{n=1}^\infty |P_n u\rangle\langle P_n u|)v\rangle = \sum_{n=1}^\infty |\langle v, |P_n u\rangle|^2 \geq 0$$

$$(\forall u, v \in H)$$

しかも,

$$\mathrm{Tr}((\Psi_{\mathbb{P}})_*(|u\rangle\langle u|)) = \mathrm{Tr}(\sum_{n=1}^{\infty} |P_n u\rangle\langle P_n u|)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, P_n u\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n u\|^2 = \|u\|^2 \qquad (\forall u \in H)$$

よって,

$$(\Psi_{\mathbb{P}})_*(\mathcal{T}r^p_{+1}(H)) \subseteq \mathcal{T}r_{+1}(H)$$

したがって, $\Psi_{\mathbb{P}} \quad (= ((\Psi_{\mathbb{P}})_*)^*) : B(H) \to B(H)$ は因果作用素であるが, 決定的因果作用素ではない. このような「非決定的因果作用素 (列)」のことを, 量子デコヒーレンスと呼ぶ.

例 8.16. [7.4 節の「量子ゼノン効果」の準備 *cf.* [37]**].** さらに, ハミルトニアン $\mathcal{H}$ (*cf.* (8.23) 式) に関する時間発展作用素 $(\Psi_S^{\Delta t})_* : Tr(H) \to Tr(H)$ を次のように定める:

$$(\Psi_S^{\Delta t})_*(|u\rangle\langle u|) = |e^{-\frac{i\mathcal{H}\Delta t}{\hbar}} u\rangle\langle e^{-\frac{i\mathcal{H}\Delta t}{\hbar}} u| \quad (\forall u \in H)$$

時刻 $t = 0, 1$ とする. $\Delta t = \frac{1}{N}$, $H = H_0 = H_1$, とおいて, 写像 $(\Phi_{0,1}^{(N)})_* : Tr(H_0) \to Tr(H_1)$ と次のように定める:

$$(\Phi_{0,1}^{(N)})_* = ((\Psi_S^{1/N})_*(\Psi_{\mathbb{P}})_*)^N$$

この $\Phi_{0,1}^{(N)} = ((\Phi_{0,1}^{(N)})_*)^*$ の共役作用素として, マルコフ作用素 $\Phi_{0,1}^{(N)} : B(H_1) \to B(H_0)$ を定義する.

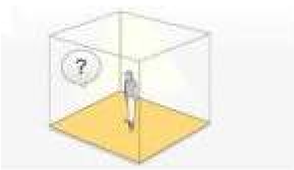
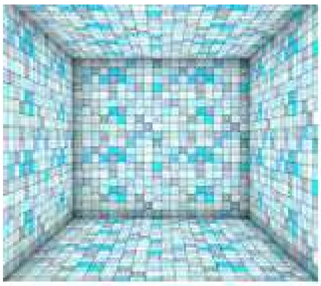
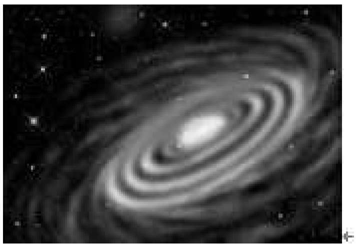
8.6 ライプニッツ＝クラーク論争「時空とは, 何か？」

「時空とは, 何か？」は、伝統的哲学だけでなくて、現代科学においても最重要の未解決問題である．本節では、この問題に解答を与える．読者は、

- 量子言語無くして、この問題は解けない

ことを了解するはずである．

8.6.1 “空間とは何か？” と “時間とは何か？”)

8.6.1.1 量子言語における空間
（「空間」を量子言語で如何に記述するか？）

以下に、最も単純な場合について考えよう．たとえば、

$$\text{(A)} \qquad \text{“空間”}=\mathbb{R}_q(\text{一次元実空間})$$

古典系 (B_1) と量子系 (B_2) の両方を、次のように考える．

$$\text{(B)} \begin{cases} (\mathrm{B}_1): \quad \text{一次元実空間 } \mathbb{R}_q \text{ 内の古典粒子} \\ \\ (\mathrm{B}_2): \text{一次元実空間 } \mathbb{R}_q \text{ 内の量子粒子} \end{cases}$$

古典系の場合は、次の状態を想定して、

$$(q,p) = (\text{“位置”}, \text{“運動量”}) \in \mathbb{R}_q \times \mathbb{R}_p$$

古典基本構造：

$$(\mathrm{C}_1) \qquad [C_0(\mathbb{R}_q \times \mathbb{R}_p) \subseteq L^\infty(\mathbb{R}_q \times \mathbb{R}_p) \subseteq B(L^2(\mathbb{R}_q \times \mathbb{R}_p))]$$

を得る．

また、量子系の場合は、量子基本構造：

(C$_2$) $\quad [\mathfrak{C}(L^2(\mathbb{R}_q) \subseteq B(L^2(\mathbb{R}_q) \subseteq B(L^2(\mathbb{R}_q)]$

を得る. まとめると、つぎの一般基本構造：

(C) $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}} \subseteq B(H)]$

$$\bullet \begin{cases} (\mathrm{C}_1):\text{古典系 } [C_0(\mathbb{R}_q \times \mathbb{R}_p) \subseteq L^\infty(\mathbb{R}_q \times \mathbb{R}_p) \subseteq B(L^2(\mathbb{R}_q \times \mathbb{R}_p)] \\ \\ (\mathrm{C}_2):\text{量子系 } [\mathfrak{C}(L^2(\mathbb{R}_q) \subseteq B(L^2(\mathbb{R}_q) \subseteq B(L^2(\mathbb{R}_q)] \end{cases}$$

を得たのであった

さて、量子言語では、基本構造からスタートするのだから、"(A)$\Longrightarrow$(C)"の逆の議論をすればよい. すなわち、次のように考えることになる.

$$\begin{aligned} &\text{「空間」を量子言語で如何に記述するか？} \\ \Leftrightarrow\ &[(\mathrm{C}):\text{基本構造}] \text{ から } [(\mathrm{A}):\text{空間}] \text{ を如何に導出するか？} \end{aligned} \tag{8.29}$$

これは次のステップによって実現される.

主張 8.17. 「空間」を量子言語で如何に記述するか？

(D$_1$) 基本構造：

$$[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}} \subseteq B(H)]$$

からスタートする.

(D$_2$) ここで、次を満たすある可換 C^*-代数 $\mathcal{A}_0(= C_0(\Omega))$ を考える：

$$\mathcal{A}_0 \subseteq \overline{\mathcal{A}}$$

(D$_3$) このとき、スペクトラム Ω $(\approx \mathfrak{S}^p(\mathcal{A}_0^*))$ を使って、“空間” を表現する.

たとえば,

(E$_1$) 古典系の場合 (C$_1$):

$$[C_0(\mathbb{R}_q \times \mathbb{R}_p) \subseteq L^\infty(\mathbb{R}_q \times \mathbb{R}_p) \subseteq B(L^2(\mathbb{R}_q \times \mathbb{R}_p))]$$

次の可換 C^*-代数 $C_0(\mathbb{R}_q)$:

$$C_0(\mathbb{R}_q) \subseteq L^\infty(\mathbb{R}_q \times \mathbb{R}_p)$$

を考えて、そのスペクトラムとして空間 $\mathbb{R}_q$ を得る.

(E$_2$) 量子系の場合 (C$_2$):

$$[\mathcal{C}(L^2(\mathbb{R}_q) \subseteq B(L^2(\mathbb{R}_q)) \subseteq B(L^2(\mathbb{R}_q))]$$

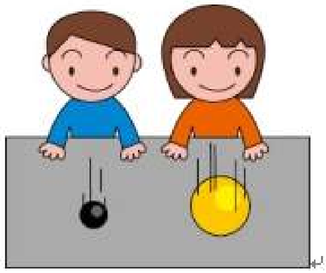
次の可換 C^*-代数 $C_0(\mathbb{R}_q)$:

$$C_0(\mathbb{R}_q) \subseteq B(L^2(\mathbb{R}_q))$$

を考えて、そのスペクトラムとして空間 $\mathbb{R}_q$ を得る.

8.6.1.2 量子言語における時間
(「時間」を量子言語で如何に記述するか？)





Time is money

次のステップを考えよう.

主張 8.18. 「時間」を量子言語で如何に記述するか？

(F$_1$) 木半順序集合 T を考える (第 12 では、無限木半順序集合を議論する). いつものように、各 $t \in T$ に対して、基本構造

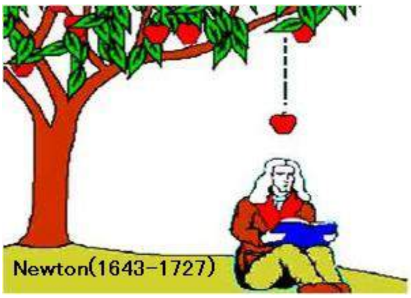
$$[\mathcal{A}_t \subseteq \overline{\mathcal{A}}_t \subseteq B(H_t)]$$

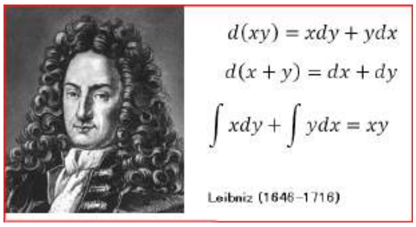
を考える.

(F$_2$) ここで、ある部分線形順序集合 $T'(\subseteq T)$ を考え、これで “時間” を表現する.

8.6.2 ライプニッツ=クラーク論争

前節の議論はライプニッツ=クラーク論争 (1715–1716: *cf.* [1]) のライプニッツの立場– 時空の関係説–を思い出させる．ライプニッツ=クラーク論争におけるライプニッツの立場とクラークの立場 (=ニュートンの立場) を如何に整理しておく．





(G) [実在的時空]
ニュートンの絶対時空は、時空は “もの” の入れ物と考える．したがって、“もの” が無かったとしても、時空は存在する．

他方、

(H) [形而上学的時空]
ライプニッツの関係説は次を主張する．
(H_1) 空間の点は、“もの”の状態の一種である．
(H_2) 時間は、ものの推移の順序である．
したがって、“もの” が無ければ、時空は存在しない．

そうならば、次の対立関係を考えたくなる.

$$\underset{\text{(実在的観点)}}{\boxed{\text{ニュートン} (\approx \text{クラーク})}} \underset{\text{v.s.}}{\longleftrightarrow} \underset{\text{(言語的観点)}}{\boxed{\text{ライプニッツ}}}$$

また、これは次の対立関係を連想させる：

$$\underset{\text{(実在的観点)}}{\boxed{\text{アインシュタイン}}} \underset{\text{v.s.}}{\longleftrightarrow} \underset{\text{(言語的観点)}}{\boxed{\text{ボーア}}}$$

♠ **注釈 8.6.** 多くの科学者は次のように考えるかもしれない：

- ニュートンの主張は納得できる．事実、これはアインシュタインに引き継がれた．他方、ライプニッツの主張はわかりにくいし、科学的でない.

しかしながら、世界記述の発展史 (第 1 章の図 1.1) を思い出してもらいたい．すなわち、

$$\begin{cases} ①:\underset{\text{(実在的科学観)}}{\text{ニュートン、クラーク}} \quad \cdots \underset{\text{“時空とは何か?”}}{\overset{\text{(物理的時空)}}{\boxed{\text{実在的時空}}}} \\ \qquad\qquad\qquad\text{(アインシュタインに継承：時空)} \\ ②:\underset{\text{(言語的科学観)}}{\text{ライプニッツ}} \quad \cdots \underset{\text{“時空を如何に表現するか?”}}{\overset{\text{(量子言語の時空)}}{\boxed{\text{言語的時空}}}} \\ \qquad\qquad\qquad\text{(量子言語で実現される：　スペクトラム、全順序集合)} \end{cases}$$

ライプニッツの関係説は、明確でない部分もあるが

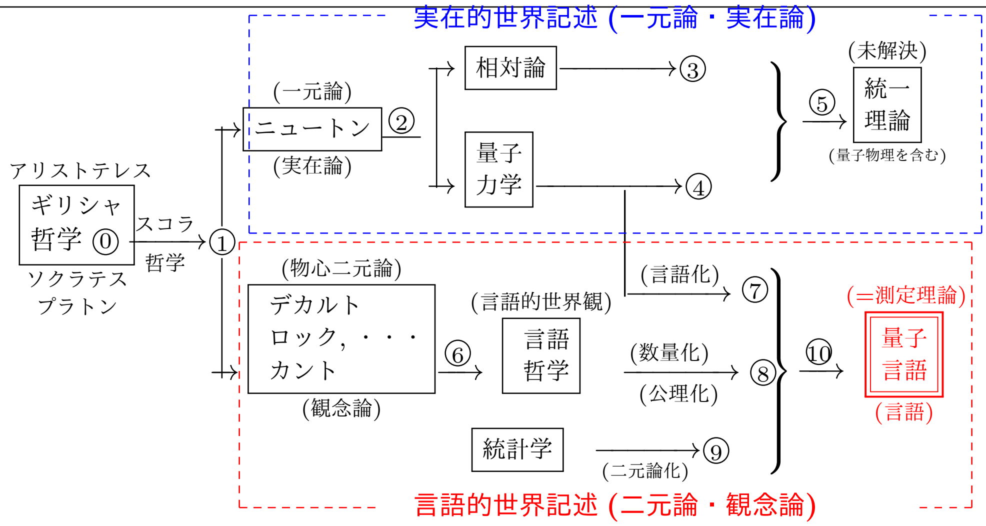
- ライプニッツは、科学における “形而上学的時空” の重要さに気づいた

のだと考える．しかしながら、次は注目すべきと思う.

(♯) ニュートンは、「ニュートン力学という言語」の下に、時空の絶対説を主張した.
他方,
ライプニッツは、「日常言語」の中で、時空の関係説を主張した

これでは、ニュートンに分がある結末は目に見えていた.

♠ **注釈 8.7.** 何度も繰り返して述べていることであるが、本書の主張は、



である．科学史における大論争は，結局，

$\boxed{\text{実在的科学観 (一元論)}}$ $\underset{\text{v.s.}}{\longleftrightarrow}$ $\boxed{\text{言語的科学観 (二元論)}}$

(唯物論)　　　　　　　　(観念論)

だけであると思い込むならば，下表を主張したくなる．

表 8.1：実在的科学観 vs. 言語的科学観

論争 ＼ [実] vs. [言]	実在的科学観 (一元論)	言語的科学観 (二元論)
ギリシャ哲学	アリストテレス	プラトン
普遍論争	唯名論 (オッカム)	実念論 (アンセルムス)
時空	ニュートン (クラーク)	ライプニッツ
量子力学	アインシュタイン (*cf.* [14])	ボーア (*cf.* [7])

もちろん，ボーアは，彼らが作り上げたコペンハーゲン解釈を物理学と信じていたに違いない． しかし，作品が作家の意図とは別の意味をもつことはよくあることと思う．「実在的科学観 vs. 言語的科学観」は，「アリストテレス vs. プラトン」以来いろいろな形で現れる科学における最大の論争である．普遍論争は分かりづらいとされている． しかし、スコラ哲学の重心がプラトン派 (実念論) からアリストテレス派 (唯名論) へ移行した経緯が普遍論争なのだと思う．そもそも、プラトンとアリストテレスの融合 (折衷) というトマス・アクィナスの企てが無謀であったわけで、これは理解不可能なことなだから、融合 (折衷) 案をそのまま書くだけでは普遍論争は理解できない．詳細は次を見よ．

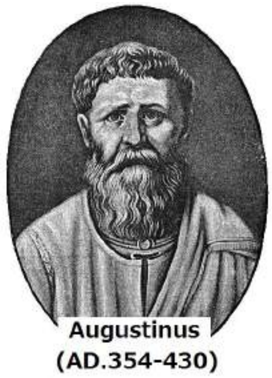
- [50]: S. Ishikawa, *History of Western Philosophy from the quantum theoretical point of view (Ver. 2),* Research Report (Dept. Math. Keio Univ.) KSTS-RR-17/004, 2017, 131 pages
(`http://www.math.keio.ac.jp/academic/research_pdf/report/2017/17004.pdf`)
(`http://www.math.keio.ac.jp/en/academic/research.html`)

8.7 波束の収縮、主観的時間、測定者の時間

時間論には、大きく分けて、次の三つある：

($\sharp_1$) 物理的時間 (ニュートン、アインシュタイン)
($\sharp_2$) 言語的時間 (ライプニッツ、統計学、量子言語)
($\sharp_3$) 主観的時間 (アウグスティヌス、マクタガード、測定者の時間、時制)

「($\sharp_1$)vs.($\sharp_2$)」はライプニッツ＝クラークの往復書簡での論争が有名 (8.6 節参照) で科学的意味でも重要. ($\sharp_3$) も脳内時計の研究としては脳科学のテーマになりえる. しかし、($\sharp_3$) の哲学的アプローチは、文芸として楽しむこと以上の成果は一つも生みださなかった.



西洋史において, 最大級の出来事の一つは

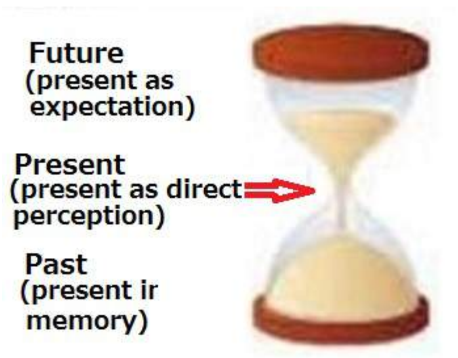
AD.380 年：キリスト教がローマ帝国の国教になったこと

だろう. その頃活躍したのがアウグスティヌスである.

(E):アウグスティヌス（354 年 - 430 年）の時間論

(E) 真に存在するものは過去でも未来でもなく, ただ現在だけである.

こう言われれば, やはり納得してしまうだろう.



たしかに,

(F) 未来は「予測」, 過去は「記憶」でしかないわけで, 実感できるのは「現在」しかない.

8.7.1 科学に時制は無い

さて,

- アウグスティヌスの時制（過去, 現在, 未来）の議論は, 科学の立場からは, 非常に教訓的である．量子言語の主張 (3.1 節の言語的コペンハーゲン解釈) から次が言える．

科学には時制が無い．

したがって, アウグステヌスの主観的時間（E）を科学的議論に持ち込むことは, 禁忌である． 哲学者が議論を継続してきた「主観的時間」は, 科学とは関係がないはずで, 「時制（=測定者の時間)」が「科学的議論」の中に紛れ込んでいることがあったとしたら, それは間違いである．

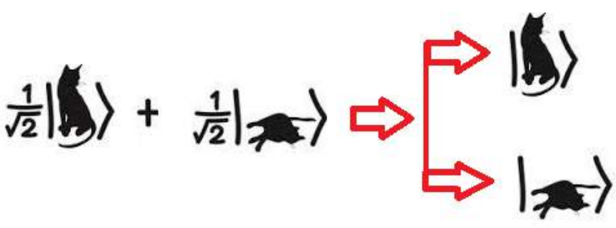
8.7.2 「主観的時間」は妄想を掻きたてるマジックワード

アウグスティヌス由来の「主観的時間」, 「時制」, 「測定者の時間」等は, 科学の領域には入り込むことはできなかったが, 哲学者の興味を引き付け続けた．たとえば, 「主観的時間」の哲学者ベルグソンは, 「相対性理論」のアインシュタインに論争を挑もうとしたが, アインシュタインに「哲学者の時間は, わからない」として, 体よく論争を断られた．

今でも, 一部 (or 大多数？) の量子力学の研究者は, この「測定者の時間」に未だに惑わされている．たとえば, 量子力学では, 測定者の時間を前提にして

- **測定者が測定した瞬間に, 波動関数が収縮する**

という「いわゆるコペンハーゲン解釈」を信じているかもしれない[*4].



「測定した瞬間」を説明するために, 天才フォン・ノイマン (*cf.* 文献 [73]) は「抽象的自我」などという意味不明なことを言い出してしまった．すなわち,

*4 「『コペンハーゲン解釈』なんてない．あるのはコペンハーゲン学派 (ボーアやハイゼンベルグ等) だけで、コペンハーゲン学派のみんなの意見が一致していたわけではない．(文献 [20]D.Howard, Philosophy of Science, 71, 2004, 669-682)」という説に同意する

- 「測定した瞬間」とは, 抽象的自我が感知した瞬間

などと言ってしまった．これ (「測定した瞬間」とか「測定後の状態」) は, もちろん, 「言語的コペンハーゲン解釈 (*cf.* 3.1 節)」では禁忌である．

「波束の収縮」や「射影公準」についての量子言語的理解については、9.2 節 [射影仮説] (文献 [48, 49] を見よ)． すなわち、

- 波束の収縮などない

である[*5]．これは言語的コペンハーゲン解釈 [状態は変化しない] からの必然である．しかし、「一見、波束の収縮があるように見える」わけで、この辺の巧妙なトリクは 9.2 節 [射影仮説] に書く．

♠ **注釈 8.8.** 「主観的時間とは何か？」は, 科学としては, 脳・遺伝子科学の問題であって, 哲学としては文芸的 (自己言及タイプの言葉遊び) 問題である． 人類の歴史というスケールで考えるならば, 人類が関わったのは「主観的時間」がほとんどだったわけで, 「客観的時間」が多少とも重要になったのは最近の一万年ぐらいだろう．犬や猫にも時計遺伝子とか体内時計があって, 時間を刻む脳回路があるに違いないが, この時間は当然「主観的時間」であると思う．実験をしないで, 「脳内時間 (= 主観的時間；脳内時計を脳で感知する)」を自己言及的に語ると文芸的になってしまうが, 科学だけがすべてではないと言われればその通りだろう．

♠ **注釈 8.9.** 「時間」については、次の三つの立場を混乱してはならない．

(a) 実在的観点からの時間 (ニュートン、アインシュタインの時間)
(b) 言語的観点からの時間 (ライプニッツ、量子言語の時間)
(c) 主観的時間・測定者の時間 (哲学者の時間)

(a) と (b) は科学で必須である．一方、(c) は科学では使えない．ここで、

マクタガートのパラドックス: “時間は存在しない”

について多少述べておこう．(*cf.* ref.[61])． マクタガートのロジックは明確ではないが、マクタガートは

- 主観時間を科学で使えると仮定すると、(a),(b),(c) のいずれの時間も存在しない

と主張しているのだと思う．しかし、著者にはマクタガードのロジックは理解できない．

[*5] [S. Ishikawa, JQIS, 5(4) 2015] を見よ