Title	第7講：混合測定理論(⊃ベイズ統計学)
Sub Title	
Author	石川, 史郎(Ishikawa, Shiro)
Publisher	
Publication year	2018
Jtitle	コペンハーゲン解釈; 量子哲学 (2018. 3) ,p.237- 282
JaLC DOI	
Abstract	
Notes	慶應義塾大学理工学部大学院講義ノート(Web版)
Genre	Book
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KO52003002-00000000-0237

第 7 講

混合測定理論 (⊃ ベイズ統計学)

何度も述べているように, 測定理論は以下のように, 分類できる.

$$
(\sharp)\quad \underset{(=\text{量子言語})}{\text{測定理論}}
\begin{cases}
\text{純粋型}\begin{cases}\text{古典系：}\quad \text{フィッシャー統計}\\ \text{量子系：}\quad \text{通常の量子力学}\end{cases}\\[2ex]
\text{混合型}\begin{cases}\text{古典系：}\quad \text{ベイズ統計を含む}\\ \text{量子系：}\quad \text{量子デコヒーレンス, 量子ゼノン効果}\end{cases}
\end{cases}
$$

前章までは, 純粋測定理論を説明したが, 本章では, 混合測定理論を説明する.

7.1 混合測定理論 (⊃ ベイズ統計学)

7.1.1 混合型言語ルール 1 を丸暗記せよ

前章までは, 純粋型測定理論, すなわち,

$$
\underset{(=\text{量子言語})}{\boxed{\text{純粋型測定理論}}} := \underbrace{\overset{[\text{純粋型言語ルール 1}]}{\underset{(cf.\ \ 2.7\ \text{節})}{\boxed{\text{純粋型測定}}}} + \overset{[\text{言語ルール 2}]}{\underset{(cf.\ \ 8.3\ \text{節})}{\boxed{\text{因果関係}}}}}_{\text{一種の呪文 (=量子力学の言葉遣い)}} + \underbrace{\overset{[\text{言語的コペンハーゲン解釈}]}{\underset{(cf.\ \ 3.1\ \text{節})}{\boxed{\text{言語的解釈}}}}}_{\text{呪文の使い方のマニュアル}} \tag{7.1}
$$

を説明した (まだ, 因果関係については説明していないが).

本章では, 混合型測定理論, すなわち,

$$
\underset{(=\text{量子言語})}{\boxed{\text{混合型測定理論}}} := \underbrace{\overset{[\text{混合型言語ルール 1}]}{\underset{(cf.\ \ 7.1\ \text{節})}{\boxed{\text{混合型測定}}}} + \overset{[\text{言語ルール 2}]}{\underset{(cf.\ \ 8.3\ \text{節})}{\boxed{\text{因果関係}}}}}_{\text{一種の呪文 (=量子力学の言葉遣い)}} + \underbrace{\overset{[\text{言語的コペンハーゲン解釈}]}{\underset{(cf.\ \ 3.1\ \text{節})}{\boxed{\text{言語的解釈}}}}}_{\text{呪文の使い方のマニュアル}} \tag{7.2}
$$

を説明する.

復習 7.1. [=記法 2.30]. 頻出は (A_1) である.

(A$_1$) W^*-測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}{=}\,(X, \mathcal{F}, F),\, S_{[\rho]})$, ここに、$\mathsf{O}{=}\,(X, \mathcal{F}, F)$ は $\overline{\mathcal{A}}$ 内の W^*-観測量, 純粋状態 $\rho(\in \mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*))$, また、"$W^*$-測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O},\, S_{[\rho]})$" は次のように記されることも多い：

"測定 $^{W^*}$ $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O},\, S_{[\rho]})$"),
(または、略して、"測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}.\, S_{[\rho]})$") ,

(A$_2$) C^*-測定 $\mathsf{M}_{\mathcal{A}}(\mathsf{O}{=}\,(X, \mathcal{F}, F),\, S_{[\rho]})$, ここに $\mathsf{O}{=}\,(X, \mathcal{F}, F)$ は $\mathcal{A}$ 内の C^*-観測量, 純粋状態 $\rho(\in \mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*))$, ここに, "$C^*$-測定 $\mathsf{M}_{\mathcal{A}}(\mathsf{O},\, S_{[\rho]})$" は次のように記されることも多い：

"測定 $^{C^*}$ $\mathsf{M}_{\mathcal{A}}(\mathsf{O}.\, S_{[\rho]})$" ,
(または、略して、"測定 $\mathsf{M}_{\mathcal{A}}(\mathsf{O}.\, S_{[\rho]})$"),

以下のように、4 つの「混合測定」を導入する．ただし、本書で頻出なのは、(B$_1$) だけである．(B$_2$) はたまたま使うが、(B$_3$) と (B$_4$) は使わない．

：

記法 7.2.

(B$_1$) W^*-混合測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}{=}\,(X, \mathcal{F}, F),\, \overline{S}_{[*]}(w_0))$, ここに、$\mathsf{O}{=}\,(X, \mathcal{F}, F)$ は $\overline{\mathcal{A}}$ 内の W^*-観測量．W^*-混合状態 $w_0(\in \overline{\mathfrak{S}}^m(\overline{\mathcal{A}}_*))$, Here, "$W^*$-混合測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O},\, \overline{S}_{[*]}(w_0))$" は次のように記されることも多い：

"W^*-混合測定 $^{W^*}$ $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}.\, \overline{S}_{[*]}(w_0))$" ,
(または、略して、"混合測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}.\, \overline{S}_{[*]}(w_0))$")

(B$_2$) C^*-混合測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}{=}\,(X, \mathcal{F}, F),\, \overline{S}_{[*]}(w_0))$, where$\mathsf{O}{=}\,(X, \mathcal{F}, F)$ は $\overline{\mathcal{A}}$ 内の W^*-観測量．C^*-混合状態 $\rho_0(\in \mathfrak{S}^m(\mathcal{A}^*))$, ここに, "$C^*$-混合測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O},\, S_{[*]}(\rho_0))$" は次のように記されることも多い：

"C^*-混合測定 $^{W^*}$ $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}.\, S_{[*]}(\rho_0))$" ,
(または、略して、"混合測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}.\, S_{[*]}(\rho_0))$")

(B$_3$) W^*-混合測定 $\mathsf{M}_{\mathcal{A}}(\mathsf{O}{=}\,(X, \mathcal{F}, F),\, \overline{S}_{[*]}(w_0))$, ここに $\mathsf{O}{=}\,(X, \mathcal{F}, F)$ は $\mathcal{A}$ 内の C^*-観測量．W^*-混合状態 $w_0(\in \overline{\mathfrak{S}}^m(\overline{\mathcal{A}}_*))$, ここに, "$W^*$-混合測定 $\mathsf{M}_{\mathcal{A}}(\mathsf{O},\, \overline{S}_{[*]}(w_0))$" は次のように記されることも多い：

"W^*-混合測定 $^{C^*}$ $\mathsf{M}_{\mathcal{A}}(\mathsf{O}.\, \overline{S}_{[*]}(w_0))$" ,
(または、略して、"混合測定 $\mathsf{M}_{\mathcal{A}}(\mathsf{O}.\, \overline{S}_{[*]}(w_0))$")

(B$_4$) C^*-混合測定 $\mathsf{M}_{\mathcal{A}}(\mathsf{O}{=}\,(X,\mathcal{F},F),\ S_{[*]}(\rho_0))$, ここに $\mathsf{O}{=}\,(X,\mathcal{F},F)$ は $\mathcal{A}$ 内の C^*-観測量, C^*-混合状態 $\rho_0(\in\mathfrak{S}^m(\mathcal{A}^*))$, ここに, "$C^*$-混合測定 $\mathsf{M}_{\mathcal{A}}(\mathsf{O},\ S_{[*]}(\rho_0))$" は次のように記されることも多い：

"C^*-混合測定 $^{C^*}$ $\mathsf{M}_{\mathcal{A}}(\mathsf{O}.\ \overline{S}_{[*]}(\rho_0))$" ,

(または、略して、"混合測定 $\mathsf{M}_{\mathcal{A}}(\mathsf{O}.\ S_{[*]}(\rho_0))$")

本書では、(C$_1$) (たまには (C$_2$)) に集中する.

純粋型測定との違いは,

「純粋型言語ルール 1」と「混合型言語ルール 1」の違いだけで,

ここで,「混合型) 言語ルール 1」は以下の通りで,

(C):(混合型言語ルール 1 (混合型測定)　直後の (B_1) で読めるようになる

ある基本構造 $[\mathcal{A}\subseteq\overline{\mathcal{A}}\subseteq B(H)]$ 内で定式化された W^*-混合型測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}{=}\,(X,\mathcal{F},F),\ S_{[*]}(w))$ $\Big($ または, C^*-混合型測定 $\mathsf{M}_{\mathcal{A}}(\mathsf{O}{=}\,(X,\mathcal{F},F),\ S_{[*]}(w))$ $\Big)$ を考える.

(C$_1$): W^*- 混合状態 $w\in\overline{\mathfrak{S}}^m(\overline{\mathcal{A}}_*))$ と $\overline{\mathcal{A}}$ 内の W^*-観測量 $\mathsf{O}{=}\,(X,\mathcal{F},F)$ を考える. W^*-混合型測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}{=}\,(X,\mathcal{F},F),\ S_{[*]}(w))$ によって得られる測定値 x $(\in X)$ が, Ξ $(\in\mathcal{F})$ に属する確率は,

$$
{}_{\overline{\mathcal{A}}_*}(w,F(\Xi))_{\overline{\mathcal{A}}}\quad\Big(\equiv w(F(\Xi))\Big)
$$

で与えられる.

(C$_2$): C^*- 混合状態 $w\in\mathfrak{S}^m(\mathcal{A}^*))$ と $\mathcal{A}$ 内の C^*-観測量 $\mathsf{O}{=}\,(X,\mathcal{F},F)$ を考える. C^*-混合型測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}{=}\,(X,\mathcal{F},F),\ S_{[*]}(w))$ によって得られる測定値 x $(\in X)$ が, Ξ $(\in\mathcal{F})$ に属する確率は,

$$
{}_{\mathcal{A}^*}(w,F(\Xi))_{\mathcal{A}}\quad\Big(\equiv w(F(\Xi))\Big)
$$

で与えられる (本講義では, (C$_1$) の W^*- 混合測定を主に扱う).

当面の目標は, これを丸暗記すること

であるはずであるが, もう既にほとんど「丸暗記」の準備ができているので、後は練習・演習を繰り返せばよい.

注意 7.3. 混合型言語ルール 1 において、(C$_1$) と (C$_2$) はそんなに違わない.

($\sharp_1$) 量子系では, $\mathfrak{S}^m(\mathcal{T}r(H))=\overline{\mathfrak{S}}^m(\mathcal{T}r(H))$ (*cf.* (2.17)) なので、(C_1)=(C_2) は自明,

($\sharp_2$) 古典系では, 次の対応

$$L^1_{+1}(\Omega.\nu) \ni w_0 \xrightarrow{\rho_0(D)=\int_D w_0(\omega)\nu(d\omega)} \rho_0 \in \mathcal{M}_{+1}(\Omega)$$

を考えてよい場合は、

$$\begin{aligned}&\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega.\nu)}\big(\mathsf{O}{=}(X,\mathcal{F},F),\overline{S}_{[*]}(w_0)\big)\\ =&\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega.\nu)}\big(\mathsf{O}{=}(X,\mathcal{F},F),S_{[*]}(\rho_0)\big)\end{aligned}$$

となる.

したがって、(C_1) と (C_2) はそんなに違わないが、混乱を避けるために、次のように決めておく.

$$\begin{cases} W^*\text{-混合状態 } w_0 \ (\in \overline{\mathfrak{S}}^m(\overline{\mathcal{A}}_*) \text{ はローマ字 (e.g., } w_0, w, v, \ldots) \text{ で書く} \\ C^*\text{-混合状態 } \rho_0 \ (\in \mathfrak{S}^m(\mathcal{A}^*) \text{ はギリシャ文字 (e.g., } \rho_0, \rho, \ldots) \text{ で書く} \end{cases}$$

///

7.2　混合測定の練習・演習

7.2.1　混合型言語ルール 1 を丸暗記したら, 練習・演習を繰り返そう

混合測定とフィッシャーの最尤法とを比較しながら, 混合測定を理解したい．したがって，壷問題を通して, フィッシャーの最尤法の復習もしておこう.

問題 7.4. [フィッシャーの最尤法 (問題 5.2 の解答 5.7) の復習]
どちらの壷 (U_1 または U_2) がカーテンの後ろに置かれているのかあなたは知らない.
カーテンの後ろの壷から球を一つ取り出したら，白球だった.
このとき，壷は U_1 または U_2 のどちらか?　これを推定せよ.

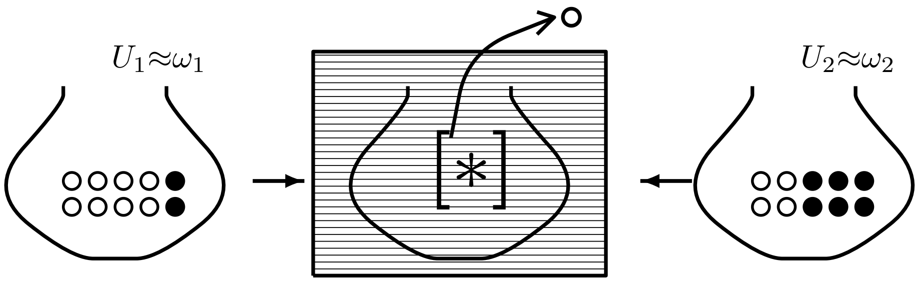


図 7.1 (= 図 5.6:):　純粋測定 (フィッシャーの最尤法)

解答　状態空間 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ は離散距離を持ち，測度 ν は次を満たすとする：

$$\nu(\{\omega_1\}) = 1, \qquad \nu(\{\omega_2\}) = 1 \tag{7.3}$$

さて, 古典系の基本構造

$$[C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega, \nu) \subseteq B(L^2(\Omega, \nu))]$$

内の (純粋) 測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}= (\{ \text{白}, \text{黒} \}, 2^{\{ \text{白}, \text{黒} \}}, F), S_{[*]})$ を考える．ここで, $L^\infty(\Omega)$ 内の観測量 $\mathsf{O}_{\text{白黒}} = (\{ \text{白}, \text{黒} \}, 2^{\{ \text{白}, \text{黒} \}}, F_{\text{白黒}})$ を次のように定義する：

$$
\begin{aligned}
&[F_{\text{白黒}}(\{ \text{白} \})](\omega_1) = 0.8, \qquad &&[F_{\text{白黒}}(\{ \text{黒} \})](\omega_1) = 0.2 \\
&[F_{\text{白黒}}(\{ \text{白} \})](\omega_2) = 0.4, \qquad &&[F_{\text{白黒}}(\{ \text{黒} \})](\omega_2) = 0.6
\end{aligned} \tag{7.4}
$$

そこで，

$$
\begin{aligned}
&\max\{[F_{白黒}(\{\ 白\ \})](\omega_1), [F_{白黒}(\{\ 白\ \})](\omega_2)\} \\
=&\max\{0.8, 0.4\} = 0.8 = F_{白黒}(\{\ 白\ \})](\omega_1)
\end{aligned}
$$

であるから，定理 5.6(フィッシャーの最尤法) により，状態 ω_1 が推定できて，したがって，カーテンの後ろの壷は U_1 であることが推定できる． □

問題 7.5. [混合測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega,\nu)}(\mathsf{O}=(X,\mathcal{F},F), S_{[*]}(w))$]

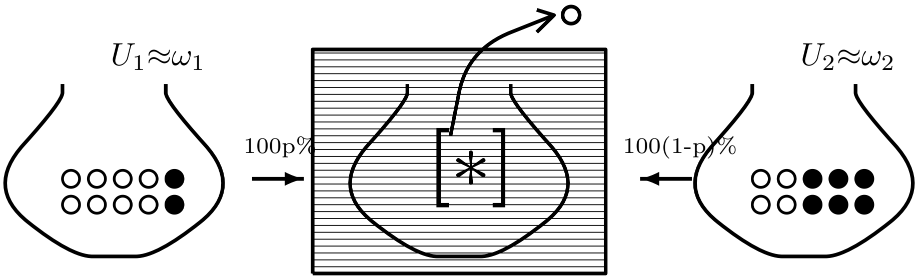


図 7.2:　混合測定 (壷問題)

さて，

(♯) 公正とは限らないコイン投げ $(T_{p,1-p})$ $(0 \leqq p \leqq 1)$ を考える．すなわち，

コイン投げ $(T_{p,1-p})$ によって，

$$
\begin{cases}
\text{表が出る可能性は，}100p\% \\
\text{裏が出る可能性は，}100(1-p)\%
\end{cases}
$$

とする．そして，表が出たならば壷 $U_1(\approx\omega_1)$ を，裏が出たならば壷 $U_2(\approx\omega_2)$ を，カーテンの後ろに置く．もちろん，それがどちらなのか (U_1 または U_2) はあなたは知らない．カーテンの後ろの壷の状態を $[*](\in\{\omega_1,\omega_2\})$ と記す

そこで，次の問題を考えよう．

(a) カーテンの後ろの壷から球を一つ取り出したとき，それが白球である確率を求めよ．

さらに,

(b) もし白球を取り出したとしたら，カーテンの後ろの壷が U_1 である確率を求めよ.

「解答」の前に, 次を注意しておく.

- コイン投げを持ち出した理由は,「主観確率」という言葉を封印するためである.

解答 中高生でも簡単に正解できる問題であるが, 以下に,「混合測定理論による解答」を示す. 状態空間 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ は離散距離を持ち，測度 ν は次を満たすとする：

$$\nu(\{\omega_1\}) = 1, \qquad \nu(\{\omega_2\}) = 1 \tag{7.5}$$

さて, 古典系の基本構造

$$[C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega, \nu) \subseteq B(L^2(\Omega, \nu))] \tag{7.6}$$

内の (混合) 測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}{=}\ (\{\text{ 白, 黒 }\}, 2^{\{\text{ 白, 黒 }\}}, F), S_{[*]}(w))$ を考える．ここで, $L^\infty(\Omega)$ 内の観測量 $\mathsf{O}_{\text{白黒}} = (\{\text{ 白, 黒 }\}, 2^{\{\text{ 白, 黒 }\}}, F_{\text{白黒}})$ を次のように定義する：

$$
\begin{aligned}
&[F_{\text{白黒}}(\{\text{ 白 }\})](\omega_1) = 0.8, \qquad && [F_{\text{白黒}}(\{\text{ 黒 }\})](\omega_1) = 0.2 \\
&[F_{\text{白黒}}(\{\text{ 白 }\})](\omega_2) = 0.4, \qquad && [F_{\text{白黒}}(\{\text{ 黒 }\})](\omega_2) = 0.6
\end{aligned} \tag{7.7}
$$

また, $w_0 \in L^1_{+1}(\Omega, \nu)$ は次のように定める.

$$w_0(\omega_1) = p, \qquad w_0(\omega_2) = 1 - p \tag{7.8}$$

(a): したがって，混合言語ルール 1 に従って，(混合) 測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}{=}\ (\{\text{ 白, 黒 }\}, 2^{\{\text{ 白, 黒 }\}}, F), S_{[*]}(w))$ によって，測定値 x ($\in \{\text{ 白, 黒 }\}$) が得られる確率は

$$
\begin{aligned}
P(\{x\}) &= {}_{L^1(\Omega)}\big(w_0, F(\{x\})\big)_{L^\infty(\Omega)} = \int_\Omega [F(\{x\})](\omega) \cdot w_0(\omega) \nu(d\omega) \\
&= p[F(\{x\})](\omega_1) + (1-p)[F(\{x\})](\omega_2) \\
&= \begin{cases} 0.8p + 0.4(1-p) & (x = \text{白 のとき}) \\ 0.2p + 0.6(1-p) & (x = \text{黒 のとき}) \end{cases}
\end{aligned} \tag{7.9}
$$

である.

(b):解答 7.13 で答える. □

♠ **注釈 7.1.** 次の疑問は自然である.

($\flat_1$) 問題 7.5 の ($\sharp$) で, 何故、“$[\,*\,] = \omega_1$ である可能性 $100p\%$” を “$[\,*\,] = \omega_1$ である確率 $100p\%$”

と書かなかったのか？

である．しかし、言語的コペンハーゲン解釈では、

($\flat_2$) 測定無くして、確率無し

であり、($\sharp$) で「確率」という言葉を使えない．しかしながら、“可能性” と “確率” の使い分けにあまり神経になると、かえって煩雑になるので、今後は厳密な使い分けをしない場合が多い．．

例 7.6. [スピンの混合測定 $\mathsf{M}_{B(\mathbb{C}^2)}(\mathsf{O} = (X = \{\uparrow, \downarrow\}, 2^X, F^z), S_{[*]}(w))$]

電子 P_1 のスピン状態は $\rho_1 = |a\rangle\langle a| \in \mathfrak{S}^p(B(\mathbb{C}^2))$ とする．　ここで,

$$a = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2 \quad (\text{ここに}, \ \|a\| = (|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2)^{1/2} = 1)$$

とする．　また，電子 P_2 のスピン状態 $\rho_2 = |b\rangle\langle b| \in \mathfrak{S}^p(B(\mathbb{C}^2))$ は,

$$b = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2 \quad (\text{ここに}, \ \|b\| = (|\beta_1|^2 + |\beta_2|^2)^{1/2} = 1)$$

と表現する．

ここで, 「電子 P」が $\left\{ \begin{array}{c} \text{電子 } P_1 \\ \text{電子 } P_2 \end{array} \right\}$ である「確率」は, $\left\{ \begin{array}{c} p \\ 1-p \end{array} \right\}$ であるとしよう．　したがって, 「電子 P」の状態は, 混合状態 w $(\in \mathfrak{S}^p(B(\mathbb{C}^2)))$ は,

$$w = p\rho_1 + (1-p)\rho_2 \quad = p|a\rangle\langle a| + (1-p)|b\rangle\langle b|$$

と表現できる．

「電子 P」の z-軸方向のスピン観測量の混合測定 $\mathsf{M}_{B(\mathbb{C}^2)}(\mathsf{O}_z = (X, 2^X, F^z), S_{[*]}(w))$ を考える．ここに, $\mathsf{O}_z = (X, 2^X, F^z)$ は次のように定まる:

$$F^z(\{\uparrow\}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F^z(\{\downarrow\}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) 混合測定 $\mathsf{M}_{B(\mathbb{C}^2)}(\mathsf{O}_z = (X, 2^X, F^z), S_{[*]}(w))$ によって, 測定値 $\left\{ \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right\}$ を得る確率は

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}r_{(\mathbb{C}^2)}\Big(w, F^z(\{\uparrow\})\Big)_{B(\mathbb{C}^2)} = p|\alpha_1|^2 + (1-p)|\beta_1|^2 \\ \\ \mathcal{T}r_{(\mathbb{C}^2)}\Big(w, F^z(\{\downarrow\})\Big)_{B(\mathbb{C}^2)} = p|\alpha_2|^2 + (1-p)|\beta_2|^2 \end{array} \right\}$$

となる．

注意 7.7. 上で見たように,

(a) 純粋測定理論が基本で，それに混合状態の概念が付け加わって混合測定理論が構築される．すなわち,

$$\underbrace{\boxed{\text{混合測定理論}}}_{\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}, S_{[*]}(w))} := \underbrace{\boxed{\text{純粋測定理論}}}_{\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}, S_{[*]})} + \underbrace{\boxed{\text{混合状態}}}_{w}$$

である.

と思えばよい．すなわち,

純粋測定無くして, 混合測定無し

で, この講義ではこの場合に限定して議論する．　したがって, 量子言語では, 「頻度論派　vs. ベイズ派」のような対立構造があるわけではない.

7.3 サンクトペテルスブルグの二つの封筒問題

本節は, 次からの抜粋：

文献 [47]: S. Ishikawa; The two envelopes paradox in non-Bayesian and Bayesian statistics (arXiv:1408.4916v4 [stat.OT] 2014)

まず, サンクトペテルスブルクの二つの封筒問題[*1]を復習しておく.

問題 7.8. [サンクトペテルスブルクの二つの封筒問題] あなたは二つの封筒 (i.e., 封筒 A と封筒 B) から一つを選ぶという状況にある. 封筒 A の中に次の手続きでお金を入れた.

- 公平なコインを表が出るまで投げる. n 回目に初めて表が出たとする. このとき, 封筒 A の中に 2^n 円を入れた.

あなたはこのことを知っているが, 回数 n を知っているわけではない. 封筒 B の中にも同じ手続きでお金を入れた. あなたは, 封筒 A を選んだとしよう. 封筒 A を開けてみたら, $x = 2^m$ 円入っていた. ここで, あなたには, 封筒 B に変更するという選択肢がある. さて, 封筒 A のままにして, $x = 2^m$ 円を獲得するか？または, 封筒 B に変更して, 新たなチャンスに賭けるか？さて, あなたはどうする.

図 7.3: 二つの封筒問題

[(P2):どこがパラドックスなのか ?]. 封筒 A を開けてみたら, $x = 2^m$ 円入っていた. 封筒 B はまだ開いていないが, 期待値 $E(y)$ は次のように計算できる

$$E(y) = 2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{2^2} + 2^3 \times \frac{1}{2^3} + \cdots = \infty$$

*1 D.J. Chalmers, “The St. Petersburg Two-Envelope Paradox,” Analysis, Vol.62, 155-157, (2002)

そうだとすると, 封筒 B に変更して, 新たなチャンスに賭けたくなる.　しかし, これはおかしい.　なぜならば, 封筒 A と封筒 B の役割は同じはずだからである.　このパラドクスが, 有名な「サンクトペテルスブルグの二つの封筒問題 (i.e., "The Other Person's envelope is Always Greener")」である.

7.3.1 (P2): サンクトペテルスブルグの二つの封筒問題: 古典混合測定

状態空間 Ω を

$$\Omega = \{\omega = 2^m \mid m = 1, 2, \cdots\}$$

とする．離散距離空間を想定して, ν を Ω 上の個数測度とする.

$$L^\infty(\Omega) = \{f \mid f \text{ は } \Omega \text{ 上の複素数値有界関数 } \}$$

として，$L^\infty(\Omega)$ 内の精密観測量 $\mathsf{O} = (X, \mathcal{F}, F)$ を次のように定める.

$$X = \Omega, \quad \mathcal{F} = 2^X$$

$$[F(\Xi)](\omega) = \chi_\Xi(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega \in \Xi) \\ 0 & (\omega \notin \Xi) \end{cases} \qquad (\forall \Xi \in \mathcal{F}, \forall \omega \in \Omega)$$

混合状態 w_0 (i.e., Ω 上の確率密度関数) を以下のように定義する.

$$w_0(\omega) = 1/2^m \quad (\omega = 2^m, m = 1, 2, ...)$$

ここで，混合測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O} = (X, \mathcal{F}, F), \overline{S}_{[*]}(w_0))$ を得る．混合型言語ルール 1(混合測定;7.1 節) によって，

(a) $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O} = (X, \mathcal{F}, F), \overline{S}_{[*]}(w_0))$ によって得られる測定値 $x (\in X)$ が 2^m に等しくなる確率は 2^{-m} である

と言える．したがって，測定値の期待値 E は

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot 2^{-k} = \infty$$

と計算できる.

問題 7.8 では，封筒 A の中身は，$x = 2^m$ であった．あなたは，未だ封筒 B の中を見ていないのだから，期待値 $E = \infty$ に頼るのは理屈がある．そうならば，$E = \infty > 2^m$ なのだから，あなたは,「封筒 B に変更しよう」と思いたくなるだろう.

注意 7.9. もちろん、紛らわしく思えるように問題が書かれているだけで、封筒 A は必要はなくて、本質は、封筒 B の期待値 $EE = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot 2^{-k} = \infty$ の部分だけである．つまり、期待値無限の分布が存在するということだけである．しかし、そう言ってしまってわかった気になってしまうよりは、以下のように D.J.Chalmers の工夫に評価したい．上の議論から，[(P2):どこがパラドックスなのか？] の中に書いた文言「封筒 A と封筒 B の役割は同じ」は疑わしい．

- あなたは，封筒 A の中身は 2^m 円 (測定値) であることを知った．ということは，確率密度関数 w_1 が

$$w_1(\omega) = \begin{cases} 1 & (\ \omega = 2^m) \\ 0 & (\omega \neq 2^m) \end{cases}$$

であることを知ることに等しい．

したがって，封筒 A の確率密度関数 w_1 と封筒 B の確率密度関数 w_0 を比べることになるが，上の議論のように，B の期待値は ∞ なのだから，この場合には，ことわざ”*The Other Person's envelope is Always Greener*” は正しい．ただし，上の議論は，後出のベイズの定理を使った．したがって，ベイズ統計の下で,「封筒 A と封筒 B は非対称」と言える．このようにして、「セントペテルスブルグの二つの封筒問題」を納得したいのだが、やっぱり、

- 「セントペテルスブルグの二つの封筒問題」は不思議

と思ってしまう．

♠ **注釈 7.2.** 期待値以外にも様々な基準が考えられる．たとえば，

(♯) ”交換したとき損をする確率” $< 1/2$

という基準で決めるとする．この場合は，封筒 A の中身は 2^m 円 (測定値) であることを知ったときに，

$$\begin{cases} m = 1 & \Longrightarrow \text{交換する} \\ m = 2, 3, ... & \Longrightarrow \text{交換しない} \end{cases}$$

となる．

7.4 ベイズ統計とは, ベイズの定理を使うこと

一般には, 「主観確率」という言葉が流布しているが, その意味するところは, 明快とは言えない. 測定理論 (=量子言語) では,

主観確率=混合状態

として, 「主観確率」という言葉は原則としては使わない.

さて、

ベイズ統計の説明を以下にしよう

次は, 自明だろう.

定理 7.10. [条件付き確率 (一般ベイズの定理)]. ある基本構造 $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}} \subseteq B(H)]$ 内で定式化された混合測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}{=}\ (X \times Y, \mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}, H),\ S_{[*]}(w))$ を考える. ここで, 混合測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}{=}\ (X \times Y, \mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}, H),\ S_{[*]}(w))$ によって得られた測定値 (x, y) $(\in X \times Y)$ が, $\Xi \times Y$ $(\in \mathcal{F})$ に属していたとする. このとき, 「$y \in \Gamma$」である確率は,

$$
\frac{{}_{\overline{\mathcal{A}}_*}(w, H(\Xi \times \Gamma))_{\overline{\mathcal{A}}}}{{}_{\overline{\mathcal{A}}_*}(w, H(\Xi \times Y))_{\overline{\mathcal{A}}}} \quad (\forall \Gamma \in \mathcal{G})
$$

で与えられる.

これは, 古典系の場合は, 次のように書くことができる.

定理 7.11. [ベイズの定理 (古典系の混合測定)]. 古典系のある基本構造 $[C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega, \nu) \subseteq B(L^2(\Omega, \nu))]$ 内で定式化された混合同時測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}{=}\ (X \times Y, \mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}, F \times G),\ S_{[*]}(w_0))$ を考える. ここで, 観測量 $\mathsf{O}_{12}{=}(X \times Y, \mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}, F \times G)$ は, 二つの観測量 $\mathsf{O}_1{=}(X, \mathcal{F}, F)$ と $\mathsf{O}_2{=}(Y, \mathcal{G}, G)$ の同時観測量とする. すなわち,

$$
(F \times G)(\Xi \times \Gamma) = F(\Xi) \cdot G(\Gamma) \qquad (\forall \Xi \in \mathcal{F}, \forall \Gamma \in \mathcal{G}) \tag{7.10}
$$

ここで,

(a) 混合同時測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}_{12}{=}\ (X \times Y, \mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}, F \times G),\ S_{[*]}(w_0))$ によって得られた測定値 (x, y) $(\in X \times Y)$ が, $\Xi \times Y$ (ここに, $\Xi \in \mathcal{F}$) に属していたとする.

このとき, 「$y \in \Gamma$」である確率は,

$$\frac{{}_{L^1(\Omega)}\big(w_0, H(\Xi \times \Gamma)\big)_{L^\infty(\Omega)}}{{}_{L^1(\Omega)}\big(w_0, H(\Xi \times Y)\big)_{L^\infty(\Omega)}} \Big(= \frac{\int_\Omega [F(\Xi)](\omega) \cdot [G(\Gamma)](\omega) \cdot w_0(\omega)\nu(d\omega)}{\int_\Omega [F(\Xi)](\omega) \cdot w_0(\omega)\nu(d\omega)} \Big) \tag{7.11}$$

で与えられる. ここで,

(b)

$$w_{\text{new}}(\omega) = \frac{[F(\Xi)](\omega) \cdot w_0(\omega)}{\int_\Omega [F(\Xi)](\omega) \cdot w_0(\omega)\nu(d\omega)} \qquad (\ \forall \omega \in \Omega)$$

と定めれば,

$$(7.11) = \int_\Omega [G(\Gamma)](\omega) w_{\text{new}}(\omega)\nu(d\omega) \quad (\forall \Gamma \in \mathcal{G}) \tag{7.12}$$

とできる.

注意 7.12. **[ベイズの定理の通常の読み方]** 上の文言 (a) を次のように読む.

(b′) 混合測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}\big(\mathsf{O}_1 = (X, \mathcal{F}, F),\ S_{[*]}(w_0)\big)$ によって得られた測定値 x $(\in X)$ が, Ξ $(\in \mathcal{F})$ に属していたとすると、次の状態変化が起こる:

$$\underset{\text{事前確率}}{\boxed{w_0}} \xrightarrow[\text{測定 (a′) により, 状態が変化する}]{} \underset{\text{事後確率}}{\boxed{w_{\text{new}}}}$$

しかし, 言語的解釈では,

(c) 測定は一回だけで, したがって, 測定後のことは, (もう測定できないのだから) 知る術がない.

であるから, 量子言語 (言語的コペンハーゲン解釈) に固執するならば,

定理 7.11 は OK だが, 状態の変化 (b′) は NG

となる. しかし, 本書でも, 便宜的な方便として, ベイズの定理 (=状態の変化 (b′)) を, 定理 7.11(ベイズの定理) の意味でしばしば使う.

解答 7.13. [ベイズの定理 (問題 7.5 の再掲とその問 (b) の解答)]

解答 問題 7.5 の解答と重複するが, 問 (a) の解も書いておく.

状態空間 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$ は離散距離を持ち，測度 ν は次を満たすとする：

$$\nu(\{\omega_1\})=1, \qquad \nu(\{\omega_2\})=1 \tag{7.13}$$

さて, 古典系の基本構造

$$[C_0(\Omega)\subseteq L^\infty(\Omega,\nu)\subseteq B(L^2(\Omega,\nu))] \tag{7.14}$$

内の (混合) 測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}{=}\ (\{\text{白},\text{黒}\}, 2^{\{\text{白},\text{黒}\}}, F), S_{[*]}(w_0))$ を考える．ここで, $L^\infty(\Omega)$ 内の観測量 $\mathsf{O}_{\text{白黒}}=(\{\text{白},\text{黒}\},2^{\{\text{白},\text{黒}\}},F_{\text{白黒}})$ を次のように定義する：

$$\begin{aligned}
&[F_{\text{白黒}}(\{\text{白}\})](\omega_1)=0.8, &&[F_{\text{白黒}}(\{\text{黒}\})](\omega_1)=0.2\\
&[F_{\text{白黒}}(\{\text{白}\})](\omega_2)=0.4, &&[F_{\text{白黒}}(\{\text{黒}\})](\omega_2)=0.6
\end{aligned} \tag{7.15}$$

また, $w_0\in L^1_{+1}(\Omega,\nu)$ は次のように定める．

$$w_0(\omega_1)=p, \qquad w_0(\omega_2)=1-p \tag{7.16}$$

(a): したがって，混合言語ルール 1 に従って，(混合) 測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}{=}\ (\{\text{白},\text{黒}\}, 2^{\{\text{白},\text{黒}\}}, F), S_{[*]}(w_0))$ によって，測定値 x $(\in\{\text{白},\text{黒}\})$ が得られる確率は

$$\begin{aligned}
P(\{x\}) &= {}_{L^1(\Omega)}\big(w_0, F(\{x\})\big)_{L^\infty(\Omega)} = \int_\Omega [F(\{x\})](\omega)\cdot w_0(\omega)\nu(d\omega)\\
&= p[F(\{x\})](\omega_1)+(1-p)[F(\{x\})](\omega_2)\\
&= \begin{cases} 0.8p+0.4(1-p) & (x=\text{白 のとき})\\ 0.2p+0.6(1-p) & (x=\text{黒 のとき})\end{cases}
\end{aligned} \tag{7.17}$$

である．

(b): 混合測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}, S_{[*]}(w_0))$ によって「白球」を取り出したのだから，新たな混合状態 $w_{\text{new}}(\in L^1_{+1}(\Omega))$ は,

$$\begin{aligned}
w_{\text{new}}(\omega) &= \frac{[F(\{\text{白}\})](\omega)\cdot w_0(\omega)}{\int_\Omega [F(\{\text{白}\})](\omega)\cdot w_0(\omega)\nu(d\omega)}\\
&= \begin{cases} \dfrac{0.8p}{0.8p+0.4(1-p)} & (\omega=\omega_1\text{のとき})\\[2ex] \dfrac{0.4(1-p)}{0.8p+0.4(1-p)} & (\omega=\omega_2\text{のとき})\end{cases}
\end{aligned}$$

となる．

[C^* 代数的解答：問題 7.5(b)]

混合測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}, S_{[*]}(\rho_0))$ によって、“白玉”が得られたのだから、事後状態 $\rho_{\rm new}(\in \mathcal{M}_{+1}(\Omega))$ は次のようになる：

$$
\begin{aligned}
\rho_{\rm new} &= \frac{F(\{W\})\rho_0}{\int_\Omega [F(\{W\})](\omega)\rho_0(d\omega)} \\
&= \frac{0.8p}{0.8p+0.4(1-p)}\delta_{\omega_1} + \frac{0.4(1-p)}{0.8p+0.4(1-p)}\delta_{\omega_2}
\end{aligned}
$$

7.5　二つ封筒問題 (ベイズの方法)

本節は, 次からの抜粋：

文献 [47]: S. Ishikawa; The two envelopes paradox in non-Bayesian and Bayesian statistics (arXiv:1408.4916v4 [stat.OT] 2014)

5.6 節では、ベイズの定理を使わない方法で二つの封筒問題を考察した．簡単すぎて高校レベルであるが, とっかかりが無くてむしろ間違いやすい．この節のベイズの定理による「二つの封筒問題」へのアプローチは, 学部レベルの難しさがあって, それなりにストーリーがあって考えやすい．　以下にこれについて述べる．

問題 7.14. [二つの封筒問題 (問題 5.16 の再掲)]
ゲームの主催者は, あなたに二つの封筒 (i.e., 封筒 A と封筒 B) から一つの封筒を選ぶチャンスを提供した．封筒 A と封筒 B にそれぞれ V_1 円と V_2 円が入っている．あなたには, 次が知らされている．

(a)　$\frac{V_1}{V_2} = 1/2$ または, $\frac{V_1}{V_2} = 2$

交換写像 $\overline{x} : \{V_1, V_2\} \to \{V_1, V_2\}$ を $\overline{x} = \begin{cases} V_2, & (\text{ if } x = V_1), \\ V_1 & (\text{ if } x = V_2) \end{cases}$ で定める．あなたは無作為に（公正なコイン投げによって）一方の封筒を選んだとしよう．そして, x_1 円を得たとする．(すなわち, 封筒 A[resp B] ならば, V_1 円 [resp. V_2 円] 得たことになる)．このとき, 主催者は, $\overline{x}_1$ 円得ることになる．したがって, あなたは「$\overline{x}_1 = x_1/2$」または「$\overline{x}_1 = 2x_1$」と推定できる．ここで, あなたには, あなたの x_1 円と主催者の $\overline{x}_1$ 円と変更するという選択肢があるとしよう．$x_1 = \alpha$ としよう．さて, このままにして, α 円を獲得するか？または, 変更して, $\alpha/2$ 円または 2α 円を獲得するか？さて, あなたはどうする．

図 7.4: 二つの封筒問題

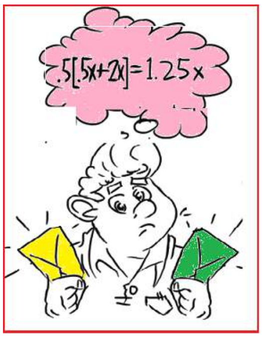
[(P1):どこがパラドックスなのか　?]. あなたは次のように考えるかもしれない. 確率 1/2 で, もう一方の封筒 B は, $\alpha/2$ 円か, または 2α 円入っているに違いない. したがって, 封筒 B 内のお金の期待値 (それを $\mathrm{E}(\alpha)$ と記す) は,

$$E(\alpha) = (1/2)(\alpha/2) + (1/2)(2\alpha) \tag{7.18}$$

で，すなわち, $E(\alpha) = 1.25\alpha$ となる. これは封筒 A の α 円より大きい. したがって,「封筒 A を封筒 B に変更しよう」とあなたは考えるだろう.

しかし, これはおかしい.

なぜならば, 封筒 A と封筒 B の役割は同じはずだからである. あなたがランダムに (i.e., 確率 1/2 で) 選んだのが, 封筒 B だとすると, こんどは封筒 A を選ぶのだろうか？このパラドクスが, 有名な「二つの封筒問題 (i.e., "The Other Person's envelope is Always Greener")」である.



7.5.1 (P1):二つの封筒問題のベイズ統計による解答:

状態空間 Ω を次のように定める.

$$\Omega = \overline{\mathbb{R}}_+ (= \{\omega \in \mathbb{R} \mid \omega \ge 0\})$$

もちろん、ルベーグ測度 ν を仮定する. 次の古典基本構造から始めよう：

$$[C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega,\nu) \subseteq B(L^2(\Omega,\nu))]$$

また、$\widehat{\Omega} = \{(\omega, 2\omega) \mid \omega \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ と置いて、次の同一視を考える：

$$\Omega \ni \omega \underset{\text{(identification)}}{\longleftrightarrow} (\omega, 2\omega) \in \widehat{\Omega} \tag{7.19}$$

さらに，写像 $V_1 : \Omega(\equiv \overline{\mathbb{R}}_+) \to X(\equiv \overline{\mathbb{R}}_+)$ と $V_2 : \Omega(\equiv \overline{\mathbb{R}}_+) \to X(\equiv \overline{\mathbb{R}}_+)$ を次のように定める:

$$V_1(\omega) = \omega, \quad V_2(\omega) = 2\omega \qquad (\forall \omega \in \Omega)$$

また、$L^\infty(\Omega,\nu)$ 内の観測量 $\mathsf{O} = (X(=\overline{\mathbb{R}}_+), \mathcal{F}(=\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$: the Borel field$), F)$ を次のように定める：

$$[F(\Xi)](\omega) = \begin{cases} 1 & (\text{ if } \omega \in \Xi,\ \ 2\omega \in \Xi) \\ 1/2 & (\text{ if } \omega \in \Xi,\ \ 2\omega \notin \Xi) \\ 1/2 & (\text{ if } \omega \notin \Xi,\ \ 2\omega \in \Xi) \\ 0 & (\text{ if } \omega \notin \Xi,\ \ 2\omega \notin \Xi) \end{cases} \qquad (\forall \omega \in \Omega, \forall \Xi \in \mathcal{F})$$

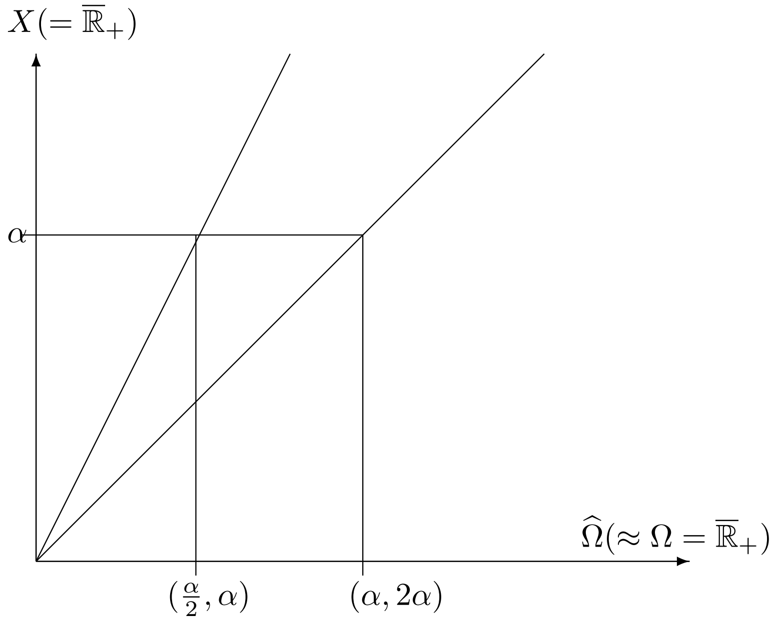


図 7.5(=図 5.10):尤度関数

同一視: $\widehat{\Omega} \ni (\omega, 2\omega) \longleftrightarrow \omega \in \Omega = \overline{\mathbb{R}}_+$ の下に、次を仮定する：

$$\rho_0(D) = \int_D w_0(\omega) d\omega \quad (\forall D \in \mathcal{B}_\Omega = \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+})$$

ここに確率密度関数 $w_0 : \Omega(\approx \overline{\mathbb{R}}_+) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ は連続とし、混合状態 $\rho_0(\in \mathcal{M}^m(\Omega(=\overline{\mathbb{R}}_+)))$ は確率密度関数 w_0 を持つとする.

ここで，混合型言語ルール 1(混合測定;7.1 節) によって，次が言える.

(D_1) 混合測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega,d\omega)}(\mathsf{O} = (X, \mathcal{F}, F), S_{[*]}(\rho_0))$ によって得られた測定値が $\Xi(\in \mathcal{B}_X = \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+})$ に属する確率 $P(\Xi)$ $(\Xi \in \mathcal{B}_X = \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+})$ は次で与えられる.

$$\begin{aligned} P(\Xi) &= \int_\Omega [F(\Xi)](\omega) \rho_0(d\omega) = \int_\Omega [F(\Xi)](\omega) h(\omega) d\omega \\ &= \int_\Xi \frac{h(x/2)}{4} + \frac{h(x)}{2} \; dx \quad (\forall \Xi \in \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+}) \end{aligned} \tag{7.20}$$

したがって, 測定値の期待値は

$$\int_{\overline{\mathbb{R}}_+} xP(dx) = \frac{1}{2}\int_0^\infty x \cdot \Big(h(x/2)/2 + h(x)\Big)dx = \frac{3}{2}\int_{\overline{\mathbb{R}}_+} xh(x)dx \tag{7.21}$$

となる． また，ベイズの定理から，

(D$_2$) 混合測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega,d\omega)}(\mathsf{O}=(X,\mathcal{F},F),\ S_{[*]}(\rho_0))$ によって，測定値 $\alpha(\in X(=\overline{\mathbb{R}}_+))$ を得たとき，事後状態 $\rho^\alpha_{\text{post}}(\in \mathcal{M}^m(\Omega))$ は次で与えられる.

$$\rho^\alpha_{\text{post}} = \frac{\frac{h(\alpha/2)}{2}}{\frac{h(\alpha/2)}{2}+h(\alpha)}\delta_{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} + \frac{h(\alpha)}{\frac{h(\alpha/2)}{2}+h(\alpha)}\delta_{(\alpha,2\alpha)} \tag{7.22}$$

したがって，

(D$_3$) もし $[*] = \left\{\begin{array}{l} \delta_{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} \\ \delta_{(\alpha,2\alpha)} \end{array}\right\}$ ならば，あなたは変更は $\left\{\begin{array}{l} \alpha \longrightarrow \frac{\alpha}{2} \\ \alpha \longrightarrow 2\alpha \end{array}\right\}$ であって，
変更の利得は $\left\{\begin{array}{l} \frac{\alpha}{2}-\alpha(=-\frac{\alpha}{2}) \\ 2\alpha-\alpha(=\alpha) \end{array}\right\}$ となる.

したがって，変更による利得の期待値は次のように計算できる.

$$\begin{aligned}&\int_{\overline{\mathbb{R}}_+} \Big((-\frac{\alpha}{2})\frac{\frac{h(\alpha/2)}{2}}{\frac{h(\alpha/2)}{2}+h(\alpha)} + \alpha\frac{h(\alpha)}{\frac{h(\alpha/2)}{2}+h(\alpha)}\Big)P(d\alpha) \\ =&\int_{\overline{\mathbb{R}}_+} (-\frac{\alpha}{2})\frac{h(\alpha/2)}{4} + \alpha\cdot\frac{h(\alpha)}{2} \quad d\alpha = 0\end{aligned} \tag{7.23}$$

したがって，もし $\int_0^\infty \omega h(\omega)d\omega < \infty$ ならば，変更してもしなくても, 利得は変わらない.

7.6 モンティ・ホール問題 (ベイズの方法)

この節の詳細は次の論文を見よ.

文献 [34]: S. Ishikawa, "Monty Hall Problem and the Principle of Equal Probability in Measurement Theory," Applied Mathematics, Vol. 3 No. 7, 2012, pp. 788-794. doi: 10.4236/am.2012.37117.

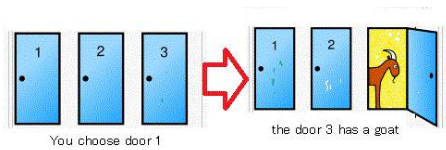
問題 5.14 では、フィッシャーの最尤法によって、モンティ・ホール問題を解いた. これが一番素直な解答であるが、意外と気づきにくい解答であった. この節では、ベイズの定理を使う解答を示す. この方法は考えやすくてポピュラーな解答である.

7.6.1 問題 5.14 の復習：純粋測定によるモンティ・ホール問題

問題 7.15. [モンティ・ホール問題 (フィッシャーの最尤法による解答)]

あなたはゲームショーに出演している. 3 つのドア (すなわち,「1 番」,「2 番」,「3 番」) のうちの 1 つのドアの後ろには自動車 (当り), 他の 2 つのドアの後ろには羊 (はずれ) が隠されている. 司会者は, どのドアの後ろに自動車が隠されているかを知っている. しかし, あなたはそれを知らない.

ここで, 司会者は問う：「どのドアの後ろが自動車だと思いますか？」



さて, あなたはあるドアを選んだと仮定する. たとえば, 1 番のドアを選んだとする. このとき, 司会者が「実は, 3 番ドアの後ろは羊です」と言う. 更に, 司会者は問う.「あなたは 1 番のドアを選んでしまいましたが, 今からでも変更可能ですよ. 2 番のドアに変更しますか？」と. さて, あなたはどうするか？

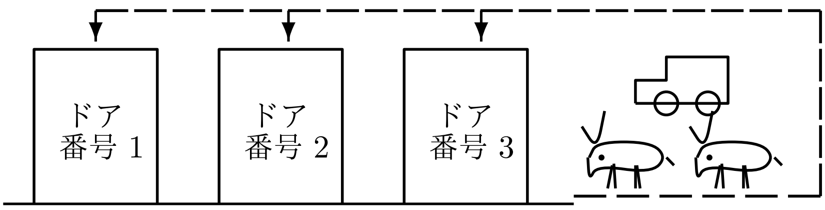


図 9.6: モンティ・ホール問題

解答 状態空間を $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$(離散距離空間) とおく. ここに,

$\omega_1 \cdots\cdots$ 1 番ドアの後ろに自動車が隠れている状態
$\omega_2 \cdots\cdots$ 2 番ドアの後ろに自動車が隠れている状態
$\omega_3 \cdots\cdots$ 3 番ドアの後ろに自動車が隠れている状態

として,

古典基本構造 $[C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega,\nu) \subseteq B(L^2(\Omega,\nu))]$
(ここに, $\nu(\{\omega_k\})=1,\ k=1,2,3$)

を得る. また, $L^\infty(\Omega)$ 内の観測量 $\mathsf{O}=(\{1,2,3\},2^{\{1,2,3\}},F)$ は次のように定義される.

$$
\begin{aligned}
&[F(\{1\})](\omega_1)=0.0, && [F(\{2\})](\omega_1)=0.5, && [F(\{3\})](\omega_1)=0.5^{*2}\\
&[F(\{1\})](\omega_2)=0.0, && [F(\{2\})](\omega_2)=0.0, && [F(\{3\})](\omega_2)=1.0\\
&[F(\{1\})](\omega_3)=0.0, && [F(\{2\})](\omega_3)=1.0, && [F(\{3\})](\omega_3)=0.0
\end{aligned}
\tag{7.24}
$$

したがって, あなたは測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}{=}(\{1,2,3\},2^{\{1,2,3\}},F),S_{[*]})$ —「1 番ドアの後ろに自動車が隠れている」と言って, 司会者の返事を聞く測定—を行ったことになる.

(1) 測定値 1 を得る $\Longleftrightarrow$ 司会者が「1 番ドアの後ろに羊がいる」と言う
(2) 測定値 2 を得る $\Longleftrightarrow$ 司会者が「2 番ドアの後ろに羊がいる」と言う
(3) 測定値 3 を得る $\Longleftrightarrow$ 司会者が「3 番ドアの後ろに羊がいる」と言う

とする.

司会者が「3 番ドアの後ろに羊がいる」と教えてくれたのだから, 測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O},\ S_{[*]})$ によって, 測定値 "3" を得たことになる. したがって, フィッシャーの最尤法 (定理 5.6) により, あなたは 2 番ドアを選ぶべきだとなる. なぜならば

$$
\begin{aligned}
\max\{[F(\{3\})](\omega_1),[F(\{3\})](\omega_2),[F(\{3\})](\omega_3)\} &= \max\{0.5,\ \ 1.0,\ \ 0.0\}\\
&=1.0=[F(\{3\})](\omega_2)
\end{aligned}
$$

なので, $[*]=\omega_2$ と推定できる. したがって, あなたは 2 番ドアに変更すべきである. □

以上が復習.

7.6.2 混合測定によるモンティ・ホール問題

さて, モンティ・ホール問題を混合測定理論で考えよう.

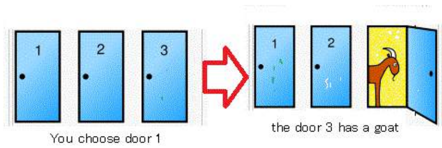
[2] $0<\alpha<1$ として, $[F(\{2\})](\omega_1)=\alpha$, $[F(\{3\})](\omega_1)=1-\alpha$ でもよい.

問題 7.16. [モンティ・ホール問題 (ベイズの定理による解答)]

あなたはゲームショーに出演している．3 つのドア (すなわち,「1 番」,「2 番」,「3 番」) のうちの 1 つのドアの後ろには自動車, 他の 2 つのドアの後ろには羊 (はずれ) が隠されている．司会者は，どのドアの後ろに自動車が隠されているかを知っている．しかし，あなたはそれを知らない．ここで，司会者は問う:「どのドアの後ろが自動車だと思いますか？」あなたはあるドアを選んだと仮定しよう．たとえば, 1 番のドアを選んだとする．ここで, 司会者はあなたに次のことを言う．

(♯) ゲームの主催者がフェアなサイコロを投げて，出た目が 1，2 ならば 1 番ドア，3，4 ならば 2 番ドア，5，6 ならば 3 番ドアの後ろに自動車を置いた．

さらに,，司会者が「実は，3 番ドアの後ろは羊です」と言う．更に，司会者は問う．「あなたは 1 番のドアを選んでしまいましたが，今からでも変更可能ですよ．2 番のドアに変更しますか？」と．さて，あなたはどうするか？



解答 問題 7.15(モンティ・ホール問題:フィッシャーの最尤法による解答) と同様に，状態空間を離散距離空間 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ として，測度 $\nu(\{\omega_k\}) = 1$ $(k = 1, 2, 3)$ とする． 観測量 $\mathsf{O} = (X, \mathcal{F}, F)$ も同様に定める．また，仮定 (♯) によって，混合状態 w_e $(\in L^1_{+1}(\Omega))$ を

$$w_e(\omega) = 1/3 \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

とする． しかし，解答の難しさは同じことなので，主催者がアンフェアなサイコロ投げで決めたとしよう． すなわち，混合状態 w_0 $(\in \mathcal{M}^m_{+1}(\Omega))$ を以下のように仮定しよう．

$$w_0(\omega_a) = p_1, \quad w_0(\omega_2) = p_2, \quad w_0(\omega_3) = p_3,$$

ここで，$p_a + p_2 + p_3 = 1$, $0 \le p_a, p_2, p_3 \le 1$.

よって，混合測定 $\mathsf{M}_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}, S_{[*]}(w_0))$ を得る．すなわち，混合測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}, S_{[*]}(w_0))$ —「1 番ドアの後ろに自動車が隠れている」と言って，司会者の返事を聞く測定—を行うことになる．司会者が「"3 番ドアの後ろに羊がいる」と教えてくれたのだから，混合測定 $\mathsf{M}_{C(\Omega)}(\mathsf{O}, S_{[*]}(w_0))$ によって，測定値 "3" を得たことになる．したがって, ベイズの定理 7.11 により，事後の混合状態 $w_{\rm post}(\in L^1_{+1}(\Omega))$ は，次のように計算できる．

$$w_{\rm post}(\omega) = \frac{[F(\{3\})](\omega) w_0(\omega)}{\int_\Omega [F(\{3\})](\omega) w_0(\omega) \nu(d\omega)} \qquad (\forall \omega \in \Omega)$$

$$
= \begin{cases} \dfrac{\frac{p_1}{2}}{\frac{p_1}{2}+p_2} & (\omega = \omega_1 \text{のとき}) \\ \dfrac{p_2}{\frac{p_1}{2}+p_2} & (\omega = \omega_2 \text{のとき}) \\ 0 & (\omega = \omega_3 \text{のとき}) \end{cases}
$$

さて，$p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$ のときは,

$$
w_{\rm post}(\omega_1) = 1/3 \quad w_{\rm post}(\omega_2) = 2/3 \quad w_{\rm post}(\omega_3) = 0.
$$

であるから，あなたは 2 番ドアを選ぶべきと結論できる.

もちろん、$p_1 > 2p_2$ だったのならば、1 番ドアを選ぶべきである. □

♠ **注釈 7.3.** ゲームショーの主催者がいつもサイコロを振って自動車の置き場所を決定するわけではないので，問題 7.16 の条件 (♯) は不自然と考えるのは一理ある．ゲームの主催者が意図的に自動車をどれかのドアの後ろに置いたとしたら，この解答は使えないからである．ベイズの定理自体は問題がないが，ベイズの定理を使うときには，しばしば等重率 (=等確率の原理)(すなわち，「情報がないときは事前確率を等確率と見なせ」という規則) を使う．したがって，等重率の正当性が示されなければ，モンティ・ホール問題は未解決問題と考える．混合測定におけるモンティ・ホール問題の解答は次節で述べる．

7.7 モンテイ・ホール問題 (等確率の原理)

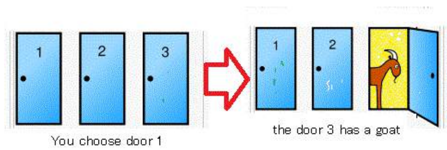
7.7.1 等重率 (=等確率の原理) —最も簡単で有名な未解決問題

モンティ・ホール問題 (問題 7.15，問題 7.16) をもう一度考え直そう．次がモンティ・ホール問題の解答のもう一つの決定版と考える．

問題 7.17. [モンティ・ホール問題 (等重率 (=等確率の原理))]

あなたはゲームショーに出演している．3 つのドア (すなわち,「1 番」,「2 番」,「3 番」) のうちの 1 つのドアの後ろには自動車, 他の 2 つのドアの後ろには羊 (はずれ) が隠されている．司会者は，どのドアの後ろに自動車が隠されているかを知っている．しかし，あなたはそれを知らない．司会者は問う: 「どのドアの後ろが自動車だと思いますか？」ここで，あなたは次のようにしてドアを選ぶとする．

(♯) あなたはサイコロを投げて，出た目が 1，2 ならば 1 番ドア，3，4 ならば 2 番ドア，5，6 ならば 3 番ドアを選ぶとする．



このようにして，たとえば, 1 番のドアを選んだとする．このとき，司会者が「実は，3 番ドアの後ろは羊です」と言う．更に，司会者は問う．「あなたは 1 番のドアを選んでしまいましたが，今からでも変更可能ですよ．2 番のドアに変更しますか？」と．さて，あなたはどうするか？

解答 問題 7.15 と問題 7.16(モンティ・ホール問題) のように，状態空間 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ と観測量 $\mathsf{O} = (X, \mathcal{F}, F)$ を定める．写像 $\phi : \Omega \to \Omega$ を

$$\phi(\omega_1) = \omega_2, \quad \phi(\omega_2) = \omega_3, \quad \phi(\omega_3) = \omega_1$$

で定めて，因果作用素 $\Phi : L^\infty(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$ を $[\Phi(f)](\omega) = f(\phi(\omega))$ $(\forall f \in L^\infty(\Omega), \ \forall \omega \in \Omega)$ で定める[*3]．さて，自動車が k 番ドアの後ろに置いてあるとしよう $(k = 1, 2, 3)$．ここで，次が言える:

(a) サイコロの出た目が $\begin{bmatrix} 1,2 \\ 3,4 \\ 5,6 \end{bmatrix}$ ならば，測定 $\begin{bmatrix} \mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}, S_{[\omega_k]}) \\ \mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\Phi\mathsf{O}, S_{[\omega_k]}) \\ \mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\Phi^2\mathsf{O}, S_{[\omega_k]}) \end{bmatrix}$ を行う

[*3] 因果作用素については, 次章以降で議論するので, ここでは深入りしない．

である．問題 7.16 の繰り返しになるが，たとえば，サイコロの目が「3」だったとしたら，あなたは測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\Phi\mathsf{O}, S_{[*]})$ —「3 番ドアの後ろに自動車が隠れている」と言って，司会者の反応を見る測定—を行うことになる．ここで，

(b1) 測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\Phi\mathsf{O}, S_{[\omega_k]})$ の測定値が $\Xi(\in \mathcal{F})$ に属する確率は, $[\Phi(F(\Xi)](\omega_k)$ である

(b2) 測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}, S_{[\phi(\omega_k)]})$ の測定値が $\Xi(\in \mathcal{F})$ に属する確率は, $[(F(\Xi)](\phi(\omega_k))$ $(= [\Phi(F(\Xi)](\omega_k)$ $)$ である

この意味で, 次の同一視：

$$\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\Phi\mathsf{O}, S_{[\omega_k]}) \underset{\text{同一視}}{\longleftrightarrow} \mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}, S_{[\phi(\omega_k)]})$$

を考える． 同様に,

$$\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\Phi^2\mathsf{O}, S_{[\omega_k]}) \underset{\text{同一視}}{\longleftrightarrow} \mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}, S_{[\phi^2(\omega_k)]})$$

と考える． したがって，上の (a) は，次と同一視できる．．

(c) サイコロの出た目が $\begin{bmatrix} 1,2 \\ 3,4 \\ 5,6 \end{bmatrix}$ ならば，測定 $\begin{bmatrix} \mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}, S_{[\omega_k]}) \\ \mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}, S_{[\phi(\omega_k)]}) \\ \mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}, S_{[\phi^2(\omega_k)]}) \end{bmatrix}$ を行う

ここで，$\frac{1}{3}(\delta_{\omega_k} + \delta_{\phi(\omega_k)} + \delta_{\phi^2(\omega_k)}) = \frac{1}{3}(\delta_{\omega_1} + \delta_{\omega_2} + \delta_{\omega_3})$ $(\forall k = 1,2,3)$ に注意せよ．したがって，この (c) は，次を満たす混合状態 $w_e(\in L^1_{+1}(\Omega))$ に対する混合測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}, S_{[*]}(w_e))$ と等しい．すなわち,

$$\int_\Omega w_e(\omega)\phi(\omega)\nu(d\omega) = \frac{1}{3}(\phi(\omega_1) + \phi(\omega_2) + \phi(\omega_3)) \quad (\forall \phi \in C_0(\Omega))$$

これと同値の意味で,

$$w_e(\omega) = 1/3 \qquad (\forall \omega \in \Omega)$$

よって，この問題 7.17 は，問題 7.16 に帰着する．したがって，あなたは 2 番ドアを選ぶべきと結論できる． □

♠ **注釈 7.4.** 上の議論は，簡単な理屈で，「あなた (=測定者) はどのドアか知らないのだから，フェアなサイコロを投げて決めた」と考えただけである．しかし，この仕組みを測定理論 (=量子言語) で記述することは，上述のように簡単とは言えない．たとえば，問題 7.17 の (♯) で，測定者がアンフェアなサイコロ投げをしたとしたら，計算できなくなって何も言えなくなってしまう．このことは，問題 7.16 の (♯) では，ゲームの主催者がアンフェアなサイコロ投げをしたとしても計算可能であることとの比較の中で，注意すべきである．

以上の議論から，等重率 (=等確率の原理) は，次の定理 7.18 で示される．

定理 7.18. [等重率 (=等確率の原理)**:** (*cf.* 文献 [30, 34, 46]) **]**　状態空間 $\Omega(\approx \mathfrak{S}^p(C_0(\Omega)^*))$ を有限集合とする．すなわち，$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ として，測度 ν を $\nu(\{\omega_k\}) = 1/n \quad (\forall \omega_k \in \Omega)$ とする．　$\mathsf{O} = (X, \mathcal{F}, F)$ を $L^\infty(\Omega)$ 内の観測量とする．測定者が状態についての情報を持っていないときに，通常は純粋測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}, S_{[*]})$ を考える．しかし，別の方法として，$w_e(\omega) = \frac{1}{n} \quad (\forall \omega \in \Omega)$ として，混合測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}, S_{[*]}(w_e))$ を考えることは，(問題 7.17 の ($\sharp$) の意味では) 一理ある．

証明　証明は問題 7.17 の解答と同様な議論から容易にわかる．□

♠ **注釈 7.5.** 本書では，三種類の「等確率の原理 (=等重率)」を扱う．すなわち，

($\sharp_1$) 注意 5.19 の等確率の原理
($\sharp_2$) 定理 7.18 の等確率の原理
($\sharp_3$) 公準 14.4 の等確率の原理

である (cf. 注釈 14.1).

7.8 平均情報量 (エントロピー) —目撃情報の価値

ベイズの定理と等重率の応用として，平均情報量 (=エントロピー) —シャノンの平均情報量の測定理論版—について説明する．もちろん，以下の定義のように「測定によって，情報を得る」と考えるのは自然である． 本節は、次の文献からの抜粋である

文献 [26]: S. Ishikawa, *A Quantum Mechanical Approach to Fuzzy Theory,* Fuzzy Sets and Systems, Vol. 90, No. 3, 277-306, 1997, doi: 10.1016/S0165-0114(96)00114-5

定義 7.19. [平均情報量 (*cf.* [26, 30])]

古典基本構造 $[C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega,\nu) \subseteq B(L^2(\Omega,\nu))]$

を考える． 測定空間を $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ として，混合測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega,\nu)}$ $(\mathsf{O} = (X, 2^X, F),$ $S_{[*]}(w_0))$ を考える．混合測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}, S_{[*]}(w_0))$ により，測定値 x_n が得られる確率 $P(\{x_n\})$ は

$$P(\{x_n\}) = \int_\Omega [F(\{x_n\})](\omega) w_0(\omega) \nu(d\omega) \tag{7.25}$$

で与えられる．更に，測定値 x_n が得られたときの，平均情報量 $I(\{x_n\})$ はベイズの定理 (7.11) から，

$$\begin{aligned} &I(\{x_n\}) \\ &= \int_\Omega \frac{[F(\{x_n\})](\omega)}{\int_\Omega [F(\{x_n\})](\omega) w_0(\omega)\nu(d\omega)} \log \frac{[F(\{x_n\})](\omega)}{\int_\Omega [F(\{x_n\})](\omega) w_0(\omega)\nu(d\omega)} w_0(\omega)\nu(d\omega) \end{aligned}$$

で与えられる．よって，混合測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}$ $(\mathsf{O}, S_{[*]}(w_0))$ の平均情報量 $H\big(\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}, S_{[*]}(w_0))\big)$ を次のように定義する:

$$H\big(\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}, S_{[*]}(w_0))\big) = \sum_{n=1}^\infty P(\{x_n\}) \cdot I(\{x_n\}) \tag{7.26}$$

また，次も明らかである:

$$\begin{aligned} H\big(\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}, S_{[*]}(w_0))\big) =& \sum_{n=1}^\infty \int_\Omega [F(\{x_n\})](\omega) \log [F(\{x_n\})](\omega) w_0(\omega)\nu(d\omega) \\ &- \sum_{n=1}^\infty P(\{x_n\}) \log P(\{x_n\}) \end{aligned} \tag{7.27}$$

例 7.20. [真犯人は男か女か？　足が速いか遅いか?]　　さて，

(a) 100 人の容疑者たち $\{s_1, s_2, \ldots, s_{100}\}$ の中に一人の犯人がいる

という状況を想定しよう．ここで，状態空間を $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{100}\}$ として，

状態ω_n・・・容疑者 s_nが犯人である状態　　$(n = 1, 2, ..., 100)$

とする．測度 ν は，$\nu(\{\omega_k\}) = 1$ $(\forall k = 1, 2, \cdots, 100)$ で定める． $L^\infty(\Omega, \nu)$ 内の男-観測量 $\mathsf{O}_{\rm m}$ $= (X = \{y_{\rm m}, n_{\rm m}\}, 2^X, M)$ が次のように定まっているとする:

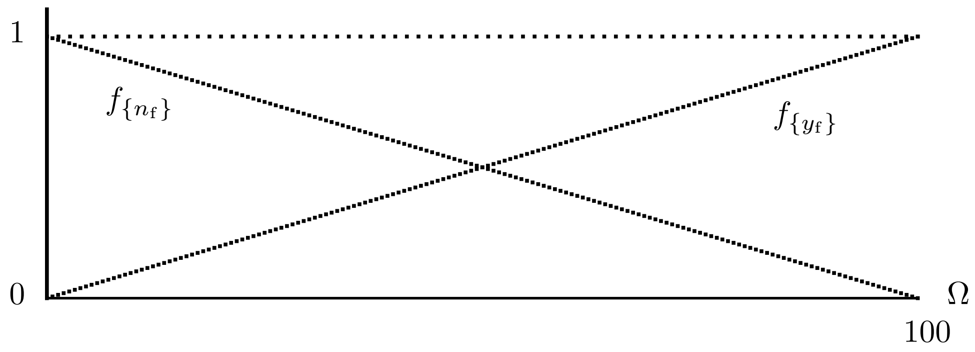
$$[M(\{y_{\rm m}\})](\omega_n) = m_{y_{\rm m}}(\omega_n) = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ 1 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$
$$[M(\{n_{\rm m}\})](\omega_n) = m_{n_{\rm m}}(\omega_n) = 1 - [M(\{y_{\rm m}\})](\omega_n)$$

たとえば，

測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}_{\rm m}, S_{[\omega_{17}]})$ —容疑者 s_{17} が犯人として，その犯人の性別の測定—を行なえば，測定値は，確実に「$n_{\rm m}$(=女)」である．

また，$L^\infty(\Omega)$ 内の速い-観測量 $\mathsf{O}_{\rm f} = (Y = \{y_{\rm f}, n_{\rm f}\}, 2^Y, F)$ も次のように定まっているとする:

$$[F(\{y_{\rm f}\})](\omega_n) = f_{y_{\rm f}}(\omega_n) = \frac{n-1}{99},$$
$$[F(\{n_{\rm f}\})](\omega_n) = f_{n_{\rm f}}(\omega_n) = 1 - [F(\{y_{\rm f}\})](\omega_n)$$



「「誰が真犯人か?」の情報を全く持っていない」という意味で，等重率 (定理 7.18) により，混合状態 $w_0 \in L^1{}_{+1}(\Omega)$ は，等確率による状態 w_e とする．すなわち，$w_0(\omega_n) = w_e(\omega_n) = 1/100$ $(\forall n)$ と定める．ここで，2 つ混合測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}_{\rm m}, S_{[*]}(w_e))$ と $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}_{\rm f}, S_{[*]}(w_e))$ を考える．このとき，各々の平均情報量は次のように計算できる．

$$H\big(\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}_{\rm m}, S_{[*]}(w_e))\big)$$

目次; 他

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega m_{y_{\mathrm{m}}}(\omega) w_e(\omega)\nu(d\omega) \cdot \log \int_\Omega m_{y_{\mathrm{m}}}(\omega) w_e(\omega)\nu(d\omega) \\
&\qquad - \int_\Omega m_{\{n_{\mathrm{m}}\}}(\omega) w_e(\omega)\nu(d\omega) \cdot \log \int_\Omega m_{n_{\mathrm{m}}}(\omega) w_e(\omega)\nu(d\omega) \\
&= -\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} = \log_2 2 = 1 \ \ (\text{ビット})^{*4}.
\end{aligned}
$$

また，

$$
\begin{aligned}
&H\big(\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}_{\mathrm{f}}, S_{[*]}(w_e))\big) \\
&= \int_\Omega f_{y_{\mathrm{f}}}(\omega) \log f_{y_{\mathrm{f}}}(\omega) w_e(\omega)\nu(d\omega) + \int_\Omega f_{n_{\mathrm{f}}}(\omega) \log f_{n_{\mathrm{f}}}(\omega) w_e(\omega)\nu(d\omega) \\
&\qquad - \int_\Omega f_{y_{\mathrm{f}}}(\omega) w_e(\omega)\nu(d\omega) \cdot \log \int_\Omega f_{y_{\mathrm{f}}}(\omega) w_e(\omega)\nu(d\omega) \\
&\qquad - \int_\Omega f_{n_{\mathrm{f}}}(\omega) w_e(d\omega) \cdot \log \int_\Omega f_{n_{\mathrm{f}}}(\omega) w_e(\omega)\nu(d\omega) \\
&\fallingdotseq 2\int_0^1 \lambda \log_2 \lambda d\lambda + 1 = -\frac{1}{2\log_e 2} + 1 = 0.278\cdots (\text{ビット})
\end{aligned}
$$

となる．したがって，この例の場合は，

「速い・遅い」よりも，「男・女」の方が目撃情報としては，かなり価値が高い

と言える．

*4 log の底を 2 としたときの単位を，「ビット」と言う．

目次; 他

7.9 フィッシャー統計：モンティホール問題 [三囚人の問題]

本節は, 次からの抜粋：

文献 [46]: S. Ishikawa; The Final Solutions of Monty Hall Problem and Three Prisoners Problem (arXiv:1408.0963v1 [stat.OT] 2014)

高校生パズル (モンティ・ホールと二つの封筒と三囚人の問題等) に拘り過ぎと言われるかもしれないが, モンティホール問題と三囚人の問題とを, 同時に並行して議論することにより, 理解がさらに深まる. たとえば,

モンティホール問題と三囚人の問題は「同型問題」である

よく言われていることであるが, この「同型」の意味を本当にわかっている研究者を知らない.
したがって, この節では, 同時にこの二つを

- $\left\{ \begin{array}{l} \text{モンティホール問題} \\ \text{三囚人の問題} \end{array} \right.$

のように並行して議論を行い, 「同型」の意味が分かるように説明する. すなわち,

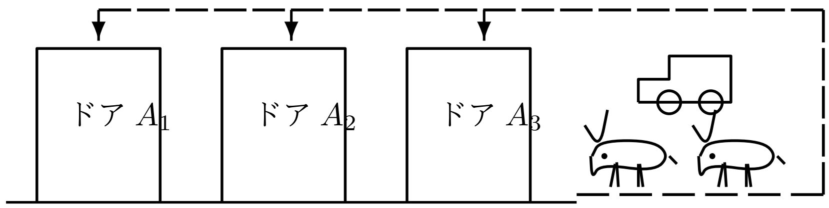
- **明確な構造を持った理論 (量子言語) の中で, モンティホール問題と三囚人の問題を同時に 議論しなければ, 「同型」は見えない.**

ことを読者に伝えたい.

7.9.1 フィッシャー統計：モンティホール問題 [resp. 三囚人の問題]

問題 7.21. (=問題 7.15: [モンティホール問題]). あなたはゲームショウに参加している. 三つのドア (i.e., ドア A_1, ドア A_2, ドア A_3) があって, 一つのドアの後ろには『自動車』が, また他の二つのドアの後ろには『羊』が隠されている. 司会者はドアの後ろが見えるが, あなたには見えない. 司会者が, 「どのドアの後ろに, 『自動車』が隠されていると思いますか？」とあなたに問う. ゲームなので, あなたはドア A_1 と答えたとしよう. そこで, 司会者はドア A_3 の後ろは, 『羊』ですよ」とあなたに教えてくれた. さらに, 司会者は「あなたは, ドア A_1 と言ってしまいましたが, いまからでも, ドア A_2 に変更できますよ」と言った. さて, ここで,

- あなたは, ドア A_1 のままにして変更しないか, または, ドア A_2 に変更しますか？



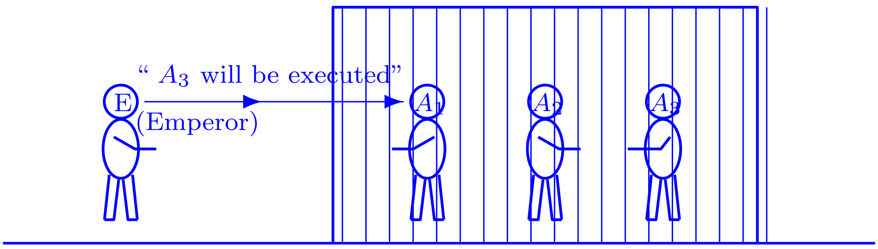
問題 7.22. ([三囚人の問題]). 三人の死刑囚 A_1, A_2 と A_3 が牢屋に入っている． 皇帝によって, 三人の内の一人は恩赦で, 罪を許されたが, 恩赦された者が誰だかは, 皇帝は知っているが, 三人には知らされていない． ここで, 囚人 A_1 が皇帝に次のように言った． 「 私以外の二人の内で, すくなくとも一人は, 死刑のはず． その一人を私だけに教えてくれませんか？」皇帝はすこし考えたが, 「囚人 A_1 には, 関係ないことなので, いいか」と思って, 「A_3 さんは死刑だよ」と答えた． そこで, 囚人 A_1 は次のように考えた．

- もともとは, 三人の内で一人だったのに, A_3 さんは死刑確定で, 結局, 二人の内で一人になったのだから, ラッキーと考えた．

ここで, 問題は

- この A_3 さんの考え方は合理的か？

である．



7.9.2 フィッシャー統計による解答：モンティホール問題 [resp. 三囚人の問題]

二元論の精神 (デカルト図式) を再掲する．

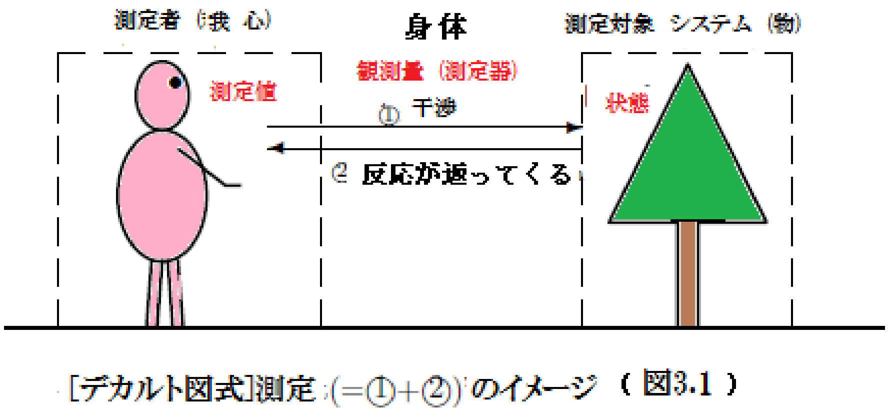


図 9.7: デカルト図式：測定のイメージ図 (3.1 の再掲, (*cf.* [32]))

となって, 物心二元論の対立構造「測定者 $\longleftrightarrow$ システム」は

(A) 問題 7.21(モンティ・ホール) では, "測定者 $\approx$ あなた" と "システム $\approx$ 三つのドア"
[resp. 問題 7.22(三囚人) では, "測定者 $\approx$ 囚人 A_1" と "システム $\approx$ 皇帝の心"]

問題＼二元論	測定者	システム
モンティ・ホール	あなた	三つのドア
三囚人	囚人 A	皇帝の心

となる.

離散距離空間 Ω を $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ とする． ここで, 各状態 $\delta_{\omega_m} (\in \mathfrak{S}^p(C(\Omega)^*))$ は, 次を意味するとする.

$$
\begin{aligned}
&\delta_{\omega_m} \Leftrightarrow \text{ドア } A_m \text{ の後ろに『自動車』がある状態} \\
&[\text{resp.} \quad \delta_{\omega_m} \Leftrightarrow \text{囚人 } A_m \text{ が恩赦を受ける状態}] \\
&(m = 1, 2, 3)
\end{aligned}
\tag{7.28}
$$

$C(\Omega)$ 内の観測量 $\mathsf{O}_1 \equiv (\{1, 2, 3\}, 2^{\{1,2,3\}}, F_1)$ を以下のように定める.

$$
\begin{aligned}
&[F_1(\{1\})](\omega_1) = 0.0, \quad &&[F_1(\{2\})](\omega_1) = 0.5, \quad &&[F_1(\{3\})](\omega_1) = 0.5, \\
&[F_1(\{1\})](\omega_2) = 0.0, \quad &&[F_1(\{2\})](\omega_2) = 0.0, \quad &&[F_1(\{3\})](\omega_2) = 1.0, \\
&[F_1(\{1\})](\omega_3) = 0.0, \quad &&[F_1(\{2\})](\omega_3) = 1.0, \quad &&[F_1(\{3\})](\omega_3) = 0.0,
\end{aligned}
\tag{7.29}
$$

よって, 「測定 $\mathsf{M}_{C(\Omega)}(\mathsf{O}_1, S_{[*]})$ を行う」とは,

- あなたが「ドア A_1」と言う [resp. 「囚人 A_1」が皇帝に問う].

である． したがって, 次の対応を考える.

a) 測定 $\mathsf{M}_{C(\Omega)}(\mathsf{O}_1, S_{[*]})$ により，測定値「1」を得る
$\Leftrightarrow$ 司会者が「ドア A_1 の後ろに『羊』がいる」と言う
[resp. $\Leftrightarrow$ 皇帝が「囚人 A_1 は死刑になる」と言う]

b) 測定 $\mathsf{M}_{C(\Omega)}(\mathsf{O}_1, S_{[*]})$ により，測定値「2」を得る
$\Leftrightarrow$ 司会者が「ドア A_2 の後ろに『羊』がいる」と言う
[resp. $\Leftrightarrow$ 皇帝が「囚人 A_2 は死刑になる」と言う]

c) 測定 $\mathsf{M}_{C(\Omega)}(\mathsf{O}_1, S_{[*]})$ により，測定値「3」を得る
$\Leftrightarrow$ 司会者が「ドア A_3 の後ろに『羊』がいる」と言う
[resp. $\Leftrightarrow$ 皇帝が「囚人 A_3 は死刑になる」と言う]

さて，問題 7.21(モンティホール問題) [resp. 問題 7.22(三囚人の問題)] では,

- 司会者が「ドア A_3 の後ろに『羊』がいる」と言う
[resp. $\Leftrightarrow$ 皇帝が「囚人 A_3 は死刑になる」と言う]

なので，これは，「測定 $\mathsf{M}_{C(\Omega)}(\mathsf{O}_1, S_{[*]})$ により，測定値「3」を得る」を意味する.

ここで, 次に注意しよう.

$$
\begin{aligned}
&[F_1(\{3\})](\omega_2) = 1.0 = \max\{0.5, \ \ 1.0, \ \ 0.0\} \\
&= \max\{[F_1(\{3\})](\omega_1), [F_1(\{3\})](\omega_2), [F_1(\{3\})](\omega_3)\},
\end{aligned}
\tag{7.30}
$$

したがって, フィッシャーの最尤法によって,

(B_1) 問題 7.21(モンティホール問題) では，$[*] = \delta_{\omega_2}$ と推論する理由がある． よって，あなたは, ドア A_2 に変更するべきである.

(B_2) 問題 7.22(三囚人の問題) でも, $[*] = \delta_{\omega_2}$ と推論する理由がある． しかしながら，「囚人 A_1 の幸福度が増したか減じたのか」の (フィッシャー統計での) 合理的な答えはない． 問題 7.22(三囚人の問題) は, (フィッシャー統計内では) 答えのない問題である.

7.10 ベイズ統計：モンティホール問題 [三囚人の問題]

本節は, 次からの抜粋：

文献 [46]: S. Ishikawa; The Final Solutions of Monty Hall Problem and Three Prisoners Problem (arXiv:1408.0963v1 [stat.OT] 2014)

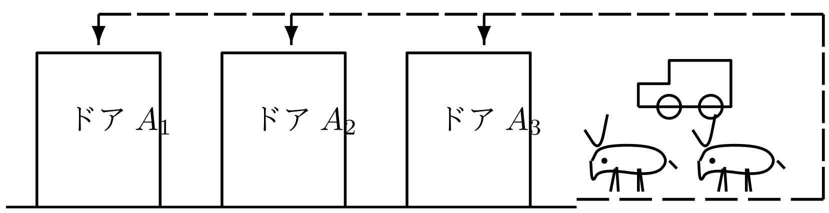
7.10.1 ベイズ統計：モンティホール問題 [resp. 三囚人の問題]

問題 7.23. [(=問題 7.16) モンティホール問題 (司会者がサイコロを投げる場合)]. あなたはゲームショウに参加している．三つのドア (i.e., ドア A_1, ドア A_2, ドア A_3) があって, 一つのドアの後ろには『自動車』が, また他の二つのドアの後ろには『羊』が隠されている．
司会者はドアの後ろが見えるが, あなたには見えない． 司会者が, 「どのドアの後ろに, 『自動車』が隠されていると思いますか？」とあなたに問う．ゲームなので, あなたは「ドア A_1」と答えたとしよう． そして, 司会者は次のように言った．

($\sharp_1$) どのドアの後ろに『自動車』を置くかは, *(公正でない)* サイコロ投げで決めた． したがって, 各ドア A_m の後ろに, 『自動車』が置いてある確率は, p_m *(where* $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, $0 \le p_1, p_2, p_3 \le 1$) である．

さらに, 司会者は「ドア A_3 の後ろは, 『羊』ですよ」とあなたに教えてくれた． 最後に, 司会者は「あなたは, ドア A_1 と言ってしまいましたが, いまからでも, ドア A_2 に変更できますよ」と言った．さて, ここで,

- あなたは, ドア A_1 のままにして変更しないか, または, ドア A_2 に変更しますか？



問題 7.24. [三囚人の問題]. 三人の死刑囚 A_1, A_2 と A_3 が牢屋に入っている． 皇帝によって, 三人の内の一人は恩赦で, 罪を許された． 恩赦された者が誰だかは, 皇帝は知っているが, 三人には知らされていない． ここで, 囚人 A_1 が皇帝に次のように言った． 「 私以外の二人の内で, すくなくとも一人は, 死刑のはず． その一人を私だけに教えてくれませんか？」皇

帝はすこし考えたが，「囚人 A_1 には, 関係ないことなので, いいか」と思って，「A_3 さんは死刑だよ」と答えた．またさらに,

($\sharp_1$) 誰を恩赦にするかは, (公正でない) サイコロ投げで決めた． したがって, 各ドア A_m の後ろに,『自動車』が置いてある確率は，p_m (*where* $p_1+p_2+p_3=1$, $0 \le p_1, p_2, p_3 \le 1$) である．

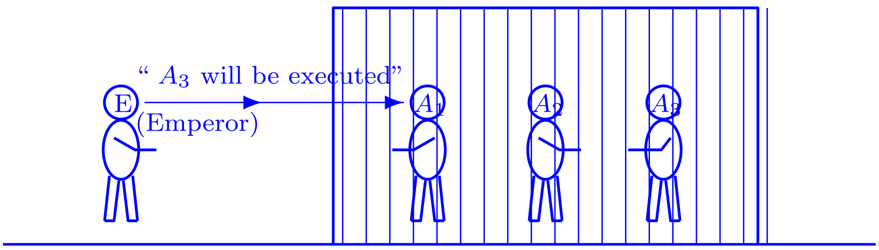
と言った． そこで，囚人 A_1 は次のように考えた．

- もともとは，3 人の内で一人だったのに，A_3 さんは死刑確定で, 結局, 二人の内で一人になったのだから，ラッキーと考えた．

ここで, 問題は

- この A_3 さんの考え方は合理的か？

である．



7.10.2 ベイズ統計による解答：モンティホール問題 [resp. 三囚人の問題]

物心二元論の対立構造「測定者 $\longleftrightarrow$ システム」は前の (A) と同じで,

(A′) 問題 7.23(モンティ・ホール) では, ”測定者 $\approx$ あなた” と ”システム $\approx$ 三つのドア” [resp. 問題 7.24(三囚人) では, ”測定者 $\approx$ 囚人 A_1” と ”システム $\approx$ 皇帝の心”]

問題＼二元論	測定者	システム
モンティ・ホール	あなた	三つのドア
三囚人	囚人 A	皇帝の心

となる．

離散距離空間 Ω を $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ とする． ここで, 各状態 $\delta_{\omega_m} (\in \mathfrak{S}^p(C(\Omega)^*))$ は, 次を意味

するとする．

$$\delta_{\omega_m} \Leftrightarrow \text{ドア } A_m \text{ の後ろに『自動車』がある状態}$$
$$[\text{resp.} \quad \delta_{\omega_m} \Leftrightarrow \text{ 囚人 } A_m \text{ が恩赦を受ける状態}]$$
$$(m = 1, 2, 3) \tag{7.31}$$

$C(\Omega)$ 内の観測量 $\mathsf{O}_1 \equiv (\{1,2,3\}, 2^{\{1,2,3\}}, F_1)$ を以下のように定める．

$$\begin{array}{lll} [F_1(\{1\})](\omega_1) = 0.0, & [F_1(\{2\})](\omega_1) = 0.5, & [F_1(\{3\})](\omega_1) = 0.5, \\ [F_1(\{1\})](\omega_2) = 0.0, & [F_1(\{2\})](\omega_2) = 0.0, & [F_1(\{3\})](\omega_2) = 1.0, \\ [F_1(\{1\})](\omega_3) = 0.0, & [F_1(\{2\})](\omega_3) = 1.0, & [F_1(\{3\})](\omega_3) = 0.0, \end{array} \tag{7.32}$$

よって，「測定 $\mathsf{M}_{C(\Omega)}(\mathsf{O}_1, S_{[*]})$ を行う」とは,

- あなたが「ドア A_1」と言う [resp. ”囚人 A_1”が皇帝に問う].

である． したがって, 次の対応を考える．

a) 測定 $\mathsf{M}_{C(\Omega)}(\mathsf{O}_1, S_{[*]}(\nu_0))$ により，測定値「1」を得る
$\Leftrightarrow$ 司会者が「ドア A_1 の後ろに『羊』がいる」と言う
[resp. $\Leftrightarrow$ 皇帝が「囚人 A_1 は死刑になる」と言う]
b) 測定 $\mathsf{M}_{C(\Omega)}(\mathsf{O}_1, S_{[*]}(\nu_0))$ により，測定値「2」を得る
$\Leftrightarrow$ 司会者が「ドア A_2 の後ろに『羊』がいる」と言う
[resp. $\Leftrightarrow$ 皇帝が「囚人 A_2 は死刑になる」と言う]
c) 測定 $\mathsf{M}_{C(\Omega)}(\mathsf{O}_1, S_{[*]}(\nu_0))$ により，測定値「3」を得る
$\Leftrightarrow$ 司会者が「ドア A_3 の後ろに『羊』がいる」と言う
[resp. $\Leftrightarrow$ 皇帝が「囚人 A_3 は死刑になる」と言う]

さて，問題 7.23(モンティホール問題) [resp. 問題 7.24(三囚人の問題)] では,

- 司会者が「ドア A_3 の後ろに『羊』がいる」と言う
[resp. $\Leftrightarrow$ 皇帝が「囚人 A_3 は死刑になる」と言う]

問題 7.23 の仮定 ($\sharp_1$) [resp. 問題 7.24 の仮定 ($\sharp_2$)] より, 混合状態 $\nu_0 (\in \mathfrak{S}^m(C(\Omega)^*))$ は

$$\nu_0 = p_1 \delta_{\omega_1} + p_2 \delta_{\omega_2} + p_3 \delta_{\omega_3}$$

となり，混合測定 $\mathsf{M}_{C(\Omega)}(\mathsf{O}_1, S_{[*]}(\nu_0))$ を得る．
さて，問題 7.23(モンティホール問題) [resp. 問題 7.24(三囚人の問題)] では,

- 司会者が「ドア A_3 の後ろに『羊』がいる」と言う

[resp. $\Leftrightarrow$ 皇帝が「囚人 A_3 は死刑になる」と言う]

なので，これは，「測定 $\mathsf{M}_{C(\Omega)}(\mathsf{O}_1, S_{[*]})$ により，測定値「3」を得る」を意味する．

したがって，(ベイズの方法) より，事後状態 $\nu_{\rm post}$ ($\in \mathcal{M}_{+1}^m(\Omega)$) は次のようになる．

$$
\nu_{\rm post} = \frac{F_1(\{3\}) \times \nu_0}{\langle \nu_0, F_1(\{3\}) \rangle}. \tag{7.33}
$$

すなわち，

$$
\nu_{\rm post}(\{\omega_1\}) = \frac{\frac{p_1}{2}}{\frac{p_1}{2} + p_2}, \quad \nu_{\rm post}(\{\omega_2\}) = \frac{p_2}{\frac{p_1}{2} + p_2}, \quad \nu_{\rm post}(\{\omega_3\}) = 0. \tag{7.34}
$$

したがって，

(B1′) 問題 7.23 では

$$
\begin{cases}
\text{もし } \nu_{\rm post}(\{\omega_1\}) < \nu_{\rm post}(\{\omega_2\}) \text{ (i.e., } p_1 < 2p_2) \text{ ならば,} \\
\qquad \text{あなたはドア } A_2 \text{ を選ぶべき} \\
\text{もし } \nu_{\rm post}(\{\omega_1\}) = \nu_{\rm post}(\{\omega_2\}) \text{ (i.e., } p_1 = 2p_2) \text{ ならば,} \\
\qquad \text{どちらでも可} \\
\text{もし } \nu_{\rm post}(\{\omega_1\}) > \nu_{\rm post}(\{\omega_2\}) \text{ (i.e., } p_1 > 2p_2) \text{ ならば,} \\
\qquad \text{あなたはドア } A_1 \text{ を選ぶべき}
\end{cases}
$$

(B2′) 問題 7.24 では，

$$
\begin{cases}
\text{もし } \nu_0(\{\omega_1\}) < \nu_{\rm post}(\{\omega_1\}) \text{ (i.e., } p_1 < 1 - 2p_2) \text{ ならば,} \\
\qquad \text{囚人 } A_1 \text{ の幸福度は増大} \\
\text{もし } \nu_0(\{\omega_1\}) = \nu_{\rm post}(\{\omega_1\}) \text{ (i.e., } p_1 = 1 - 2p_2) \text{ ならば,} \\
\qquad \text{囚人 } A_1 \text{ の幸福度は不変} \\
\text{もし } \nu_0(\{\omega_1\}) > \nu_{\rm post}(\{\omega_1\}) \text{ (i.e., } p_1 > 1 - 2p_2) \text{ ならば,} \\
\qquad \text{囚人 } A_1 \text{ の幸福度は減少}
\end{cases}
$$

となる

7.11　等確率の原理：モンティホール問題 [三囚人の問題]

本節は, 次からの抜粋：

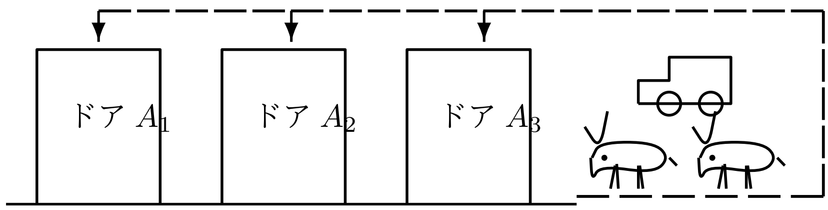
文献 [46]: S. Ishikawa; The Final Solutions of Monty Hall Problem and Three Prisoners Problem　(arXiv:1408.0963v1 [stat.OT] 2014)

問題 7.25. [(=問題 7.17) モンティホール問題 (あなたがサイコロを投げる場合)]. あなたはゲームショウに参加している. 三つのドア (i.e., ドア A_1, ドア A_2, ドア A_3) があって, 一つのドアの後ろには『自動車』が, また他の二つのドアの後ろには『羊』が隠されている. 司会者はドアの後ろが見えるが, あなたには見えない. 司会者が, 「どのドアの後ろに,『自動車』が隠されていると思いますか？」とあなたに問う.

($\sharp_1$) あなたは公正なサイコロ投げで, ドア A_1 を選んだ. すなわち,「確率 *1/3*」で, ドア A_1 と答えたとしよう.

そこで, 司会者は「ドア A_3 の後ろは,『羊』ですよ」とあなたに教えてくれた. さらに, 司会者は「あなたは, ドア A_1 と言ってしまいましたが, いまからでも, ドア A_2 に変更できますよ」と言った. さて, ここで,

- あなたは, ドア A_1 のままにして変更しないか, または, ドア A_2 に変更しますか？



問題 7.26. [三囚人の問題 (囚人がサイコロを投げる場合)]. 三人の死刑囚 A_1, A_2 と A_3 が牢屋に入っている. 皇帝によって, 三人の内の一人は恩赦で, 罪を許されたが, 恩赦された者が誰だかは, 皇帝は知っているが, 三人には知らされていない. 三人の囚人が皇帝に聞きたがったが, 質問者は一人と言われたので,

($\sharp_2$) 質問者を公正なサイコロ投げで決めた. その結果として,「確率 1/3」で囚人 A_1 が質問者になった.

ここで, 囚人 A_1 が皇帝に次のように言った. 「 私以外の二人の内で, すくなくとも一人は, 死

目次; 他

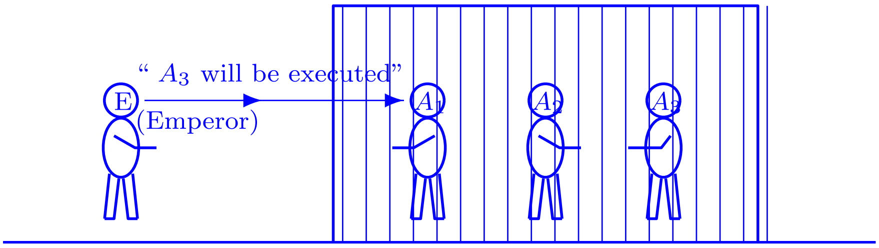
刑のはず． その一人を私だけに教えてくれませんか？」皇帝はすこし考えたが，「囚人 A_1 には, 関係ないことなので, いいか」と思って，「A_3 さんは死刑だよ」と答えた． そこで，囚人 A_1 は次のように考えた.

- もともとは, 3 人の内で一人だったのに，A_3 さんは死刑確定で, 結局, 二人の内で一人になったのだから，ラッキーと考えた.

ここで, 問題は

- この A_3 さんの考え方は合理的か？

である.



解答 定理 7.18(等確率の原理) より，
問題 7.25[モンティホール問題 (あなたが公正なサイコロを投げる場合)] と問題 7.26[三囚人の問題 (囚人が公正なサイコロを投げる場合)]
はそれぞれ
問題 7.25[モンティホール問題 (司会者が公正なサイコロを投げる場合)] と問題 7.26[三囚人の問題 (皇帝が公正なサイコロを投げる場合)] と同じ．したがって，

(B1″) 問題 7.25[モンティホール問題 (あなたが公正なサイコロを投げる場合)] では

$$\nu_{\rm post}(\{\omega_1\}) < \nu_{\rm post}(\{\omega_2\}) \text{ (i.e., } p_1 = 1/3 < 2/3 = 2p_2) \text{ だから，}$$
$$\text{あなたはドア } A_2 \text{ を選ぶべき}$$

(B2″) 問題 7.26[三囚人の問題 (皇帝が公正なサイコロを投げる場合)] では,

$$\nu_0(\{\omega_1\}) = \nu_{\rm post}(\{\omega_1\}) \text{ (i.e., } p_1 = 1/3 = 1 - 2p_2) \text{ だから，}$$
$$\text{囚人 } A_1 \text{ の幸福度は不変}$$

となる

♠ **注釈 7.6.** 三囚人の問題 (やモンティ・ホール問題) が哲学者たちの興味の対象であり続けたのは,「チョット間違いやすい問題」だからでない. 本節で示したように, 哲学者たちの興味を引いた理由は,

「確率」と「二元論的記述」について, 深い洞察を促す問題である

からである. と思うのは哲学者を買いかぶり過ぎだろうか.

7.12 ベルトランのパラドックス (「ランダム」は見方次第)

定理 7.18(等重率) は,

- 状態空間が有限ならば, ランダム (=無作為) が意味を持つ

と主張していると思うかもしれない．しかし, 定理 7.18(等重率) 内でも断ったように，このランダムの意味は,

「問題 7.17 の (♯) の意味では」という限定的のもの

である．「測定によって意味づけされていないランダム」などは意味無い．すなわち、

- 測定無くして、確率無し (言語的コペンハーゲン解釈 (*cf.* 3.1 節))

すなわち、

- **「ランダム」なんて、無い**

ことは,「ベルトランのパラドックス」として知られている． 以下にこれを説明しよう．

7.12.1 ベルトランのパラドックス (「ランダム」は見方次第)

ベルトランのパラドックスは次のようなものである．

問題 7.27. (ベルトランの逆理) 半径 1 の円がある．この円から、「無作為」に一つの弦 l を選ぶという測定を考える．このとき、その弦の長さが $\sqrt{3}$ 以下である確率を求めよ．

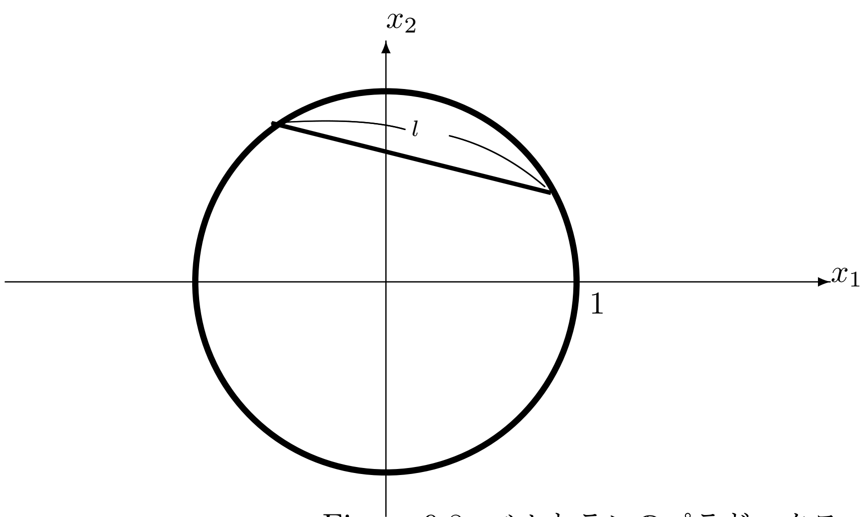


Figure 9.8: ベルトランのパラドックス

回転写像 $T^{\theta}_{\rm rot} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $(0 \le \theta < 2\pi)$ と裏返し写像 $T_{\rm rev} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を以下のように定める.

$$T^{\theta}_{\rm rot} x = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad T_{\rm rev} x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

問題 7.28. (ベルトランの逆理と解答の準備) 半径 1 の円が与えられている.

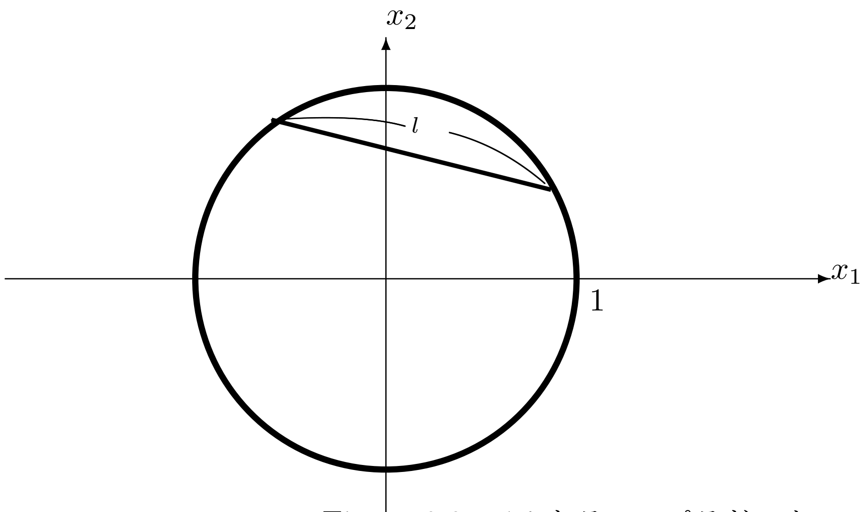


Figure 9.9: ベルトランのパラドックス

$\Omega = \{ l \mid l$ は弦 $\}$, すなわち, 弦全体の集合として、次を考える.

(A) Ω 上の確率測度で、不変な (すなわち、回転写像 $T^{\theta}_{\rm rot} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $(0 \le \theta < 2\pi)$ と裏返し写像 $T_{\rm rev} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ に関して、不変な) 測度は一意に存在するか?

以下に、このような確率測度が存在すること、そして、一意でないことを説明する. 二つの場合を考える.

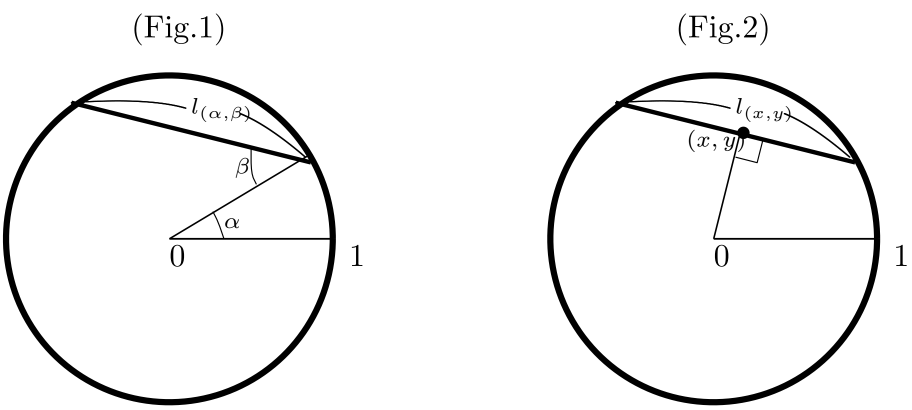


Figure 9.10: 二つの場合

[第一の解答 (Fig.1(in Figure 9.10))]. Fig.1 において, 弦 l の座標表示を長方形 $\Omega_1 \equiv$

$\{(\alpha,\beta) \mid 0<\alpha\le 2\pi,\ 0<\beta\le\pi/2(\text{radian})\}$ 内の点 (α,β) で表す．すなわち、次の同一視を考える．

$$\Omega(=\text{弦全体の集合}) \ni l_{(\alpha,\beta)} \underset{\text{同一視}}{\longleftrightarrow} (\alpha,\beta) \in \Omega_1(\subset \mathbb{R}^2).$$

したがって、自然な確率測度 ν_1 $(\in \mathcal{M}_{+1}(\Omega_1))$ を次のように定めることができる：

$$\nu_1(A) = \frac{\text{Meas}[A]}{\text{Meas}[\Omega_1]} = \frac{\text{Meas}[A]}{\pi^2} \qquad (\forall A \in \mathcal{B}_{\Omega_1})$$

ここに、“Meas” はルベーグ測度．確率測度 ν_1 $(\in \mathcal{M}_{+1}(\Omega_1))$ を Ω へ移して，確率測度 ρ_1 $(\in \mathcal{M}_{+1}(\Omega_1))$ を定める．すなわち，

$$\mathcal{M}_{+1}(\Omega) \ni \rho_1 \underset{\text{同一視}}{\longleftrightarrow} \nu_1 \in \mathcal{M}_{+1}(\Omega_1)$$

ここで、

($\sharp$) 確率測度 ρ_1 $(\in \mathcal{M}_{+1}(\Omega))$ は、不変な (すなわち、回転写像 $T^{\theta}_{\text{rot}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $(0 \le \theta < 2\pi)$ と裏返し写像 $T_{\text{rev}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ に関して、不変な) 測度である．

したがって、この ($\sharp$) の意味で、

「自然」な精密混合測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega,m)}(\mathsf{O}_E \equiv (\Omega, \mathcal{B}_\Omega, F_E), S_{[*]}(\rho_1))$

を得る．次の同一視：

$$\Omega \supseteq \Xi_{\sqrt{3}} \underset{\text{identification}}{\longleftrightarrow} \{(\alpha,\beta)\in\Omega_1 \ : \ \text{“弦 } l_{(\alpha,\beta)} \text{の長さ”} < \sqrt{3}\} \subseteq \Omega_1$$

の下に、言語ルール $^{(\text{m})}$ 1 の主張は、

- 測定値が $\Xi_{\sqrt{3}}$ に属する確率は

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega [F_E(\Xi_{\sqrt{3}})](\omega)\ \rho_1(d\omega) = \int_{\Xi_{\sqrt{3}}} 1 \ \ \rho_1(d\omega)\\
=&m_1(\{l_{(\alpha,\beta)} \approx (\alpha,\beta)\in\Omega_1 \mid \ \text{“the length of } l_{(\alpha,\beta)}\text{”} \le \sqrt{3}\})\\
=&\frac{\text{Meas}[\{(\alpha,\beta) \mid 0\le\alpha\le 2\pi,\ \pi/6 \le \beta \le \pi/2\}]}{\text{Meas}[\{(\alpha,\beta) \mid 0\le\alpha\le 2\pi,\ 0 \le \beta \le \pi/2\}]}\\
=&\frac{2\pi \times (\pi/3)}{\pi^2} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

となる．

[第二の解答　(Fig.2(in Figure 9.10))]. Fig.2 において, 弦 l の座標表示を円盤 $\Omega_2 \equiv \{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$ 内の点 (α,β) で表す. すなわち、次の同一視を考える.

$$\Omega(= \text{the set of all chords}) \ni l_{(x,y)} \underset{\text{同一視}}{\longleftrightarrow} (x,y) \in \Omega_2 (\subset \mathbb{R}^2).$$

したがって、自然な確率測度 ν_2 $(\in \mathcal{M}_{+1}(\Omega_2))$ を、次のように定めることができる.

$$\nu_2(A) = \frac{\text{Meas}[A]}{\text{Meas}[\Omega_2]} = \frac{\text{Meas}[A]}{\pi} \quad (\forall A \in \mathcal{B}_{\Omega_2})$$

確率測度 ν_2 $(\in \mathcal{M}_{+1}(\Omega_2))$ を Ω 上の確率測度 ρ_2 に移して、すなわち、

$$\mathcal{M}_{+1}(\Omega) \ni \rho_2 \underset{\text{同一視}}{\longleftrightarrow} \nu_2 \in \mathcal{M}_{+1}(\Omega_2)$$

とする. ここで、

($\sharp$) 確率測度 ρ_2　$(\in \mathcal{M}_{+1}(\Omega))$ は、不変な (すなわち、回転写像 $T^\theta_{\text{rot}}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $(0 \le \theta < 2\pi)$ と裏返し写像 $T_{\text{rev}}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ に関して、不変な) 測度である.

したがって、この ($\sharp$) の意味で、

「自然」な精密混合測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega,m)}(\mathsf{O}_E \equiv (\Omega, \mathcal{B}_\Omega, F_E), S_{[*]}(\rho_2))$

を得る. 次の同一視：

$$\Omega \supseteq \Xi_{\sqrt{3}} \underset{\text{同一視}}{\longleftrightarrow} \quad \{(x,y) \in \Omega_2 \ : \ \text{“the length of } l_{(\alpha,\beta)}\text{”} < \sqrt{3}\} \subseteq \Omega_1$$

の下に、言語ルール $^{(\text{m})}$ 1 の主張は、

- 測定値が $\Xi_{\sqrt{3}}$ に属する確率は

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega [F_E(\Xi_{\sqrt{3}})](\omega)\ \rho_2(d\omega) = \int_{\Xi_{\sqrt{3}}} 1 \ \ \rho_2(d\omega) \\
=&\nu_2(\{l_{(x,y)} \approx (x,y) \in \Omega_2 \mid \ \text{“the length of } l_{(x,y)}\text{”} \le \sqrt{3}\}) \\
=&\frac{\text{Meas}[\{(x,y) \mid 1/4 \le x^2+y^2 \le 1\}]}{\pi} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

  となる.

したがって、以下のように結論付けることができる.

結論 7.29. 自然な確率測度 (すなわち、回転写像 $T^\theta_{\text{rot}}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $(0 \le \theta < 2\pi)$ と裏返し写像 $T_{\text{rev}}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ に関して、不変な確率測度) を「ランダム (とか、無作為)」と見なす習慣があ

るとしても、第一の解答と第二の解答によって、次が言える.

(♯)　**問題 7.28 の「一意性」は否定される.**

というより、

(♯)　**問題 7.27 は、「測定」が明示されていないので、「測定無くして、確率無し」なのだから、問題として成立していない.**