Title	第6講：実践論理：三段論法を信じますか?
Sub Title	
Author	石川, 史郎(Ishikawa, Shiro)
Publisher	
Publication year	2018
Jtitle	コペンハーゲン解釈; 量子哲学 (2018. 3) ,p.209- 236
JaLC DOI	
Abstract	
Notes	慶應義塾大学理工学部大学院講義ノート(Web版)
Genre	Book
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KO52003002-00000000-0209

第 6 講

実践論理–三段論法を信じますか？–

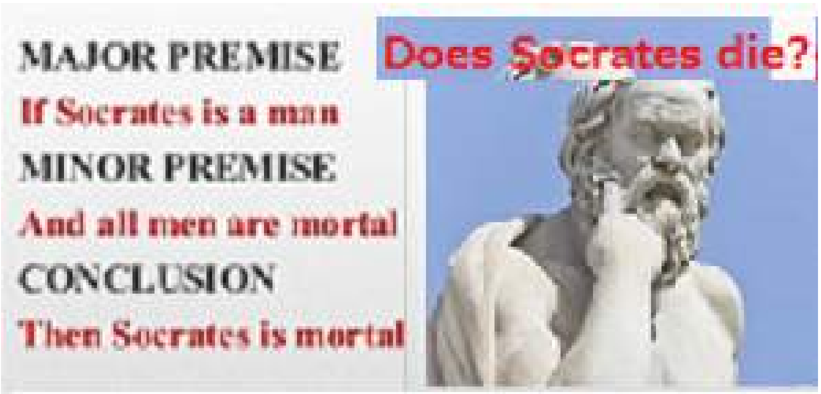
「三段論法」として，よく引き合いに出されるのが，次の文言である：

($\sharp_1$) ソクラテスは人間であり，且つ，人間は死ぬ．
故に，ソクラテスは死ぬ．

しかし，アリストテレスによるとされているこの例 ($\sharp_1$) は，世界記述の観点からみれば，素直に受け入れることはできない．なぜならば，

如何なる世界記述法の下で，文言 ($\sharp_1$) が記述されいるか？

が明示されていないからで，それならば，文言 ($\sharp_1$) は「科学的命題」ではなくて，「日常言語的命題」になってしまうからである．



本章では，日常言語で表現された文言 ($\sharp_1$) を測定理論 (=量子言語) で記述することを考える．すなわち，

($\sharp_2$) 量子言語で（つまり, 量子言語の言葉遣いで），

($\flat$) ソクラテスは人間であり，且つ，人間は死ぬ．
故に，ソクラテスは死ぬ．

を述べることが可能か？　否か？

を, 議論する．結論的には,

($\sharp_3$) **三段論法 ($\flat$) は, 古典系では OK で, 量子系では NG**

を示す[*1]

我々は「記号論理学」には関わらない．記号論理学は純粋数学の一分野であるが、ほとんどの数学者は記号論理学を知っているわけではない．記号論理学は、文学部哲学科に最も遠いところに位置する学問だと著者は思っている．文学部哲学科の学生がゲーデルの不完全性定理について質問してきたことがあったが、論理という言葉になぜか強いこだわりを持っているようだった．

6.1　擬積観測量と辺観測量

いろいろな動物の生態を観察すれば，明らかなことであるが，言語のベースは，「威嚇・連帯・生殖」を起源とするはずで，言語は，人類が「明日まで命を繋ぐ」ために必死に考え出した

- 生存・繁殖のための最強の武器

であった．そういう時代が，何百万年も続いたのだと思う．もちろん，その間に，原始的な言語が,

「リズム, 歌」,「論理構造」,「数量概念」,「文法」,「時制」,「文字」、「人称」等、

を獲得して現代の日常言語に形成されてきたのだと思う．そうだとしても、日常言語の中に論理構造を見つけた驚きの象徴が、「アリストテレスの三段論法」として言い伝えられているのかもしれない．

♠ **サプリ 6.1.** ネット (たとえば、　wikipedia 等) で、「三段論法」を調べると、「大前提」とか「小前提」とか大袈裟なことが書いてあるが、ここでは次を (数学の) 三段論法として議論を進める
- $[[A \Rightarrow B] \wedge [B \Rightarrow C]] \Rightarrow [A \Rightarrow C]$

数学サイドからはこれだけのことであるが、哲学サイドではいろいろと複雑なことがあるらしいが、「衒学的」な感じがして読む気がしない．「論理は重要」などと真顔で言える神経が著者にはわから

[*1] この章ほとんどの議論は以下の文献から抜粋した．
文献 [25]: S. Ishikawa, "Fuzzy Inferences by Algebraic Method," Fuzzy Sets and Systems, Vol. 87, No. 2, 1997, pp. 181-200. doi:10.1016/S0165-0114(96)00035-8
文献 [30]: S. Ishikawa, "Mathematical Foundations of Measurement Theory," Keio University Press Inc. 335pages, 2006.

ない．

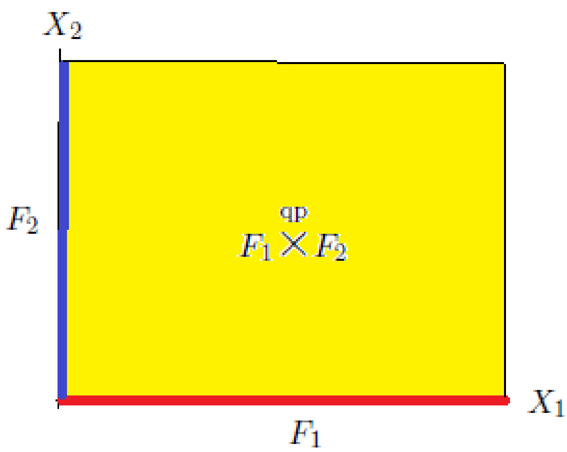
6.1.1 準備

本章の目的は，実践論理—測定理論 (=量子言語) という言語の中の論理—を考えることである．

基本構造 $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}} \subseteq B(H)]$ を考える． さて，同時観測量 (定義 3.12) を思い出そう．各 $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して，W^*-代数 $\overline{\mathcal{A}}$ 内の観測量 $\mathsf{O}_k = (X_k, \mathcal{F}_k, F_k)$ を考える． これらの観測量が可換ならば，同時観測量 $\widehat{\mathsf{O}} = (\times_{k=1}^n X_k, \boxtimes_{k=1}^n \mathcal{F}_k, \widehat{F})$ を次のように定義できた：

$$
\widehat{F}(\Xi_1 \times \Xi_2 \times \cdots \times \Xi_n) = F_1(\Xi_1) F_2(\Xi_2) \cdots F_n(\Xi_n) \qquad (\forall \Xi_k \in \mathcal{F}_k, \forall k = 1, 2, \ldots, n) \tag{6.1}
$$

次の定義は同時観測量の一般化である．



定義 6.1. [(=定義 3.19):擬積観測量] 基本構造 $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}} \subseteq B(H)]$ を考える． $\overline{\mathcal{A}}$ 内の観測量 $\mathsf{O}_{12\ldots n} = (\times_{k=1}^n X_k, \boxtimes_{k=1}^n \mathcal{F}_k, F_{12\ldots n})$ は次を満たすとする:

$$
F_{12\ldots n}(X_1 \times \cdots \times X_{k-1} \times \Xi_k \times X_{k+1} \times \cdots \times X_n) = F_k(\Xi_k) \qquad (\forall \Xi_k \in \mathcal{F}_k, \forall k = 1, 2, \ldots, n)
$$

このとき，観測量 $\mathsf{O}_{12\ldots n} = (\times_{k=1}^n X_k, \boxtimes_{k=1}^n \mathcal{F}_k, F_{12\ldots n})$ は $\{\mathsf{O}_k \mid k = 1, 2, \ldots, n\}$ の擬積観測量と呼ばれ，次のように記される：

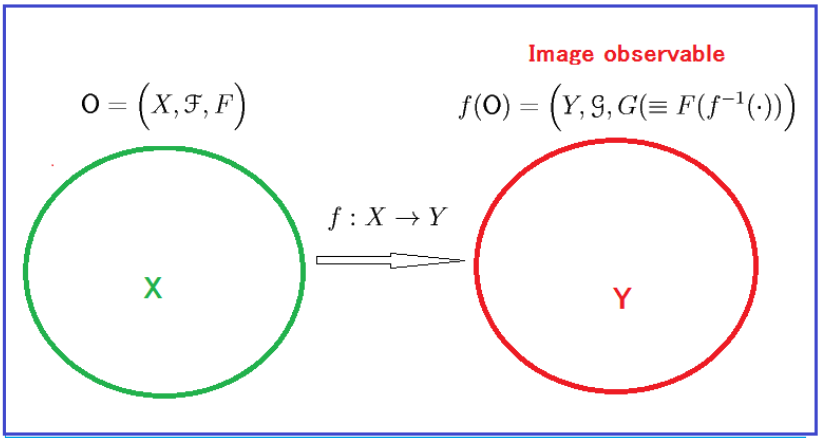
$$
\mathop{\times}_{k=1,2,\ldots,n}^{\mathrm{qp}} \mathsf{O}_k = (\mathop{\times}_{k=1}^{n} X_k, \boxtimes_{k=1}^n \mathcal{F}_k, \mathop{\times}_{k=1,2,\ldots,n}^{\mathrm{qp}} F_k)
$$

もちろん，同時観測量も擬積観測量の一種で，したがって，擬積観測量は，一般には存在するとは限らないし，また存在したとしても一般には一意に決まらない．

もちろん, 古典系の基本構造 $[C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega) \subseteq B(L^2(\Omega))]$ の場合は, 必ず同時観測量が存在する．

定義 6.2. [像観測量] 基本構造 $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}} \subseteq B(H)]$ 内の観測量 $\mathsf{O} = (X, \mathcal{F}, F)$ を考える．$(Y, \mathcal{G})$ を可測空間として, 可測写像 $f : X \to Y$ を考える．このとき,$\overline{\mathcal{A}}$ 内の**像観測量** $f(\mathsf{O}) = (Y, \mathcal{G}, F \circ f^{-1})$ を次のように定める．

$$(F \circ f^{-1})(\Gamma) = F(f^{-1}(\Gamma)) \qquad (\forall \Gamma \in \mathcal{G}).$$



[辺観測量]　基本構造 $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}} \subseteq B(H)]$ 内の観測量 $\mathsf{O}_{12\ldots n} = (\times_{k=1}^n X_k, \boxtimes_{k=1}^n \mathcal{F}_k, F_{12\ldots n})$ を考える．$1 \leqq j \leqq n$ である j に対して,

$$F_{12\ldots n}^{(j)}(\Xi_j) = F_{12\ldots n}(X_1 \times \cdots \times X_{j-1} \times \Xi_j \times X_{j+1} \times \cdots \times X_n) \\ (\forall \Xi_j \in \mathcal{F}_j)$$

により，$F_{12\ldots n}^{(j)}$ を定める．このとき，$\mathsf{O}_{12\ldots n}^{(j)} = (X_j, \mathcal{F}_j, F_{12\ldots n}^{(j)})$ は $\overline{\mathcal{A}}$ 内の観測量になる．この $\mathsf{O}_{12\ldots n}^{(j)}$ を $\mathsf{O}_{12\ldots n}$ の**辺観測量** (正確には，(j)-辺観測量) と呼ぶ．これは，一般化できる．たとえば，$\mathsf{O}_{12\ldots n}^{(12)} = (X_1 \times X_2, \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2, F_{12\ldots n}^{(12)})$ を，

$$F_{12\ldots n}^{(12)}(\Xi_1 \times \Xi_2) = F_{12\ldots n}^{(12)}(\Xi_1 \times \Xi_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n) \\ (\forall \Xi_1 \in \mathcal{F}_1, \forall \Xi_2 \in \mathcal{F}_2)$$

と定めれば，$\mathsf{O}_{12\ldots n}^{(12)} = (X_1 \times X_2, \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2, F_{12\ldots n}^{(12)})$ は辺観測量 (「面観測量」というべきかもしれないが) となる．したがって，もちろん，$F_{12\ldots n} = F_{12\ldots n}^{(12\ldots n)}$ である．

////

以下の定理は, しばしば使われる.

定理 6.3. 基本構造 $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}} \subseteq B(H)]$ を考える. $\overline{\mathcal{A}}$ 内の観測量 $\mathsf{O}_1 = (X_1, \mathcal{F}_1, F_1)$ と射影観測量 $\mathsf{O}_1 = (X_2, \mathcal{F}_2, F_2)$ を考える. このとき, 次の (A_1) と (A_2) は同値である.

(A_1) O_1 と O_2 は可換, すなわち,

$$F_1(\Xi_1)F_2(\Xi_2) = F_2(\Xi_2)F_1(\Xi_1) \qquad (\forall \Xi_1 \in \mathcal{F}_1, \forall \Xi_2 \in \mathcal{F}_2)$$

(A_2) 次を満たす $\overline{\mathcal{A}}$ 内の観測量 O_{12} $=(X_1 \times X_2, \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2, F_{12})$ が存在する.

$$\mathsf{O}_{12}^{(1)} = \mathsf{O}_1, \qquad \mathsf{O}_{12}^{(2)} = \mathsf{O}_2$$

また, このとき, O_{12} は一意に決まる.

証明: 証明は, 文献 [12, 25, 30] を見よ.

6.2 擬積観測量の制約条件

測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}_{12}{=}(X_1 \times X_2, \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2, F_{12}), S_{[\rho]})$ は，サンプル空間 $(X_1 \times X_2, \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2, {}_{\mathcal{A}^*}\big(\rho, F_{12}(\cdot)\big)_{\overline{\mathcal{A}}})$ を持つとする． このサンプル空間の別表現を, 以下のように表現する.

$$
\mathrm{Rep}_\rho^{\Xi_1 \times \Xi_2}[\mathsf{O}_{12}] = \begin{bmatrix} {}_{\mathcal{A}^*}\big(\rho, F_{12}(\Xi_1 \times \Xi_2)\big)_{\overline{\mathcal{A}}} & {}_{\mathcal{A}^*}\big(\rho, F_{12}(\Xi_1 \times \Xi_2^c)\big)_{\overline{\mathcal{A}}} \\ {}_{\mathcal{A}^*}\big(\rho, F_{12}(\Xi_1^c \times \Xi_2)\big)_{\overline{\mathcal{A}}} & {}_{\mathcal{A}^*}\big(\rho, F_{12}(\Xi_1^c \times \Xi_2^c)\big)_{\overline{\mathcal{A}}} \end{bmatrix}
$$
$$
(\forall \Xi_1 \in \mathcal{F}_1, \forall \Xi_2 \in \mathcal{F}_2)
$$

と表す．ここに，Ξ^c は Ξ の補集合 $\{x \in X \mid x \notin \Xi\}$ とする．また，

$$
\begin{aligned}
&{}_{\mathcal{A}^*}\big(\rho, F_{12}(\Xi_1 \times \Xi_2)\big)_{\overline{\mathcal{A}}} + {}_{\mathcal{A}^*}\big(\rho, F_{12}(\Xi_1 \times \Xi_2^c)\big)_{\overline{\mathcal{A}}} = {}_{\mathcal{A}^*}\big(\rho, F_{12}^{(1)}](\Xi_1)\big)_{\overline{\mathcal{A}}} \\
&{}_{\mathcal{A}^*}\big(\rho, F_{12}(\Xi_1^c \times \Xi_2^c)\big)_{\overline{\mathcal{A}}} + {}_{\mathcal{A}^*}\big(\rho, F_{12}(\Xi_1^c \times \Xi_2)\big)_{\overline{\mathcal{A}}} = {}_{\mathcal{A}^*}\big(\rho, F_{12}^{(1)}(\Xi_1^c)\big)_{\overline{\mathcal{A}}} \\
&{}_{\mathcal{A}^*}\big(\rho, F_{12}(\Xi_1^c \times \Xi_2^c)\big)_{\overline{\mathcal{A}}} + {}_{\mathcal{A}^*}\big(\rho, F_{12}(\Xi_1 \times \Xi_2^c)\big)_{\overline{\mathcal{A}}} = {}_{\mathcal{A}^*}\big(\rho, F_{12}^{(2)}(\Xi_2^c)\big)_{\overline{\mathcal{A}}} \\
&{}_{\mathcal{A}^*}\big(\rho, F_{12}(\Xi_1 \times \Xi_2^c)\big)_{\overline{\mathcal{A}}} + {}_{\mathcal{A}^*}\big(\rho, F_{12}(\Xi_1^c \times \Xi_2^c)\big)_{\overline{\mathcal{A}}} = {}_{\mathcal{A}^*}\big(\rho, F_{12}^{(2)}(\Xi_2^c)\big)_{\overline{\mathcal{A}}}
\end{aligned}
$$

に注意せよ．

次の補題で，擬積観測量が満たすべき条件を示す．

補題 6.4. [擬積観測量の制約条件]　基本構造 $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}} \subseteq B(H)]$ を考える． $\mathsf{O}_1 = (X_1, \mathcal{F}_1, F_1)$ と $\mathsf{O}_2 = (X_2, \mathcal{F}_2, F_2)$ を $\overline{\mathcal{A}}$ 内の観測量とする．$\mathsf{O}_{12} = (X_1 \times X_2, \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2, F_{12}{=}F_1 \overset{\mathrm{qp}}{\times} F_2)$ を O_1 と O_2 の擬積観測量とする (存在は仮定する)．すなわち，

$$
F_1 = F_{12}^{(1)}, \qquad F_2 = F_{12}^{(2)}
$$

とする．測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}_{12}{=}(X_1 \times X_2, \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2, F_{12}), S_{[\rho]})$ は，サンプル空間 $(X_1 \times X_2, \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2, {}_{\mathcal{A}^*}\big(\rho, F_{12}(\cdot)\big)_{\overline{\mathcal{A}}})$ を持つとする． このとき，$\alpha_\rho^{\Xi_1 \times \Xi_2} = {}_{\mathcal{A}^*}\big(\rho, F_{12}(\Xi_1 \times \Xi_2)\big)_{\overline{\mathcal{A}}} = \rho(F_{12}(\Xi_1 \times \Xi_2))$ とおいて，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Rep}_\rho^{\Xi_1 \times \Xi_2}[\mathsf{O}_{12}] = \begin{bmatrix} {}_{\mathcal{A}^*}\big(\rho, F_{12}(\Xi_1 \times \Xi_2)\big)_{\overline{\mathcal{A}}} & {}_{\mathcal{A}^*}\big(\rho, F_{12}(\Xi_1 \times \Xi_2^c)\big)_{\overline{\mathcal{A}}} \\ {}_{\mathcal{A}^*}\big(\rho, F_{12}(\Xi_1^c \times \Xi_2)\big)_{\overline{\mathcal{A}}} & {}_{\mathcal{A}^*}\big(\rho, F_{12}(\Xi_1^c \times \Xi_2^c)\big)_{\overline{\mathcal{A}}} \end{bmatrix} \\
=&\begin{bmatrix} \alpha_\rho^{\Xi_1 \times \Xi_2} & \rho(F_1(\Xi_1)) - \alpha_\rho^{\Xi_1 \times \Xi_2} \\ \rho(F_2(\Xi_2)) - \alpha_\rho^{\Xi_1 \times \Xi_2} & 1 + \alpha_\rho^{\Xi_1 \times \Xi_2} - \rho(F_1(\Xi_1)) - \rho(F_2(\Xi_2)) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.2}
$$

かつ，次が成立する：

$$
\begin{aligned}
&\max\{0, \rho(F_1(\Xi_1))+\rho(F_2(\Xi_2))-1\} \leqq \alpha_\rho^{\Xi_1\times\Xi_2} \leqq \\
&\qquad\qquad \min\{\rho(F_1(\Xi_1)),\ \rho(F_2(\Xi_2))\} \\
&\qquad\qquad (\forall \Xi_1 \in \mathcal{F}_1, \forall \Xi_2 \in \mathcal{F}_2, \forall \rho \in \mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*))
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

また, 次が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
\rho(F(\Xi_1\times\Xi_2^c))=0 &\iff \alpha_\rho^{\Xi_1\times\Xi_2} = \rho(F_1(\Xi_1)) \\
&\Longrightarrow \rho(F_1(\Xi_1)) \leqq \rho(F_2(\Xi_2))
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

証明　証明は簡単であるが，念の為に以下に書く．$0 \leqq \ \rho(F((\Xi_1'\times\Xi_2'))) \ \leqq 1$，$(\forall \Xi_1' \in \mathcal{F}_1, \Xi_2' \in \mathcal{F}_2)$ であるから，(6.2) 式から，次を得る：

$$
\begin{aligned}
&0 \leqq \alpha_\rho^{\Xi_1\times\Xi_2} \leqq 1 \\
&0 \leqq 1+\alpha_\rho^{\Xi_1\times\Xi_2} - \rho(F_1(\Xi_1)) - \rho(F_2(\Xi_2)) \leqq 1 \\
&0 \leqq \rho(F_2(\Xi_2)) - \alpha_\rho^{\Xi_1\times\Xi_2} \leqq 1 \\
&0 \leqq \rho(F_1(\Xi_1)) - \alpha_\rho^{\Xi_1\times\Xi_2} \leqq 1
\end{aligned}
$$

これから，(6.3) は容易にわかる．逆に，もし $\alpha_\rho^{\Xi_1\times\Xi_2}$ が条件 (6.3) を満たすならば，(6.2) は直ちにわかる．また, (6.4) も自明である． □

さて，$\mathsf{O}_1=(X_1,\mathcal{F}_1,F_1)$ と $\mathsf{O}_2=(X_2,\mathcal{F}_2,F_2)$ を $\overline{\mathcal{A}}$ 内の観測量として，$\mathsf{O}_{12}=(X_1\times X_2, \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2, F_{12}{=}F_1 \overset{\mathrm{qp}}{\times} F_2)$ を O_1 と O_2 の擬積観測量とする．ここで，測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}_{12} {=} (X_1\times X_2, \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2, F_{12}{=}F_1 \overset{\mathrm{qp}}{\times} F_2), S_{[\rho]}))$ により，測定値 (x_1,x_2) $(\in X_1\times X_2)$ が得られたとする．このとき，$x_1\in\Xi_1$ であることを知ったとき，$x_2\in\Xi_2$ である確率 P (すなわち，**条件付き確率**) は

$$
P=\frac{\rho(F_{12}(\Xi_1\times\Xi_2))}{\rho(F_1(\Xi_1))} = \frac{\rho(F_{12}(\Xi_1\times\Xi_2))}{\rho(F_{12}(\Xi_1\times\Xi_2))+\rho(F_{12}(\Xi_1\times\Xi_2^c))}
$$

で与えられて，(6.3) により次のように評価される:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\max\{0, \rho(F_1(\Xi_1))+\rho(F_2(\Xi_2))-1\}}{\rho(F_{12}(\Xi_1\times\Xi_2))+\rho(F_{12}(\Xi_1\times\Xi_2^c))} \leqq P \leqq \\
&\qquad\qquad \frac{\min\{\rho(F_1(\Xi_1)),\ \rho(F_2(\Xi_2))\}}{\rho(F_{12}(\Xi_1\times\Xi_2))+\rho(F_{12}(\Xi_1\times\Xi_2^c))}
\end{aligned}
$$

例 6.5. [トマトの例]　$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots\omega_k,\ldots,\omega_K\}$ を K 個のトマトの集合とする．古典系の

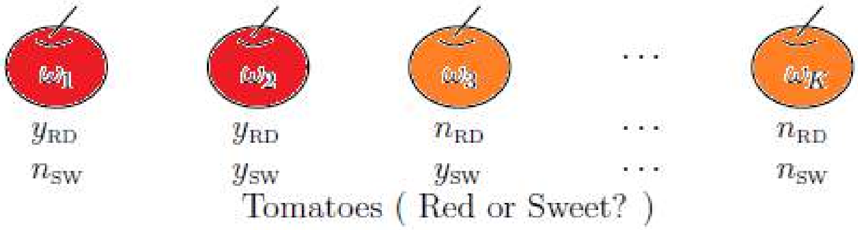


図 6.1　トマトは赤いか？　甘いか？

基本構造

$$[C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega,\nu) \subseteq B(L^2(\Omega,\nu))]$$

を設定する．　ここで，同一視「トマト $\omega_k \longleftrightarrow$ 状態 $\delta_{\omega_k} \approx \omega_k \in \Omega$ をもつトマト」を考える．$L^\infty(\Omega)$ 内の観測量 $\mathsf{O}_{赤} = (X_{赤}, 2^{X_{赤}}, F_{赤})$ と $\mathsf{O}_{甘} = (X_{甘}, 2^{X_{甘}}, F_{甘})$ を考えよう．ここに，

$$X_{赤} = \{y_{赤}, n_{赤}\}, \qquad X_{甘} = \{y_{甘}, n_{甘}\}$$

で，"$y_{赤}$" と "$n_{赤}$" はそれぞれ "赤い" と "赤くない" を意味する．同様に，"$y_{甘}$" と "$n_{甘}$" はそれぞれ "甘い" と "甘くない" を意味するとしよう．たとえば，「トマト ω_1 は赤いけど甘くない」や「トマト ω_2 は赤くて，しかも甘い」などの文言を考える．

次の擬積観測量を考える：

$$\mathsf{O}_{12} = (X_{赤} \times X_{甘}, 2^{X_{赤} \times X_{甘}}, F{=}F_{赤} \overset{\rm qp}{\times} F_{甘})$$

すなわち，

$$\mathrm{Rep}_{\omega_k}^{\{(y_{赤},y_{甘})\}}[\mathsf{O}_{12}] = \begin{bmatrix} [F(\{(y_{赤}, y_{甘})\})](\omega_k) & [F(\{(y_{赤}, n_{甘})\})](\omega_k) \\ [F(\{(n_{赤}, y_{甘})\})](\omega_k) & [F(\{(n_{赤}, n_{甘})\})](\omega_k) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_{\omega_k}^{\{(y_{赤},y_{甘})\}} & [F_{赤}(\{y_{赤}\})] - \alpha_{\omega_k}^{\{(y_{赤},y_{甘})\}} \\ [F_{甘}(\{y_{甘}\})] - \alpha_{\omega_k}^{\{(y_{赤},y_{甘})\}} & 1 + \alpha_{\omega_k}^{\{(y_{赤},y_{甘})\}} - [F_{赤}(\{y_{赤}\})] - [F_{甘}(\{y_{甘}\})] \end{bmatrix}$$

ここに，$\alpha_{\omega_k}^{\{(y_{赤},y_{甘})\}}(\omega_k)$ は (6.3) を満たす．したがって，トマト ω_k が「赤い」とわかったとき，そのトマト ω_k が「甘い」ことがわかる確率 P は

$$P = \frac{[F(\{(y_{赤}, y_{甘})\})](\omega_k)}{[F(\{(y_{赤}, y_{甘})\})](\omega_k) + [F(\{(y_{赤}, n_{甘})\})](\omega_k)} = \frac{[F(\{(y_{赤}, y_{甘})\})](\omega_k)}{[F_{赤}(\{y_{赤}\})](\omega_k)}$$

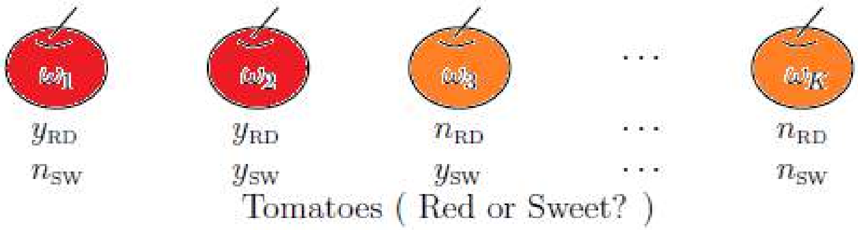
であり，$[F(\{(y_{赤}, y_{甘})\})](\omega_k) = \alpha^{\{(y_{赤},y_{甘})\}}(\omega_k)$ であるから，条件付確率 P の評価：

$$\frac{\max\{0, [F_1(\{y_{赤}\})](\omega_k) + [F_2(\{y_{甘}\})](\omega_k) - 1\}}{[F_{赤}(\{y_{赤}\})](\omega_k)} \leqq P \leqq$$

$$\frac{\min[F_1(\{y_{甘}\})](\omega_k),\ [F_2(\{y_{甘}\})](\omega_k)\}}{[F_{赤}(\{y_{赤}\})](\omega_k)}$$

を得る.

6.3 含意—「ならば」の定義



6.3.1 含意と対偶

例 6.5 の続きとして，特に，$[F(\{(y_{赤}, n_{甘})\})](\omega) = 0$ の場合を考える．この場合，

$$\frac{[F(\{(y_{赤}, y_{甘})\})](\omega)}{[F(\{(y_{赤}, y_{甘})\})](\omega) + [F(\{(y_{赤}, n_{甘})\})](\omega)} = 1$$

であるから，トマト ω が「赤い」とわかったとき，そのトマト ω が「甘い」ことがわかる確率は 1 となる．すなわち，

$$\text{“}[F(\{(y_{赤}, n_{甘})\})](\omega) = 0\text{”} \quad \Longleftrightarrow \quad \Big[\text{“赤い”} \Longrightarrow \text{“甘い”}\Big]$$

である．

上の議論から，次の定義「含意 $(\Rightarrow)$」(すなわち，「測定理論的含意」,「二元論的含意」) を得る：

定義 6.6. [含意]　基本構造

$$[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}} \subseteq B(H)]$$

内で考える． $\mathsf{O}_{12} = (X_1 \times X_2, \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2, F_{12} {=} F_1 \overset{\mathrm{qp}}{\times} F_2)$ を $\overline{\mathcal{A}}$ 内の観測量とする．$\rho \in \mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*)$, $\Xi_1 \in \mathcal{F}_1$，$\Xi_2 \in \mathcal{F}_2$ とする．ここで，

$$\rho(F_{12}(\Xi_1 \times (\Xi_2^c))) = 0$$

が成立するとき，

$$[\mathsf{O}_{12}^{(1)}; \Xi_1] \underset{\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}_{12}, S_{[\rho]})}{\Longrightarrow} [\mathsf{O}_{12}^{(2)}; \Xi_2] \tag{6.5}$$

と書く．

もちろん，これを，

(A) 測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}_{12}, S_{[\rho]})$ により，測定値 $(x_1, x_2)(\in X_1 \times X_2)$ が得られたとする．このとき，$x_1 \in \Xi_1$ ならば $x_2 \in \Xi_2$ である．

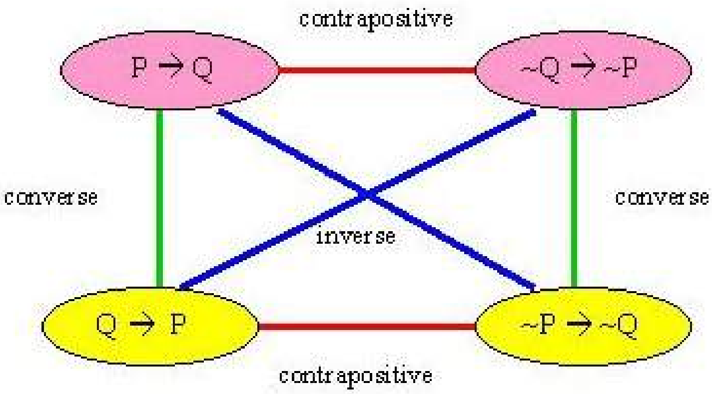
と読む．これは次のように一般化できる．基本構造 $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}} \subseteq B(H)]$ 内の観測量 $\mathsf{O}_{12\ldots n} = (\times_{k=1}^n X_k,\ \boxtimes_{k=1}^n \mathcal{F}_k,\ F_{12\ldots n} = \overset{\mathrm{qp}}{\underset{k=1,2,\ldots,n}{\times}} F_k)$ を考える．また，$\rho \in \mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*)$, $\Xi_i \in \mathcal{F}_i$，$\Xi_j \in \mathcal{F}_j$ として $(1 \leqq i, j \leqq n)$，ここで，

$$
{}_{\mathcal{A}^*}\big(\rho, F_{12\ldots n}^{(ij)}(\Xi_i \times (\Xi_j^c))\big)_{\overline{\mathcal{A}}} = 0
$$

(ここに，Ξ^c は Ξ の補集合) が成立するとき，

$$
[\mathsf{O}_{12\ldots n}^{(i)}; \Xi_i] \underset{\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}_{12\ldots n}, S_{[\rho]})}{\Longrightarrow} [\mathsf{O}_{12\ldots n}^{(j)}; \Xi_j] \tag{6.6}
$$

と書く．



////

定理 6.7. [対偶]　$\mathsf{O}_{12} = (X_1 \times X_2, \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2, F_{12} = F_1 \overset{\mathrm{qp}}{\times} F_2)$ を $\overline{\mathcal{A}}$ 内の観測量とする．$\rho \in \mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*)$ とする．$\Xi_1 \in \mathcal{F}_1$ と $\Xi_2 \in \mathcal{F}_2$ を考える．このとき，

$$
[\mathsf{O}_{12}^{(1)}; \Xi_1] \underset{\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}_{12}, S_{[\rho]})}{\Longrightarrow} [\mathsf{O}_{12}^{(2)}; \Xi_2] \tag{6.7}
$$

ならば，

$$
[\mathsf{O}_{12}^{(1)}; \Xi_1^c] \underset{\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}_{12}, S_{[\rho]})}{\Longleftarrow} [\mathsf{O}_{12}^{(2)}; \Xi_2^c]
$$

証明　証明は自明であるが，念の為，証明を加える．条件 (6.7) を仮定しよう．すなわち，

$$ {}_{\mathcal{A}^*}\big(\rho, F_{12}(\Xi_1 \times (X_2 \setminus \Xi_2))\big)_{\overline{\mathcal{A}}} = 0 $$

ここで，$\Xi_1 \times {\Xi_2}^c = (\Xi_1^c)^c \times \Xi_2^c$ だから，

$$ {}_{\mathcal{A}^*}\big(\rho, F_{12}((\Xi_1^c)^c \times \Xi_2^c)\big)_{\overline{\mathcal{A}}} = 0 $$

よって，

$$ [\mathsf{O}_{12}^{(1)}; \Xi_1^c] \underset{\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}_{12}, S_{[\rho]})}{\Longleftarrow} [\mathsf{O}_{12}^{(2)}; \Xi_2^c] $$

を得る．　□

6.3.2　怒られないと勉強しない

記号論理と実践論理 (統計学の一種) が混同される恐れがあるので、以下に多少のことを注意しておこう．挑発的に言えば、記号論理は数学を作るためにある．したがって、数学が出来上がってしまえば、記号論理は不要になる．高校程度の数学の実力があれば、それ以上の記号論理を学ぶ必要はない．著者の記号論理の実力もその程度である．記号論理学 (ゲーデルの不完全性定理、様相論理、量子論理等) は趣味としては面白いし、高尚な気分にさせてくれる分野であるが、世界記述法 (本講ではこれを哲学とした) とは一切関係しない．

記号論理が精密な議論をする上で不可欠などと思っているのは、一部の哲学者だけだと思う．理系は (さらに数学科ですら) 論理学など勉強しない．一部の哲学者以外の大部分は、精密な議論をする上で不可欠なのは統計学と思っているはずである．真偽 [0 と 1] の 2 値論理より実数値を扱う統計学の方が精密な議論ができるのは当然で、

統計学 (≈ 量子言語)=現代の論理学

である．世界記述法のもとに、議論すべきで、[統計学 ≈ 量子言語] の意味で、統計学は世界記述法である．一方、論理は世界記述法 (ニュートン力学、量子力学、統計学等) ではない．誰だって、「統計学と様相論理では、月とスッポン」と思うだろう事実、統計学は (理系、文系を問わず) 大学の講義の中では最重要科目の一つであるが、様相論理は一般的ではない．

原理的な順序は次のようになる：

- [記号論理] から、[数学] を作って、さらにその [数学] を使って [世界記述法] を作り上げる

であるから、記号論理と世界記述法はかなり遠い位置関係と言える．

本節の実践論理は「統計学の一種 (正確には、量子言語という世界記述法の中の一分野)」に位置していて、統計学 (≈ 量子言語) でラフな議論をするときに使われる．したがって、実戦論理と

記号論理は無関係である．

日常的な出来事に「論理」が機能しているように思うかもしれない．たとえば、

- 明日は高気圧が日本列島全体に張り込み、全国的に晴れる．行楽地は家族連れで賑わうだろう
- 犯行に使われたナイフから、被告人の指紋が検出されていない．よって、被告人は無罪だろう．

等である．しかし、これらは記号論理とは関係しないことで、経験則の連鎖 (とか実践論理とか統計学) と理解した方がよい．統計学と思わずに、厳密な論理だと思えば、「風が吹けば、桶屋が儲かる」のような間違った結論に陥ってしまう．もちろん、「論理」と見なせばシンプルに理解できるというメリットもあり、「論理」だと見なしても注意深く推論すれば、誤りを避けることができるが、特に時間経過を含む現象を論理として扱うときは細心の注意が必要である：たとえば、

- 「怒られないと勉強しない」の対偶を述べよ

などは、注意が必要である．

6.4 コギト命題「我思う．故に我あり」を疑う

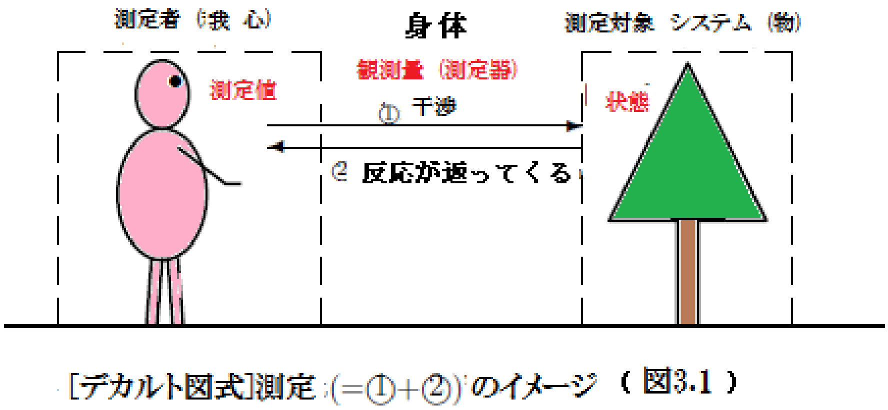


図 6.2　デカルト図式：測定のイメージ図 (図 3.1 の再掲, (*cf.* [32]))

以下の例は，すこし不自然かもしれないが，「二元論」の理解のためには欠かせない．

例 6.8. [脳死 (*cf.* 文献 [39] の 89 ページ)]　古典系の基本構造

$$[C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega,\nu) \subseteq B(L^2(\Omega,\nu))]$$

を設定する． 太郎君を測定対象とする．太郎君の状態を ω_1, ω_2,. . . ,ω_N のいずれかとする．すなわち，状態空間を $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$ とする．$\mathsf{O}_{12} = (X_1 \times X_2,\ 2^{X_1 \times X_2},\ F_{12}{=}F_1 \overset{\text{qp}}{\times} F_2)$ を $L^\infty(\Omega)$ 内の観測量とする．ここに，$X_1 = \{$ 思, $\overline{\text{思}}\}$，$X_2 = \{$ 生, $\overline{\text{生}}\}$ とする．もちろん，「思」＝「思う」，「$\overline{\text{思}}$」＝「思わない」等とする．また，任意の状態 ω_n $(n = 1, 2, \ldots, N)$ に対して，表 6.1 を満たすとする．

[表 6.1]: 脳死観測量 $\mathsf{O}_{12} = (X_1 \times X_2,\ 2^{X_1 \times X_2},\ F_{12})$

$F_1 \diagdown F_2$	$\rho(F_2(\{\text{生}\}))(\omega_n)$	$\rho(F_2(\{\overline{\text{生}}\}))(\omega_n)$
$\rho(F_1(\{\text{思}\}))(\omega_n)$	$(1 + (-1)^n)/2$ $(=[F_{12}(\{\text{思}\}\times\{\text{生}\})](\omega_n))$	0 $(=[F_{12}(\{\text{思}\}\times\{\overline{\text{生}}\})](\omega_n))$
$\rho(F_1(\{\overline{\text{思}}\}))(\omega_n)$	0 $(=[F_{12}(\{\overline{\text{思}}\}\times\{\text{生}\})](\omega_n))$	$(1 - (-1)^n)/2$ $(=[F_{12}(\{\overline{\text{思}}\}\times\{\overline{\text{生}}\})](\omega_n))$

このとき，明らかに，次が成立する:

$$[\mathsf{O}_{12}^{(1)};\{\text{思}\}] \underset{\mathsf{M}_{C(\Omega)}(\mathsf{O}_{12},S_{[\omega_n]})}{\Longleftrightarrow} [\mathsf{O}_{12}^{(2)};\{\text{生}\}]$$

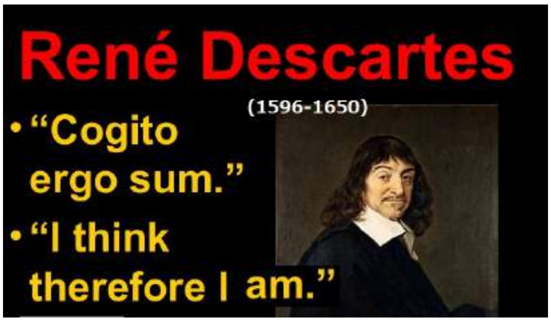
もちろん，これを，

(A_1) 太郎君が「思って」いることがわかれば,「生きて」いることがわかる．逆に,「生きて」いることがわかれば,「思って」いることがわかる.

と読む．すなわち,「脳死」のことを言っていると思ってよい.

上の (A_1) と次の「デカルト命題 (コギト命題)(A_2)」とを混同してはならない.

(A_2)　　“我考える, 故に、我あり”.



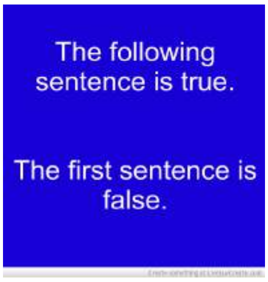
次の対応の下に、コギト命題 (A_2) は主張されている：

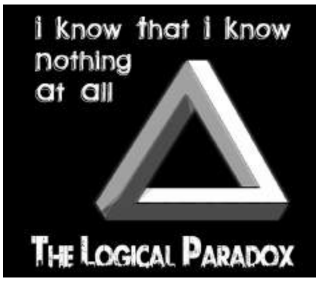
$$\text{測定者} \longleftrightarrow \text{我}, \qquad \text{システム} \longleftrightarrow \text{我}$$

このように、「測定者 (=我=一人称)」と「測定対象（=システム)」が分離されていないので (すなわち、 観客は舞台に上がってはならないので)、コギト命題 (A_2) は二元論の命題（=量子言語の命題）ではない．図 6.2(i.e., 二元論) を提唱するするために (すなわち、「語り部=我」を確立するために), デカルトはあいまいなコギト命題 (A_2) からスタートした．次のような皮肉な言い方で、まとめると、

(B_1) 二元論的でないコギト命題 (A_2) によって、デカルトは二元論を提唱した.

と言える.





要するに、「我は『我思う、故に我あり』と思う」などという言葉遊びで興味を引き付けておいて、どさくさ紛れに

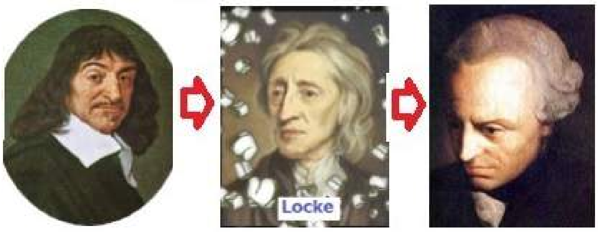
(B$_2$)「二元論」が哲学の主要テーマである

と宣言し、近代哲学の幕を開けた．

♠ **サプリ 6.2.** もちろん、デカルトの提案「二元論 (≒ 認識論)」が生産的だったかは、評価が分かれる．近代二元論の系譜：

- [デカルト]→[ロック]→[カント]

$\boxed{\text{デカルト}} \longrightarrow \boxed{\text{ロック}} \longrightarrow \boxed{\text{カント}}$



は科学的には不毛だったが、近代西洋哲学の隆盛をもたらした．本書の立場では、量子言語によって初めて、二元論の科学的成功が実現したと言える．

♠ **注釈 6.1.** この世界のすべての現象が測定理論 (=量子言語) で記述できるわけではないことは当然で，しかも，測定理論で記述できなくても重要なことなど幾らでもある．「書けそうで，書けないもの」としては，たとえば，

①： 時制—過去, 現在, 未来 —
②： ハイデガーの “世界内存在 (In-der-Welt-sein)”
③：測定の測定 (ウィグナーの友人),
④：ベルグソンの主観的時間
⑤： 測定者の時間,
⑥：「現在」だけが存在する (アウグスティヌス (354-430))
⑦：光速度不変の原理現在

等がある．ウィトゲンシュタインの言葉通り，すなわち，

The limits of my language mean the limits of my world

(私の言語の限界が、私の世界の限界)

とか

What we cannot speak about we must pass over in silence.
(語りえぬものには、沈黙しなければならない)

なのだから, ①–⑦の言葉を記述したければ, 量子言語とは別の言語を提案しなければならない. 事実、⑦を記述するためにアインシュタインは、相対性理論という言語を提案した.

6.5 結合観測量—測定は一回だけ—

本書の一貫した立場は,

(A) 量子言語で記述されていない文言を，量子言語で記述する

であったことを思い出そう．本節で述べる「実践三段論法」とは,「測定理論の中の三段論法」の意味である．「数学・記号論理の中の三段論法」や「日常言語の中での三段論法」は証明することではない．しかし,「実践三段論法」は定理であって，証明されなければならない．

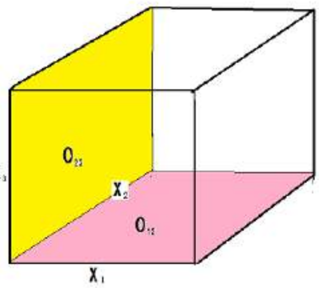
6.5.1 結合観測量—観測量は一つだけ

結合観測量の定義については、定義 4.17(4.5 節；ベルの不等式) 見よ．結合観測量は同時観測量や擬積観測量より基本的な観測量である．例 4.19 の「三段論法における結合観測量」も参考にせよ．

次の結合観測量の存在定理の必要性は，コペンハーゲン解釈の「測定は一回しかできない $\Rightarrow$ 観測量は一つだけ」を思い出せば了解できる思う．

定理 6.9. [古典系の結合観測量の存在定理 ($cf.$ 文献 [**25, 30**])] 古典系の基本構造

$$[C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega,\nu) \subseteq B(L^2(\Omega,\nu))]$$



内で, 観測量 O_{12}=$(X_1 \times X_2, \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2, F_{12})$ と O_{23}= $(X_2 \times X_3, \mathcal{F}_2 \boxtimes \mathcal{F}_3, F_{23})$ を考える．ただし，ここに X_i=$\{x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^{n_i}\}$ $(i = 1, 2, 3)$ は有限集合，$\mathcal{F}_i = 2^{X_i}$ とする．次を仮定する:

$$\mathsf{O}_{12}^{(2)} = \mathsf{O}_{23}^{(2)} \quad (\text{すなわち，} F_{12}(X_1 \times \Xi_2) = F_{23}(\Xi_2 \times X_3) \quad (\forall \Xi_2 \in 2^{X_2}))$$

このとき，次を満たす $L^\infty(\Omega)$ 内の観測量 O_{123}=$(X_1 \times X_2 \times X_3, \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2 \boxtimes \mathcal{F}_3, F_{123})$ が存在する:

$$\mathsf{O}_{123}^{(12)} = \mathsf{O}_{12}, \quad \mathsf{O}_{123}^{(23)} = \mathsf{O}_{23}$$

すなわち,

$$F_{123}^{(12)}(\Xi_1 \times \Xi_2 \times X_3) = F_{12}(\Xi_1 \times \Xi_2), \quad F_{123}^{(23)}(X_1 \times \Xi_2 \times \Xi_3) = F_{23}(\Xi_2 \times \Xi_3)$$
$$(\forall \Xi_1 \in \mathcal{F}_1, \forall \Xi_2 \in \mathcal{F}_2, \forall \Xi_3 \in \mathcal{F}_3)) \tag{6.8}$$

である．この O_{123} を O_{12} と O_{23} の結合観測量と呼ぶ.

////

証明　$X_1 \times X_2 \times X_3$ が有限集合の場合を考える．　$\mathsf{O}_{123} = (X_1 \times X_2 \times X_3, \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2 \boxtimes \mathcal{F}_3, F_{123})$ を，たとえば，次のように定義すればよい：

$$\rho(F_{123}(\{(x_1,x_2,x_3)\})](\omega) = \begin{cases} \dfrac{[F_{12}(\{(x_1,x_2)\})](\omega) \cdot [F_{23}(\{(x_2,x_3)\})](\omega)}{[F_{12}(X_1 \times \{x_2\})](\omega)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad ([F_{12}(X_1 \times \{x_2\})](\omega) \ne 0 \text{ のとき}) \\ 0 \qquad\qquad\qquad\quad ([F_{12}(X_1 \times \{x_2\})](\omega) = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$
$$(\forall \omega \in \Omega, \forall (x_1,x_2,x_3) \in X_1 \times X_2 \times X_3)$$

これが，(6.8) を満たすことは明らか．　□

反例 6.10. [反例]　上の定理は，量子系の基本構造

$[\mathcal{C}(H) \subseteq B(H) \subseteq B(H)]$

内では成立しない．これを確認するためには, ヒルベルト空間 $H = \mathbb{C}^n$ を考えて，三つの $(n \times n)$-エルミート行列 T_1, T_2, T_3 を

$$T_1T_2 = T_2T_1, \quad T_2T_3 = T_3T_2, \quad T_1T_3 \ne T_3T_1 \tag{6.9}$$

と選べばよい．　$X_k = \mathbb{R}, \mathcal{F}_k = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ $(k = 1,2,3)$ とおいて，エルミート行列 T_k のスペクトル分解を射影観測量 $\mathsf{O}_k = (X_k, \mathcal{F}_k, F_k)$ とする．　すなわち，

$$T_k = \int_{X_k} x_k F_k(dx_k) \tag{6.10}$$

とする．可換性から，二つの同時射影観測量

$$\mathsf{O}_{12}{=}\mathsf{O}_1 \times \mathsf{O}_2 = (X_1 \times X_2, \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2, F_{12} = F_1 \times F_2)$$

と

$$\mathsf{O}_{23}{=}\mathsf{O}_2 \times \mathsf{O}_3 = (X_2 \times X_3, \mathcal{F}_2 \boxtimes \mathcal{F}_3, F_{23} = F_2 \times F_3)$$

を考える．
当然

$$\mathsf{O}_{12}^{(2)} = \mathsf{O}_{23}^{(2)} \quad (\text{すなわち，} F_{12}(X_1 \times \Xi_2) = F_2(\Xi_2) = F_{23}(\Xi_2 \times X_3)$$
$$(\forall \Xi_2 \in \mathcal{F}_2))$$

が成り立つ． しかしながら，次を満たす $B(H)$ 内の観測量 O_{123}=$(X_1 \times X_2 \times X_3, \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2 \boxtimes \mathcal{F}_3, F_{123})$ が存在しない

$$\mathsf{O}_{123}^{(12)} = \mathsf{O}_{12}, \quad \mathsf{O}_{123}^{(23)} = \mathsf{O}_{23} \tag{6.11}$$

なぜならば，このような O_{123} が存在したら，定理 6.3 から, O_1 と O_3 が可換になってしまい, それは, 式 (6.9) の $T_1T_3 \neq T_3T_1$ に矛盾してしまうからである． したがって，O_{12} と O_{23} の結合観測量 O_{123} は存在しない.

////

6.6 実践三段論法—ソクラテスは死ぬか？

6.6.1 実践三段論法とその変則形

さて，次に，実践三段論法—含意 (定義 6.6) に関する測定理論 (=量子言語) の定理—を議論する．

(♮) 量子系では，定理 6.9(観測量の結合定理) が一般には成立しないので (反例 6.10 で示したように，観測量を結合できないので)，三段論法は一般には成立しない．これについては，注意 6.14 で, 再度述べる

しかし，古典系では，定理 6.9(結合観測量の結合定理) が成立するので，以下の定理によって，三段論法は信頼できる．

定理 6.11. [実践三段論法] $\mathsf{O}_{123} = (X_1 \times X_2 \times X_3, \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2 \boxtimes \mathcal{F}_3, F_{123}{=}\overset{\text{qp}}{\times}_{k=1,2,3} F_k)$ を $L^\infty(\Omega)$ 内の観測量とする．$\omega \in \Omega$，$\Xi_1 \in \mathcal{F}_1$，$\Xi_2 \in \mathcal{F}_2$，$\Xi_3 \in \mathcal{F}_3$ とする．このとき，次の命題 (i) – (iii) が成立する．

(i).(実践三段論法)

$$[\mathsf{O}_{123}^{(1)}; \Xi_1] \underset{\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}_{123}, S_{[\omega]})}{\Longrightarrow} [\mathsf{O}_{123}^{(2)}; \Xi_2], \quad [\mathsf{O}_{123}^{(2)}; \Xi_2] \underset{\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}_{123}, S_{[\omega]})}{\Longrightarrow} [\mathsf{O}_{123}^{(3)}; \Xi_3]$$

ならば，

$$\mathrm{Rep}_\omega^{\Xi_1 \times \Xi_3}[\mathsf{O}_{123}^{(13)}] = \begin{bmatrix} [F_{123}^{(13)}(\Xi_1 \times \Xi_3)](\omega) & [F_{123}^{(13)}(\Xi_1 \times \Xi_3^c)](\omega) \\ [F_{123}^{(13)}(\Xi_1^c \times \Xi_3)](\omega) & [F_{123}^{(13)}(\Xi_1^c \times \Xi_3^c)](\omega) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} [F_{123}^{(1)}(\Xi_1)](\omega) & 0 \\ [F_{123}^{(3)}(\Xi_3)](\omega) - [F_{123}^{(1)}(\Xi_1)](\omega) & 1 - [F_{123}^{(3)}(\Xi_3)](\omega) \end{bmatrix}$$

すなわち，

$$[\mathsf{O}_{123}^{(1)}; \Xi_1] \underset{\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}_{123}, S_{[\omega]})}{\Longrightarrow} [\mathsf{O}_{123}^{(3)}; \Xi_3] \tag{6.12}$$

が成り立つ．
(ii).

$$[\mathsf{O}_{123}^{(1)}; \Xi_1] \underset{\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}_{123}, S_{[\omega]})}{\Longleftarrow} [\mathsf{O}_{123}^{(2)}; \Xi_2], \quad [\mathsf{O}_{123}^{(2)}; \Xi_2] \underset{\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}_{123}, S_{[\omega]})}{\Longrightarrow} [\mathsf{O}_{123}^{(3)}; \Xi_3]$$

を仮定する．このとき次が成立する：

$$\mathrm{Rep}_\omega^{\Xi_1\times\Xi_3}[\mathsf{O}_{123}^{(13)}] = \begin{bmatrix} [F_{123}^{(13)}(\Xi_1\times\Xi_3)](\omega) & [F_{123}^{(13)}(\Xi_1\times\Xi_3^c)](\omega) \\ [F_{123}^{(13)}(\Xi_1^c\times\Xi_3)](\omega) & [F_{123}^{(13)}(\Xi_1^c\times\Xi_3^c)](\omega) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha^{\Xi_1\times\Xi_3} & [F_{123}^{(1)}(\Xi_1)](\omega) - \alpha^{\Xi_1\times\Xi_3} \\ [F_{123}^{(3)}(\Xi_3)](\omega) - \alpha^{\Xi_1\times\Xi_3} & 1-\alpha^{\Xi_1\times\Xi_3} - [F_{123}^{(1)}(\Xi_1)] - [F_{123}^{(3)}(\Xi_3)] \end{bmatrix}$$

ここに，

$$\begin{aligned} &\max\{[F_{123}^{(2)}(\Xi_2)](\omega), [F_{123}^{(1)}(\Xi_1)](\omega) + [F_{123}^{(3)}(\Xi_3)](\omega) - 1\} \\ &\qquad \leqq \alpha^{\Xi_1\times\Xi_3}(\omega) \leqq \min\{[F_{123}^{(1)}(\Xi_1)](\omega), [F_{123}^{(3)}(\Xi_3)](\omega)\} \end{aligned} \tag{6.13}$$

(iii).

$$[\mathsf{O}_{123}^{(1)};\Xi_1] \underset{\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}_{123},S_{[\omega]})}{\Longrightarrow} [\mathsf{O}_{123}^{(2)};\Xi_2], \quad [\mathsf{O}_{123}^{(2)};\Xi_2] \underset{\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}_{123},S_{[\omega]})}{\Longleftarrow} [\mathsf{O}_{123}^{(3)};\Xi_3]$$

を仮定する．このとき次が成立する：

$$\mathrm{Rep}_\omega^{\Xi_1\times\Xi_3}[\mathsf{O}_{123}^{(13)}] = \begin{bmatrix} [F_{123}^{(13)}(\Xi_1\times\Xi_3)](\omega) & [F_{123}^{(13)}(\Xi_1\times\Xi_3^c)](\omega) \\ [F_{123}^{(13)}(\Xi_1^c\times\Xi_3)](\omega) & [F_{123}^{(13)}(\Xi_1^c\times\Xi_3^c)](\omega) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha^{\Xi_1\times\Xi_3}(\omega) & [F_{123}^{(1)}(\Xi_1)](\omega) - \alpha^{\Xi_1\times\Xi_3}(\omega) \\ [F_{123}^{(3)}(\Xi_3)](\omega) - \alpha^{\Xi_1\times\Xi_3}(\omega) & 1-\alpha^{\Xi_1\times\Xi_3}(\omega) - [F_{123}^{(1)}(\Xi_1)](\omega) - [F_{123}^{(3)}(\Xi_3)](\omega) \end{bmatrix}$$

ここに

$$\begin{aligned} &\max\{0, [F_{123}^{(1)}(\Xi_1)](\omega) + [F_{123}^{(3)}(\Xi_3)](\omega) - [F_{123}^{(2)}(\Xi_2)](\omega)\} \\ &\qquad \leqq \alpha^{\Xi_1\times\Xi_3}(\omega) \leqq \min\{[F_{123}^{(1)}(\Xi_1)](\omega), [F_{123}^{(3)}(\Xi_3)](\omega)\} \end{aligned}$$

証明　(i): 条件より，

$$0 = [F_{123}^{(12)}(\Xi_1\times\Xi_2^c)](\omega) = [F_{123}(\Xi_1\times\Xi_2^c\times\Xi_3)](\omega) + [F_{123}(\Xi_1\times\Xi_2^c\times\Xi_3^c)](\omega)$$
$$0 = [F_{123}^{(23)}(\Xi_2\times\Xi_3^c)](\omega) = [F_{123}(\Xi_1\times\Xi_2\times\Xi_3^c)](\omega) + [F_{123}(\Xi_1^c\times\Xi_2\times\Xi_3^c)](\omega)$$

したがって，

$$0 = [F_{123}(\Xi_1\times\Xi_2^c\times\Xi_3)](\omega) = [F_{123}(\Xi_1\times\Xi_2^c\times\Xi_3^c)](\omega)$$
$$0 = [F_{123}(\Xi_1\times\Xi_2\times\Xi_3^c)](\omega) = [F_{123}(\Xi_1^c\times\Xi_2\times\Xi_3^c)](\omega)$$

よって，

$$\begin{aligned} &[F_{123}^{(13)}(\Xi_1\times\Xi_3^c)](\omega) \\ =&[F_{123}(\Xi_1\times\Xi_2\times\Xi_3^c)](\omega) + [F_{123}^{(13)}(\Xi_1\times\Xi_2^c\times\Xi_3^c)](\omega) \\ =&0 \end{aligned}$$

これより，(6.12) を得る．

(ii) と (iii) の証明は，文献 [25, 30] を見よ． □

例 6.12. [**例 6.5** の続き]　Ω，$C(\Omega)$，$\mathsf{O}_1=\mathsf{O}_{甘}=(X_{甘},\,2^{X_{甘}},\,F_{甘})$ と $\mathsf{O}_3=\mathsf{O}_{赤}=(X_{赤},\,2^{X_{赤}},\,F_{赤})$ は例 6.5 と同じとする．$X_{熟}=\{y_{熟},n_{熟}\}$ として，観測量 $\mathsf{O}_2=\mathsf{O}_{熟}=(X_{熟},2^{X_{熟}},F_{熟})$ を新たに考える．ここに "$y_{熟}$" と "$n_{熟}$" はそれぞれ「熟している」と「熟していない」を意味する．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Rep}[\mathsf{O}_1]&=\big[[F_{甘}(\{y_{甘}\})](\omega_k),[F_{甘}(\{n_{甘}\})](\omega_k)\big]\\
\mathrm{Rep}[\mathsf{O}_2]&=\big[[F_{熟}(\{y_{熟}\})](\omega_k),[F_{熟}(\{n_{熟}\})](\omega_k)\big]\\
\mathrm{Rep}[\mathsf{O}_3]&=\big[[F_{赤}(\{y_{赤}\})](\omega_k),[F_{赤}(\{n_{赤}\})](\omega_k)\big]
\end{aligned}
$$

と置こう．そして，次の擬積観測量を考える：

$$
\begin{aligned}
\mathsf{O}_{12}&=(X_{甘}\times X_{熟},2^{X_{甘}\times X_{熟}},F_{12}{=}F_{甘}\overset{\mathrm{qp}}{\times}F_{熟})\\
\mathsf{O}_{23}&=(X_{熟}\times X_{赤},2^{X_{熟}\times X_{赤}},F_{23}{=}F_{熟}\overset{\mathrm{qp}}{\times}F_{赤})
\end{aligned}
$$

いま，$\omega_k\in\Omega$ として，

$$
\begin{aligned}
&[\mathsf{O}_{123}^{(1)};\{y_{甘}\}]\underset{\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}_{123},S_{[\omega_k]})}{\Longrightarrow}[\mathsf{O}_{123}^{(2)};\{y_{熟}\}],\\
&[\mathsf{O}_{123}^{(2)};\{y_{熟}\}]\underset{\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}_{123},S_{[\omega_k]})}{\Longrightarrow}[\mathsf{O}_{123}^{(3)};\{y_{赤}\}]
\end{aligned}
\tag{6.14}
$$

とする．このとき，定理 6.11(i) により，次を得る：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Rep}[\mathsf{O}_{13}]&=\begin{bmatrix}[F_{13}(\{y_{甘}\}\times\{y_{赤}\})](\omega_k) & [F_{13}(\{y_{甘}\}\times\{n_{赤}\})](\omega_k)\\ [F_{13}(\{n_{甘}\}\times\{y_{赤}\})](\omega_k) & [F_{13}(\{n_{甘}\}\times\{n_{赤}\})](\omega_k)\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}[F_{甘}(\{y_{甘}\})](\omega_k) & 0\\ [F_{赤}(\{y_{赤}\})](\omega_k)-[F_{甘}(\{y_{甘}\})](\omega_k) & 1-[F_{赤}(\{y_{赤}\})](\omega_k)\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

したがって，測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}_{123},S_{[\omega_k]})$ により，トマト ω_k が「甘い」と知ったとき，トマト ω_k が「赤い」とわかる確率は次で与えられる：

$$
\frac{[F_{13}(\{y_{甘}\}\times\{y_{赤}\})](\omega_k)}{[F_{13}(\{y_{甘}\}\times\{y_{赤}\})](\omega_k)+[F_{13}(\{y_{甘}\}\times\{n_{赤}\})](\omega_k)}=\frac{[F_{赤}(\{y_{赤}\})](\omega_k)}{[F_{赤}(\{y_{赤}\})](\omega_k)}=1
\tag{6.15}
$$

もちろん，(6.14) は次を意味する：

"甘い" $\Longrightarrow$ "熟している"　　かつ　　"熟している" $\Longrightarrow$ "赤い"

したがって，(6.12) より，次の結論—当たり前の三段論法—を得る：

"甘い" $\Longrightarrow$ "赤い"

しかしながら, これはマーケットではあまり役に立たない．マーケットで役に立つのは

$$\text{“赤い”} \Longrightarrow \text{“甘い”}$$

のような結論である．次の例で，これについて考える．

例 6.13. [例 **6.12** から続く]　(6.14) の代わりに, 次を仮定する：

$$
\begin{aligned}
&[\mathsf{O}_{123}^{(1)}; \{y_{\text{赤}}\}] \underset{\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}_{123}, S_{[\omega_k]})}{\Longleftarrow} [\mathsf{O}_{123}^{(2)}; \{y_{\text{熟}}\}], \\
&[\mathsf{O}_{123}^{(2)}; \{y_{\text{熟}}\}] \underset{\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}_{123}, S_{[\omega_k]})}{\Longrightarrow} [\mathsf{O}_{123}^{(3)}; \{y_{\text{甘}}\}]
\end{aligned}
\tag{6.16}
$$

ここで，トマト ω_k が「赤い」と知ったとき，そのトマト ω_k が「甘い」とわかる確率は次で与えられる：

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{\text{「”赤”かつ”甘い”」確率}}{\text{「赤い」確率}} \\
&= \frac{[F_{13}(\{y_{\text{甘}}\} \times \{y_{\text{赤}}\})](\omega_k)}{[F_{13}(\{y_{\text{甘}}\} \times \{y_{\text{赤}}\})](\omega_k) + [F_{13}(\{n_{\text{甘}}\} \times \{y_{\text{赤}}\})](\omega_k)}
\end{aligned}
$$

これは，(6.3) から，次のように評価できる：

$$
\max\left\{ \frac{[F_{\text{熟}}(\{y_{\text{熟}}\})](\omega_k)}{[F_{\text{赤}}(\{y_{\text{赤}}\})](\omega_k)}, \frac{[F_{\text{甘}}(\{y_{\text{甘}}\})] + [F_{\text{赤}}(\{y_{\text{赤}}\})] - 1}{[F_{\text{赤}}(\{y_{\text{赤}}\})](\omega_k)} \right\} \leqq P \leqq \min\left\{ \frac{[F_{\text{甘}}(\{y_{\text{甘}}\})](\omega_k)}{[F_{\text{赤}}(\{y_{\text{赤}}\})](\omega_k)}, 1 \right\}
\tag{6.17}
$$

(6.16) は次と同値である：

$$\text{“熟している”} \Longrightarrow \text{“甘い”} \qquad \text{かつ} \qquad \text{“熟している”} \Longrightarrow \text{“赤い”}$$

これでは,「甘い」と「赤い」の関係は何も言えないと思うかもしれないが，上のように，

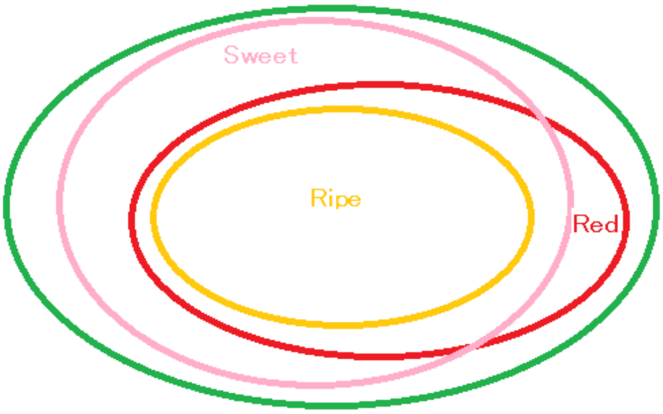
$$P = \frac{\text{「”赤”かつ”甘い”」確率}}{\text{「赤い」確率}}$$

なので，(6.17) の評価は次に似ている：

$$\text{“赤い”} \Longrightarrow \text{“甘い”}$$

したがって，評価 (6.17) はマーケットで役に立つかもしれない．

奇妙な結論と思うかもしれないが、下図を見てもらえば、



$$\frac{\text{"Sweet"} \wedge \text{"Red"}}{\text{"Red"}} \fallingdotseq 1$$

なのだから、納得してもらえるだろう.

6.7 量子系では、三段論法は当てにならない

本節は、次からの抜粋：

- 文献 [36]: S. Ishikawa, *The linguistic interpretation of quantum mechanics,* arXiv:1204.3892v1[physics.hist-ph],(2012) (`http://arxiv.org/abs/1204.3892`)

注意 6.14. [量子系では, 三段論法は不成立]

4.4 節の議論は，スピン版の EPR-パラドックスであったが、で，

図 6.3: “粒子 A の速度”$= -$“B の速度”

元々の EPR の論文 [14] は以下のような設定になっている．質量 m の同一の 2 つの粒子 A_1 と A_2 が合わさって静止しているとして，これが 2 つに弾けて正反対に飛び出すことを考える．

(時刻 t_1 での) 粒子 A の位置 q_A と (時刻 t_1 での) 粒子 B の速度 v_B を正確に測定できる．

したがって、次の問題を得る．

(A) 運動量保存則から、(時刻 t_1 での) 粒子 A の位置 q_A と運動量 $-mv_B$ がわかるか?

(4.3.3 節で述べたように、この (A) が正しかったとしても, ハイゼンベルグの不確定性原理 4.15 と矛盾するわけではない).

さて、

問題 (A) は正しいか？

を以下に考える．

ここで，これを量子系の問題と考えれば, 以下のようになる．

ヒルベルト空間 $H_1 = L^2(\mathbb{R}_q)$ を考えて，量子系の 2 粒子システム S をテンソルヒルベルト空間 $H = H_1 \otimes H_1 = L^2(\mathbb{R}^2_{(q_1,q_2)})$ 内で議論する． 2 粒子システム S の状態を u_0

$(\in H = H_1 \otimes H_1 = L^2(\mathbb{R}^2_{(q_1,q_2)}))$ $\Big($ 正確には, $\rho_0 = |u_0\rangle\langle u_0|\Big)$ とする．　ここで,

$$
u_0(q_1,q_2) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\epsilon\sigma}} e^{-\frac{1}{8\sigma^2}(q_1-q_2-2a)^2 - \frac{1}{8\epsilon^2}(q_1+q_2)^2} \tag{6.18}
$$

ここで, $a \in \mathbb{R}$, 正数 ϵ は十分小さいとする．　各 $k = 1,2$ に対して, $Q_k : L^2(\mathbb{R}^2_{(q_1,q_2)}) \to L^2(\mathbb{R}^2_{(q_1,q_2)})$ と $P_k : L^2(\mathbb{R}^2_{(q_1,q_2)}) \to L^2(\mathbb{R}^2_{(q_1,q_2)})$ を次の (非有界) 自己共役作用素とする．

$$
\begin{aligned}
&Q_1 = q_1, \qquad P_1 = \frac{\hbar\partial}{i\partial q_1} \\
&Q_2 = q_2, \qquad P_2 = \frac{\hbar\partial}{i\partial q_2}
\end{aligned} \tag{6.19}
$$

ある時刻 t_0 において，次の議論を考える．

($\sharp_1$) (粒子 A_1 の位置, 粒子 A_2 の運動量) と粒子 A_2 の運動量を正確に測定して，(x_1,p_2) と p_2' が得られたとする．もちろん，$p_2 = p_2'$ であるから，例 2.28[スペクトル分解] を見習って,
自己共役作用素 $(Q_1 \otimes P_2) \times (I \otimes P_2)$ の観測量表示を $\mathsf{O}_1 = (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, F_1)$
として,

$$
\underset{(\text{粒子 } A_1 \text{ の位置, 粒子 } A_2 \text{ の運動量})}{(x_1,p_2)} \quad \underset{\mathsf{M}_{B(H)}(\mathsf{O}_1, S_{[\rho_0]})}{\Longrightarrow} \quad \underset{\text{粒子 } A_2 \text{ の運動量}}{p_2}
$$

となる．

($\sharp_2$) また，粒子 A_1 の運動量と粒子 A_2 の運動量を正確に測定して，p_1 と p_2 が得られたとする．ここで，運動量保存則から，$p_1 = -p_2$ が成り立つから,
自己共役作用素 $(I \otimes P_2) \times (P_1 \otimes I)$ の観測量表示を $\mathsf{O}_2 = (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, F_2)$
として,

$$
\underset{\text{粒子 } A_2 \text{ の運動量}}{p_2} \quad \underset{\mathsf{M}_{B(H)}(\mathsf{O}_2, S_{[\rho_0]})}{\Longrightarrow} \quad \underset{\text{粒子 } A_1 \text{ の運動量}}{-p_2}
$$

となる．．

($\sharp_3$) したがって，($\sharp_1$) と ($\sharp_2$) により，三段論法によって,

$$
\underset{\text{粒子 } A_1 \text{ の運動量}}{-p_2} \qquad \Big(\text{すなわち,「粒子 } A_1 \text{ の運動量は, } -p_2 \text{ である」}\Big)
$$

と結論できて，粒子 A_1 の位置 x_1 と運動量 $-p_2$ を正確に知り得たことになる．

というような「三段論法の議論」が成立しそうであるが，結論的には，これ (=問題 **(A)**) は正しくない．なぜならば,

($\sharp_4$) $(Q_1 \otimes P_2) \times (I \otimes P_2)$ と $(I \otimes P_2) \times (P_1 \otimes I)$ (したがって，O_1 と O_2) は非可換で，同

時観測量が存在しないからで,
そうならば, ($\sharp_3$) を検証する術がないからである

注意 6.15. EPR の論文 [14] のいろいろな観点から読める論文である. 結論的には、「実在的世界観　vs. 言語的世界観」における実在的世界観の優位性を主張したいのだと思うが、この部分は分かりにくい. 4.5 節で述べたようにこの部分の議論はベルの不等式に継承されてすこし分かりやすくなったが、それでも量子言語を持ち出さないと分かりにくい. というより、著者にとっては量子言語を持ち出してもまだスッキリしたとは言えない. しかし、「三段論法の不成立」や「光より速い何かがあるのか？ (非局所性の問題)」は問題の意味としては分かりやすい. 「三段論法の不成立」は, 意外なことであるが, あってはならないことではない.　一方、「超光速 (非局所性)」は非常に困るわけで, これはあってはならないことで, 「真のパラドックス」であるが, これは量子力学が発見された当初から問題視されたことで (たとえば, ド・ブロイのパラドックス (*cf.* 2.10 節)), EPR 論文で最初に指摘されたことではない.