慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	第5講 : フィッシャー統計学I
Sub Title	
Author	石川, 史郎(Ishikawa, Shiro)
Publisher	
Publication year	2018
Jtitle	コペンハーゲン解釈; 量子哲学 (2018. 3) ,p.173- 208
JaLC DOI	
Abstract	
Notes	慶應義塾大学理工学部大学院講義ノート(Web版)
Genre	Book
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KO52003002-00000000-0173

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

第 5 講

フィッシャー統計学 I

測定理論は次のように定式化された.

- $$\underset{(=\text{量子言語})}{\boxed{\text{測定理論}}} := \underbrace{\overset{[\text{言語ルール 1}]}{\underset{(cf.\ \ 2.7\text{ 節})}{\boxed{\text{測定}}}} + \overset{[\text{言語ルール 2}]}{\underset{(cf.\ \ 8.3\text{ 節})}{\boxed{\text{因果関係}}}}}_{\text{一種の呪文 (ア・プリオリな認識)}} + \underbrace{\overset{[\text{言語的コペンハーゲン解釈}]}{\underset{(cf.\ \ 3.1\text{ 節})}{\boxed{\text{言語的解釈}}}}}_{\text{呪文の使い方のマニュアル}}$$

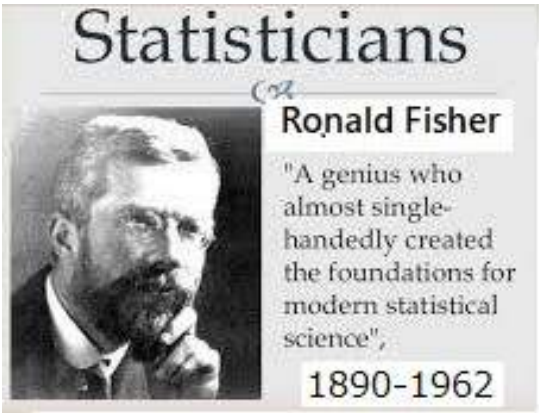
本章では，フィッシャー統計学を言語ルール 1 (測定;2.7 節) の言葉遣いで記述する[*1]．高校で，確率・統計を最初に習ったときに，誰もが不思議に思うこと:

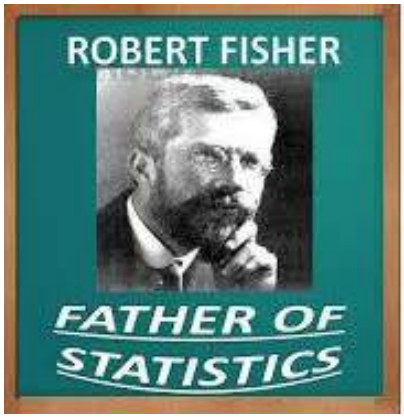
> ニュートン力学の適用対象は，古典力学的現象だけなのに，確率・統計は，なぜ，経済学にも医学にも使えるのだろうか

に答えることが本書の動機の一つであったことに留意して，本章を読んでもらいたい．言いたいことは、ザックリ言えば、

- 量子言語から見れば、「統計学 ≒ 可換量子力学」

である．なお，本章では，統計学の予備知識を仮定しないが，大学初年度に習う統計学を知っていればそれに越したことはない．





[*1] 統計学はフィッシャーだけに負うわけではないが，ベイズ統計学 (第 7 章) と区別するために，「フィッシャー統計学」とした．

5.1 統計学とは, 壷問題のことなり

5.1.1 母集団 (=システム)↔ パラメター (=状態), (*cf.* 表 2.2)

例 5.1. 日本人全男性とアメリカ人全男性の身長の確率密度関数をそれぞれ, f_J と f_A とする. すなわち,

$$\int_\alpha^\beta f_J(x)dx = \frac{\text{日本人男性で, 身長が } \alpha(\mathrm{cm}) \text{ から } \beta(\mathrm{cm}) \text{ までの人数}}{\text{日本人男性の総人口}}$$
$$\int_\alpha^\beta f_A(x)dx = \frac{\text{アメリカ人男性で, 身長が } \alpha(\mathrm{cm}) \text{ から } \beta(\mathrm{cm}) \text{ までの人数}}{\text{アメリカ人男性の総人口}}$$

とする. 同じ意味で,

(A_1) 日本人男性全体（母集団 $\leftrightarrow \omega_J$）から無作為に一人選んで, その人の身長が, 身長が $\alpha(\mathrm{cm})$ から $\beta(\mathrm{cm})$ までの確率は,

$$[F_{\text{身長}}([\alpha,\beta))](\omega_J) = \int_\alpha^\beta f_J(x)dx$$

である.

(A_2) アメリカ人男性全体（母集団 $\leftrightarrow \omega_A$）から無作為に一人選んで, その人の身長が, 身長が $\alpha(\mathrm{cm})$ から $\beta(\mathrm{cm})$ までの確率は,

$$[F_{\text{身長}}([\alpha,\beta))](\omega_A) = \int_\alpha^\beta f_A(x)dx$$

である.

さて, この日常言語の文言 (A_1) と (A_2) を測定理論の言葉遣いで記述することを考える. $\Omega = \{\omega_J, \omega_A\}$ として, 離散距離空間 (Ω, d_D) を考えて, 可換 C^* 代数 $C_0(\Omega)$ を得る. すなわち,

古典基本構造 $[C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega,\nu) \subseteq B(L^2(\Omega,\nu))]$

を得る. ここで,

$$\nu(\{\omega_J\}) = 1, \quad \nu(\{\omega_A\}) = 1$$

$\Big($注意：もちろん, $\nu(\{\omega_J\}) = a, \ \ \nu(\{\omega_A\}) = b \ \ (a,b>0)$ でもよい$\Big)$. また, 純粋状態空間は

$$\mathfrak{S}^p(C_0(\Omega)^*) = \{\delta_{\omega_J}, \delta_{\omega_A}\} \approx \{\omega_J, \omega_A\} = \Omega$$

となる．ここで，，

δ_{ω_J} $\cdots$ “日本人全男性の集合 U_1(母集団) の状態”，
δ_{ω_A} $\cdots$ “アメリカ人全男性の集合 U_2(母集団) の状態”，

として， 次の同一視を考える (したがって，次のような状況を考える):

$$U_1 \approx \delta_{\omega_J}, \qquad U_2 \approx \delta_{\omega_A}$$

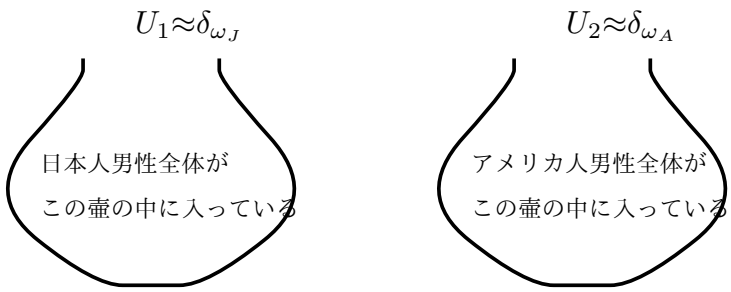


図 5.1 母集団 ≈ 壷 (↔ 状態)

$L^\infty(\Omega)$ 内の観測量 $\mathsf{O}_{身長} = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, F_{身長})$ は (A) で定義したので，測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}_{身長}, S_{[\delta_\omega]})$ $(\omega \in \Omega = \{\omega_J, \omega_A\})$ を得る．よって，上述の (A) ((A$_1$) と (A$_2$)) は，測定理論の言葉で次のように記述できる:

(B) 測定 $\begin{bmatrix} \mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}_{身長}, S_{[\omega_J]}) \\ \mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}_{身長}, S_{[\omega_A]}) \end{bmatrix}$ により得られた測定値が区間 $[\alpha, \beta)$

に属する確率は,

$$\begin{bmatrix} {}_{C_0(\Omega)^*}\Big(\delta_{\omega_J}, F_{身長}([\alpha,\beta))\Big)_{L^\infty(\omega,\nu)} = [F_{身長}([\alpha,\beta))](\omega_J) \\ {}_{C_0(\Omega)^*}\Big(\delta_{\omega_A}, F_{身長}([\alpha,\beta))\Big)_{L^\infty(\omega,\nu)} = [F_{身長}([\alpha,\beta))](\omega_A) \end{bmatrix} \text{ となる.}$$

したがって、次の翻訳を得る：

$$\underset{(日常言語)}{\boxed{文言\ (A)}} \xrightarrow[翻訳]{} \underset{(量子言語)}{\boxed{文言\ (B)}}$$

////

5.1.2 正規分布とスチューデントの t 分布

さて，

目次; 他

(C) ある粒子の位置 ω $(\in \mathbb{R})$ を，誤差が標準偏差 σ の正規分布となる近似測定を行なうことを考える．標準偏差 $\sigma >$ を固定して，可換 C^* 代数 $C_0(\Omega)$ において，Ω $(= \mathbb{R}$: 実数全体) を状態空間とする．すなわち，

古典基本構造 $[C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega, \nu) \subseteq B(L^2(\Omega, \nu))]$

を得る． 測定値空間 X も $\mathbb{R}$ として，$L^\infty(\Omega)$ 内の**正規観測量** $\mathsf{O}_{G_\sigma} = (X(= \mathbb{R}), \mathcal{B}_\mathbb{R}, G_\sigma)$ を，誤差関数 (図 5.2) を用いて，次のように定義する:

$$[G_\sigma(\Xi)](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_\Xi \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\omega)^2\right] dx \tag{5.1}$$
$$(\forall \Xi \in \mathcal{B}_X(= \mathcal{B}_\mathbb{R}),\ \forall \omega \in \Omega(= \mathbb{R}))$$

ここに，$\mathcal{B}_\mathbb{R}$ はボレル集合体とする．このとき，たとえば，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = 0.683\ldots, \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-2\sigma}^{2\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = 0.954\ldots,$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-1.96\sigma}^{1.96\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \doteqdot 0.95 \tag{5.2}$$

である．

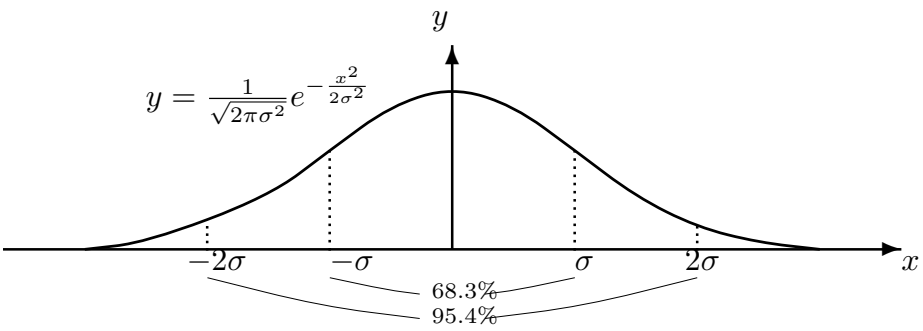


図 5.2　誤差関数

$L^\infty(\Omega^n)$ 内の並列観測量 $\bigotimes_{k=1}^n \mathsf{O}_{G_\sigma} = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \bigotimes_{k=1}^n G_\sigma)$ を考えて, これを

$$K = \{(\omega, \omega, \ldots, \omega) \in \Omega^n \mid \omega \in \Omega\} (\subseteq \Omega^n)$$

に制限する． これは，$L^\infty(\Omega)$ 内の同時観測量 $\mathsf{O}^n = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \times_{k=1}^n G_\sigma)$ を考えることと等しい． すなわち，

$$[(\mathop{\times}_{k=1}^n G_\sigma)(\Xi_1 \times \Xi_2 \times \cdots \times \Xi_n)](\omega) = \mathop{\times}_{k=1}^n [G_\sigma(\Xi_k)](\omega)$$

目次; 他

$$= \mathop{\times}_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\Xi_k} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x_k - \omega)^2 \right] dx_k$$

$$(\forall \Xi_k \in \mathcal{B}_X (= \mathcal{B}_{\mathbb{R}}),\ \forall \omega \in \Omega (= \mathbb{R})) \tag{5.3}$$

ここに，$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ はボレル集合体とする．このとき，$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X^n (= \mathbb{R}^n)$ として，

$$\overline{x}_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$
$$U_n^2 = \frac{(x_1 - \overline{x}_n)^2 + (x_2 - \overline{x}_n)^2 + \cdots + (x_n - \overline{x}_n)^2}{n-1}$$

として，写像 $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\overline{x}_n - \omega}{U_n/\sqrt{n}}$$

と定めて，$L^\infty(\mathbb{R})$ 内の観測量 $\mathsf{O}_{T_n^\sigma} = (X(=\mathbb{R}), \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, T_n^\sigma)$ を

$$[T_n^\sigma(\Xi)](\omega) = [G_\sigma(\{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \frac{\overline{x}_n - \omega}{U_n/\sqrt{n}} \in \Xi\})](\omega)$$
$$(\forall \Xi \in \mathcal{F}) \tag{5.4}$$

で定義しよう．$\mathsf{O}_{T_n^\sigma} = (X(=\mathbb{R}), \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, T_n)$ を $L^\infty(\mathbb{R})$ 内のスチューデントの t 観測量 (or, スチュウデントの t_n 観測量) と言う．

ここで，

$$f_n^\sigma(x) = \frac{\{\Gamma(n/2)}{\sqrt{(n-1)\pi}\Gamma((n-1)/2)}(1 + \frac{x^2}{n-1})^{-n/2} \qquad (\Gamma \text{ はガンマ関数}) \tag{5.5}$$

とおいて，

$$[T_n^\sigma(\Xi)](\omega) = \int_\Xi f_n^\sigma(x)dx \quad (\forall \Xi \in \mathcal{F}) \tag{5.6}$$

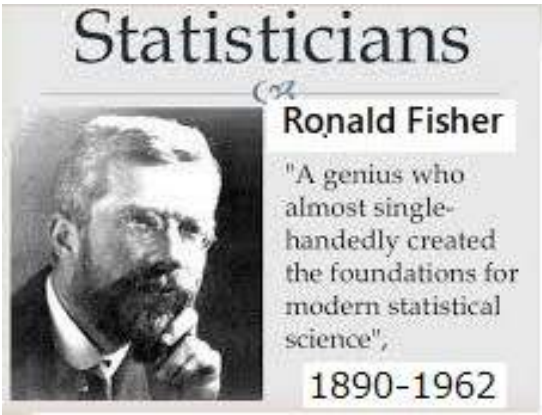
と表現できる． 右辺を見ればわかることであるが, ω や σ に依存しない． また,

$$\lim_{n\to\infty} f_n^\sigma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{(n-1)\pi}\Gamma((n-1)/2)}(1 + \frac{x^2}{n-1})^{-n/2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

なので，n が 30 以上ならば, $N(0,1)$(すなわち, 平均値 0, 標準偏差 1 の正規分布) と考えてもよい．

William Sealy Gosset (1876 – 1937)was an English statistician. He published under the pen name **Student**, and developed the Student's t-distribution

5.2 フィッシャーはボルンの逆を考えた



通常の統計学の本は、出だし (確率論の初歩とか様々な分布とか) が面白いとは言えない．面白く読むためには、

統計学=壺問題

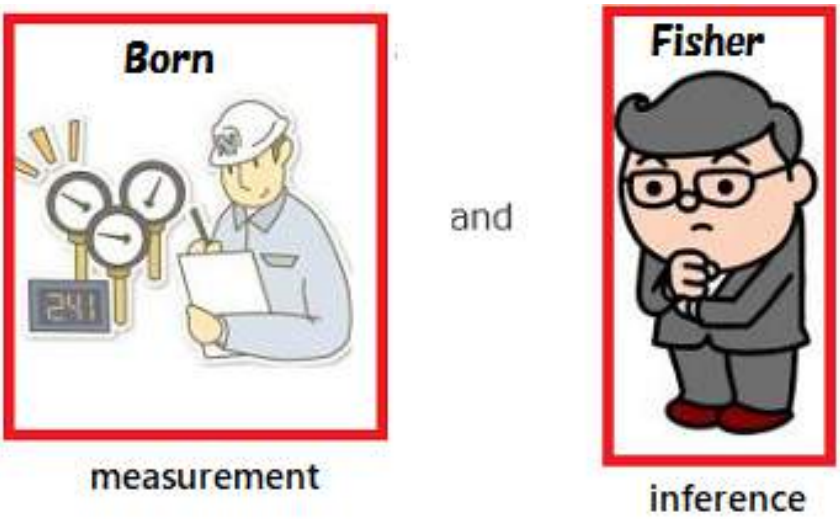
思い込んで、「確率論の初歩とか様々な分布とか」をスキップして、最重要な「フィッシャーの最尤法」を最初に理解することだと思う．

物理学者 (実在的科学観) は科学者の中では少数派であって、ほとんどの科学者が言語的科学観の傘下にある．しかし、実在的科学観はシンプルで、　たとえば、ニュートンとかマックスウェルやアインシュタインが偉いに決まっている．一方、言語的科学観の方は、すっきりしない．量子言語の観点からすると、統計学ではフィッシャーの最尤法が最も基本的な仕事で、　フィッシャーが一番偉い．一言で言えば、

- 古典力学 (実在的科学観)…ニュートンの運動方程式
  統計学 (言語的科学観)…フィッシャーの最尤法

と考えてよい．しかし、信じられないことだが、統計学の本の中には、フィッシャーの最尤法に触れていないものもある．書いてあっても、本の後半に書いてあることもある．古典力学の本に、ニュートンの運動方程式が書かれていなかったとすれば、誰もが驚くと思うが…
統計学を簡潔に説明している本を知らない．

統計学 (試行) と測定理論 (測定) はかなり似ている．したがって，似たような議論ができるはずで，本章ではこれを議論する．本節では，統計学の基本である「フィッシャーの最尤法」を言語ルール 1 (測定;2.7 節) の言葉遣いで表現する．



5.2.1 推定問題

フィッシャーの最尤法の説明のために，次の問題から始める．

問題 5.2. [壷問題 (例 **2.34** と同じ)，フィッシャーの最尤法の簡単な例]
2 つの壷 U_1 と U_2 がある．壷 U_1 には，8 個の白球と 2 個の黒球が入っている．また，壷 U_2 には，4 個の白球と 6 個の黒球が入っていると仮定する．

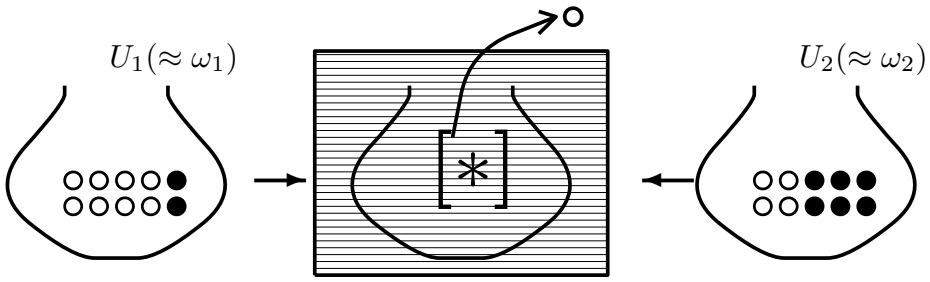


図 5.3 純粋測定 (フィッシャーの最尤法)

次の手続き (i) と (ii) を考える．

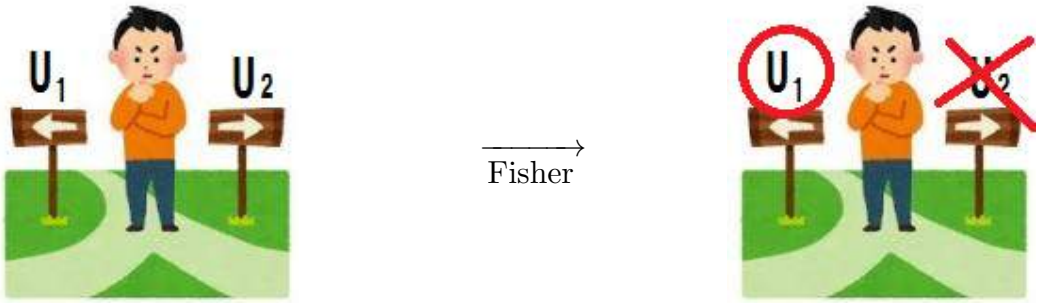
(i) 2 つの壷 (すなわち，U_1 または U_2) のうち一つが選ばれて，カーテンの後ろに置かれている．しかし，カーテンの後ろの壷がどちらなのか (U_1 または U_2) をあなたは知らない．

(ii) 手続き (i) で選ばれて，カーテンの後ろに置かれた壷の中から一つの球を取り出す．そして，その球が白球であった．

ここで，次の問題:

(iii) 手続き (i) では，どちらの壷 (U_1 または U_2) がカーテンの後ろに置かれたのだろうか？

を考えたい．



答えは，簡単で，誰もが (幼稚園児でも)，「カーテンの後ろの壷は U_1 である」と直感で答えるだろう．なぜならば，「U_1 の方が白球が多く入っていて，白球が選ばれやすい」からである． □

簡単すぎたかもしれないが，この直感の数量的表現がフィッシャーの最尤法である．

5.2.2 フィッシャーの最尤法 (量子言語・測定理論による)

次の定義から始めよう:

記法 5.3. $[\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}, S_{[*]})]$: 基本構造 $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}} \subseteq B(H)]$ 内で定式化された測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}$ $(\mathsf{O}{=}(X, \mathcal{F}, F)$, $S_{[\rho]})$ を考える．ここで，

(A_1) 測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}$ $(\mathsf{O}{=}(X, \mathcal{F}, F)$, $S_{[\rho]})$ を行う多くの場合は，状態 ρ $(\in \mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*))$ を未知と仮定することは自然である．

なぜならば

(A_2) 通常は，「状態 ρ を知る」ために測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}, S_{[\rho]})$ を行う

からである．よって，

「測定者が，測定対象の状態 ρ を知らない」

ということを強調したい場合は，$\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}$ $(\mathsf{O}{=}(X, \mathcal{F}, F)$, $S_{[\rho]})$ を

(A_3) $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}$ $(\mathsf{O}{=}(X, \mathcal{F}, F)$, $S_{[*]})$

と記す．もうすこし一般的に書くと，$K(\subseteq \mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*))$ として (K がコンパクト集合なら好ましい

がそうでなくて使う), 状態が K に属することを知っていたときに, $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}, S_{[*]}((K)))$ と記す．したがって,

$$\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}, S_{[*]}) = \mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}, S_{[*]}((\mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*))))$$

と思えばよい．

////

この記法 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}, S_{[*]})$ を使って, 我々の当面の問題は，次のように書ける:

問題 5.4. [推定問題]

(a) 測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}{=}(X, \mathcal{F}, F), S_{[*]}((K)))$ により得られた測定値が $\Xi(\in \mathcal{F})$ に属したと仮定する．このとき，未知の状態 $[*]$ $(\in \Omega)$ を推定せよ．

である． または,

(b) 測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}{=}(X \times Y, \mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}, H), S_{[*]}((K)))$ により得られた測定値 (x, y) が $\Xi \times Y$ $(\Xi \in \mathcal{F})$ に属したことがわかったとする．このとき, $y \in \Gamma$ である確率を推定せよ．

したがって，測定は,,

$$\text{(B)} \begin{cases} \text{表から見れば,} \\ \quad (\text{観測量 } [\mathsf{O}],\ \text{状態 } [\omega(\in \Omega)]) \xrightarrow[\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}, S_{[\delta_\omega]})]{\text{測定}} \text{測定値 } [x(\in X)] \\ \\ \text{裏から見れば,} \\ \quad (\text{観測量 } [\mathsf{O}],\ \text{測定値 } [x \in \Xi(\in \mathcal{F})]) \xrightarrow[\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}, S_{[*]})]{\text{推定}} \text{状態 } [\omega(\in \Omega)] \end{cases}$$

である,

すなわち,

推定は，測定の逆問題

と言える．したがって，図 5.4 が，推定問題のイメージ図である．

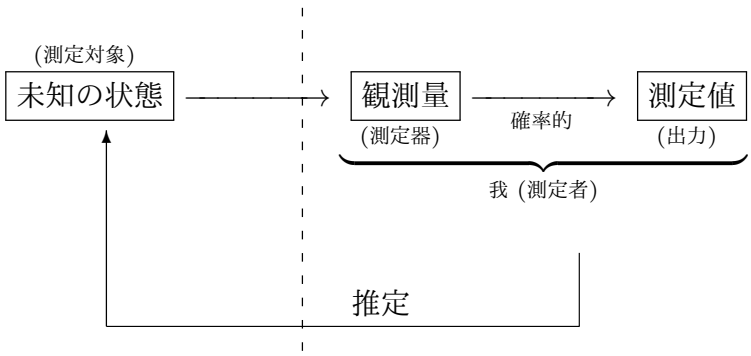


図 5.4: 推定のイメージ図 (推定は，測定の逆問題)

推定問題 5.4 に答えるために，フィッシャーの最尤法を測定理論の言葉で表現する．

定理 5.5. **[フィッシャーの最尤法 (一般の場合)]** 基本構造 $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}} \subseteq B(H)]$ 内の測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}{=}(X \times Y, \mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}, H), S_{[*]}((K)))$ により得られた測定値 (x, y) が $\Xi \times Y$ $(\Xi \in \mathcal{F})$ に属したことがわかったとする．このとき, $y \in \Gamma$ である確率 $P(\Gamma)$ は,

$$P(\Gamma) = \frac{\rho_0(H(\Xi \times \Gamma))}{\rho_0(H(\Xi \times Y))} \quad (\forall \Gamma \in \mathcal{G})$$

ここに, $\rho_0 \in K$ は次で定まる．

$$\rho_0(H(\Xi \times Y)) = \max_{\rho \in K} \rho(H(\Xi \times Y)) \tag{5.7}$$

証明 ρ_1 と ρ_2 を K の元として，$\rho_1(H(\Xi \times Y)) < \rho_2(H(\Xi \times Y))$ と仮定する．言語ルール 1 (測定;2.7 節) より，

(i) 測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}, S_{[\rho_1]})$ により得られる測定値 (x, y) が $\Xi \times Y$ に属する確率は $\rho_1(H(\Xi \times Y))$
(ii) 測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}, S_{[\rho_2]})$ により得られる測定値 (x, y) が $\Xi \times Y$ に属する確率は $\rho_2(H(\Xi \times Y))$

となる．$\rho_1(H(\Xi \times Y)) < \rho_2(H(\Xi \times Y))$ と仮定したのだから,「(i) は (ii) より稀に起きる」と言える．よって，$[*] = \rho_1$ と推定するより，$[*] = \rho_2$ と推定した方が理がある．したがって, (5.7) 式の ρ_0 は一理ある．$\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}, S_{[\rho_0]})$ によって得られた測定値 (x, y) が $\Xi \times \Gamma$ に属している確率は $\rho_0(H(\Xi \times \Gamma))$ なのだから, 条件付き確率によって, 定理を得る． □

定理 5.6. **[フィッシャーの最尤法 (古典系の場合)]** (i): 測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O} = (X, \mathcal{F}, F), S_{[*]}((K)))$ により得られた測定値が Ξ $(\in \mathcal{F})$ に属していることがわかったとする．このとき，システム S の未知の状態 $[*]$ を次のような状態 ω_0 $(\in K \subseteq \Omega)$ と推定することには一理ある：

$$[F(\Xi)](\omega_0) = \max_{\omega \in K} [F(\Xi)](\omega) \tag{5.8}$$

目次; 他

すなわち，$[F(\Xi)](\omega) \leqq [F(\Xi)](\omega_0)$ $(\forall\omega \in K)$ を満たす $\omega_0(\in K)$ と推定できる．
(ii): 測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}=(X,\mathcal{F},F),\ S_{[*]}((K)))$ により得られた測定値 x_0 $(\in X)$ が得られたとする． 尤度関数 $f(x,\omega)$ を

$$f(x,\omega) = \inf_{\omega_1\in K}\left[\lim_{\Xi\ni x,[F(\Xi)](\omega_1)\neq 0,\Xi\to\{x\}} \frac{[F(\Xi)](\omega)}{[F(\Xi)](\omega_1)}\right] \tag{5.9}$$

と定めて，$f(x_0,\omega_0)=1$ を満たす状態 $\omega_0(\in K)$ と推定することは一理ある．

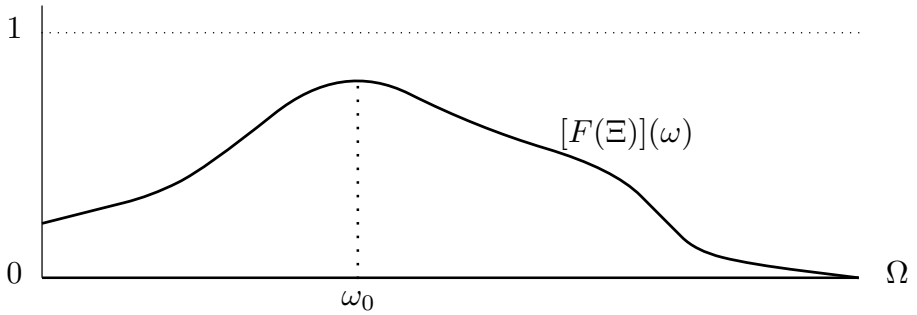


図 5.5: フィッシャーの最尤法

証明 定理 5.5 で，

$$[\mathcal{A}\subseteq\overline{\mathcal{A}}\subseteq B(H)] = [C_0(\Omega)\subseteq L^\infty(\Omega)\subseteq B(L^2(\Omega)]$$

として，$\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}{=}(X\times Y,\mathcal{F}\boxtimes\mathcal{G},H),S_{[*]}((K)))$ において，

固定された $\mathsf{O}_1{=}(X,\mathcal{F},F)$，任意の $\mathsf{O}_2{=}(Y,\mathcal{G},G)$，

$\mathsf{O}{=}\mathsf{O}_1\times\mathsf{O}_2 = (X\times Y,\mathcal{F}\boxtimes\mathcal{G},F\times G)$，$\rho_0=\delta_{\omega_0}$

の場合を考える．このとき，

$$P(\Gamma) = \frac{[H(\Xi)](\omega_0)\times[G(\Gamma)](\omega_0)}{[H(\Xi)](\omega_0)\times[G(Y)](\omega_0)} = [G(\Gamma)](\omega_0) \quad (\forall\Gamma\in\mathcal{G}) \tag{5.10}$$

となり，しかも O_2 は任意だから．「$[*]=\delta_{\omega_0}(\underset{\text{同一視}}{\approx}\omega_0)$」と推定することは理がある． □

♠ **注釈 5.1.** この定理の意味は「非常に難しい」と思う．言語的解釈では，

測定後の状態はナンセンス

なのだから，
($\sharp_1$) この定理 5.6 は，一義的にはナンセンスである．
この定理 5.6 の意味は，証明を見なくてはわからない．つまり，
($\sharp_2$) この定理 5.6 で推定した δ_{ω_0} は，式 (5.10) の意味で，辻褄が合っている
と主張しているのである．このような議論は，量子系では重要になるが，古典系では「面倒なだけ」なので，
($\sharp_3$)「古典系では，定理 5.6 の主張を単純に信じれば良い」ということまで含めて，定理 5.6 の意味

なのである．

というわけで，「フィッシャーの最尤法は間違っている」などと大人気の無いことは言わない．したがって，古典系では，今後も「定理 5.6 のような言い方」を普通にする．

解答 5.7. [問題 5.2 のフィッシャーの最尤法による解答]

どちらの壷 (U_1 または U_2) がカーテンの後ろに置かれているのかあなたは知らない．
カーテンの後ろの壷から球を一つ取り出したら，白球だった．
このとき，壷は U_1 または U_2 のどちらか？　これを推定せよ．

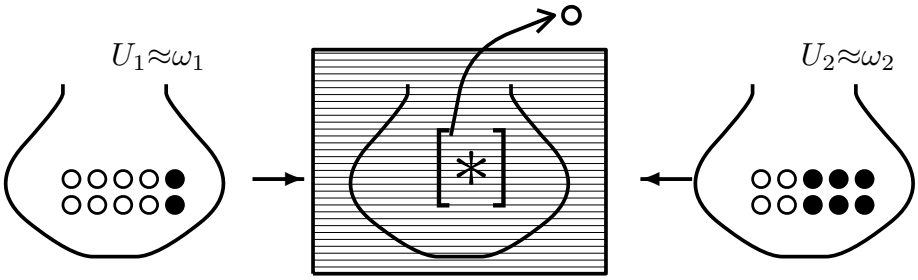


図 5.6:　フィッシャーの最尤法 (壺問題)

解答

測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}=(\{\text{白}, \text{黒}\}, 2^{\{\text{白}, \text{黒}\}}, F), S_{[*]})$ を考える．ここで，$C(\Omega)$ 内の観測量 $\mathsf{O}_{\text{白黒}} = (\{\text{白}, \text{黒}\}, 2^{\{\text{白}, \text{黒}\}}, F_{\text{白黒}})$ を次のように定義する：

$$
\begin{aligned}
&[F_{\text{白黒}}(\{\text{白}\})](\omega_1) = 0.8, && [F_{\text{白黒}}(\{\text{黒}\})](\omega_1) = 0.2 \\
&[F_{\text{白黒}}(\{\text{白}\})](\omega_2) = 0.4, && [F_{\text{白黒}}(\{\text{黒}\})](\omega_2) = 0.6
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

これより，

$$
\begin{aligned}
&\max\{[F_{\text{白黒}}(\{\text{白}\})](\omega_1), [F_{\text{白黒}}(\{\text{白}\})](\omega_2)\} \\
&= \max\{0.8, 0.4\} = 0.8 = F_{\text{白黒}}(\{\text{白}\})](\omega_1)
\end{aligned}
$$

よって，定理 5.6 により，状態 ω_1 が推定できて，したがって，カーテンの後ろの壷は U_1 であることが推定できる．　□

♠ **注釈 5.2.** 図 5.4 のように，測定の逆問題は，推定 (フィッシャーの最尤法) であった．それならば，逆問題をフィッシャーが解いたのだから，

> フィッシャーは，「測定」を理解していたが，「測定」は簡単すぎて言うまでもないので，逆問題の「推定」を提案した

と考えたくなる．もちろん，こう言ってしまうとフィクションになってしまうが，次の事実は注目に値する：

目次; 他

ボルンの「量子力学の確率解釈ボルンの量子測定理論 [(量子版) 言語ルール 1] (1926)」の発見とフィッシャーの古典的名著「*Statistical Methods for Research Workers* (1925)」の出版時期は，ほぼ同じである．

本書の立場で言えば，「同時代に，フィッシャーとボルンは別の分野で同じようなことを考えていた」ということになる．フィッシャーの最尤法は統計学の第一基本原理なのだから、

言語ルール 1(2.7 節) は，ほとんどの科学の共通の基盤

ということになる．

5.3 フィッシャーの最尤法の例題

この節のすべての議論は，2.7 節の言語ルール 1 の帰結であるが，統計学の初歩を知っている読者ならば，本節の議論は簡単すぎるかもしれない．

5.3.1 フィッシャーの最尤法の例

例 5.8. [壷問題] 各壷 U_1, U_2, U_3 の中には，白球と黒球が表 5.1 で示したような割合で多数入っていると仮定する．

表 5.1 壷問題

白・黒＼壷	壷 U_1	壷 U_2	壷 U_3
白球	80%	40%	10%
黒球	20%	60%	90%

ここで，

(i) この 3 つの壷の中の一つの壷が選ばれている．ただし，この選ばれた壷が U_1，U_2，U_3 のどれかは，あなたは知らないとする．この壷の中から，球を一つ取り出す．この取り出した球の色が “白” であることがわかったとする．このとき，あなたは，この壷は，U_1，U_2，U_3 のどの壷と推定するか？

更に，

(ii) (i) に引き継いで，この壷の中から，球をもう一つ取り出す．この取り出した球の色が「黒」とする．即ち，(i) と合わせて，(白, 黒) が得られたことになる．このとき，あなたは，この壷は，U_1，U_2，U_3 のどれと推定するか？

を考える．

さて，上の問題 (i) と (ii) を測定理論の言葉で解答しよう．

古典基本構造 $[C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega,\nu) \subseteq B(L^2(\Omega,\nu))]$

を考える． ここに，

$$\omega_j \longleftrightarrow [\text{壷 } U_j \text{が選ばれた状態}] \quad (j = 1, 2, 3)$$

と考えて，状態空間 Ω ($=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$) を定める．更に，$L^\infty(\Omega)$ 内の観測量 $\mathsf{O} = (\{$ 白

, 黒 $\}, 2^{\{白, 黒\}}, F)$ を次のように定義する：

$$F(\{白\})(\omega_1) = 0.8, \qquad F(\{白\})(\omega_2) = 0.4, \qquad F(\{白\})(\omega_3) = 0.1$$
$$F(\{黒\})(\omega_1) = 0.2, \qquad F(\{黒\})(\omega_2) = 0.6, \qquad F(\{黒\})(\omega_3) = 0.9$$

(i) の解答　まず，測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}, S_{[*]})$ を考える．測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}, S_{[*]})$ により測定値 “白” が得られたと仮定した．したがって，

$$[F(\{白\})](\omega_1) = 0.8 = \max_{\omega\in\Omega}[F(\{白\})](\omega) = \max\{0.8,\ 0.4,\ 0.1\}$$

であるから，フィッシャーの最尤法 (定理 5.6) により，

$$[*] = \omega_1$$

を得る．よって，未知の壷は U_1 であると推定できる．

(ii) の解答　次に，同時測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\times_{k=1}^{2}\mathsf{O} = (X^2,\ 2^{X^2},\ \widehat{F} = \times_{k=1}^{2} F),\ S_{[*]})$ を考える．同時測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\times_{k=1}^{2}\mathsf{O}, S_{[*]})$ により測定値 (白, 黒) が得られたというのが問題 (ii) の仮定であった．ここで，

$$[\widehat{F}(\{(白, 黒)\})](\omega) = [F(\{白\})](\omega)\cdot[F(\{黒\})](\omega)$$

であるから，

$$[\widehat{F}(\{(白, 黒)\})](\omega_1) = 0.16, \quad [\widehat{F}(\{(白, 黒)\})](\omega_2) = 0.24,$$
$$[\widehat{F}(\{(白, 黒)\})](\omega_3) = 0.09$$

したがって, フィッシャーの最尤法 (定理 5.6) を適用して，$[\,*\,] = \omega_2$，すなわち，未知の 壷は U_2 であると推定できる．　□

例 5.9. [正規観測量 (i): $\Omega = \mathbb{R}$]　正規観測量を再論する．

古典基本構造 $[C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega, \nu) \subseteq B(L^2(\Omega, \nu))]$　　(ここに，$\Omega = \mathbb{R}$)

を考える．$\sigma > 0$ を固定する．$L^\infty(\mathbb{R})$ 内の正規観測量 $\mathsf{O}_{G_\sigma} = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, G_\sigma)$ を次のように定義する．

$$[G_\sigma(\Xi)](\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\Xi}\exp[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2]dx$$
$$(\forall\Xi \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \quad \forall\mu \in \Omega = \mathbb{R})$$

さらに，$L^\infty(\mathbb{R})$ 内の同時観測量 $\times_{k=1}^{3}\mathsf{O}_{G_\sigma}$ (略して, $\mathsf{O}^3_{G_\sigma}$) $= (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, G^3_\sigma)$ は次のように定まる：

$$
\begin{aligned}
&[G_\sigma^3(\Xi_1\times\Xi_2\times\Xi_3)](\mu)=[G_\sigma(\Xi_1)](\mu)\cdot[G_\sigma(\Xi_2)](\mu)\cdot[G_\sigma(\Xi_3)](\mu)\\
=&\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^3}\iiint_{\Xi_1\times\Xi_2\times\Xi_3}\exp[-\frac{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+(x_3-\mu)^2}{2\sigma^2}]\\
&\times dx_1dx_2dx_3\\
&(\forall\Xi_k\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}},k=1,2,3,\quad\forall\mu\in\Omega=\mathbb{R})
\end{aligned}
$$

よって， 測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\mathbb{R})}(\mathsf{O}^3_{G_\sigma},S_{[*]})$ を得る．ここで，次の問題を考える:

(a) 測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\mathbb{R})}(\mathsf{O}^3_{G_\sigma},S_{[*]})$ により，測定値 (x_1^0,x_2^0,x_3^0) $(\in\mathbb{R}^3)$ が得られたとする．このとき，$[*](\in\mathbb{R})$ を推定せよ．

解答 (a) 閉区間 Ξ_i を

$$\Xi_i=[x_i^0-\frac{1}{N},x_i^0+\frac{1}{N}]\qquad(i=1,2,3)$$

とする．ここで，N を十分大きな自然数として，フィッシャーの最尤法 (定理 5.6) により，「未知の状態 $[\,*\,]=\mu_0$」の推定問題は，次の $\mu_0(\in\Omega)$ を見つける問題となる:

$$[G_\sigma^3(\Xi_1\times\Xi_2\times\Xi_3)](\mu_0)=\max_{\mu\in\mathbb{R}}[G_\sigma^3(\Xi_1\times\Xi_2\times\Xi_3)](\mu)$$

これは，(N が十分に大きいから) 次と同値で，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^3}\exp[-\frac{(x_1^0-\mu_0)^2+(x_2^0-\mu_0)^2+(x_3^0-\mu_0)^2}{2\sigma^2}]\\
=&\max_{\mu\in\mathbb{R}}\Big[\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^3}\exp[-\frac{(x_1^0-\mu)^2+(x_2^0-\mu)^2+(x_3^0-\mu)^2}{2\sigma^2}]\Big]
\end{aligned}
$$

すなわち，

$$
\begin{aligned}
&(x_1^0-\mu_0)^2+(x_2^0-\mu_0)^2+(x_3^0-\mu_0)^2\\
=&\min_{\mu\in\mathbb{R}}\left\{(x_1^0-\mu)^2+(x_2^0-\mu)^2+(x_3^0-\mu)^2\right\}
\end{aligned}
$$

を満たす μ_0 を求めればよい．したがって，$\frac{d}{d\mu}\{\cdots\}=0$ を解いて，

$$\mu_0=\frac{x_1^0+x_2^0+x_3^0}{3}$$

を得る． □

[正規観測量 (ii): $\Omega=\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$]

古典基本構造 $[C_0(\Omega)\subseteq L^\infty(\Omega,\nu)\subseteq B(L^2(\Omega,\nu))]$ (ここに，$\Omega=\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$)

を考えて，

目次; 他

($\sharp_1$) 鉛筆の長さが 10cm〜30cm とわかっているときの，鉛筆の長さの測定

を考えよう．ただし，ここでは，

($\sharp_2$) 測定対象の状態を，「鉛筆の長さ μ」と「物差しの粗さ σ」とする．

すなわち，状態空間を $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ とする．$L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ 内の観測量 $\mathsf{O} = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, G)$ を

$$[G(\Xi)](\mu, \sigma) = [G_\sigma(\Xi)](\mu) \quad (\forall \Xi \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}},\ \forall (\mu, \sigma) \in \Omega = [10, 30] \times \mathbb{R}_+)$$

と定める．したがって，$L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ 内の同時観測量 $\mathsf{O}^3 = (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, G^3)$ は次のように定まる:

$$\begin{aligned}
&[G^3(\Xi_1 \times \Xi_2 \times \Xi_3)](\mu, \sigma) = [G(\Xi_1)](\mu, \sigma) \cdot [G(\Xi_2)](\mu, \sigma) \cdot [G(\Xi_3)](\mu, \sigma) \\
&= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^3} \int_{\Xi_1 \times \Xi_2 \times \Xi_3} \exp[-\frac{(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + (x_3 - \mu)^2}{2\sigma^2}] dx_1 dx_2 dx_3 \\
&(\forall \Xi_k \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, k = 1, 2, 3, \quad \forall (\mu, \sigma) \in K = [10, 30] \times \mathbb{R}_+ \subseteq \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)
\end{aligned}$$

上の ($\sharp_1$) によって，$K = [10, 30] \times \mathbb{R}_+$ として，同時測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)}(\mathsf{O}^3, S_{[*]}((K)))$ を得る．ここで，次の問題を考える:

(b) 測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)}(\mathsf{O}^3, S_{[*]}((K)))$ により，測定値 (x_1^0, x_2^0, x_3^0) $(\in \mathbb{R}^3)$ が得られたとする．このとき，$[*](= (\mu_0, \sigma_0) \in K = [10, 30] \times \mathbb{R}_+)$ —鉛筆の長さ μ_0 と物差しの粗さ σ_0 —を推定せよ．

解答 (b)　解答 (a) と同様の議論により，フィッシャーの最尤法 (定理 5.6) を用いて，未知の状態 $[\,*\,] = (\mu_0, \sigma_0)$ の推定問題は次と同値となる:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_0)^3} \exp[-\frac{(x_1^0 - \mu_0)^2 + (x_2^0 - \mu_0)^2 + (x_3^0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}] \\
&= \max_{(\mu, \sigma) \in [10, 30] \times \mathbb{R}_+} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^3} \exp[-\frac{(x_1^0 - \mu)^2 + (x_2^0 - \mu)^2 + (x_3^0 - \mu)^2}{2\sigma^2}] \right\}
\end{aligned}$$

したがって，$\frac{\partial}{\partial\mu}\{\cdots\}=0$，$\frac{\partial}{\partial\sigma}\{\cdots\}=0$ を解いて，

$$\mu_0=\begin{cases}10 & ((x_1^0+x_2^0+x_3^0)/3<10 \text{ のとき})\\ (x_1^0+x_2^0+x_3^0)/3 & (10\leqq(x_1^0+x_2^0+x_3^0)/3\leqq 30 \text{ のとき})\\ 30 & (30<(x_1^0+x_2^0+x_3^0)/3 \text{ のとき})\end{cases} \tag{5.12}$$

$$\sigma_0=\sqrt{\{(x_1^0-\widetilde{\mu})^2+(x_2^0-\widetilde{\mu})^2+(x_3^0-\widetilde{\mu})^2\}/3} \tag{5.13}$$

となる．ここに

$$\widetilde{\mu}=(x_1^0+x_2^0+x_3^0)/3$$

□

例 5.10. [同時正規測定におけるフィッシャーの最尤法]. $L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$ 内の同時正規観測量 $\mathsf{O}_G^n=(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^n,G^n)$ (*cf.* 式 (5.3)) を考えよう．これは、$L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$ 内の $\mathsf{O}^n=(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n},\bigtimes_{k=1}^n G_\sigma)$ と同じである．すなわち、

$$\begin{aligned}&[(\bigtimes_{k=1}^n G_\sigma)(\Xi_1\times\Xi_2\times\cdots\times\Xi_n)](\omega)=\bigtimes_{k=1}^n[G_\sigma(\Xi_k)](\omega)\\ &=\bigtimes_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\Xi_k}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x_k-\mu)^2\right]dx_k\\ &\qquad(\forall\Xi_k\in\mathcal{B}_X(=\mathcal{B}_{\mathbb{R}}),\ \forall\omega=(\mu,\sigma)\in\Omega(=\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+))\end{aligned}$$

測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)}(\mathsf{O}^n=(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^n,G_\sigma^n),S_{[*]})$ によって、測定値 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)(\in\mathbb{R}^n)$ が得られたと仮定しよう．このとき、尤度関数 $L_x(\mu,\sigma)(=L(x,(\mu,\sigma))$ は

$$L_x(\mu,\sigma)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n}\exp[-\frac{\sum_{k=1}^n(x_k-\mu)^2}{2\sigma^2}]$$

また, (5.9) の意味で,

$$L_x(\mu,\sigma)=\frac{\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n}\exp[-\frac{\sum_{k=1}^n(x_k-\mu)^2}{2\sigma^2}]}{\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\overline{\sigma}(x))^n}\exp[-\frac{\sum_{k=1}^n(x_k-\overline{\mu}(x))^2}{2\overline{\sigma}(x)^2}]} \tag{5.14}$$
$$(\forall x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\quad\forall\omega=(\mu,\sigma)\in\Omega=\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+).$$

と計算できて、次の尤度方程式を得る：

$$\frac{\partial L_x(\mu,\sigma)}{\partial\mu}=0,\quad\frac{\partial L_x(\mu,\sigma)}{\partial\sigma}=0 \tag{5.15}$$

よって、　フィッシャーの最尤法 (定理 5.6) から、未知状態 $[*] = (\mu, \sigma)$ $(\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ は次のように推定できる：

$$\mu = \overline{\mu}(x) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \tag{5.16}$$

$$\sigma = \overline{\sigma}(x) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{\mu}(x))^2}{n}} \tag{5.17}$$

5.4 人為的だが, 役に立つモーメント法

測定 $\mathsf{M}_{\mathcal{A}}\big(\mathsf{O} \equiv (X, \mathcal{F}, F),\ S_{[\rho]}\big)$ の n 回の並行測定 $\otimes_{k=1}^{n}\mathsf{M}_{\mathcal{A}}\big(\mathsf{O} \equiv (X, \mathcal{F}, F),\ S_{[\rho]}\big)$ $\big(= \mathsf{M}_{\otimes\mathcal{A}}\big(\bigotimes_{k=1}^{n}\mathsf{O} := (X^n, \mathcal{F}^n, \bigotimes_{k=1}^{n} F), S_{[\otimes_{k=1}^{n}\rho]}\big)$ の測定値が, $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)(\in X^n)$ だったとしよう. n は十分大きいとして, 大数の法則から,

$$\mathcal{M}_{+1}(X) \ni \nu_n\Big(\equiv \frac{\delta_{x_1} + \delta_{x_2} + \cdots + \delta_{x_n}}{n}\Big) \fallingdotseq \rho(F(\cdot)) \in \mathcal{M}_{+1}(X) \tag{5.18}$$

と考えてよいだろう. それならば, 状態 $\rho(\in \mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*))$ を未知として,

(A) 左辺 (=測定値 $x_1, x_2, \ldots, x_n$)) と観測量 $\mathsf{O} \equiv (X, \mathcal{F}, F)$ はわかっているのだから,

未知状態 $\rho(\in \mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*))$ は求めることができる

はずである.

いろいろな計算法があるが, 典型的な方法としては, 以下がある.

(B_1) 単純に考えるならば

$$\|\nu_n(\cdot) - \rho(F(\cdot))\|_{\mathcal{M}(X)} \tag{5.19}$$

を最小にする $\rho(\in \mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*))$ を求めれば良い

(B_2) 適当な $f_1, f_2, \cdots, f_n \in C(X)$ $(= X$ 上の連続関数全体) を最初に決めておいて, 並行測定 $\otimes_{k=1}^{n}\mathsf{M}_{\mathcal{A}}\big(\mathsf{O} \equiv (X, \mathcal{F}, F),\ S_{[\rho]}\big)$ の測定値が, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)(\in X)$ のとき,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\Big|\int_X f_k(\xi)\nu_n(d\xi) - \int_X f_k(\xi)\rho(F(d\xi))\Big| \\ =&\sum_{k=1}^{n}\Big|\frac{f_k(x_1) + f_k(x_2) + \cdots + f_k(x_n)}{n} - \int_X f_k(\xi)\rho(F(d\xi))\Big|\end{aligned}$$

を最小にする $\rho(\in \mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*))$ を求めれば良い.

(B_3) また, 古典測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}\big(\mathsf{O} \equiv (X, \mathcal{F}, F),\ S_{[*]}\big)$ ならば, 未知状態は $\rho = \delta_\omega$ と書けて,

$$0 = \sum_{k=1}^{n}\Big|\frac{f_k(x_1) + f_k(x_2) + \cdots + f_k(x_n)}{n} - \int_X f_k(\xi)[F(d\xi)](\omega)\Big| \tag{5.20}$$

を解く方法は有効で,　すなわち, 未知数 $\omega(\in \Omega)$ の連立方程式：

$$\begin{cases} \frac{f_1(x_1)+f_1(x_2)+\cdots+f_1(x_n)}{n} - \int_X f_1(\xi)[F(d\xi)](\omega) = 0 \\ \frac{f_2(x_1)+f_2(x_2)+\cdots+f_2(x_n)}{n} - \int_X f_2(\xi)[F(d\xi)](\omega) = 0 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \frac{f_m(x_1)+f_m(x_2)+\cdots+f_m(x_n)}{n} - \int_X f_m(\xi)[F(d\xi)](\omega) = 0 \end{cases}$$

を解く方法は, 有効なことが多い.

(B_4) 特に，$X = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m\}$ が有限集合ならば, $f_1, f_2, \cdots, f_m \in C(X)$ を

$$f_k(\xi) = \chi_{\{\xi_k\}}(\xi) = \begin{cases} 1 & (\xi = \xi_k) \\ 0 & (\xi \neq \xi_k) \end{cases}$$

と決めておいて, 並行測定 $\otimes_{k=1}^n \mathsf{M}_{\mathcal{A}}\big(\mathsf{O} \equiv (X, \mathcal{F}, F),\ S_{[*]}\big)$ の測定値が, $(x_1, x_2, ..., x_n)(\in X)$ のとき,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^n \Big| \frac{\chi_{\{\xi_k\}}(x_1) + \chi_{\{\xi_k\}}(x_2) + \cdots + \chi_{\{\xi_k\}}(x_n)}{n} \\ &\qquad - \int_X \chi_{\{\xi_k\}}(\xi)\rho(F(d\xi))\Big| \\ &= \sum_{k=1}^n \Big| \frac{\sharp[\{x_m \ :\ \xi_k = x_m\}]}{n} - \rho(F(\{\xi_k\}))\Big| \end{aligned}$$

を最小にする $\rho(\in \mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*))$ を求めれば良い

このような方法をモーメント法と呼ぶ. 注意点は,

(C_1) もちろん, (気分は大数の法則なのだから)n が十分に大きいことが好ましいが, 極端な話, $n = 1$ でも「それなりの推定」になる

(C_2) (B_2) のように，f_k の選び方は人為的だが, 使いやすい.

である.

モーメント法の演習問題：壺問題 5.2 の再掲

どちらの壺 (U_1 または U_2) がカーテンの後ろに置かれているのかあなたは知らない.
カーテンの後ろの壺から球を一つ取り出したら，白球だった.
このとき，壺は U_1 または U_2 のどちらか?　これを推定せよ.

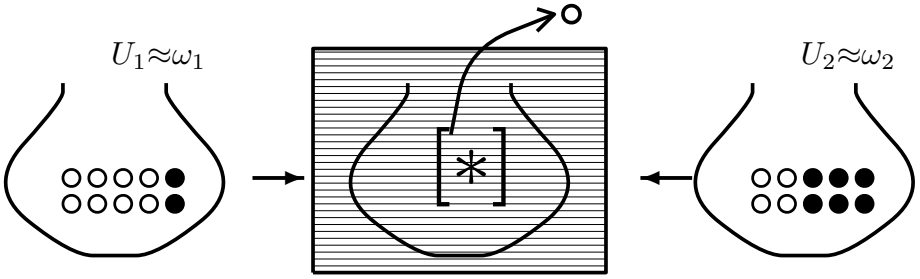


図 5.7: 純粋測定 (モーメント法)

解答 5.11. [壺問題 5.2 のモーメント法による解答]
測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}=(\{\text{白}, \text{黒}\}, 2^{\{\text{白}, \text{黒}\}}, F), S_{[*]})$ を考える．ここで, $L^\infty(\Omega)$ 内の観測量 $\mathsf{O}_{\text{白黒}} = (\{\text{白}, \text{黒}\}, 2^{\{\text{白}, \text{黒}\}}, F_{\text{白黒}})$ を次のように定義する：

$$[F_{\text{白黒}}(\{\text{白}\})](\omega_1) = 0.8, \qquad [F_{\text{白黒}}(\{\text{黒}\})](\omega_1) = 0.2$$
$$[F_{\text{白黒}}(\{\text{白}\})](\omega_2) = 0.4, \qquad [F_{\text{白黒}}(\{\text{黒}\})](\omega_2) = 0.6$$

測定値「白」を得たのだから, 近似サンプル空間 $(\{\text{白}, \text{黒}\}, 2^{\{\text{白}, \text{黒}\}}, \nu_1)$ は

$$\nu_1(\{\text{白}\}) = 1, \quad \nu_1(\{\text{黒}\}) = 0$$

となる.
[未知状態 $[*]$ が ω_1 のとき]

$$\begin{aligned}&(5.19)\\ =&|\nu_1(\{\text{白}\}) - [F_{\text{白黒}}(\{\text{白}\})](\omega_1)| + |\nu_1(\{\text{黒}\}) - [F_{\text{白黒}}(\{\text{黒}\})](\omega_1)|\\ =&|1-0.8| + |0-0.2| = 0.4\end{aligned}$$

[未知状態 $[*]$ が ω_2 のとき]

$$\begin{aligned}&(5.19)\\ =&|\nu_1(\{\text{白}\}) - [F_{\text{白黒}}(\{\text{白}\})](\omega_2)| + |\nu_1(\{\text{黒}\}) - [F_{\text{白黒}}(\{\text{黒}\})](\omega_2)|\\ =&|1-0.4| + |0-0.6| = 1.2\end{aligned}$$

よって，モーメント法 (B_1) により，状態 ω_1 が推定できて，したがって，カーテンの後ろの壺は U_1 であることが推定できる.

[II] 簡単すぎて, 大数の法則が見えなくなっていて, 却って難しくなってしまったかもしれないので, もう一つ次の問題を補足しておく.

問題 5.12. 上述のように, 「白」を取り出しとしよう. この「白球」を壷に戻してよくかき混ぜて, 次に取り出したのが「黒」だとしよう. これを全部で 7 回行って, 結局

白, 黒, 黒, 白, 黒, 白, 黒,

を得たとしよう. そこで問題 :

(a) カーテンの後ろの壷は, どちらの壷か?

である.

解答. 同時測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\times_{k=1}^7 \mathsf{O}= (\{\text{白, 黒}\}^7, 2^{\{\text{白, 黒}\}^7}, \times_{k=1}^7 F), S_{[*]})$ の測定値が, (白, 黒, 黒, 白, 黒, 白, 黒) と考えて, 「フィッシャーの最尤法」を使ってもよいが, ここでは, モーメント法で解答しよう.
[未知状態 $[*]$ が ω_1 のとき]

$$(5.19) = |3/7 - 0.8| + |4/7 - 0.2| = 52/70$$

[未知状態 $[*]$ が ω_2 のとき]

$$(5.19) = |3/7 - 0.4| + |4/7 - 0.6| = 10/70$$

よって, (B_1) により, 状態 ω_2 が推定できて, したがって, カーテンの後ろの壷は U_2 であることが推定できる.

□

例 5.13. **[頻出するモーメント法]** 状態空間 $\Omega(\approx \mathfrak{S}^p(C_0(\Omega)^*))$ を $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ = \{\omega = (\mu, \sigma) \mid \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0\}$ として, $L^\infty(\Omega)$ 内の観測量 $\mathsf{O}_G = (X(= \mathbb{R}), \mathcal{B}_\mathbb{R}, G)$ は次を満たすとする

$$\int_\mathbb{R} \xi[G(d\xi)](\mu, \sigma) = \mu, \quad \int_\mathbb{R} (\xi - \mu)^2 [G(d\xi)](\mu, \sigma) = \sigma^2$$
$$(\forall \omega = (\mu, \sigma) \in \Omega(= \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+))$$

ここに, $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ はボレル集合体とする. このとき, 同時測定 $\times_{k=1}^3 \mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}_G, S_{[*]})$ によって, $(x_1, x_2, x_3)(\in \mathbb{R}^3)$ が得られたとしよう. したがって, 3 標本分布 ν_3 は

$$\nu_3 = \frac{\delta_{x_1} + \delta_{x_2} + \delta_{x_3}}{3} \in \mathcal{M}_{+1}(\mathbb{R})$$

となる． $f_1(\xi)=\xi, f_2(\xi)=\xi^2$ としよう． モーメント法 (5.20) より，

$$
\begin{aligned}
0 =& \sum_{k=1}^{2}\Big|\int_{\mathbb{R}}\xi^k\nu_3(d\xi)-\int_{\mathbb{R}}\xi^k[G(d\xi)](\omega)\Big| \\
=& \sum_{k=1}^{2}\Big|\frac{(x_1)^k+(x_2)^k+(x_n)^k}{3}-\int_{\mathbb{R}}\xi^k[G(d\xi)](\mu,\sigma)\Big| \\
=& \Big|\frac{x_1+x_2+x_3}{3}-\mu\Big|+\Big|\frac{(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2}{3}-(\sigma^2+\mu^2)\Big|
\end{aligned}
$$

よって, モーメント法 (B_3) から,

$$
\begin{aligned}
\mu &= \frac{x_1+x_2+x_n}{3} \\
\sigma^2 &= \frac{(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2}{3}-\mu^2 \\
&= \frac{(x_1-\frac{x_1+x_2+x_n}{3})^2+(x_2-\frac{x_1+x_2+x_n}{3})^2+(x_3-\frac{x_1+x_2+x_n}{3})^2}{3}
\end{aligned}
$$

となる．正規分布を仮定していないにもかかわらず、これは, 式 (5.16) と式 (5.17) と同じであることに注意せよ． □

♠ **問 5.3.** 測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}{=}(X,2^X,F),\ S_{[*]})$ を考える． ただし, $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ は有限集合とする． このとき「フィッシャーの最尤法」とモーメント法」は, 同じ結論を推定することを確かめよ．

[解答] 測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}{=}(X,2^X,F),\ S_{[*]})$ によって, 測定値 $x_m(\in X)$ が得られたとしよう．

[フィッシャーの最尤法]:

(A) $\rho(F(\{x_m\})$ を最大にする $\rho(\in\mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*))$ 求めよ．

[モーメント法]:

(A) 近似サンプル空間は, $(X,2^X,\delta_{x_m})$ となるので,

$$
\begin{aligned}
&|0-\rho(F(\{x_1\})|+\cdots+|0-\rho(F(\{x_{m-1}\})|+|1-\rho(F(\{x_m\})| \\
&\qquad +|0-\rho(F(\{x_{m+1}\})|+\cdots+|0-\rho(F(\{x_n\})| \\
=&\rho(F(\{x_1\})+\cdots+\rho(F(\{x_{m-1}\})+(1-\rho(F(\{x_m\})) \\
&\qquad +\rho(F(\{x_{m+1}\})+\cdots+\rho(F(\{x_n\}) \\
=&1-2\rho(F(\{x_m\})
\end{aligned}
$$

を最小にする $\rho(\in\mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*))$ を求めよ．

よって, 「フィッシャーの最尤法」とモーメント法」は, 同じ結論を推定する

5.5 モンティ・ホール問題—高校生パズル—

♠ **サプリ 5.1.** 本書では、

- モンティ・ホール問題、３囚人問題、２つの封筒問題、ベルトランパラゴックス

等の問題を量子言語によって議論する．これらの問題はアマチュア数学愛好家の興味を掻き立てる問題で「こういう風に考えればわかりやすい」というような熱心な議論がされているが、確率論についての学問的な議論がされている場合は少ない．「学問的な議論」とは次のようなことである．

- 「なぜこれらの問題は紛らわしいのか？　パズルとして面白いのか？」を根底から考えれば、通常の (コルモゴロフの) 確率論の定式化を疑う必要がある．

つまり、学問としてするべきことは、

- 「新しい確率論」を提唱して、その下に上記の問題を議論すれば、パズル的面白さが消去されて、ただのルーチンによって自然にとけることを示す

ことである．つまり、確率・統計学を新たに構築することである．そうならば、「高校生パズル」ではなくて、確率・統計学におけるもっとも根本的な問題である．もちろん、著者の提案はその「新しい確率・統計学」こそ「量子言語」であって、

- 従来の確率・統計学に「測定概念 (=二元論の概念)」が欠如していることが、「紛らわしさ」の原因になっているである．言語的コペンハーゲン解釈「測定無くして確率無し」が無視されている

からである．「量子言語」はアマチュア数学愛好家たちの楽しみを奪うことはないと思う．たとえば、微積分学という大きな仕掛けを使わないで、球の体積の公式を求めることはやはり楽しい．

////

モンティ・ホール問題は，モンティ・ホール氏が司会をするアメリカのテレビ番組のゲームショー「Let's make a deal」に由来する確率の問題である．「放浪の天才数学者エルデシュ (著：ホフマン, 平石律子 (訳), 1998) 草思社」によると，エルデシュは，友人からこの問題を出されて答えを間違えたという話である．エルデシュが間違ってくれたお陰で，モンティ・ホール問題の話題性が更に増したと言える．ただし、著者の知る限り、この種の問題を数学者が得意ということはない．

モンティ・ホール問題とは次の問題である．[*2]

問題 5.14. [モンティ・ホール問題]

あなたはゲームショーに出演している．3 つのドア (すなわち，「1 番」，「2 番」，「3 番」)

[*2] この節の詳細は次の論文を見よ．

文献 [34]: S. Ishikawa, "Monty Hall Problem and the Principle of Equal Probability in Measurement Theory,"
Applied Mathematics, Vol. 3 No. 7, 2012, pp. 788-794. doi: 10.4236/am.2012.37117.

のうちの 1 つのドアの後ろには自動車 (当り), 他の 2 つのドアの後ろには羊 (はずれ) が隠されている．司会者は，どのドアの後ろに自動車が隠されているかを知っている．しかし，あなたはそれを知らない．司会者は問う「どのドアの後ろが自動車だと思いますか？」

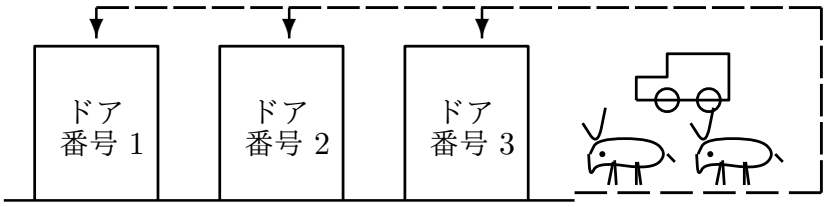
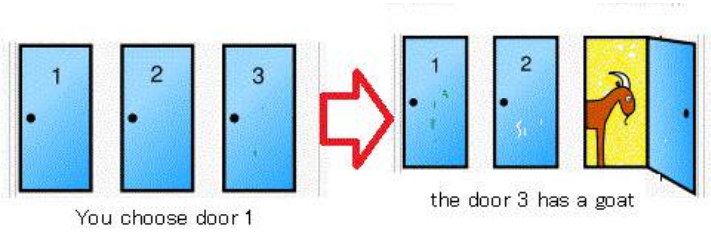


図 5.8: モンティ・ホール問題

さて，あなたはあるドアを選んだと仮定する．たとえば, 1 番のドアを選んだとする．このとき，司会者が「実は，3 番ドアの後ろは羊です」と言う．



更に，司会者は問う．「あなたは 1 番のドアを選んでしまいましたが，今からでも変更可能ですよ．2 番のドアに変更しますか？」と．さて，あなたはどうするか？

解答　状態空間を $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$(離散距離空間) とおく．ここに，

$\omega_1 \cdots\cdots$ 1 番ドアの後ろに自動車が隠れている状態
$\omega_2 \cdots\cdots$ 2 番ドアの後ろに自動車が隠れている状態
$\omega_3 \cdots\cdots$ 3 番ドアの後ろに自動車が隠れている状態

として，

古典基本構造 $[C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega, \nu) \subseteq B(L^2(\Omega, \nu))]$
(ここに，$\nu(\{\omega_k\}) = 1,\ k = 1, 2, 3$)

を得る．　また，$L^\infty(\Omega)$ 内の観測量 $\mathsf{O} = (\{1, 2, 3\}, 2^{\{1,2,3\}}, F)$ は次のように定義される．

$$
\begin{aligned}
&[F(\{1\})](\omega_1) = 0.0, \quad &&[F(\{2\})](\omega_1) = 0.5, \quad &&[F(\{3\})](\omega_1) = 0.5^{*3} \\
&[F(\{1\})](\omega_2) = 0.0, \quad &&[F(\{2\})](\omega_2) = 0.0, \quad &&[F(\{3\})](\omega_2) = 1.0 \\
&[F(\{1\})](\omega_3) = 0.0, \quad &&[F(\{2\})](\omega_3) = 1.0, \quad &&[F(\{3\})](\omega_3) = 0.0
\end{aligned} \tag{5.21}
$$

したがって，あなたは測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}{=}(\{1,2,3\}, 2^{\{1,2,3\}}, F), S_{[*]})$ —「1 番ドアの後ろに自動車が隠れている」と言って，司会者の返事を聞く測定—を行ったことになる．

(1) 測定値 1 を得る $\Longleftrightarrow$ 司会者が「1 番ドアの後ろに羊がいる」と言う
(2) 測定値 2 を得る $\Longleftrightarrow$ 司会者が「2 番ドアの後ろに羊がいる」と言う
(3) 測定値 3 を得る $\Longleftrightarrow$ 司会者が「3 番ドアの後ろに羊がいる」と言う

とする．

司会者が「3 番ドアの後ろに羊がいる」と教えてくれたのだから，測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O},\ S_{[*]})$ によって，測定値 “3” を得たことになる．したがって，フィッシャーの最尤法 (定理 5.6) により，あなたは 2 番ドアを選ぶべきだとなる．なぜならば

$$
\begin{aligned}
\max\{[F(\{3\})](\omega_1), [F(\{3\})](\omega_2), [F(\{3\})](\omega_3)\} &= \max\{0.5,\ \ 1.0,\ \ 0.0\} \\
&= 1.0 = [F(\{3\})](\omega_2)
\end{aligned}
$$

なので，$[*] = \omega_2$ と推定できる．したがって，あなたは 2 番ドアに変更すべきである． □

♠ **注釈 5.4.** 上記の解答を見れば，問い掛け「測定とは，何か？」が，無理難題で，広辞苑的定義以上のものを期待できないことが，わかると思う．「測定」が形而上学的概念であることに納得してもらえると思う．

- 上の解答は，測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O},\ S_{[*]})$ を書いて、フィッシャーの最尤法を適用するだけのワンパターンの方法であることに注意せよ．閃き不要の解答で、モンティ・ホール問題の解答として最も基本的である

モンティ・ホール問題の解答は，(統計学の) ベイズの定理を使った解答が普通で，これは第 7 章「ベイズ統計」と第 14 章「信念の確率」で述べる．

次は問 5.3 の系であるが、直接計算しておく．

注意 5.15. [モンティホール問題 (モーメント法による解答)] あなたは測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}{=}(\{1,2,3\}, 2^{\{1,2,3\}}, F)$, $S_{[*]})$ —「1 番ドアの後ろに自動車が隠れている」と言って，司会者の返事を聞く測定—を行ったことになる．測定値「3」を得たのだから，近似サンプル空間 $(\{1,2,3\}, 2^{\{1,2,3\}}, \nu_1)$ を得た．

---

^{*3} $0 < \alpha < 1$ として，$[F(\{2\})](\omega_1) = \alpha$，$[F(\{3\})](\omega_1) = 1 - \alpha$ でもよい．

すなわち，$\nu_1(\{1\}) = 0$, $\nu_1(\{2\}) = 0$, $\nu_1(\{3\}) = 1$ を得た． したがって，
[未知状態 $[*]$ が ω_1 のとき]

$$
\begin{aligned}
&\text{式 (5.19)} \\
&= |\nu_1(\{1\}) - F(\{1\})(\omega_1)| + |\nu_1(\{2\}) - F(\{2\})(\omega_1)| + |\nu_1(\{3\}) - F(\{3\})(\omega_1)| \\
&= |0-0| + |0-0.5| + |1-0.5| = 1,
\end{aligned}
$$

[未知状態 $[*]$ が ω_2 のとき]

$$
\begin{aligned}
&\text{式 (5.19)} \\
&= |\nu_1(\{1\}) - F(\{1\})(\omega_2)| + |\nu_1(\{2\}) - F(\{2\})(\omega_2)| + |\nu_1(\{3\}) - F(\{3\})(\omega_2)| \\
&= |0-0| + |0-0| + |1-1| = 0,
\end{aligned}
$$

[未知状態 $[*]$ が ω_3 のとき]

$$
\begin{aligned}
&\text{式 (5.19)} \\
&= |\nu_1(\{1\}) - F(\{1\})(\omega_3)| + |\nu_1(\{2\}) - F(\{2\})(\omega_3)| + |\nu_1(\{3\}) - F(\{3\})(\omega_3)| \\
&= |0-0| + |0-1| + |1-0| = 2.
\end{aligned}
$$

なので，$[*] = \omega_2$ と推定できる．したがって，あなたは 2 番ドアに変更すべきである．

□

5.6 二つの封筒問題 —高校生パズル—

本節は, 次からの抜粋：

文献 [47]: S. Ishikawa; The two envelopes paradox in non-Bayesian and Bayesian statistics (arXiv:1408.4916v4 [stat.OT] 2014)

ベイズの定理 (*cf.* 第 7 講) による「二つの封筒問題」へのアプローチは, 学部レベルの難しさがあって, それなりにストーリーがあって考えやすい. しかし, ベイズの定理を使わない方法は, 簡単すぎて高校レベルであるが, とっかかりが無くてむしろ間違いやすい. 以下にこれについて述べる.

5.6.1 問題 (二つの封筒問題)

次が有名な「二つの封筒問題 (*cf.* [62])」である.

問題 5.16. [二つの封筒問題]

ゲームの主催者は, あなたに二つの封筒 (i.e., 封筒 A と封筒 B) から一つの封筒を選ぶチャンスを提供した. 封筒 A と封筒 B にそれぞれ V_1 円と V_2 円が入っている. あなたには, 次が知らされている.

(a) $\frac{V_1}{V_2} = 1/2$ または, $\frac{V_1}{V_2} = 2$

交換写像 $\overline{x} : \{V_1, V_2\} \to \{V_1, V_2\}$ を

$$\overline{x} = \begin{cases} V_2, & (\text{ if } x = V_1), \\ V_1 & (\text{ if } x = V_2) \end{cases}$$

で定める.

図 5.9: 二つの封筒問題

あなたは無作為に（公正なコイン投げによって）一方の封筒を選んだとしよう． そして, x_1 円を得たとする． (すなわち，封筒 A[resp B] ならば，V_1 円 [resp. V_2 円] 得たことになる)．このとき，主催者は, $\overline{x}_1$ 円得ることになる． したがって, あなたは「$\overline{x}_1 = x_1/2$」または「$\overline{x}_1 = 2x_1$」と推定できる． ここで, あなたには, あなたの x_1 円と主催者の $\overline{x}_1$ 円と変更するという選択肢があるとしよう．$x_1 = \alpha$ としよう． さて, このままにして, α 円を獲得するか？または, 変更して, $\alpha/2$ 円または 2α 円を獲得するか？さて, あなたはどうする．

[(P1):どこがパラドックスなのか ?]. あなたは次のように考えるかもしれない． 確率 1/2 で, もう一方の封筒 B は, $\alpha/2$ 円か, または 2α 円入っているに違いない． したがって, 封筒 B 内のお金の期待値 (それを E(α) と記す) は,

$$E(\alpha) = (1/2)(\alpha/2) + (1/2)(2\alpha) = 1.25\alpha \tag{5.22}$$

となる．これは封筒 A の α 円より大きい． したがって,「封筒 A を封筒 B に変更しよう」とあなたは考えるだろう．

しかし, これはおかしい．

なぜならば, 封筒 A と封筒 B の役割は同じはずだからである．あなたがランダムに (i.e., 確率 1/2 で) 選んだのが，封筒 B だとすると, こんどは封筒 A を選ぶのだろうか？このパラドクスが, 有名な「二つの封筒問題 (i.e., ”The Other Person’s envelope is Always Greener”)」である．

5.6.2 (P1):二つの封筒問題 5.16 の解答

古典基本構造

$$[C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega,\nu) \subseteq B(L^2(\Omega,\nu))]$$

を考える.

$X = \overline{\mathbb{R}}_+ = \{x \mid x$ は非負実数 $\}$ と定める. 二つの連続写像 $V_1 : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ と $V_2 : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ を考える. ここで, たとえば,

$$V_2(\omega) = 2V_1(\omega) \text{ または, } \ 2V_2(\omega) = V_1(\omega) \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

としてもよいが, そう仮定しなくてもよい.

各 $k = 1, 2$ に対して, $L^\infty(\Omega,\nu)$ 内の観測量 $\mathsf{O}_k = (X(= \overline{\mathbb{R}}_+), \mathcal{F}(= \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+} : \text{the Borel field}), F_k)$ を次のように定める

$$[F_k(\Xi)](\omega) = \begin{cases} 1 & (\text{ if } V_k(\omega) \in \Xi) \\ 0 & (\text{ if } V_k(\omega) \notin \Xi) \end{cases}$$

$$(\forall \omega \in \Omega, \forall \Xi \in \mathcal{F} = \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+} \text{ i.e., the Bore field in } X(= \overline{\mathbb{R}}_+) \ )$$

さらに, $L^\infty(\Omega,\nu)$ 内の観測量 $\mathsf{O} = (X, \mathcal{F}, F)$ を以下のように定める.

$$F(\Xi) = \frac{1}{2}\Big(F_1(\Xi) + F_2(\Xi)\Big) \quad (\forall \Xi \in \mathcal{F}) \tag{5.23}$$

すなわち,

$$[F(\Xi)](\omega) = \begin{cases} 1 & (\text{ if } V_1(\omega) \in \Xi, \ \ V_2(\omega) \in \Xi) \\ 1/2 & (\text{ if } V_1(\omega) \in \Xi, \ \ V_2(\omega) \notin \Xi) \\ 1/2 & (\text{ if } V_1(\omega) \notin \Xi, \ \ V_2(\omega) \in \Xi) \\ 0 & (\text{ if } V_1(\omega) \notin \Xi, \ \ V_2(\omega) \notin \Xi) \end{cases}$$

$$(\forall \omega \in \Omega, \forall \Xi \in \mathcal{F} = \mathcal{B}_X \text{ i.e., } \Xi \text{ は } X(= \overline{\mathbb{R}}_+) \text{ のボレル部分集合})$$

任意の状態 $\omega(\in \Omega)$ を未知として, 固定する.

測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega,\nu)}(\mathsf{O} = (X, \mathcal{F}, F), S_{[\omega]})$ を考える. 言語ルール 1(2.7 節) から, 次が言える.

(A_1) あなたは, 測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega,\nu)}(\mathsf{O} = (X, 2^X, F), S_{[\omega_0]})$ によって測定値 $\left\{ \begin{array}{c} V_1(\omega) \\ V_2(\omega) \end{array} \right\}$ が得られたとする. もちろん, その確率は $\left\{ \begin{array}{c} 1/2 \\ 1/2 \end{array} \right\}$ である.

ここで金額を変更すれば，$\left\{\begin{array}{c} V_2(\omega) \\ V_1(\omega) \end{array}\right\}$ 円となり，あなたの利得は $\left\{\begin{array}{c} V_2(\omega)-V_1(\omega) \\ V_1(\omega)-V_2(\omega) \end{array}\right\}$ 円である．したがって，変更による利得の期待値は

$$(V_2(\omega)-V_1(\omega))/2+(V_1(\omega)-V_2(\omega))/2=0$$

となる． すなわち，交換してもしなくても, 期待値は同じということになる．よって，*"The Other Person's envelope is Always Greener"* は当てにならない．

注意 5.17. 問題 5.16 の条件 (a) は不要だった．この条件は、問題 5.16 の本質を見誤らせる役割をしている．

5.6.3 別解: 二つの封筒問題 5.16

状態空間 Ω を $\Omega=\overline{\mathbb{R}}_+$ として，ルベーグ測度 ν を仮定する． 古典基本構造

$$[C_0(\Omega)\subseteq L^\infty(\Omega,\nu)\subseteq B(L^2(\Omega,\nu))]$$

を考える．また，$\widehat{\Omega}=\{(\omega,2\omega)\mid\omega\in\overline{\mathbb{R}}_+\}$ とおいて，

$$\Omega\ni\omega\underset{(\text{同一視})}{\longleftrightarrow}(\omega,2\omega)\in\widehat{\Omega} \tag{5.24}$$

を考える． また，$V_1:\Omega(\equiv\overline{\mathbb{R}}_+)\to X(\equiv\overline{\mathbb{R}}_+)$ と $V_2:\Omega(\equiv\overline{\mathbb{R}}_+)\to X(\equiv\overline{\mathbb{R}}_+)$ を以下のようにさだめる．

$$V_1(\omega)=\omega,\quad V_2(\omega)=2\omega\qquad(\forall\omega\in\Omega)$$

$L^\infty(\Omega,\nu)$ 内の観測量 $\mathsf{O}=(X(=\overline{\mathbb{R}}_+),\mathcal{F}(=\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+}:\text{ the Borel field}),F)$ を以下のように定める．

$$[F(\Xi)](\omega)=\left\{\begin{array}{ll} 1 & (\text{ if }\omega\in\Xi,\ \ 2\omega\in\Xi) \\ 1/2 & (\text{ if }\omega\in\Xi,\ \ 2\omega\notin\Xi) \\ 1/2 & (\text{ if }\omega\notin\Xi,\ \ 2\omega\in\Xi) \\ 0 & (\text{ if }\omega\notin\Xi,\ \ 2\omega\notin\Xi) \end{array}\right.\qquad(\forall\omega\in\Omega,\forall\Xi\in\mathcal{F})$$

未知の状態 $\omega(\in\Omega)$ を固定して，測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega,\nu)}(\mathsf{O}=(X,\mathcal{F},F),S_{\omega]})$ を考えよう． 言語ルール 1(2.7 節) によれば,

(A$_2$) $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega,\nu)}(\mathsf{O}=(X,\mathcal{F},F),S_{\omega]})$ によって，測定値 $x(\in X)$，すなわち，$\left\{\begin{array}{c} x=\omega \\ x=2\omega \end{array}\right\}$ を得る確率は，$\left\{\begin{array}{c} 1/2 \\ 1/2 \end{array}\right\}$ である．

ここで, 金額を変更すれば，$\left\{\begin{array}{c} 2\omega \\ \omega \end{array}\right\}$ となり, あなたの変更による利得は $\left\{\begin{array}{c} 2\omega-\omega \\ \omega-2\omega \end{array}\right\}$ である．よって, 変更による利得の期待値は

$$(2\omega-\omega)/2+(\omega-2\omega)/2=0$$

である． すなわち，交換してもしなくても, 期待値は同じということになる．よって，*"The Other Person's envelope is Always Greener"* は当てにならない．

注意 5.18. §5.6.2 と §5.6.3 の解答では、フィッシャーの最尤法が適用できないことに注意せよ．もし適用しようとすれば、次節で述べるように、袋小路に陥る．

5.6.4 (P1):二つの封筒問題で，「どこで間違えたのか？」がわかる解答

さて, 測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega,\nu)}(\mathsf{O}=(X,\mathcal{F},F),S_{[*]})$ によって，測定値 α が得られたとしよう． このとき, 次の尤度関数を計算しておく．

$$f(\alpha,\omega)\equiv\inf_{\omega_1\in\Omega}\left[\lim_{\Xi\to\{x\},[F(\Xi)](\omega_1)\neq 0}\frac{[F(\Xi)](\omega)}{[F(\Xi)](\omega_1)}\right]=\left\{\begin{array}{ll} 1 & (\omega=\alpha/2 \text{ or } \alpha) \\ 0 & (\text{ elsewhere }) \end{array}\right.$$

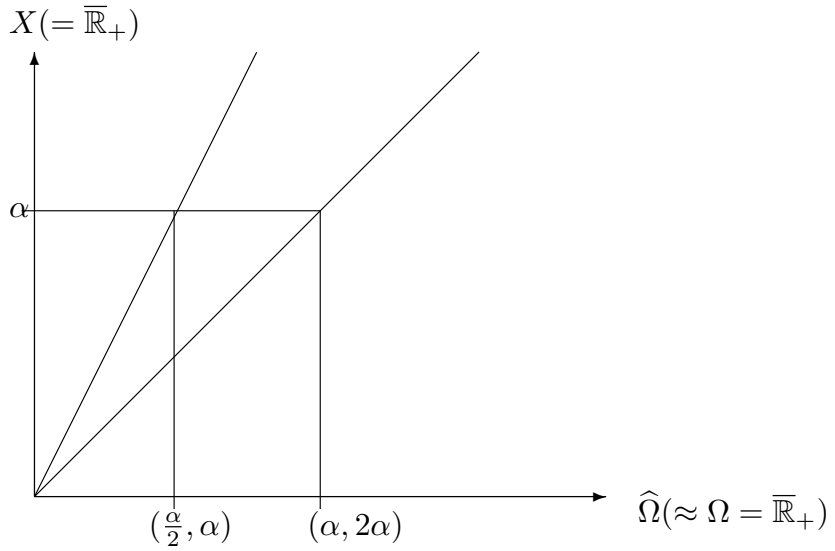


図 5.10: 二つの封筒問題 (尤度関数)

したがって, フィッシャーの最尤法によって,

(B_1) 未知状態 $[*]$ は, $\alpha/2$ または α である.
$\Big($ もし $[*]=\alpha/2$ [resp. $[*]=\alpha$] ならば, 変更による利得は
$(\alpha/2-\alpha)$ [resp. $(2\alpha-\alpha)$] となる $\Big)$.

しかしながら, 当然のことであるが, フィッシャーの最尤法は次を主張するわけではない.

$$(B_2)\begin{cases} \text{"}[*]=\alpha/2 \text{ である確率"}=1/2 \\ \text{"}[*]=\alpha \text{ である確率"}=1/2 \\ \text{"}[*] \text{ がそれ以外の確率"}=0 \end{cases}$$

は保証されてわけではない. したがって, [(P1): どこがパラドックスなの？] 内の文言「確率 1/2 で」が間違っている.

結局,

(C) **状態空間 Ω や測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega,\nu)}(\mathsf{O}=(X,\mathcal{F},F),S_{[*]})$ を明示して, 議論すれば, 間違いようがない**

と結論できる.

♠ **サプリ 5.2.** 本書では、

- モンティ・ホール問題、３囚人問題、２つの封筒問題、ベルトランパラゴックス

等の問題を量子言語によって議論する. 「答えが出ればよい」というのでは高校生パズルである. 量子言語による解答では、「測定」を記述することだけに集中すればい. そうすれば、どのような方法 (フィッシャーの最尤法等) 解いたかが自然と明確になる. その分、パズル的な面白さがなくなってしまったとも言える.

////

注意 5.19. 問題 5.16(二つの封筒問題) において, 仮定 (b) は必要不可欠である. これがないと, 観測量 $\mathsf{O}=(X,\mathcal{F},F)$ を (5.23) 式で定義することができなくなってしまう. したがって, 仮定 (b) がない場合は,「答えがない問題」になってしまう. ただし,「等確率の原理」, すなわち,

(♯) 今選択すべきな状況が n 個あるとして, どの状況も他の状況と比べて 選択すべき理由が

目次; 他

対称的なとき，それぞれの状況を 1/n の確率で選択とする習慣のことを 「等確率の原理」と言う．

このような，情報が対称的な場合は 公平なコイン投げで決めるという立場では，仮定 (b) が記載されていなくても，「等重率に基づいて，観測量 $\mathsf{O} = (X, \mathcal{F}, F)$ が定義できる」という議論が可能である．等確率の原理については，第 7, 14 章で再論する．

♠ **注釈 5.5.** 読者は次のように考えるかもしれない．

($\sharp_1$) ([(P1): どこがパラドックスなのか?] で述べたように) 問題 5.16 は封筒 A と B の対称性から直ちに解ける

この解答 ($\sharp_1$) は間違っているとは言えないが、十分ではない．なぜならば、

($\sharp_2$) “解答 ($\sharp_1$) は如何なる理論に基づいているのか？” が明らかにされていないからである．一方、5.6.2 節の解答は、量子言語に基づいている．

この ($\sharp_2$) の観点は重要である．たとえば、運動は相対的なのだから、“地動説　vs. 天動説” などはどちらとも言えないわけだが、すくなくとも、次が言える：

($\sharp_3$) ニュートン力学を適用する場合は、天動説よりも地動説の方がやりやすい．

天の邪鬼的な言い方をするならば、

($\sharp_4$) アリストテレスの世界観の下では、地動説よりも天動説の方がしっくりする．

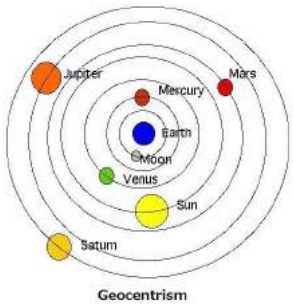
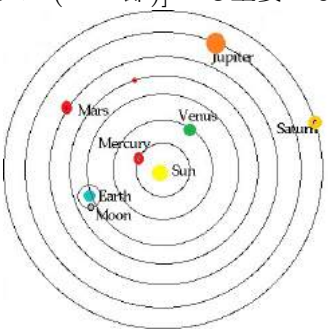
と言える．したがって、コペルニクス的転回の意味は、

$$\boxed{\text{アリストテレスの世界観}} \xrightarrow[\text{(コペルニクス的転回)}]{} \boxed{\text{ニュートン力学的世界観}} \tag{5.25}$$

であって、次ではない

$$\boxed{\text{天動説}} \xrightarrow[\text{(コペルニクス的転回)}]{} \boxed{\text{地動説}} \tag{5.26}$$

式 (5.26) は、コペルニクス的転回 (5.25) の象徴的な一つの事件に過ぎない．したがって、($\sharp_2$) の問いかけ「如何なる世界記述法に基づいているか？」は重要である．本書の唯一の主張は、主張 1.1 の「量子言語」なのだから、量子言語に基づく 5.6.2 節の解答を主張したい．問いかけ ($\sharp_2$)「如何なる世界記述法に基づいているか？」は、第 12 章 [ゼノンのパラドック (12.4 節)] でも重要になる．



$\Longleftrightarrow$
VS.