第 3 講

言語的コペンハーゲン解釈

測定理論 (=量子言語) は次のように定式化された.

$$\bullet\quad \underset{(=\text{量子言語})}{\boxed{\text{測定理論}}} := \underbrace{\overset{[\text{言語ルール 1}]}{\underset{(cf.\ \ 2.7\text{ 節})}{\boxed{\text{測定}}}} + \overset{[\text{言語ルール 2}]}{\underset{(cf.\ \ 8.3\text{ 節})}{\boxed{\text{因果関係}}}}}_{\text{一種の呪文 (ア・プリオリな認識)}} + \underbrace{\overset{[\text{言語的コペンハーゲン解釈}]}{\underset{(cf.\ \ 3.1\text{ 節})}{\boxed{\text{言語的解釈}}}}}_{\text{呪文の使い方のマニュアル}}$$

測定理論は

> 言語ルール 1 (測定;2.7 節) と言語ルール 2 (因果関係;8.3 節) の「言葉遣い」を手本に言語的解釈を指針として, 諸科学を記述せよ

と主張する．本章では，測定に関する言語ルール 1 (測定;2.7 節) の使い方の指針「言語的解釈」を説明する.

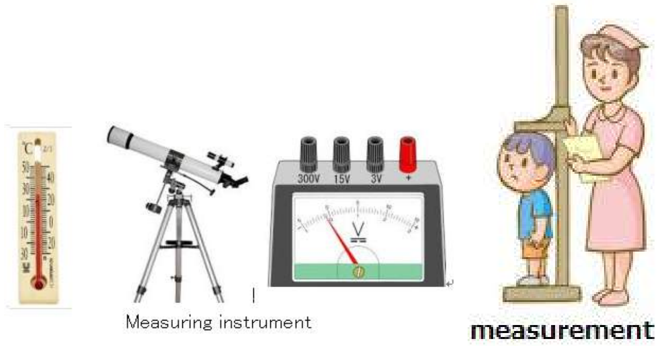
前章で, 「言語的解釈」に頼らなかったのは, 問題が簡単だった

からで, 本章では, 多少レベルを上げる.

3.1 言語的解釈 (=言語的コペンハーゲン解釈)

3.1.1 前章までの復習

前講までで, 次の呪文 (言語ルール 1(測定)) を「丸暗記」した．そして, 簡単な例を幾つか演習した.



(A): 言語ルール 1(測定)　純粋型 (*cf.* 2.7 節で読めるようになる)

あらゆるシステムはある基本構造 $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}]_{B(H)}$ 内で定式化できる． $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}]_{B(H)}$ 内で定式化された W^*-測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}{=}(X,\mathcal{F},F), S_{[\rho]})$ $\Big($ または，C^*-測定 $\mathsf{M}_{\mathcal{A}}\big(\mathsf{O}{=}(X,\mathcal{F},F), S_{[\rho]}\big)$ $\Big)$ を考えよう．すなわち，

- ある**状態** $\rho(\in \mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*)$：状態空間) を持つシステムに対する**観測量** $\mathsf{O}{=}(X,\mathcal{F},F)$ の W^*-測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}, S_{[\rho]})$ $\Big($ または，C^*-測定 $\mathsf{M}_{\mathcal{A}}\big(\mathsf{O}{=}(X,\mathcal{F},F), S_{[\rho]}\big)$ $\Big)$

を考える．このとき，W^*-測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}, S_{[\rho]})$ $\Big($ または，C^*-測定 $\mathsf{M}_{\mathcal{A}}\big(\mathsf{O}{=}(X,\mathcal{F},F), S_{[\rho]}\big)$ $\Big)$ により得られる**測定値** x $(\in X)$ が，Ξ $(\in \mathcal{F})$ に属する確率は，(もし $F(\Xi)$ が ρ で本質的連続ならば) $\rho(F(\Xi))$ $(\equiv {}_{\mathcal{A}^*}(\rho, F(\Xi))_{\overline{\mathcal{A}}})$ で与えられる．

もちろん，「数学込みの丸暗記」で，したがって，「基本構造 $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}]_{B(H)}$」，「状態空間 $\mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*)$」，「観測量 $\mathsf{O}{=}(X,\mathcal{F},F)$」，「因果作用素列 $\{\Phi_{t_1,t_2}$」等の数学的定義も暗記したはずである．

「丸暗記」したのならば，原理的には，

(B_1) 次にすべきことは「実戦」のみで，街へ出て，呪文 1 (=言語ルール 1) をドンドン使えばよい．言語なのだから，初めはうまく使えないかもしれないが，試行錯誤しているうちに段々と上達するだろう．

である．　もちろん，

$$\text{(B2)}\quad \underset{(=\text{量子言語})}{\boxed{\text{測定理論}}} := \underbrace{\overset{[\text{言語ルール 1}]}{\underset{(cf.\ \ 2.7\text{ 節})}{\boxed{\text{測定}}}} + \overset{[\text{言語ルール 2}]}{\underset{(cf.\ \ 8.3\text{ 節})}{\boxed{\text{因果関係}}}}}_{\text{一種の呪文 (ア・プリオリな認識)}} + \underbrace{\overset{[\text{言語的コペンハーゲン解釈}]}{\underset{(cf.\ \ 3.1\text{ 節})}{\boxed{\text{言語的解釈}}}}}_{\text{呪文の使い方のマニュアル}}$$

なので，呪文 2(言語ルール 2 (因果関係;8.3 節)) も丸暗記して，街へ出れば，「無敵」だろう．

これが，「量子言語の精神」である．しかし，

(C) 量子言語の習得・上達の速度をなるべく速くしたい

と思うのは人情で, すなわち,

言語的解釈 (呪文 1 と 2 の使い方のマニュアル)

があった方がよい． 次にこのマニュアルについて説明する．

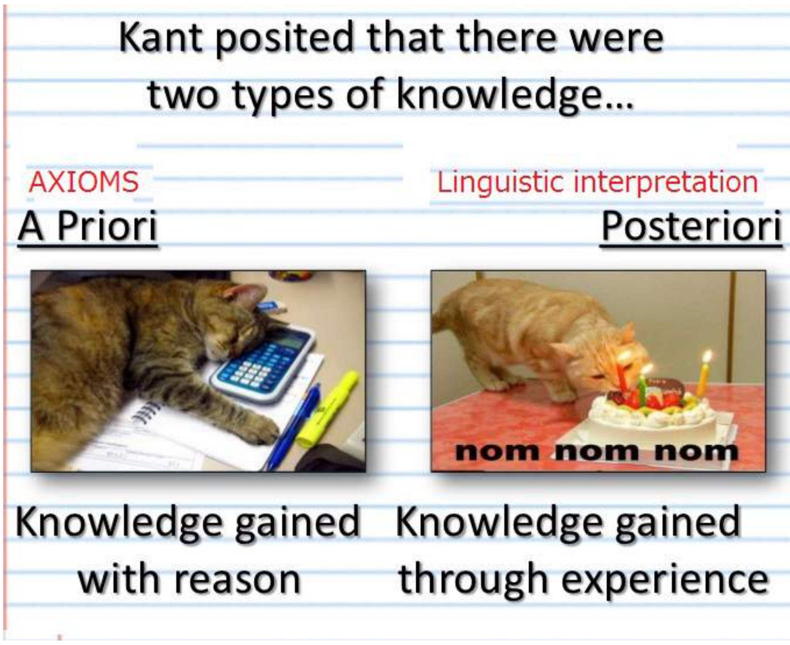
♠ **サプリ 3.1.** カントト哲学の

ア・プリオリな認識

(すなわち，実験検証できないにもかかわらず，すべての経験の対象に無条件にあてはまる命題) を，測定理論の [言語ルール 1 (測定;2.7 節) と言語ルール 2 (因果関係;8.3 節)] と対応させたくなる．つまり、

$\boxed{\text{ア・プリオリな認識}}$ $\overset{(\text{対応})}{\longleftrightarrow}$ $\boxed{\text{言語ルール 1 と 2}}$
(カント哲学) (量子言語)

$\boxed{\text{ポステリオリな認識}}$ $\overset{(\text{対応})}{\longleftrightarrow}$ $\boxed{\text{言語的コペンハーゲン解釈}}$
(カント哲学) (量子言語)



カント哲学と量子言語は，共に形而上学的世界記述法の確立を目指しているのだから，ある種の対応があってもよいだろう． カント哲学も量子言語も共に二元論の確立を目指したのだから、しかも量子言語の二元論は誰でもわかるのだから、量子言語がわかれば, カント哲学（純粋理性批判）がわかったような気分になることができる．、しかしながら、文芸的側面を無視する立場から言うと、量

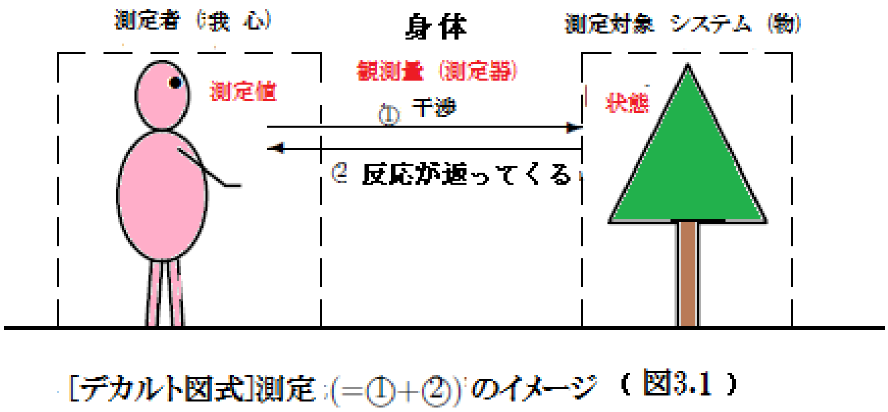


図 3.1　デカルト図式：測定のイメージ図 (*cf.* [32])

子言語を知っていればカント哲学は不要である.
文献 [32]:S. Ishikawa, Quantum Mechanics and the Philosophy of Language: Reconsideration of Traditional Philosophies, *JQIS*, Vol. 2, No. 1, 2012, pp.2-9. (doi: 10.4236/jqis.2012.21002)

3.1.2　デカルト図式 (言語的解釈の基本図式)

二つの呪文 (=言語ルール 1 と 2) を「数学込みの丸暗記」をして, これを, 5 年ぐらい試行錯誤して使い続けていれば, 自然と「使い方のテクニック」を会得できるかもしれないが, やはり,「使い方のマニュアル」のようなものがあった方が手っ取り早い. すなわち,

「呪文の使い方のマニュアル」が,「言語的解釈」である.

以下に, これ (=言語的解釈) を説明しよう.
「言語ルール 1」の文章中に, 「測定」という言葉が　出てくるのだから,

(D_1)「測定者」と「測定対象」からなる二元論

を考えたくなる. デカルトのコギト命題「我思う、故に我あり」の意味するところは、「科学を記述するには、我 (=測定者=一人称) が不可欠」ということの発見であると考える. しかしながら,「測定者」と「測定対象」だけでは, 不十分で, 「測定器」がなければ, 「測定」は成立しない. したがって, 測定のイメージは, 図 3.1[デカルト図式] のようになる.

(D_2) 測定のイメージとしては,

ⓐ　測定者が測定対象に干渉する. 例えば,「光を当てる」, 「(生徒の学力を知りたいのな

らば) テストする」などと思えばよい.

ⓑ 反応を測定器 (電流計, 温度計, 望遠鏡, メガネ等だけでなく感覚器 (目, 耳, 手のひら) も含む) を通して，脳で感知すること (脳で感知したものを「測定値」と呼ぶ)

と思えばよいだろう.

すなわち,「測定者」と「測定対象」との相互作用が測定である．ただし,

(D_3) **言語的コペンハーゲン解釈では，この相互作用のことは，表立っては言わない**

なぜならば,「相互作用」と言ってしまうと,「相互作用とは, 何か？」とか「相互作用を記述する方程式は何か？」などを問われてしまって, 答えに窮してしまうからである. もしこれに答えることができてしまったら, デカルト図式すべてが明確になってしまって, つまり,「そうならば, 二元論は不要で, 一元論だろう」と言われてしまうからである. 相互作用を記述する方程式を知らないから, 苦肉の策として,

(D_4)「相互作用 [ⓐ, ⓑ]」と言わずに,「観測量 (測定器)」という言葉でお茶を濁す

のが, 二元論である.

したがって，混乱を避けるためには，デカルト図式 3.1 で，相互作用ⓐとⓑ は書かない方がよかったかもしれないが,「表立っては言わない」を強調するために，敢えて書いた.

結局,

(D_5) 測定理論は,

$$\underset{(\text{測定者, 脳, 心})}{\text{「測定値」}}, \quad \underset{(\text{温度計, 目, 耳, 身体, 北極星 } (cf.\ \text{注釈 } 3.1))}{\text{「観測量 (= 測定器)」}}, \quad \underset{(\text{物})}{\text{「状態」}}, \tag{3.1}$$

の三元論である.

と言った方が正確かもしれないが, デカルト=カント哲学の伝統の下に, 三つから二つを取り出して,「心身二元論」,「物心二元論」とか言って,「二元論」という言葉が流布している.

3.1.3 言語的解釈 [(E_1)-(E_8)]

言語的コペンハーゲン解釈は,「言語ルール 1 と 2」の使い方のマニュアル (=注意事項) なのだから, 丁寧に書けば切りがない. 一応, 羅列しておけば, 以下の (E_1)-(E_8) ぐらいと思えばよい. 特に, 重要かつ意外なのは,

「測定は一回だけ」

である.

(E):言語的解釈 (=言語的コペンハーゲン解釈)

デカルト図式 3.1 を念頭に置いてて, 次の (E_1)-(E_7) を注意して, 言語ルール 1 と 2 を言葉遣いで, 諸現象を記述せよ.

(E_1) 「我 (=測定者)」と「物 (=測定対象)」の 2 つから成る二元論で，当然,「我 (=測定者)」と「物 (=測定対象)」を混同してはならない. 喩えて言うならば,「観客は舞台に上がらない」である.

(E_2)「物 (=測定対象)」の方には，時間・空間を想定するが,「我 (=測定者)」には，時間・空間を想定しない．したがって，測定理論には,「測定時刻, 測定後, 測定した瞬間」,「時制」の概念がないので，測定理論で記述される諸科学にも「時制」の概念はない

(E_3) 測定は,「我 (=測定者)」と「物 (=測定対象)」の相互作用とイメージしてもよいが，相互作用のことを陽には言わない.

(E_4) 測定は一回だけしかできない. しかも，測定後の状態は考えない.

(E_5) 測定なくして，確率なし

(E_6) 観測量が先で，状態が後，すなわち，観測量は状態より優先する.

(E_7) 状態は変化しない.

等である．いろいろとあって雑多な感じがするかもしれないが，それは「公理・ルール」というより「言語ルールの使い方の指示 (マニュアル)」であるためで，　細かいことを言えば, 切りがない.　極端な (正確な) 言い方をすれば,「本書で述べることすべてが, 言語的コペンハーゲン解釈」である.

また, 本書の主張 (第 1 章の主張 1.1) は

二元論的観念論の最終到達点が, 量子言語

なのだから,

(E_8) ギリシャ以来の哲学者たちの金言の多くは, 言語的コペンハーゲン解釈の一部になっている

と思ってもよいだろう.

上の (E_8) は信じ難い奇跡であるが,

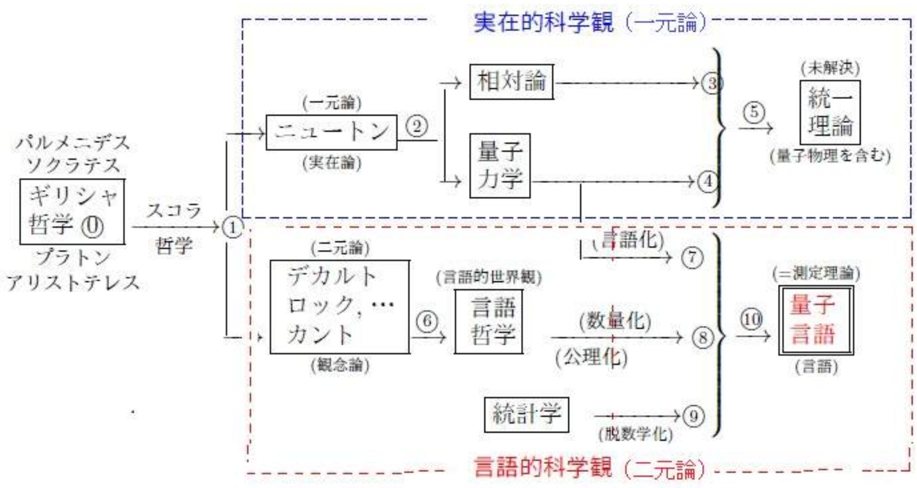
(F) 世界記述の哲学の本来の目的は,「二元論的世界記述」であったはずで, そうならば,「量子言語の目的」と同じなのだから,

$$\text{哲学者たちの至言} \approx \text{言語的コペンハーゲン解釈}$$

でないとしたら, むしろおかしい

と思う.

主張 3.1. [主張 1.1 の再掲：世界記述史の中での「量子言語の位置づけ」]



本書全体の主張： 上図を主張する．すなわち,

⑤の方向は発展途上で, いろいろな考えが量子物理学を発展させるであろう．しかし,「量子力学には, もう本当の問題はない」という立場も有力で, これは⑩の方向の発展を促し, この方向は, 量子言語が最終到達点で, しかもこれが「いわゆるコペンハーゲン解釈」の真の姿である.

となる.

上の「二元論的観念論の系譜」:

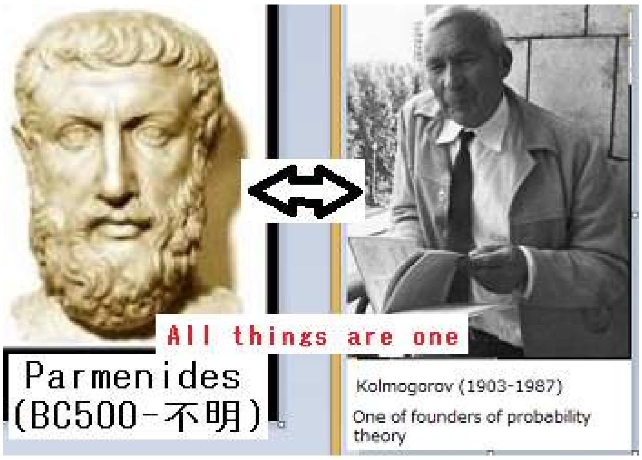
$$[⓪ \longrightarrow ① \longrightarrow ⑥ \longrightarrow ⑧ \longrightarrow ⑩] \tag{3.2}$$

を「言語的コペンハーゲン解釈を模索した歴史」と思いたい.

たとえば, “測定は一回だけ” と “状態は動かない” 等は、パルメニデスの次の言葉を連想させる:

$$\begin{cases} \text{“多” は無い. 在るのは、“一”だけ.} \\ \text{運動は存在しない.} \end{cases} \tag{3.3}$$

したがって、パルメニデス (BC. 515 年頃生誕) は、言語的コペンハーゲン解釈の提案者の一人と思いたい. また、確率論の基本定理である「コルモゴロフの拡張定理」の主張は、「確率空間は一つだけ」であり、これは「測定は一回だけ」と同じと見たい. したがって、コルモゴロフも、言語的コペンハーゲン解釈の提案者の一人と思いたい.



本書の主張を明快化にするために, 次のような皮肉な言い方をしておく

(G)「言語ルール 1 と 2」を知らずに, その使い方を「ああだ. こうだ」と議論するという無謀な試みが, 哲学の本流 (=二元論的観念論) である

と考える. それにしても, 二元論的観念論というトンデモ理論に執着した哲学者たちの洞察力には感心する. 下表も理解の手助けになるだろう.

♠ **注釈 3.1.** 哲学のことをよく知っているわけではないが, 二元論的観念論の最終到達点が量子言語であると宣言してしまうならば, 次は必然と考える.

物心二元論	[A](= 心)	[B](媒介)	[C](= 物)
アリストテレス	/	/	形相 [質料]
プラトン	現実界	イデア	/ [/]
アクィナス	後の普遍	前の普遍	/ [内の普遍]
デカルト	我, 心, 脳	身体	/ [物]
ニュートン	/	/	状態 [質点]
ロック	心	第二次性質	第一次性質 [/]
バークリー	心	第二次性質	/ [神]
カント	現象	知覚	/ [物自体]
統計学	サンプル 確率空間	/	パラメータ [母集団]
量子言語	**測定値**	**観測量** **(=測定器)**	**状態** **[システム]**

表 3.1:世界記述のキーワード

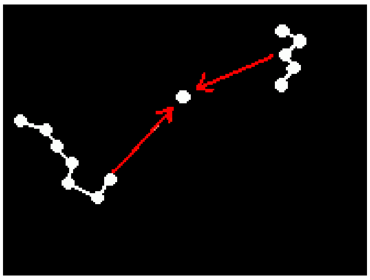
この表では，ニュートン力学の部分が一番わかりやすい． アリストテレスはニュートンと発想は同じで,「状態 (システム)」だけからなるので，一元論である．“プラトンイデア” を “絶対基準” と考え，観測量 (=測定器) の一種と考える．これで，表 3.1 内において，ホワイトヘッドの言葉：

- 西洋の全ての哲学はプラトン哲学への脚注に過ぎない

を理解することができる．(3.1) 式で見たように，“観測量”=“測定器”=“身体 (感覚器)” であるが，いろいろな現れ方があって，たとえば,

目, 耳, 望遠鏡, 顕微鏡, 方位磁石, 等.

である.



“方位磁石”が観測量の一種ならば、“北極星”もそうだろう．(*cf.* Section 8.1 (pp.129-135) in [39]).

また、「脳無くして、測定値無し」なのだから、対応：”測定値 $\longleftrightarrow$ 脳 (=心)” も了解できるだろう．

目次; 他

♠ **サプリ 3.2.** 理系にとっては、信じられないかもしれないが、

- 「哲学は進歩してきたか？」は哲学にとっては最重要未解決問題である

ホワイトヘッド (1861-1947) の真意は知らないが、ホワイトヘッドの言葉：

- 西洋の全ての哲学はプラトン哲学への脚注に過ぎない

を著者は、

- 西洋哲学 [プラトン, デカルト、ロック、カント等] は常に二元論の完成を模索し続けてきた

と解したい．そうならば、

- 「量子言語にだんだんと近づいてきた」ことを進歩と定義すれば、哲学は進歩してきた

と主張できる．

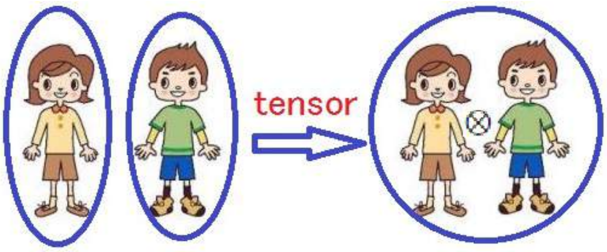
また、スコラ哲学を知っているわけではないが、三つのキーワード (“post rem (事の後に)”, “ante rem (事の前に)”, “in re (事の中に)”) が出現したのは、スコラ哲学内の勢力図が「プラトン派からアリストテレス派へ移行」したその中間時点にトマス・アクィナスが活躍していたという偶然の所産だろう．そうだとすると、スコラ哲学後期はアリストテレス派 (一元論) が主流なのだから、プラトンの「プラトン哲学への脚注」というわけではないかもしれない．

「哲学は進歩してきたか？」の詳細は次を見よ．

- [50]: S. Ishikawa, *History of Western Philosophy from the quantum theoretical point of view (Ver. 2),* Research Report (Dept. Math. Keio Univ.) KSTS-RR-17/004, 2017, 131 pages (`http://www.math.keio.ac.jp/academic/research_pdf/report/2017/17004.pdf`) 量子論から見た西洋哲学史 (紫峰出版)

3.2 テンソル作用素代数

言語的コペンハーゲン解釈の奥義「測定は一回だけ」は、いかにも無理筋の印象があるかもしれない. 実際に、何回も測定するのが普通だからである. したがって、複数のものを一つにまとめる仕掛けが必要になる. これが「テンソル」である.



3.2.1 テンソルヒルベルト空間

「テンソル作用素代数」という数学を知っているならば, 言語的解釈に, 次を付け加えたい.

(A) 測定対象が複数あるときは, テンソル作用素代数を使って, 測定対象を一つにまとめよ

このために, この節では, テンソル作用素代数の数学的初歩を説明しておく.

H, K をヒルベルト空間とする. このとき, テンソルヒルベルト空間 $H \otimes K$ を定義しよう. $\{e_m \mid m \in \mathbb{N} \equiv \{1,2,\ldots\}\}$ を H 内の完全正規直交系 (CONS), $\{f_n \mid n \in \mathbb{N} \equiv \{1,2,\ldots\}\}$ を K 内の完全正規直交系 (CONS) とする.

各 $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ に対して, 「記号 $e_m \otimes f_n$」を考える. ここで,

$$
\begin{aligned}
&H \otimes K \\
=&\Big\{ g = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \alpha_{m,n} e_m \otimes f_n \;\Big|\; ||f||_{H\otimes K} \equiv [\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} |\alpha_{m,m}|^2]^{1/2} < \infty \Big\}
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

とすればよい. 念のために, 内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H\otimes K}$ を具体的に書くと,

$$
\begin{aligned}
\langle e_{m_1} \otimes f_{n_1}, e_{m_2} \otimes f_{n_2} \rangle_{H\otimes K} &\equiv \langle e_{m_1}, e_{m_2} \rangle_H \cdot \langle f_{n_1}, f_{n_2} \rangle_K \\
&= \begin{cases} 1 & (m_1,n_1) = (m_2,n_2) \\ 0 & (m_1,n_1) \neq (m_2,n_2) \end{cases}
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

である.　以上をまとめると,

(B) テンソルヒルベルト空間 $H \otimes K$ は, 完全正規直交系 $\{e_m \otimes f_n \mid (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$ を持つヒルベルト空間のことである.

となる.

もちろん, 任意の $e = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m e_m \in H$ と任意の $f = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n f_m \in H$ に対して, そのテンソル $e \otimes f$ は,

$$e \otimes f = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \alpha_m \beta_n e_m \otimes f_n$$

と定めればよい.

テンソルヒルベルト空間 $H \otimes K$ には, 完全正規直交系 $\{e_m \otimes f_n \mid (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$ が定まっているのだから (同じことで, 内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H\otimes K}$ が定まっているのだから), $\widehat{u} \in H \otimes K$ のノルム $||\widehat{u}||_{H\otimes K}$ は,

$$||\widehat{u}||_{H\otimes K} = |\langle \widehat{u}, \widehat{u} \rangle_{H\otimes K}|^{1/2}$$

で定まる.

////

例 3.2. **[簡単な例：テンソルヒルベルト空間 $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$]** 2 次元ヒルベルト空間 $H = \mathbb{C}^2$ と 3 次元ヒルベルト空間 $K = \mathbb{C}^3$ のテンソルヒルベルト空間 $H \otimes K = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$ を考えよう. H の完全正規直交系 $\{e_1.e_2\}$ を次のように定める.

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

また, K の完全正規直交系 $\{f_1.f_2, f_3\}$ を次のように定める.

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

したがって, テンソルヒルベルト空間 $H \otimes K = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$ の完全正規直交系は,

$$e_1 \otimes f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_1 \otimes f_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_1 \otimes f_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$e_2 \otimes f_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 \otimes f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 \otimes f_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

完全正規直交系が 6 個のベクトルから構成されているので,

$$H \otimes K = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3 = \mathbb{C}^6$$

と考えてよい．そうならば, テンソルヒルベルト空間 $H \otimes K = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$ 内の完全正規直交系 $\{e_i \otimes f_j \mid i = 1, 2, 3,\ \ j = 1, 2\}$ を $\mathbb{C}^6$ 内の完全直交系 $\{g_k \ \mid k - 1, 2, ..., 6\}$ とみて, 次のように表現してもよい.

$$g_1 = e_1 \otimes f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g_2 = e_1 \otimes f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, g_3 = e_1 \otimes f_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$g_4 = e_2 \otimes f_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g_5 = e_2 \otimes f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, g_6 = e_2 \otimes f_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

////

定理 3.3. [有限次元テンソルヒルベルト空間]

$$\mathbb{C}^{m_1} \otimes \mathbb{C}^{m_2} \otimes \cdots \otimes \otimes \mathbb{C}^{m_n} = \mathbb{C}^{\sum_{k=1}^{n} m_k} \tag{3.6}$$

////

定理 3.4. [テンソルヒルベルト空間]

$$L^2(\Omega_1, \nu_1) \otimes L^2(\Omega_2, \nu_2) = L^2(\Omega_1 \times \Omega_2, \nu_1 \otimes \nu_2) \tag{3.7}$$

ここに, $\nu_1 \otimes \nu_2$ は直積測度.

////

定義 3.5. [無限テンソルヒルベルト空間] 無限個のヒルベルト空間 $H_1, H_2, ..., H_k, ...$ のテンソルヒルベルト空間 $\bigotimes_{k=1}^{\infty} H_k$ も同様に定義できる． 各 $k (\in \mathbb{N})$ に対して, ヒルベルト空間 H_k の完全正規直交系 $\{e_k^j\}_{j=1}^{\infty}$ を定める． 各写像 $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に対して, 記号：

$$\bigotimes_{k=1}^{\infty} e_k^{b(k)} = e_1^{b(1)} \otimes e_2^{b(2)} \otimes e_3^{b(3)} \otimes \cdots$$

を定めて,

$$\{\bigotimes_{k=1}^{\infty} e_k^{b(k)} \mid b : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ は写像 } \} \tag{3.8}$$

を得る． これを完全正規直交系とするヒルベルト空間をテンソルヒルベルト空間 $\bigotimes_{k=1}^{\infty} H_k$ と定義する．

////

3.2.2 テンソル基本構造

有界線形作用素 $F \in B(H), G \in B(K)$ に対して，このテンソル作用素 $F \otimes G \in B(H \otimes K)$ は, 次のように定義できる．

$$(F \otimes G)(e \otimes f) = Fe \otimes Gf \quad (\forall e \in H, f \in K)$$

定義 3.6. [テンソル C^* 代数とテンソル W^* 代数] 二つ基本構造 $[\mathcal{A}_1 \subseteq \overline{\mathcal{A}_1} \subseteq B(H_1)]$ と $[\mathcal{A}_2 \subseteq \overline{\mathcal{A}_2} \subseteq B(H_2)]$ を考える．
[I]: 次の条件：

$$\{F \otimes G \ (\in B(H_1 \otimes H_2)) \mid F \in \mathcal{A}_1,\ G \in \mathcal{A}_2\} \subseteq \widehat{\mathcal{A}} \subseteq B(H_1 \otimes H_2)$$

を満たす C^* 代数 $\widehat{\mathcal{A}}$ の中で最小の C^* 代数を"$\mathcal{A}_1$ と $\mathcal{A}_2$ のテンソル C^* 代数"と呼び, $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ と記す.
[II]: 次の条件：

$$\{F \otimes G \ (\in B(H_1 \otimes H_2)) \mid F \in \overline{\mathcal{A}}_1,\ G \in \overline{\mathcal{A}}_2\} \subseteq \widetilde{\mathcal{A}} \subseteq B(H_1 \otimes H_2)$$

を満たす W^* 代数 $\widehat{\mathcal{A}}$ の中で最小の W^* 代数を"$\overline{\mathcal{A}}_1$ と $\overline{\mathcal{A}}_2$ のテンソル W^* 代数"と呼び, $\overline{\mathcal{A}}_1 \otimes \overline{\mathcal{A}}_2$ と記す.

////

定理 3.7. [テンソル基本構造] [I]: 二つ基本構造 $[\mathcal{A}_1 \subseteq \overline{\mathcal{A}}_1 \subseteq B(H_1)]$ と $[\mathcal{A}_2 \subseteq \overline{\mathcal{A}}_2 \subseteq B(H_2)]$ のテンソル基本構造は $[\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \subseteq \overline{\mathcal{A}}_1 \otimes \overline{\mathcal{A}}_2 \subseteq B(H_1 \otimes H_2)]$ となる． すなわち,

$$\begin{aligned} &[\mathcal{A}_1 \subseteq \overline{\mathcal{A}}_1 \subseteq B(H_1)] \otimes [\mathcal{A}_2 \subseteq \overline{\mathcal{A}}_2 \subseteq B(H_2)] \\ =&[\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \subseteq \overline{\mathcal{A}}_1 \otimes \overline{\mathcal{A}}_2 \subseteq B(H_1 \otimes H_2)] \end{aligned}$$

[II]: 量子系の基本構造 $[\mathcal{C}(H_1) \subseteq B(H_1) \subseteq B(H_1)]$ と $[\mathcal{C}(H_2) \subseteq B(H_2) \subseteq B(H_2)]$ のテンソル

基本構造は $[\mathfrak{C}(H_1 \otimes H_2) \subseteq B(H_1 \otimes H_2) \subseteq B(H_1 \otimes H_2)]$ となる． すなわち，

$$
\begin{aligned}
&[\mathfrak{C}(H_1) \subseteq B(H_1) \subseteq B(H_1)] \otimes [\mathfrak{C}(H_2) \subseteq B(H_2) \subseteq B(H_2)] \\
=&[\mathfrak{C}(H_1 \otimes H_2) \subseteq B(H_1 \otimes H_2) \subseteq B(H_1 \otimes H_2)]
\end{aligned}
$$

[III]: 古典系系の基本構造 $[C_0(\Omega_1) \subseteq L^\infty(\Omega_1, \nu_1) \subseteq B(L^2(\Omega_1, \nu_1))]$ と $[C_0(\Omega_2) \subseteq L^\infty(\Omega_2, \nu_2) \subseteq B(L^2(\Omega_2 \nu_2))]$ のテンソル基本構造は

$$
[C_0(\Omega_1 \times \Omega_2) \subseteq L^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2, \nu_1 \otimes \nu_2) \subseteq B(L^2(\Omega_1 \times \Omega_2, \nu_1 \otimes \nu_2))]
$$

となる． すなわち，

$$
\begin{aligned}
&[C_0(\Omega_1) \subseteq L^\infty(\Omega_1 \subseteq \nu_1) \subseteq B(L^2(\Omega_1, \nu_1))] \\
&\qquad\qquad \otimes [C_0(\Omega_2) \subseteq L^\infty(\Omega_2 \subseteq \nu_2) \subseteq B(L^2(\Omega_2, \nu_2))] \\
=&[C_0(\Omega_1 \times \Omega_2) \subseteq L^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2, \nu_1 \otimes \nu_2) \subseteq B(L^2(\Omega_1 \times \Omega_2, \nu_1 \otimes \nu_2))]
\end{aligned}
$$

////

定理 3.8. $\bigotimes_{k=1}^\infty B(H_k)$ $(\subseteq B(\bigotimes_{k=1}^\infty H_k))$ は, 次を満たす最小の C^* 代数と定義する．

$$
\begin{aligned}
&F_1 \otimes F_2 \otimes \cdots \otimes F_n \otimes I \otimes I \otimes \cdots \in B(\otimes_{k=1}^\infty H_k) \\
&\qquad (\forall F_k \in B(H_k),\ k = 1, 2, ..., n, n = 1, 2, ...)
\end{aligned}
$$

このとき，

$$
\bigotimes_{k=1}^\infty B(H_k) = B(\otimes_{k=1}^\infty H_k) \tag{3.9}
$$

////

定理 3.9. 次が言える．

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{i}): \quad \rho_k \in \mathcal{A}_k^* \Longrightarrow \bigotimes_{k=1}^n \rho_k \in (\bigotimes_{k=1}^n \mathcal{A}_k)^* \\
&(\mathrm{ii}): \quad \rho_k \in \mathfrak{S}^m(\mathcal{A}_k^*) \Longrightarrow \bigotimes_{k=1}^n \rho_k \in \mathfrak{S}^m((\bigotimes_{k=1}^n \mathcal{A}_k)^*) \\
&(\mathrm{iii}): \quad \rho_k \in \mathfrak{S}^p(\mathcal{A}_k^*) \Longrightarrow \bigotimes_{k=1}^n \rho_k \in \mathfrak{S}^p((\bigotimes_{k=1}^n \mathcal{A}_k)^*)
\end{aligned}
$$

////

♠ **注釈 3.2.** 作用素代数は, やれば切りがないが， 本書では, この節で述べたこと以上のことを使うと

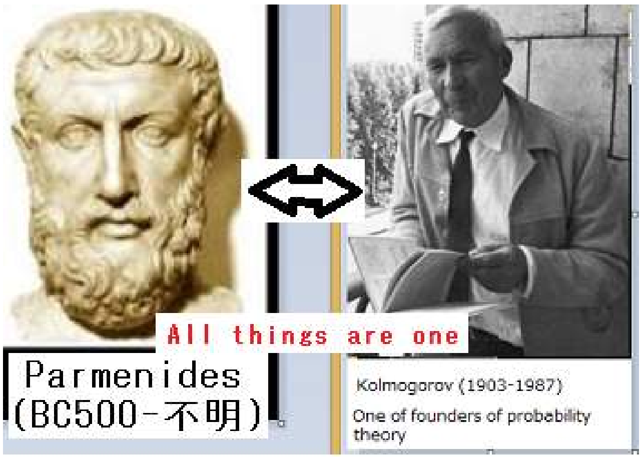
きは，その旨を述べる．

3.3 言語的コペンハーゲン解釈—- 測定は一回だけ

本節では，言語的解釈 (3.1 節 (E_4)) の「測定は一回だけ」について説明する．測定が一回だけならば，必然的に状態は一つで，しかも，観測量 (＝測定器) も一つだけとなる．すなわち，

$$[\text{測定は一回だけ}] \Longrightarrow \begin{cases} \text{観測量 (測定器) は一つだけ} \\ \\ \text{状態は一つだけ} \end{cases} \tag{3.10}$$

を必然と考える．



♠ **注釈 3.3.** 量子力学の標準解釈では「測定は一回だけ (3.1 節の言語的解釈 (E_4))」と著者は考える (いろいろな標準理論があって,「射影仮説 (*cf.* 9.2 節)」を認める流儀もあるが)．測定すると，測定対象が攪乱されて (3.1 節の図 3.1(測定のイメージ図) 参照), 状態が変わってしまって (しかも, この変化はシュレーディンガー方程式で記述できないので)，次に測定しても，別の (意味不明な) 状態を測定することになってしまう．これが「量子力学では, 測定は一回だけ」の一応の理由付けである．しかし, 量子言語という形而上学では理由付けなどなくて，強いて言うならば結果論的な理由で, すなわち,

(a)「測定は一回だけ」にしないと, 計算が進まないからである．

実在的世界観に慣れた感覚からは、奇異に思うかもしれないが, 確率論の基本定理である「コルモゴロフの拡張定理」も, 「確率空間は, 一つだけ」を主張していることを思い出せば, 多少とも「違和感」が減じるだろう．というよりも, 実は逆で, 「量子言語」の本音は,

(b)「測定は一回だけ」という言語的解釈があるから, 確率論では「コルモゴロフの拡張定理」が基本定理になる

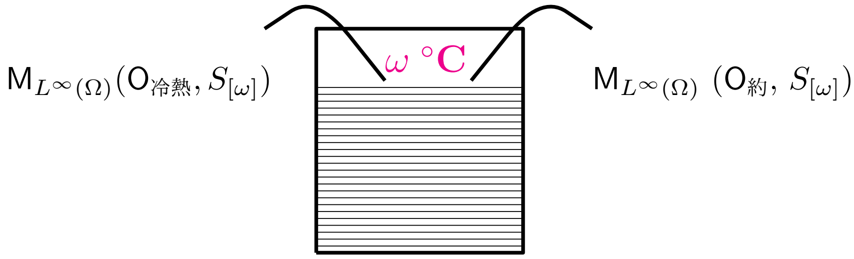
である．

目次; 他

3.3.1 「観測量 (測定器) は一つだけ」と同時測定

例 2.31 と例 2.32 を念頭に置いて，たとえば，次のような「測定」を考えよう：

(a) ある一つのコップの中に，温度 ω ℃の水 (お湯) が入っていて，その水が「冷たいか？熱いか？」と「約何十℃か」の両方を測定することを考えたい．これは $\Omega = [0, 100]$ として，例 2.31 の測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}_{冷熱}{=}(\{ 冷, 熱 \}, 2^{\{ 冷, 熱 \}}, F_{冷熱}), S_{[\delta_\omega]})$ と例 2.32 の測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}$ $(\mathsf{O}_{約}$ $=(\mathbb{N}_{10}^{100},\ 2^{\mathbb{N}_{10}^{100}}, G_{約}),\ S_{[\delta_\omega]})$ の 2 つの測定を行うことと等しい．



しかしながら，測定理論では，

「[測定は一回だけ] $\Rightarrow$ [観測量は **1** つ]」

である．したがって，次の問題が生じる:

問題 3.10. 2 つの測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}_{冷熱}{=}(\{ 冷, 熱 \},\ 2^{\{ 冷, 熱 \}}, F_{冷熱}), S_{[\delta_\omega]})$ と $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}_{約}{=}(\mathbb{N}_{10}^{100},\ 2^{\mathbb{N}_{10}^{100}}, G_{約}),\ S_{[\delta_\omega]})$ を一回で済ますにはどうすればいいか？

以下に，これを考える．

定義 3.11. [直積可測空間] 各 $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して，可測空間 $(X_k,\ \mathcal{F}_k)$ を考える．X_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ の直積空間 $\times_{k=1}^n X_k$ を

$$\mathop{\times}_{k=1}^{n} X_k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_k \in X_k \ \ (k = 1, 2, \ldots, n)\}$$

によって定める．同様に，$\Xi_k (\in \mathcal{F}_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ の直積 $\times_{k=1}^n \Xi_k$ を

$$\mathop{\times}_{k=1}^{n} \Xi_k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_k \in \Xi_k \ \ (k = 1, 2, \ldots, n)\}$$

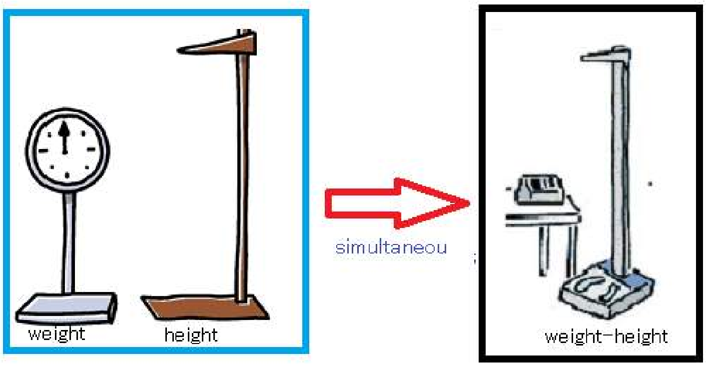
で定義する．更に，直積空間 $\times_{k=1}^{n} X_k$ 内の集合体 $\boxtimes_{k=1}^{n}\mathcal{F}_k$ を

$$\boxtimes_{k=1}^{n}\mathcal{F}_k \text{ は，} \{\times_{k=1}^{n}\Xi_k \mid \Xi_k \in \mathcal{F}_k \ \ (k=1,2,\ldots,n)\} \text{ を含む最小の } \sigma\text{-集合体}$$

と定めて，これを**直積集合体**と呼び，$(\times_{k=1}^{n} X_k,\ \boxtimes_{k=1}^{n}\mathcal{F}_k)$ を**直積可測空間**と呼ぶ．$(X,\mathcal{F}) = (X_k,\mathcal{F}_k)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ のとき，直積空間 $\times_{k=1}^{n} X_k$ を X^n と記し，直積可測空間 $(\times_{k=1}^{n} X_k,$ $\boxtimes_{k=1}^{n}\mathcal{F}_k)$ を $(X^n,\mathcal{F}^n)$ と書く．

////

定義 3.12. [**同時観測量** (simultaneous observable)，**同時測定** (simultaneous measurement)]



基本構造を $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}} \subseteq B(H)]$ として，各 $k=1,2,\ldots,n$ に対して，基本代数 $\overline{\mathcal{A}}$ 内の観測量 O_k $= (X_k,\ \mathcal{F}_k,\ F_k)$ 考える．$(\times_{k=1}^{n} X_k,\ \boxtimes_{k=1}^{n}\mathcal{F}_k)$ を直積可測空間とする．さて，$\overline{\mathcal{A}}$ 内の観測量 $\widehat{\mathsf{O}}$ $= (\times_{k\in K} X_k,\ \boxtimes_{k=1}^{n}\mathcal{F}_k,\ \widehat{F})$ は次を満たすとする:

$$\widehat{F}(\Xi_1 \times \Xi_2 \times \cdots \times \Xi_n) = F_1(\Xi_1)\cdot F_2(\Xi_2)\cdots F_n(\Xi_n) \qquad (\forall \Xi_k \in \mathcal{F}_k \ (k=1,2,\ldots,n)) \tag{3.11}$$

このとき，この観測量 $\widehat{\mathsf{O}} = (\times_{k=1}^{n} X_k, \boxtimes_{k=1}^{n}\mathcal{F}_k, \widehat{F})$ を，$\{\mathsf{O}_k\}_{k=1}^{n}$ の**同時観測量**と呼ぶ．$\widehat{\mathsf{O}} = \times_{k=1}^{n}\mathsf{O}_k$，$\widehat{F} = \times_{k=1}^{n} F_k$ とも記す．また，同時観測量 $\times_{k=1}^{n}\mathsf{O}_k$ の測定，すなわち，$\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\times_{k=1}^{n}\mathsf{O}_k, S_{[\rho]})$ $\big(\times_{k=1}^{n}\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}_k, S_{[\rho]})$ と書く時もある$\big)$ を**同時測定**と呼ぶ.

同時観測量 $\times_{k=1}^{n}\mathsf{O}_k$ の存在は保証されていない．

しかし, $\overline{\mathcal{A}}$ が可換 W^* 代数ならば (すなわち, $\overline{\mathcal{A}} = L^\infty(\Omega)$ ならば), 存在する．

////

以下に，「同時測定」の意味を説明する．

状態 $\rho(\in \mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*))$ をもつ測定対象に対して，測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}_1,\ S_{[\rho]})$ と測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}_2, S_{[\rho]})$ の 2 つの測定を行いたい．すなわち，下図の状況をイメージすればよい．

$$
\text{(b)}\quad
\begin{tikzcd}
 & & \underset{\mathsf{O}_1=(X_1,\mathcal{F}_1,F_1)}{\boxed{\text{観測量}}} \arrow[r, "\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}_1,S_{[\delta_\omega]})"'] & \underset{x_1(\in X_1)}{\boxed{\text{測定値}}} \\
\underset{\rho(\in\mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*))}{\boxed{\text{状態}}} \arrow[r] & {} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & & \underset{\mathsf{O}_2=(X_2,\mathcal{F}_2,F_2)}{\boxed{\text{観測量}}} \arrow[r, "\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}_2,S_{[\delta_\omega]})"'] & \underset{x_2(\in X_2)}{\boxed{\text{測定値}}}
\end{tikzcd}
$$

しかしながら，言語的解釈 (3.1 節 (E_4)) により, 2 つの測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}_1,\ S_{[\rho]})$ と $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}_2, S_{[\rho]})$ を行うことは禁じられているので,

これは, 不可能

そうならば,

もし 2 つの観測量 O_1 と O_2 を合体させた同時観測量 $\mathsf{O}_1 \times \mathsf{O}_2$ が存在するならば，同時測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}_1 \times \mathsf{O}_2, S_{[\rho]})$ を行えばよいと考える．これを図示すると

$$
\text{(c)}\quad
\underset{\rho(\in\mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*))}{\boxed{\text{状態}}} \longrightarrow \underset{\mathsf{O}_1\times\mathsf{O}_2}{\boxed{\text{同時観測量}}} \xrightarrow[\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}_1\times\mathsf{O}_2,S_{[\rho]})]{} \underset{(x_1,x_2)(\in X_1\times X_2)}{\boxed{\text{測定値}}}
$$

これならば, 同時観測量 $\mathsf{O}_1 \times \mathsf{O}_2$ が存在すれば可能

となる．

例 3.13. [問題 3.10 の解答]　閉区間 $\Omega = [0, 100]$ を状態空間とする．ここで，$\mathcal{A}$ 内の 2 つの観測量，すなわち，例 2.31 の冷熱-観測量 $\mathsf{O}_{冷熱} = (X{=}\{\text{ 冷, 熱 }\}, 2^X, F_{冷熱})$ と例 2.32 の約-観測量 $\mathsf{O}_{約} = (Y(=\mathbb{N}_{10}^{100}), 2^Y, G_{約})$ を考える．この同時観測量 $\mathsf{O}_{冷熱} \times \mathsf{O}_{約} = (\{\text{ 冷, 熱 }\} \times \mathbb{N}_{10}^{100}, 2^{\{\text{ 冷, 熱 }\}\times\mathbb{N}_{10}^{100}}, F_{冷熱} \times G_{約})$ を定めて，同時測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}_{冷熱} \times \mathsf{O}_{約}, S_{[\delta_\omega]})$ を得る．たとえば，$\omega = 55$ ℃として，次を得る．

(d) 同時測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}_{冷熱} \times \mathsf{O}_{約}, S_{[\delta_{55}]})$ により，

$$\text{測定値} \begin{bmatrix} (冷, 約\ 50\ ℃) \\ (冷, 約\ 60\ ℃) \\ (熱, 約\ 50\ ℃) \\ (熱, 約\ 60\ ℃) \end{bmatrix} \text{を得る確率は} \begin{bmatrix} 0.125 \\ 0.125 \\ 0.375 \\ 0.375 \end{bmatrix} \text{である} \tag{3.12}$$

なぜならば，

$$\begin{aligned} &[(F_{冷熱} \times G_{約})(\{(冷, 約\ 50\ ℃)\})](55) \\ =&[F_{冷熱}(\{\ 冷\ \})](55) \cdot [G_{約}(\{\ 約\ 50\ ℃\ \})](55) = 0.25 \cdot 0.5 = 0.125 \end{aligned}$$

であり，同様に，

$$\begin{aligned} &[(F_{冷熱} \times G_{約})(\{(冷, 約\ 60\ ℃)\})](55) = 0.25 \cdot 0.5 = 0.125 \\ &[(F_{冷熱} \times G_{約})(\{(熱, 約\ 50\ ℃)\})](55) = 0.75 \cdot 0.5 = 0.375 \\ &[(F_{冷熱} \times G_{約})(\{(熱, 約\ 60\ ℃)\})](55) = 0.75 \cdot 0.5 = 0.375 \end{aligned}$$

だからである．

////

♠ **注釈 3.4.** 上記の議論は，古典測定理論ならばいつも可能であるが，，一般性は期待できない．量子測定理論では，2 つの観測量を合わせて一つで済ますことができない場合 (すなわち，同時観測量 $\mathsf{O}_1 \times \mathsf{O}_2$ が存在しない場合) が頻繁に起こる， ただし、次の問い掛け：

- O_1 と O_2 の同時測定可能条件は何か？

に固執するのは生産的とは言えない．この問いかけを一般化した「結合観測量」が重要で、これは 4.5 節 [ベルの不等式] で述べる．結合観測量を知らなければ同時観測量の意味はわからない．

例 3.14. [量子スピンの同時測定の非存在] 電子 P のスピン状態は $\rho = |u\rangle\langle u| \in \mathfrak{S}^p(B(\mathbb{C}^2))$ は，

$$u = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (\text{ここに，} |u| = (|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2)^{1/2} = 1)$$

と表現できた．電子 P の z-軸方向のスピン観測量の測定 $\mathsf{M}_{B(\mathbb{C}^2)}(\mathsf{O}_z = (X, 2^X, F^z), S_{[\rho]})$ を考える．ここに，$\mathsf{O}_z = (X, 2^X, F^z)$ は次のように定まる:

$$F^z(\{\uparrow\}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F^z(\{\downarrow\}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

さらに, 電子 P の x-軸方向のスピン観測量の測定 $\mathsf{M}_{B(\mathbb{C}^2)}(\mathsf{O}_x = (X, 2^X, F^x), S_{[\rho]})$ を考える. ここに, 「電子の x-軸方向のスピン」の観測量 $\mathsf{O}_x = (X, 2^X, F^x)$ は次のように定まる:

$$F^x(\{\uparrow\}) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad F^x(\{\downarrow\}) = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

さて, 問題は次である.

(a) 二つの測定 $\mathsf{M}_{B(\mathbb{C}^2)}(\mathsf{O}_z = (X, 2^X, F^z), S_{[\rho]})$ と $\mathsf{M}_{B(\mathbb{C}^2)}(\mathsf{O}_x = (X, 2^X, F^x), S_{[\rho]})$ とを同時に行えるか?

実は, これは不可能である. なぜならば, 二つの観測量 O_z と O_x が非可換だからである. たとえば,

$$F^z(\{\uparrow\})F^x(\{\uparrow\}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F^x(\{\uparrow\})F^z(\{\uparrow\}) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

となって,

$$F^x(\{\uparrow\})F^z(\{\uparrow\}) \neq F^z(\{\uparrow\})F^x(\{\uparrow\})$$

だからである.

////

次の定理は自明と思うが, 念の為に証明も付けておく.

定理 3.15. [精密測定とシステム量] $L^\infty(\Omega, \nu)$ 内の精密観測量 $\mathsf{O}_0^{(e)} = (X, \mathcal{F}, F^{(\mathrm{e})})$, すなわち, $(X, \mathcal{F}, F^{(\mathrm{e})}) = (\Omega, \mathcal{B}_\Omega, \chi)$ を考える. また, システム量 $\widetilde{g} : \Omega \to \mathbb{R}$ の観測量表示を $\mathsf{O}_1 = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, G)$ とする. 同時観測量 $\mathsf{O}_0^{(e)} \times \mathsf{O}_1$ の測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega,\nu)}(\mathsf{O}_0^{(e)} \times \mathsf{O}_1, S_{[\delta_\omega]})$ を考え, その測定値を (x, y) $(\in X \times \mathbb{R})$ とする. このとき, 確率 1 で, $x = \omega$ かつ $y = \widetilde{g}(\omega)$ が成立する.

////

証明 $\omega (\in \Omega{=}X)$ を含む任意の開集合を $D_0 (\in \mathcal{B}_\Omega)$ とする. また, $\widetilde{g}(\omega)$ を含む任意の開集合を $D_1 (\in \mathcal{B}_\mathbb{R})$ とする. $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega,\nu)}(\mathsf{O}_0^{(e)} \times \mathsf{O}_1, S_{[\delta_\omega]})$ の測定値 (x, y) が $D_0 \times D_1$ に含まれる確率は, $\chi_{D_0}(\omega) \cdot \chi_{\widetilde{g}^{-1}(D_1)}(\omega) = 1$. よって, D_0 と D_1 の任意性より, 確率 1 で, $x = \omega$ かつ $y = \widetilde{g}(\omega)$ を得る. □

3.3.2 「状態は一つで不動」と擬積観測量

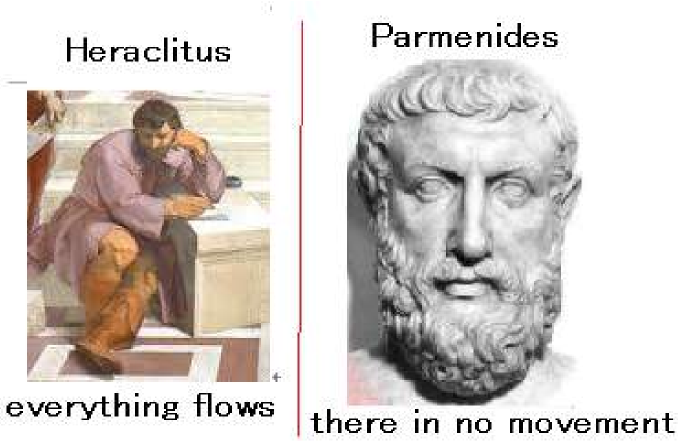
測定理論の前提は,「測定は一回だけ」で, したがって,「状態は動かない」である．なぜならば,

(a)「状態が動いたかどうか？」は, (前後で) 二回測定をしないとわからないのだから，その確認は不可能である

と一応は納得しておこう．

したがって、量子言語では

- ヘラクレイトスの「万物は流転する」ではなくて、パルメニデスの「運動は存在しない」を採用する．とは言っても、著者はヘラクレイトスとパルメニデスの真意を知っているわけではないので、比喩的な意味であるが、



復習 3.16. [例 **2.34** の再掲:壷問題]　2 つの壷 U_1，U_2 がある．壷 U_1 には 8 個の白球と 2 個の黒球，壷 U_2 には 4 個の白球と 6 個の黒球が入っているとする．

次のような現象を考える:

(a) 壷 U_2 から 1 つの球を取り出すとき，その球が $\begin{bmatrix} \text{白} \\ \text{黒} \end{bmatrix}$ である確率は $\begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix}$ である．

ここで，この日常言語の文言 (a) を測定理論の言葉遣いで記述することを考える．$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ として, 離散距離空間 (Ω, d_D) を考えて, 可換 C^* 代数 $C_0(\Omega)$ を得る．したがって,

古典系の基本構造 $[C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega, \nu) \subseteq B(L^2(\Omega, \nu))]$

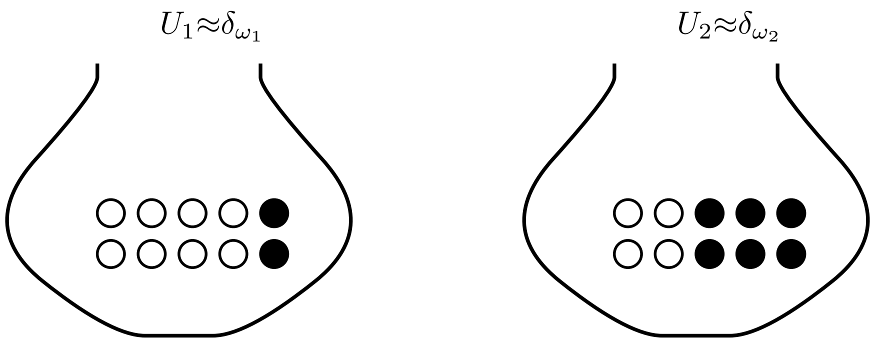


図 3.2　壷問題

を考えよう． 純粋状態空間は

$$\mathfrak{S}^p(C_0(\Omega)^*)=\{\delta_{\omega_1},\delta_{\omega_2}\}$$

となる．ここで, ,

$$U_1 \quad \cdots \quad \text{“状態 } \delta_{\omega_1} \text{ をもつ壷”}, \qquad U_2 \quad \cdots \quad \text{“状態 } \delta_{\omega_2} \text{ をもつ壷”}$$

として， 次の同一視を考える (したがって，図 3.2 のような状況を考える):

$$U_1 \approx \delta_{\omega_1} \approx \omega_1, \qquad U_2 \approx \delta_{\omega_2} \approx \omega_2$$

更に， $L^\infty(\Omega)$ 内の観測量 $\mathsf{O}_{白黒}=(\{\text{ 白},\text{黒 }\},2^{\{\text{ 白, 黒 }\}},F_{白黒})$ を次のように定義する：

$$\begin{aligned} &[F_{白黒}(\{\text{ 白 }\})](\omega_1)=0.8, && [F_{白黒}(\{\text{ 黒 }\})](\omega_1)=0.2 \\ &[F_{白黒}(\{\text{ 白 }\})](\omega_2)=0.4, && [F_{白黒}(\{\text{ 黒 }\})](\omega_2)=0.6 \end{aligned} \tag{3.13}$$

このようにして，測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}_{白黒},S_{[\delta_{\omega_2}]})$ を得る．よって，上述の (a) は，測定理論の言葉で次のように記述できる:

(b) 測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}_{白黒},S_{[\omega_2]})$ により，測定値 $\begin{bmatrix} 白 \\ 黒 \end{bmatrix}$ が得られる確率は

$$\begin{bmatrix} \int_\Omega[F_{白黒}(\{\text{ 白 }\})](\omega)\delta_{\omega_2}(d\omega)=[F_{白黒}(\{\text{ 白 }\})](\omega_2)=0.4 \\ \int_\Omega[F_{白黒}(\{\text{ 黒 }\})](\omega)\delta_{\omega_2}(d\omega)=[F_{白黒}(\{\text{ 黒 }\})](\omega_2)=0.6 \end{bmatrix} \text{ である．}$$

となる．

////

問題 3.17. (a) [復元抽出 (=同時測定)]：壷 U_2 から 1 つの球を取り出して, それの「白・黒」を確認して，その球をまた壷 U_2 に戻して, よくかき混ぜてから, もう一度, 壷 U_2 から 1

つの球を取り出す． したがって, 可能性としては, 4 つの

(白, 白) (白, 黒) (黒, 白) (黒, 黒)

である． 簡単な計算で, $\begin{bmatrix} (白,白) \\ (白,黒) \\ (黒,白) \\ (黒,黒) \end{bmatrix}$ である確率は $\begin{bmatrix} 0.16 \\ 0.24 \\ 0.24 \\ 0.36 \end{bmatrix}$ であることがわかる．
これを測定理論の言葉で表現するには, どうすればよいか？

解答 測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}_{白黒}, S_{[\delta_{\omega_2}]})$ の同時測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}_{白黒} \times \mathsf{O}_{白黒}, S_{[\delta_{\omega_2}]})$ を考えればよい． このとき，$L^\infty(\Omega)$ 内の同時観測量 $\mathsf{O}^2_{白黒} = (\{ 白, 黒 \} \times \{ 白, 黒 \}, 2^{\{ 白, 黒 \}\times\{ 白, 黒 \}}, F^2_{白黒}(= F_{白黒} \times F_{白黒}))$ は, つぎのように定まる．

$$
\begin{aligned}
&F^2_{白黒}(\{(白,白)\})(\omega_1) = 0.64, && F^2(\{(白,黒)\})(\omega_1) = 0.16 \\
&F^2_{白黒}(\{(黒,白)\})(\omega_1) = 0.16, && F^2(\{(黒,黒)\})(\omega_1) = 0.4 \\
&F^2_{白黒}(\{(白,白)\})(\omega_2) = 0.16, && F^2(\{(白,黒)\})(\omega_2) = 0.24 \\
&F^2_{白黒}(\{(黒,白)\})(\omega_2) = 0.24, && F^2(\{(黒,黒)\})(\omega_2) = 0.36
\end{aligned}
$$

このようにして，同時測定 $\mathsf{M}_{C(\Omega)}(\mathsf{O}^2_{白黒}, S_{[\omega]})$ を得る．よって，上述の (a) は，測定理論の言葉で次のように記述できる:

(b) 同時測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}_{白黒} \times \mathsf{O}_{白黒}, S_{[\delta_{\omega_2}]})$ により得られた測定値 $\begin{bmatrix} (白,白) \\ (白,黒) \\ (黒,白) \\ (黒,黒) \end{bmatrix}$ である確率は

$$
\begin{bmatrix}
[F_{白黒}(\{ 白 \})](\omega_2) \cdot [F_{白黒}(\{ 白 \})](\omega_2) = 0.16 \\
[F_{白黒}(\{ 白 \})](\omega_2) \cdot [F_{白黒}(\{ 黒 \})](\omega_2) = 0.24 \\
[F_{白黒}(\{ 黒 \})](\omega_2) \cdot [F_{白黒}(\{ 白 \})](\omega_2) = 0.24 \\
[F_{白黒}(\{ 黒 \})](\omega_2) \cdot [F_{白黒}(\{ 黒 \})](\omega_2) = 0.36
\end{bmatrix}
$$
である．

となる．

問題 3.18. (a) [非復元抽出]：壷 U_2 から 1 つの球を取り出して, それの「白・黒」を確認して,

その球をまた壷 U_2 に戻さないで,

もう一度, 壷 U_2 から 1 つの球を取り出す．

目次; 他

これを測定理論の言葉で表現するには, どうしたらよいか？これを解答 3.20 で答える.

さて，同時観測量 (定義 3.12) を思い出そう．各 $k=1,2,\ldots,n$ に対して，基本代数 $\mathcal{A}$ 内の観測量 $\mathsf{O}_k=(X_k,\,\mathcal{F}_k,\,F_k)$ を考えて，同時観測量 $\widehat{\mathsf{O}}=(\times_{k=1}^n X_k,\;\boxtimes_{k=1}^n\mathcal{F}_k,\,\widehat{F})$ を次のように定義した：

$$\widehat{F}(\Xi_1\times\Xi_2\times\cdots\times\Xi_n)=F_1(\Xi_1)F_2(\Xi_2)\cdots F_n(\Xi_n)$$
$$(\forall\Xi_k\in\mathcal{F}_k,\forall k=1,2,\ldots,n)$$

次の定義は同時観測量の一般化である.

定義 3.19. [擬積観測量] 各 $k=1,2,\ldots,n$ に対して，基本代数 $\mathcal{A}$ 内の観測量 $\mathsf{O}_k=(X_k,\,\mathcal{F}_k,\,F_k)$ 考える．観測量 $\mathsf{O}_{12\ldots n}=(\times_{k=1}^n X_k,\;\boxtimes_{k=1}^n\mathcal{F}_k,\,F_{12\ldots n})$ は次を満たすとする:

$$F_{12\ldots n}(X_1\times\cdots\times X_{k-1}\times\Xi_k\times X_{k+1}\times\cdots\times X_n)=F_k(\Xi_k) \qquad (3.14)$$
$$(\forall\Xi_k\in\mathcal{F}_k,\forall k=1,2,\ldots,n)$$

このとき，観測量 $\mathsf{O}_{12\ldots n}=(\times_{k=1}^n X_k,\;\boxtimes_{k=1}^n\mathcal{F}_k,\,F_{12\ldots n})$ は $\{\mathsf{O}_k \mid k=1,2,\ldots,n\}$ の**擬積観測量**と呼ばれ，次のように記される：

$$\mathop{\times}^{\mathrm{qp}}_{k=1,2,\ldots,n}\mathsf{O}_k=(\mathop{\times}_{k=1}^{n}X_k,\;\boxtimes_{k=1}^n\mathcal{F}_k,\;\mathop{\times}^{\mathrm{qp}}_{k=1,2,\ldots,n}F_k)$$

もちろん，同時観測量も擬積観測量の一種で，したがって，擬積観測量は，一般には一意に決まらない．また, C^* 代数 $\mathcal{A}$ が可換でない場合は, 存在も保証されているわけではない.

////

解答 3.20. [問題 3.18 の解答] $L^\infty(\Omega)$ 内の観測量 $\mathsf{O}_{白黒}=(\{白,黒\},2^{\{白,黒\}},F)$ の擬積観測量 $\mathsf{O}_{白黒}\overset{\mathrm{qp}}{\times}\mathsf{O}_{白黒}=(\{白,黒\}\times\{白,黒\},2^{\{白,黒\}\times\{白,黒\}},\,F_{12}(=F_{白黒}\overset{\mathrm{qp}}{\times}F_{白黒}))$ を次のように定める：

$$F_{12}(\{(白,白)\})(\omega_1)=\frac{8\times7}{90}, \qquad F_{12}(\{(白,黒)\})(\omega_1)=\frac{8\times2}{90}$$
$$F_{12}(\{(黒,白)\})(\omega_1)=\frac{2\times8}{90}, \qquad F_{12}(\{(黒,黒)\})(\omega_1)=\frac{2\times1}{90}$$
$$F_{12}(\{(白,白)\})(\omega_2)=\frac{4\times3}{90}, \qquad F_{12}(\{(白,黒)\})(\omega_2)=\frac{4\times6}{90}$$
$$F_{12}(\{(黒,白)\})(\omega_2)=\frac{6\times4}{90}, \qquad F_{12}(\{(黒,黒)\})(\omega_2)=\frac{6\times5}{90}$$

このようにして，測定 $\mathsf{M}_{C(\Omega)}(\mathsf{O}_{12},S_{[\omega]})$ を得る.

したがって, 測定理論の言葉で次のように記述できる:

(b) 擬積観測量の測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}_{白黒} \overset{\rm qp}{\times} \mathsf{O}_{白黒}, S_{[\delta_{\omega_2}]})$ により得られた測定値が $\begin{bmatrix} (白,白) \\ (白,黒) \\ (黒,白) \\ (黒,黒) \end{bmatrix}$ である確率は $\begin{bmatrix} [F_{12}(\{(白,白)\})](\omega_2) = \frac{4\times 3}{90} \\ [F_{12}(\{(白,黒)\})](\omega_2) = \frac{4\times 6}{90} \\ [F_{12}(\{(黒,白)\})](\omega_2) = \frac{4\times 6}{90} \\ [F_{12}(\{(黒,黒)\})](\omega_2) = \frac{6\times 5}{90} \end{bmatrix}$ である.

となる.

////

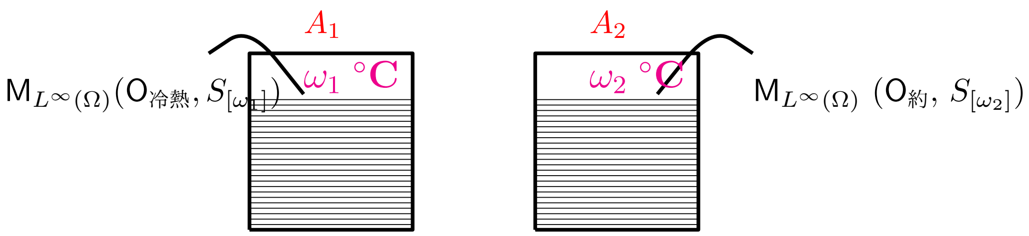
3.3.3 「状態は一つだけ」と並行測定

さて，今度は，次のような測定を考えよう:

(a) 2 つのコップ A と B の中に，水 (お湯) が入っている．コップ A の水の温度は ω_1 ℃, コップ B の水の温度は ω_2 ℃とする (温度が同じとは限らない).「コップ A の水が冷たいか？熱いか？」を調べて，しかも「コップ B の水が約何℃か」を測定することを考えたい．これは

$$状態空間\Omega_1 = [0,100], \qquad 状態空間\Omega_2 = [0,100]$$

として，例 2.31 の測定 $\mathsf{M}_{C(\Omega_1)}(\mathsf{O}_{冷熱}{=}(\{ 冷, 熱 \}, 2^{\{ 冷, 熱 \}}, F_{冷熱}), S_{[\delta_{\omega_1}]})$ と例 2.32 の測定 $\mathsf{M}_{C(\Omega_2)}$ $(\mathsf{O}_{約}{=}$ $(\mathbb{N}_{10}^{100}, 2^{\mathbb{N}_{10}^{100}}, G_{約}), S_{[\omega_2]})$ の 2 つの測定を行うことと同じである.



しかしながら，測定理論では，

「[測定は一回だけ] $\Rightarrow$ [状態は 1 つ]」

なので，今度もまた次の問題が生じる:

問題 3.21. 2 つの測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega_1)}(\mathsf{O}_{冷熱}{=}(\{冷,熱\}, 2^{\{冷,熱\}}, F_{冷熱}), S_{[\delta_{\omega_1}]})$ と $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega_2)}$ $(\mathsf{O}_{約} = (\mathbb{N}_{10}^{100}, 2^{\mathbb{N}_{10}^{100}}, G_{約}), S_{[\delta_{\omega_2}]})$ を一回で済ますにはどうすればいいか？

以下にこれを考える．

定義 3.22. [並行観測量 (parallel observable)] 各 $k=1,2,\ldots,n$ に対して，基本構造 $[C_0(\Omega_k) \subseteq L^\infty(\Omega_k) \subseteq B(L^2(\Omega_k,\nu_k))]$ 内の観測量 $\mathsf{O}_k = (X_k, \mathcal{F}_k, F_k)$ 考える．$(\times_{k=1}^n X_k,\ \boxtimes_{k=1}^n \mathcal{F}_k)$ を直積可測空間とする．$L^\infty(\times_{k=1}^n \Omega_k)$ 内の観測量 $\widetilde{\mathsf{O}} = (\times_{k=1}^n X_k,\ \boxtimes_{k=1}^n \mathcal{F}_k, \widetilde{F})$ を次を満たすように定める:

$$
\begin{aligned}
&[\widetilde{F}(\Xi_1 \times \Xi_2 \times \cdots \times \Xi_n)](\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n) \\
=&[F_1(\Xi_1)](\omega_1) \otimes [F_2(\Xi_2)](\omega_2) \otimes \cdots \otimes [F_n(\Xi_n)](\omega_n) \qquad (3.15)\\
&\qquad \forall(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n) \in \widetilde{\Omega} = \mathop{\times}_{k=1}^{n} \Omega_k,\ \ \forall \Xi_k \in \mathcal{F}_k\ (k=1,2,\ldots,n)
\end{aligned}
$$

このとき，この観測量 $\widetilde{\mathsf{O}} = (\times_{k=1}^n X_k,\ \boxtimes_{k=1}^n \mathcal{F}_k, \widetilde{F})$ を，$\{\mathsf{O}_k\}_{k=1}^n$ の $L^\infty(\times_{k=1}^n \Omega_k)$ 内の**並行観測量**と呼び，$\widetilde{F} = \bigotimes_{k=1}^n F_k$，$\widetilde{\mathsf{O}} = \bigotimes_{k=1}^n \mathsf{O}_k$ と記す．並行観測量 $\widetilde{\mathsf{O}} = \bigotimes_{k=1}^n \mathsf{O}_k$ の測定，すなわち，$\mathsf{M}_{L^\infty(\times_{k=1}^n \Omega_k)}(\widetilde{\mathsf{O}},\ S_{[(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)]})$ を**並行測定**と呼び，$\mathsf{M}_{L^\infty(\times_{k=1}^n \Omega_k)}(\bigotimes_{k=1}^n \mathsf{O}_k,$ $S_{[\bigotimes_{k=1}^n \delta_{\omega_k}]})$ とか $\bigotimes_{k=1}^n \mathsf{M}_{L^\infty(\Omega_k)}(\mathsf{O}_k,\ S_{[\omega_k]})$ とも書く．

////

並行測定の意味は以下の通りである．問題 3.21 は，

測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega_1)}(\mathsf{O}_1, S_{[\omega_1]})$ と測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega_2)}(\mathsf{O}_2, S_{[\omega_2]})$ の 2 つの測定を行いたい．

であった．すなわち，

下図の状況をイメージすればよい．

$$
\text{(b)}\quad
\left\{
\begin{array}{l}
\underset{\omega_1(\in\Omega_1)}{\boxed{\text{状態}}} \longrightarrow \underset{\mathsf{O}_1}{\boxed{\text{観測量}}} \xrightarrow[\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega_1)}(\mathsf{O}_1,S_{[\rho_1]})]{} \underset{x_1(\in X_1)}{\boxed{\text{測定値}}} \\[3em]
\underset{\omega_2(\in\Omega_2)}{\boxed{\text{状態}}} \longrightarrow \underset{\mathsf{O}_2}{\boxed{\text{観測量}}} \xrightarrow[\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega_2)}(\mathsf{O}_2,S_{[\omega_2]})]{} \underset{x_2(\in X_2)}{\boxed{\text{測定値}}}
\end{array}
\right.
$$

しかしながら，言語的解釈 (3.1 節 (E_4)) により, 2 つの測定を行うことは禁じられているので,

これは, 不可能

そうならば,

2 つの状態 $\omega_1(\in \Omega_1)$ と $\omega_2(\in \Omega_2)$ を一つの状態 $(\omega_1,\omega_2)(\in \Omega_1\times\Omega_2)$ と見なして，更に，2 つの観測量 O_1 と O_2 を合わせて，並行観測量 $\mathsf{O}_1\otimes\mathsf{O}_2$ を構成して，並行測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega_1\times\Omega_2)}(\mathsf{O}_1\otimes\mathsf{O}_2, S_{[(\omega_1,\omega_2)]})$ を行えばよい．これを図示すると,

$$
\text{(c)}\quad
\underset{(\omega_1,\omega_2)(\in\Omega_1\times\Omega_2)}{\boxed{\text{状態}}} \rightarrow \underset{\mathsf{O}_1\otimes\mathsf{O}_2}{\boxed{\text{並行観測量}}} \xrightarrow[\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega_1\times\Omega_2}(\mathsf{O}_1\otimes\mathsf{O}_2,S_{[(\omega_1,\omega_2)]})]{} \underset{(x_1,x_2)(\in X_1\times X_2)}{\boxed{\text{測定値}}}
$$

これならば, いつも可能

となる.

例 3.23. [問題 **3.21** の解答]　2 つの状態空間 $\Omega_1(\approx \mathfrak{S}^p(C_0(\Omega_1)^*))$ と $\Omega_2(\approx \mathfrak{S}^p(C_0(\Omega_2)^*))$ を閉区間 $\Omega_1=\Omega_2=[0,100]$ と定める．$L^\infty(\Omega_1)$ 内の観測量を例 2.31 の冷熱-観測量 $\mathsf{O}_{冷熱} = (X(=\{ 冷, 熱 \}), 2^X, F_{冷熱})$ として, $L^\infty(\Omega_2)$ 内の観測量を例 2.32 の約-観測量 $\mathsf{O}_{約} = (Y(=\mathbb{N}_{10}^{100}), 2^Y, G_{約})$ とする．したがって，$L^\infty(\Omega_1\times\Omega_2)$ 内の並行観測量 $\mathsf{O}_{冷熱}\otimes\mathsf{O}_{約} = (\{ 冷, 熱 \}\times\mathbb{N}_{10}^{100}, 2^{\{ 冷, 熱 \}\times\mathbb{N}_{10}^{100}}, F_{冷熱}\otimes G_{約})$ を定めて，並行測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega_1\times\Omega_2)}(\mathsf{O}_{冷熱}\otimes\mathsf{O}_{約}, S_{[\delta_{(\omega_1,\omega_2)}]})$ を考える．たとえば，$(\omega_1,\omega_2)=(25,55)$ として，次を得る:

(d) 並行測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega_1\times\Omega_2)}(\mathsf{O}_{冷熱}\otimes\mathsf{O}_{約}, S_{[(25,55)]})$ により,

$$
\text{測定値}\begin{bmatrix} (冷, 約\ 50\ ℃) \\ (冷, 約\ 60\ ℃) \\ (熱, 約\ 50\ ℃) \\ (熱, 約\ 60\ ℃) \end{bmatrix} \text{を得る確率は} \begin{bmatrix} 0.375 \\ 0.375 \\ 0.125 \\ 0.125 \end{bmatrix} \text{である．}
$$

目次; 他

なぜならば,

$$\begin{aligned}&[(F_{冷熱} \otimes G_{約})(\{(冷, 約\ 50\ ℃)\})](25,55)\\ =&[F_{冷熱}(\{\ 冷\ \})](25) \cdot [G_{約}(\{\ 約\ 50\ ℃\ \})](55) = 0.75 \cdot 0.5 = 0.375\end{aligned}$$

であり，同様に,

$$\begin{aligned}&[(F_{冷熱} \otimes G_{約})(\{(冷, 約\ 60\ ℃)\})](25,55) = 0.75 \cdot 0.5 = 0.375\\ &[(F_{冷熱} \otimes G_{約})(\{(熱, 約\ 50\ ℃)\})](25,55) = 0.25 \cdot 0.5 = 0.125\\ &[(F_{冷熱} \otimes G_{約})(\{(熱, 約\ 60\ ℃)\})](25,55) = 0.25 \cdot 0.5 = 0.125\end{aligned}$$

だからである.

////

注意 3.24. また，たとえば，$(\omega_1, \omega_2) = (55, 55)$ として，次を得る:

(e) 並行測定 $\mathsf{M}_{C(\Omega_1 \times \Omega_2)}(\mathsf{O}_{冷熱} \otimes \mathsf{O}_{約}, S_{[\delta_{(55,55)}]})$ により,

$$測定値 \begin{bmatrix} (冷, 約\ 50\ ℃) \\ (冷, 約\ 60\ ℃) \\ (熱, 約\ 50\ ℃) \\ (熱, 約\ 60\ ℃) \end{bmatrix} を得る確率は \begin{bmatrix} 0.125 \\ 0.125 \\ 0.375 \\ 0.375 \end{bmatrix} である.$$

なぜならば，同様に,

$$\begin{cases} [F_{冷熱}(\{\ 冷\ \})](55) \cdot [G_{約}(\{\ 約\ 50\ ℃\ \})](55) = 0.25 \cdot 0.5 = 0.125 \\ [F_{冷熱}(\{\ 冷\ \})](55) \cdot [G_{約}(\{\ 約\ 60\ ℃\ \})](55) = 0.25 \cdot 0.5 = 0.125 \\ [F_{冷熱}(\{\ 熱\ \})](55) \cdot [G_{約}(\{\ 約\ 50\ ℃\ \})](55) = 0.75 \cdot 0.5 = 0.375 \\ [F_{冷熱}(\{\ 冷\ \})](55) \cdot [G_{約}(\{\ 約\ 60\ ℃\ \})](55) = 0.75 \cdot 0.5 = 0.375 \end{cases} \tag{3.16}$$

だからである.　これは，例 3.13 と同じ結果であることに注意せよ (後出の注釈 3.5 参照).

////

次の定理の証明は自明であるが，内容は深い.

定理 3.25. 各 $k = 1, 2, \cdots, n$ に対して，$\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}_k (:= (X_k, \mathcal{F}_k, F_k)), S_{[\delta_\omega]})$ はサンプル空間 $(X_k, \mathcal{F}_k, P_k^\omega)$ を持つとする.　このとき，同時測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\times_{k=1}^n \mathsf{O}_k, S_{[\delta_\omega]})$ のサンプル確率空間と並行測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega^n)}$ $(\bigotimes_{k=1}^n \mathsf{O}_k,\ S_{[\otimes_{k=1}^n \ \delta_\omega]})$ のサンプル確率空間は等しくて, 直積確率空間

$$(\mathop{\times}_{k=1}^n X_k,\ \boxtimes_{k=1}^n \mathcal{F}_k, \bigotimes_{k=1}^n P_k^\omega) \tag{3.17}$$

となる.

////

証明　容易なので省く. □

例 3.26. [量子スピンの並行測定]　電子 P のスピン状態は $\rho = |u\rangle\langle u| \in \mathfrak{S}^p(B(\mathbb{C}^2))$ は,

$$u = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (\text{ここに}, \ \|u\| = (|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2)^{1/2} = 1)$$

と表現できた. 電子 P の z-軸方向のスピン観測量の測定 $\mathsf{M}_{B(\mathbb{C}^2)}(\mathsf{O}_z = (X, 2^X, F^z), S_{[\rho]})$ を考える. ここに, $\mathsf{O}_z = (X, 2^X, F^z)$ は次のように定まる:

$$F^z(\{\uparrow\}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F^z(\{\downarrow\}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

さらに, 電子 P の x-軸方向のスピン観測量の測定 $\mathsf{M}_{B(\mathbb{C}^2)}(\mathsf{O}_x = (X, 2^X, F^x), S_{[\rho]})$ を考える. ここに, 「電子の x-軸方向のスピン」の観測量 $\mathsf{O}_x = (X, 2^X, F^x)$ は次のように定まる:

$$F^x(\{\uparrow\}) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad F^x(\{\downarrow\}) = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

さて,

(a) 二つの測定 $\mathsf{M}_{B(\mathbb{C}^2)}(\mathsf{O}_z = (X, 2^X, F^z), S_{[\rho]})$ と $\mathsf{M}_{B(\mathbb{C}^2)}(\mathsf{O}_x = (X, 2^X, F^x), S_{[\rho]})$ との並行測定

を考える. これは簡単で,

$$\mathsf{M}_{B(\mathbb{C}^2) \otimes B(\mathbb{C}^2)}(\mathsf{O}_z \otimes \mathsf{O}_z = (X \times X, 2^{X \times X}, F^z \otimes F^x), S_{[\rho \otimes \rho]})$$

で実現できる.

ここで,

$$p_1 = |\alpha_1|^2, \quad p_2 = \frac{1}{2}(|\alpha_1|^2 + \widehat{\alpha}_1 \alpha_2 + \alpha_1 \widehat{\alpha}_2 + |\alpha_2|^2)$$

とおいて,

(b) 並行測定 $\mathsf{M}_{B(\mathbb{C}^2) \otimes B(\mathbb{C}^2)}(\mathsf{O}_z \otimes \mathsf{O}_z, S_{[\rho \otimes \rho]})$ により, 測定値 $\begin{bmatrix} (\uparrow, \uparrow) \\ (\uparrow, \downarrow) \\ (\downarrow, \uparrow) \\ (\downarrow, \downarrow) \end{bmatrix}$ を

得る確率は $\left[\begin{array}{l} \langle u, F^z(\{\uparrow\})u\rangle\langle u, F^x(\{\uparrow\})u\rangle = p_1p_2 \\ \langle u, F^z(\{\uparrow\})u\rangle\langle u, F^x(\{\downarrow\})u\rangle = p_1(1-p_2) \\ \langle u, F^z(\{\downarrow\})u\rangle\langle u, F^x(\{\uparrow\})u\rangle = (1-p_1)p_2 \\ \langle u, F^z(\{\downarrow\})u\rangle\langle u, F^x(\{\downarrow\})u\rangle = (1-p_1)(1-p_2) \end{array}\right]$ である．

////

♠ **注釈 3.5.** この定理 3.25 は，以下の意味で意外と深い．たとえば，

「1 枚のコインを
10 回投げること」は同時測定で，「10 枚のコイン
を投げること」は並行測定である．それらの結果
(すなわち，サンプル確率空間) は
同じになることは，当たり前と思うかも
しれない．しかし，

($\sharp_1$) 上の定理 3.25 では，同時測定と並行測定の
サンプル確率空間が同じになることが，
(一行で済むこととしても)
証明されている

ことは重要である．「日常言語の中で何となく当たり前のこととして済ます」か「測定理論の中できちんと証明する」かは，理論的観点からは，雲泥の差と考えるからである．

上の定理 3.25 で見たように，

($\sharp_2$) 日常言語としての確率論では，同時測定
と並行測定とは区別しにくくて，混同しがちである．

しかし，これは，純粋古典測定の著しい特徴である．混合古典測定 (第 7 章) や量子測定では，同時測定と並行測定の違いが鮮明で，たとえば，量子測定においては，同時測定は一般には存在するとは限らないが，並行測定は必ず存在する．