Title	第2講：言語ルール1：測定
Sub Title	
Author	石川, 史郎(Ishikawa, Shiro)
Publisher	
Publication year	2018
Jtitle	コペンハーゲン解釈; 量子哲学 (2018. 3) ,p.27- 89
JaLC DOI	
Abstract	
Notes	慶應義塾大学理工学部大学院講義ノート(Web版)
Genre	Book
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KO52003002-00000000-0027

第 2 講

言語ルール 1 — 測定

測定理論は次のように定式化された.

- $$\underset{(=\text{量子言語})}{\boxed{\text{測定理論}}} := \underbrace{\overset{[\text{言語ルール 1}]}{\underset{(cf.\ \ 2.7\text{ 節})}{\boxed{\text{測定}}}} + \overset{[\text{言語ルール 2}]}{\underset{(cf.\ \ 8.3\text{ 節})}{\boxed{\text{因果関係}}}}}_{\text{一種の呪文 (ア・プリオリな認識)}} + \underbrace{\overset{[\text{言語的コペンハーゲン解釈}]}{\underset{(cf.\ \ 3.1\text{ 節})}{\boxed{\text{言語的解釈}}}}}_{\text{呪文の使い方のマニュアル}}$$

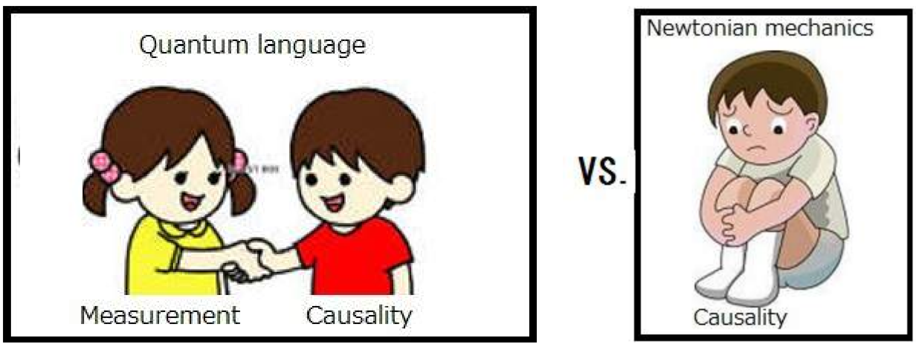
測定理論は

> 言語ルール 1 (測定;2.7 節) と言語ルール 2 (因果関係;8.3 節) の「言葉遣い」をお手本に言語的解釈を指針として, 諸科学を記述せよ

と主張する. 本章では, 測定に関する言語ルール 1 の数学的定式化を行なう. 因果関係に関わる言語ルール 2 は第 8 章で論ずる.

次の問い掛けは、本書全体を通して (すなわち、西洋哲学史のおいて)、最重要である：

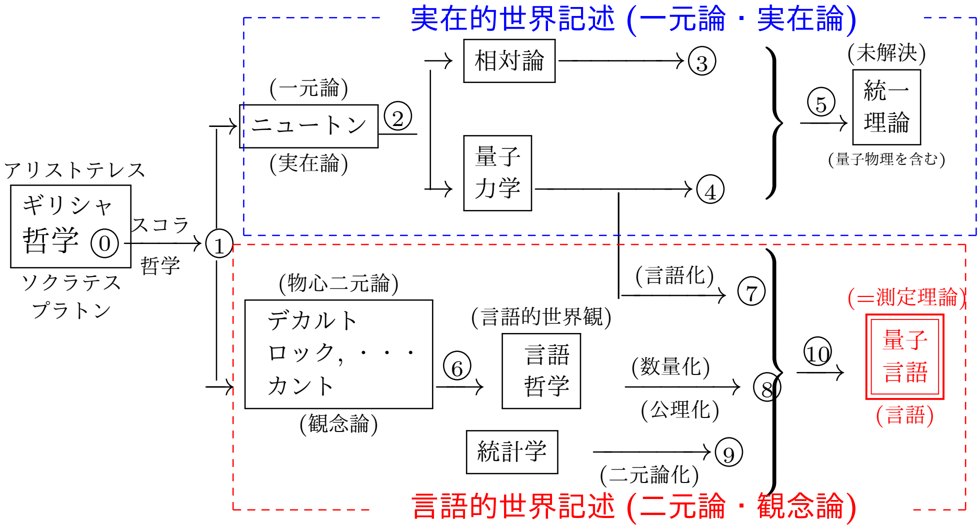
- 「測定無くして、科学無し」は確実に正しいはずなのに、なぜニュートン力学には「測定概念」がないのか？　なぜ「因果関係 (ニュートンの運動方程式)」だけなのか？



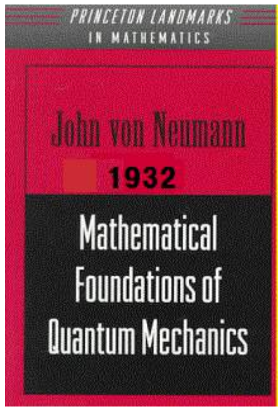
この「言語的科学観 (二元論 (=測定あり))　VS.　実在的科学観 (一元論 (=測定無し))」こそ、[プラトン VS. アリストテレス] から [ライプニッツ VS. ニュートン] を経て [ボーア VS. アインシュタイン] 論争に続く哲学・科学における 2500 間年以上継続している

最大の科学論争

である．この論争に次図 (図 1.1) で終止符を打つことが我々の目的であった．

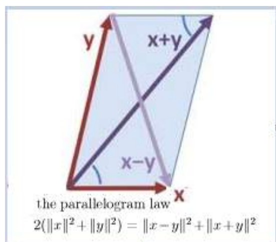


2.1 量子言語の基本構造 [$\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}} \subseteq B(H)$]; 一般論



ヒルベルト空間論による量子力学の定式化は、フォン・ノイマンの偉大な業績 (*cf.* [73]) で、この重要さはいくら強調してもし過ぎることはない．この名著を読んだ者ならば誰もが、「物理学ならば微積分学で記述されて当然なのに、量子力学はなぜ行列 (=線形代数) で記述されるのだろう？」と考え込んでしまうだろう．この問いかけに本書全編で答えることになるが、一言で結論を言えば、「(フォン・ノイマン流の) 量子力学は物理学でない」である．

2.1.1 ヒルベルト空間と作用素代数



複素係数体 $\mathbb{C}$ を持つバナッハ空間 $(H, \|\cdot\|_H)$ のノルムが内積を用いて，$\|w\|_H = \sqrt{\langle w, w\rangle}$ と表現できるとき，H をヒルベルト空間と呼ぶ[*1]．すなわち，内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle : H \times H \to \mathbb{C}$ は次の (i)–(iv) を満たすとする．

(i) $\langle w, w\rangle \geq 0 \ (\forall w \in H)$, (ii) $\langle w, w\rangle = 0 \Leftrightarrow w = 0$,

(iii) $\langle w, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2\rangle = \alpha_1\langle w, w_1\rangle + \alpha_2\langle w, w_2\rangle \ (\forall w, w_1, w_2 \in H, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C})$,

(iv) $\langle w_1, w_2\rangle = \overline{\langle w_2, w_1\rangle}$ (すなわち，共役複素数) $(\forall w_1, w_2 \in H)$

[*1] 著者は修士のときに、ヒルベルト空間の定義だけを知って、論文 [21] を書いた．「ishikawa iteration」として、著者にとっては被引用数を一番稼いだ論文である．ただし、この分野はテクニカルな計算手法が主で、物語的要素が乏しくて、著者には向かないと思った．

H をヒルベルト空間とする．$B(H)$ を (ヒルベルト空間 H 上の) 有界線形作用素の空間とする．すなわち

$$B(H) = \{T : H \to H \mid T \text{ は有界線形作用素} \quad \} \tag{2.1}$$

$B(H)$ は, 作用素ノルム $\|\cdot\|_{B(H)}$ の意味でバナッハ空間となる．ここに,

$$\|T\|_{B(H)} = \sup_{\|x\|_H=1} \|Tx\|_H \qquad (\forall T \in B(H)) \tag{2.2}$$

$T \in B(H)$ として, その共役作用素 $T^* \in B(H)$ を次で定義する．

$$\langle T^*u, v\rangle = \langle u, Tv\rangle \quad (\forall u, v \in H)$$

共役作用素 $T^*(\in B(H))$ の存在定理は, 認めて先に進もう． もちろん、T が行列ならば (i.e., $T \in B(\mathbb{C}^n)$ ならば)、T^* は T の共役転置行列である．たとえば、

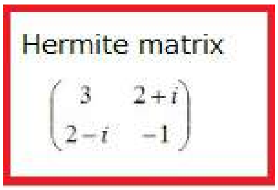
$$T = \begin{bmatrix} 1-i & 2+i \\ 3-4i & 5-i \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow T^* = \begin{bmatrix} 1+i & 3+4i \\ 2-i & 5+i \end{bmatrix}$$

次は自明である．

$$(T^*)^* = T, \quad (T_1T_2)^* = T_2^*T_1^*$$

更に, 次の等式（"C^*-条件"）が成立する．

$$\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2 = \|T^*\|^2 \quad (\forall T \in B(H)) \tag{2.3}$$



また, $T = T^*$ のとき, T をエルミート作用素 (自己共役作用素) と言う．

$T_n (n = 1, 2, \cdots), T \in B(H)$ とする． $B(H)$ 内の点列 $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ が T へ弱収束する (すなわち，$w - \lim_{n\to\infty} T_n = T$) とは,

$$\lim_{n\to\infty} \langle u, (T_n - T)u\rangle = 0 \qquad (\forall u \in H) \tag{2.4}$$

を満たすこととする[*2]．

定義 2.1. [**C^*-代数と W^*-代数**] $\mathcal{A}(\subseteq B(H))$ が, 次を満たすとき C^*-代数であると呼ぶ．

[*2] 作用素代数 $B(H)$ には, いろいろな収束 (位相) が考えられるが, 本書では, 「作用素ノルム $\|\cdot\|_{B(H)}$」と「弱収束」だけに集中する．

(A_1) $\mathcal{A}(\subseteq B(H))$ は, 作用素ノルム $\|\cdot\|_{B(H)}$ の意味で, 閉線形部分空間

(A_2) $\mathcal{A}$ は $*$-代数, すなわち, $\mathcal{A}(\subseteq B(H))$ は,

$$F_1, F_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow F_1 \cdot F_2 \in \mathcal{A}, \qquad F \in \mathcal{A} \Rightarrow F^* \in \mathcal{A}$$

を満たす.

また, C^*-代数 $\mathcal{A}(\subseteq B(H))$ が, (弱収束の意味で) 閉じているとき, W^*-代数と言う.

2.1.2 量子言語の基本構造 $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}} \subseteq B(H)]$; 一般論

定義 2.2. 基本構造 $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}} \subseteq B(H)]$ $\Big($ または, $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}]_{B(H)}$ と記すこともある $\Big)$ を考える. すなわち,

- $\mathcal{A}(\subseteq B(H))$ は C^*-代数で, $\overline{\mathcal{A}}(\subseteq B(H))$ は, $\mathcal{A}$ の弱閉包とする.

W^*-代数 $\overline{\mathcal{A}}$ は, 前共役バナッハ空間 $\overline{\mathcal{A}}_*$(すなわち, $(\overline{\mathcal{A}}_*)^* = \overline{\mathcal{A}}$) を一意に持つ. したがって, 基本構造 $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}} \subseteq B(H)]$ として, 次の図式を得る.

(B): 一般基本構造:$[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}} \subseteq B(H)]$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{A}^* & & & & \\
\uparrow \text{共役} & & & & \\
\boxed{\mathcal{A}} & \xrightarrow[\text{部分代数・弱閉包}]{\subseteq} & \boxed{\overline{\mathcal{A}}} & \xrightarrow[\text{部分代数}]{\subseteq} & \boxed{B(H)} \\
& & \downarrow \text{前共役} & & \\
& & \overline{\mathcal{A}}_* & &
\end{array} \tag{2.5}$$

2.1.3 基本構造 $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}} \subseteq B(H)]$ と状態空間; 一般論

状態空間は, C^* 代数 $\mathcal{A}$ の共役空間 $\mathcal{A}^*$ (と W^* 代数 $\overline{\mathcal{A}}$ の前共役空間 $\mathcal{A}_*$) の中で定義される. 以下の通りである.

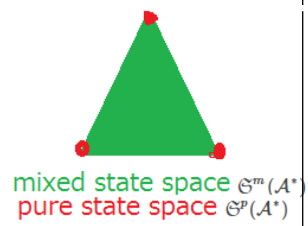
定義 2.3. [混合状態空間, 純粋状態空間] $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}} \subseteq B(H)]$ を基本構造とする. C^*-代数 $\mathcal{A}$ の共役空間を $\mathcal{A}^*$ とする. 混合状態空間 $\mathfrak{S}^m(\mathcal{A}^*)$ と純粋状態空間 $\mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*)$ を次のように定義する.

(a) $\mathfrak{S}^m(\mathcal{A}^*) = \{\rho \in \mathcal{A}^* \mid \|\rho\|_{\mathcal{A}^*} = 1, \rho \geq 0 \text{ (i.e., } \rho(T^*T) \geq 0 (\forall T \in \mathcal{A}))\}$

(b) $\mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*) = \{\rho \in \mathfrak{S}^m(\mathcal{A}^*) \mid \rho$は純粋状態 $\}$. ここに, $\rho(\in \mathfrak{S}^m(\mathcal{A}^*))$ が純粋状態であるとは, 次を満たすことである.

$$\rho = \alpha\rho_1 + (1-\alpha)\rho_2, \rho_1, \rho_2 \in \mathfrak{S}^m(\mathcal{A}^*), 0 < \alpha < 1$$
$$\Longrightarrow \rho = \rho_1 = \rho_2$$

混合状態空間 $\mathfrak{S}^m(\mathcal{A}^*)$ と純粋状態空間 $\mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*)$ は共に局所コンパクト空間である (アラオグルの定理より).



また, $\overline{\mathcal{A}}$ の前共役空間を $\overline{\mathcal{A}}_*$ とする. このとき, もう一つの混合状態空間 $\overline{\mathfrak{S}}^m(\overline{\mathcal{A}}_*)$ を次のように定める.

(c) $$\overline{\mathfrak{S}}^m(\overline{\mathcal{A}}_*) = \{\rho \in \overline{\mathcal{A}}_* \mid \|\rho\|_{\overline{\mathcal{A}}_*} = 1, \rho \geq 0 \text{ (i.e., } \rho(T^*T) \geq 0 (\forall T \in \overline{\mathcal{A}}))\}$$

上で, 二つの混合状態空間を区別したい場合は, C^*-混合状態空間 $\mathfrak{S}^m(\mathcal{A}^*)$ と W^*-混合状態空間 $\overline{\mathfrak{S}}^m(\overline{\mathcal{A}}_*)$ のように呼ぶ.

以上を, 図式でまとめて, 次のようになる.

(C) : 一般基本構造と状態空間

$$\begin{tikzcd}
\underset{C^*-\text{純粋状態}}{\mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*)} \subset \underset{C^*-\text{混合状態}}{\mathfrak{S}^m(\mathcal{A}^*)} \subset & \mathcal{A}^* & & \\
& \boxed{\mathcal{A}} \arrow[u, "\text{共役}"] \arrow[r, "\subseteq", "\text{部分代数・弱閉包}"'] & \boxed{\overline{\mathcal{A}}} \arrow[r, "\subseteq", "\text{部分代数}"'] \arrow[d, "\text{前共役}"] & \boxed{B(H)} \\
& & \underset{W^*-\text{混合状態}}{\overline{\mathfrak{S}}^m(\overline{\mathcal{A}}_*)} \subset \overline{\mathcal{A}}_* &
\end{tikzcd} \tag{2.6}$$

注意 2.4. 3 つの「状態空間」があって, 混乱するかもしれないので, 整理しておく.

$$
\text{(D)　状態}\left\{\begin{array}{ll}
\text{フィッシャー　統計} - -\text{純粋状態 } \mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*) & \\
& \\
\text{ベイズ統計} & - \left\{\begin{array}{l} C^*\text{-混合状態 } \mathfrak{S}^m(\mathcal{A}^*) \qquad \text{(基本的)} \\ \\ W^*\text{-混合状態 } \overline{\mathfrak{S}}^m(\overline{\mathcal{A}}_*) \\ \text{(適用範囲が広くて使いやすい)} \end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

ぐらいに思えばよいだろう．本書では, C^*-混合状態 $\mathfrak{S}^m(\mathcal{A}^*)$ はあまり使わないが, W^*-混合状態 $\overline{\mathfrak{S}}^m(\overline{\mathcal{A}}_*)$ と比較すれば容易に理解できると思う．

2.2 量子系の基本構造 $[\mathcal{C}(H) \subseteq B(H) \subseteq B(H)]$ と状態空間;

結論的には, 一般基本構造 $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}]_{B(H)}$ の分類 (量子系と古典系) とそれに対応する状態空間は, 次のようになる.

(A) $\boxed{\text{一般基本構造 } [\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}]_{B(H)}}$

純粋状態空間 $\mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*)$
C^*−混合状態空間 $\mathfrak{S}^m(\mathcal{A}^*)$
W^*−混合状態空間$\overline{\mathfrak{S}}^m(\overline{\mathcal{A}}_*)$

• $\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\text{量子基本構造 } [\mathcal{C}(H) \subseteq B(H)]_{B(H)}} \\ \text{純粋状態空間 } \mathfrak{S}^p(\mathcal{T}r(H)(\approx H)) \\ C^*\text{−混合状態空間 } \mathfrak{S}^m(\mathcal{T}r(H))(=\mathcal{T}r_{+1}(H)) \\ W^*\text{−混合状態空間 } \mathfrak{S}^m(\mathcal{T}r(H))(=\mathcal{T}r_{+1}(H)) \\ \\ \boxed{\text{古典基本構造 } [C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega,\nu)]_{B(L^2(\Omega,\nu))}} \\ \text{純粋状態空間}\Omega \\ C^*\text{−混合状態空間 } \mathcal{M}_{+1}(\Omega) \\ W^*\text{−混合状態空間 } L^1_{+1}(\Omega,\nu) \end{array} \right.$

以下では, これを順次に説明していく.

余話 2.1. 理工系の大学一年の数学は、「微積分」と「行列 (線形代数)」の二本立てになっている

($\sharp_1$)「微積分」は、[偏微分重積分] $\longrightarrow$[ベクトル解析 (ストークスの定理、ガウスの発散定理 (微分幾何)] と進み、

($\sharp_2$)「行列 (線形代数)」は、[有限次元ベクトル空間]$\longrightarrow$[行列 (=線形写像)]$\longrightarrow$[対角化定理] と進んだのであった.

数学系の学科の 3,4 年で履修することであるが、 ヒルベルト空間論は「行列 (線形代数) : ($\sharp_2$)」の無限次元版で、

($\sharp_3$)「ヒルベルト空間論」は、[無限次元ベクトル空間]$\longrightarrow$[線形写像]$\longrightarrow$[対角化定理 (=スペクトル分解定理)] と進む.

したがって、「($\sharp_2$) の無限次元版 $\approx$($\sharp_3$)」と思っていいだろう. ここで、次の疑問は当然だろう

($\sharp_4$) 数学には、代数とかいろいろあるのに、なぜ「微積分」と「行列 (線形代数)」を大学一年で学ぶのだろうか？

この答えとしては、「昔からそうだから」とか「世界的にそうだから」としか、大学教員も答えられないかもしれないが、世界記述的 (本書的) 観点からいえば

「微積分 (微分幾何学)」→ 相対性理論（実在的科学観）
(代表者：アインシュタイン)

「行列 (線形代数・ヒルベルト空間論)」→ 量子言語（言語的科学観）
(代表者：フォン・ノイマン)

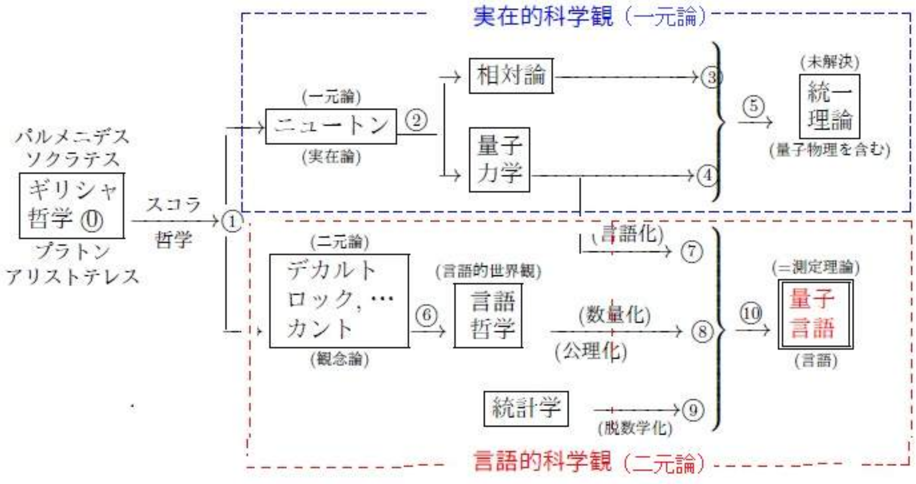
という対応を考えたい．

したがって、標語的に言えば、

- **役に立つ数学の背後には、必ず世界記述法が潜んでいる**

である．

♠ **サプリ 2.1.** 大学一年の数学では、「微積」の講義はやりやすいが、「線形代数」はやりにくいと思う．微積分学の提唱者ニュートン・ライプニッツの偉さは誰もが納得すると思う．しかし、「線形代数」の提唱者が誰かも正確にはわからないわけで、たぶん、自然発生なのだろう．統計・確率も発見者が特定できないという意味で線形代数に似ている．どうやら、学問には、「一人の天才が作り上げる学問」と「自然発生的に発展する学問」があるようだ．もちろん、物理学は前者である．ニュートン力学はニュートン、　電磁気学はマックスウェル、相対性理論はアインシュタインのようにである．しかし、量子力学は、ハイゼンベルグ、シュレーディンガー、ボルン、フォン・ノイマン等多数の手によって作られた．そうなると、量子力学は物理学なのか？　と途方もないことを疑いたくなる．この疑問により次図を提案したくなる．



2.2.1 量子系の基本構造 $[\mathcal{C}(H) \subseteq B(H) \subseteq B(H)]$;

基本構造 $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}} \subseteq B(H)]$ は，量子系では，

$$[\mathcal{C}(H) \subseteq B(H) \subseteq B(H)] \tag{2.7}$$

となり，次の図式を得る．

(B)：量子系の基本構造:$[\mathcal{C}(H) \subseteq B(H) \subseteq B(H)]$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}r(H) & & \\
\boxed{\mathcal{C}(H)} \arrow[u, "共役"'] \arrow[r, "\subseteq", "部分代数：弱閉包"'] & \boxed{B(H)} \arrow[r, "\subseteq", "部分代数"'] \arrow[d, "前共役"] & \boxed{B(H)} \\
 & \mathcal{T}r(H) &
\end{tikzcd} \tag{2.8}$$

この図式 (特に，"コンパクト作用素クラス $\mathcal{C}((H)$" と "トレースクラス $\mathcal{T}r(H)$") を以下の定理で説明する． その前に, 次の定義を用意しておく．

定義 2.5. [(i):ディラック記号]

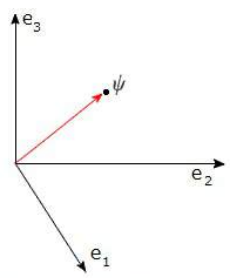
$u, v \in H$ として，$|u\rangle\langle v| \in B(H)$ を以下のように定める．

$$(|u\rangle\langle v|)w = \langle v, w\rangle u \quad (\forall w \in H) \tag{2.9}$$

ここで，$\langle u|$ をブラ・ベクトル，$|u\rangle$ をケット・ベクトルと呼ぶ．

$$u = \begin{bmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix}\beta_1 \\ \beta_2\end{bmatrix}$$

$$|u\rangle\langle v| = \begin{bmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{bmatrix} \cdot [\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2] = \begin{bmatrix}\alpha_1\overline{\beta}_1 & \alpha_1\overline{\beta}_2 \\ \alpha_2\overline{\beta}_1 & \alpha_2\overline{\beta}_2\end{bmatrix}$$



3-dimensional Hilbert space H

[(ii):ONS(正規直交系), CONS(完全正規直交系)]

ヒルベルト空間 H 内の点列 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ は、次を満たすとき ONS(orthonormal system; 正規直交系) と呼ばれる：

$$(\sharp_1)\ \langle e_k, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & (k = j) \\ 0 & (k \neq j) \end{cases}$$

さらに、ONS $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ が次を満たすとき、CONS(complete orthonormal system; 完全正規直交系) と呼ばれる：

$$(\sharp_2)\ \langle x, e_k \rangle = 0\ (\forall k = 1, 2, ...) \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$$

////

定理 2.6. 簡単のため, 以下での「$B(H)$ 内での収束」は「弱収束」とする. $\mathcal{C}(H)(\subseteq B(H))$ をコンパクト作用素全体の空間とする. このとき, 次の (C_1)-(C_4)(特に, $(C_1) \leftrightarrow (C_2)$) が, 成立する.

(C_1) $T \in \mathcal{C}(H)$. ここで, $T(\in B(H))$ がコンパクト作用素であるとは,

- ヒルベルト空間 H 内の点列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界列ならば, $\{Tu_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する部分列を持つ.

(C_2) ヒルベルト空間 H 内に二つの正規直交系 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ と $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ と $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$ なる非負数列 $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ を定めて

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |e_k\rangle\langle f_k| \tag{2.10}$$

と表現できる.

(C_3) コンパクト作用素の空間 $\mathcal{C}(H)(\subseteq B(H))$ は C^*-代数で, $T(\in \mathcal{C}(H))$ を (C_2) のように表現したとき,

$$\|T\|_{B(H)} = \max_{k=1,2,\cdots} \lambda_k \tag{2.11}$$

と計算できる.

(C_4) コンパクト作用素の空間 $\mathcal{C}(H)$ の弱閉包は, $B(H)$ となる. すなわち,

$$\overline{\mathcal{C}(H)} = B(H) \tag{2.12}$$

とできる. したがって, $B(H)$ は, (C^*-代数であるばかりでなくて)W^*-代数でもある.

////

定理 2.7. 　簡単のため, 以下での収束は「弱収束」とする． 次の (D_1)-(D_4) が, 成立する． (D_1) と (D_2) は同値として, すなわち, $\mathcal{T}r(H)$(トレース作用素全体の空間) の定義を (D_2) とする．

(D_1) $T(\in \mathcal{C}(H) \subseteq B(H))$ をトレース作用素とする． すなわち, $T \in \mathcal{T}r(H)$

(D_2) ヒルベルト空間 H 内に二つの正規直交系 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ と $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ と $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty$ なる正数列 $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ を定めて

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |e_k\rangle\langle f_k|$$

と表現できる．

(D_3) トレース空間 $\mathcal{T}r(H)(\subseteq B(H))$ は, コンパクト作用素の空間 $\mathcal{C}(H)(\subseteq B(H))$ の共役バナッハ空間である．すなわち,

$$\mathcal{C}(H)^* = \mathcal{T}r(H) \tag{2.13}$$

さらに，共役ノルム $\|\cdot\|_{\mathcal{C}(H)^*}$ はトレースノルムと呼ばれ，$\|\cdot\|_{tr}$ と記されて，

$$\|T\|_{tr} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \tag{2.14}$$

となる．

(D_4) トレース空間 $\mathcal{T}r(H)(\subseteq B(H))$ の共役バナッハ空間は，$B(H)$ となる． すなわち,

$$\mathcal{T}r(H)^* = B(H) \qquad \text{同じ意味で,} \qquad \mathcal{T}r(H) = B(H)_* \tag{2.15}$$

となる．

////

注意 2.8. ヒルベルト空間が有限次元のとき,

すなわち，$H = \mathbb{C}^n = \{z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \mid z_k \in \mathbb{C}, k = 1, 2, ..., n\}$ のときは,

$$M(\mathbb{C}, n) = (n \times n)\text{-複素行列全体}$$

として,

$$\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} = B(\mathbb{C}^n) = \mathcal{C}(H) = \mathcal{T}r(H) = M(\mathbb{C}, n) \tag{2.16}$$

となり、同じ空間である． しかし，空間 (集合) は同じであるが，ノルムは, 上記の (C_3) と (D_3) のように異なるので, 注意しなければならない．

////

2.2.2 量子系の基本構造 $[\mathcal{C}(H) \subseteq B(H) \subseteq B(H)]$ と状態空間;

量子系の基本構造を, (前節の定理より)

$$[\mathcal{C}(H) \subseteq B(H) \subseteq B(H)]$$

として, 状態空間は次の図式のようになる．

(E): 量子系の基本構造と状態空間

$$\begin{tikzcd}
\underset{C^*-\text{純粋状態}}{\mathfrak{S}^p(\mathcal{T}r(H))} \subset \underset{C^*-\text{混合状態}}{\mathfrak{S}^m(\mathcal{T}r(H))} \subset \mathcal{T}r(H) & & \\
\boxed{\mathcal{C}(H)} \arrow[u, "\text{共役}"'] \arrow[r, "\subseteq", "\text{部分代数：弱閉包}"'] & \boxed{B(H)} \arrow[d, "\text{前共役}"] \arrow[r, "\subseteq", "\text{部分代数}"'] & \boxed{B(H)} \\
& \underset{W^*-\text{混合状態}}{\overline{\mathfrak{S}}^m(\mathcal{T}r(H))} \subset \mathcal{T}r(H) &
\end{tikzcd} \tag{2.17}$$

以下にこれを説明する． まず、次を注意する．

$$\mathcal{C}(H)^* = \mathcal{T}r(H), \qquad \mathcal{T}r(H)^* = B(H) \tag{2.18}$$

ここに, 2 つの混合状態空間は等しく, 次のようになる．

$$\mathfrak{S}^m(\mathcal{T}r(H)) = \overline{\mathfrak{S}}^m(\mathcal{T}r(H))$$

$$
\begin{aligned}
&= \{\rho = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |e_n\rangle\langle e_n| \quad : \quad \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \text{は正規直交系}, \ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1, \lambda_n > 0\} \\
&=: \mathcal{T}r_{+1}(H)
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

また, 純粋状態空間は

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{S}^p(\mathcal{T}r(H)) \\
=&\{\rho = |e\rangle\langle e| \quad : \quad \|e\|_H = 1\} =: \mathcal{T}r^p_{+1}(H)
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

したがって, 同一視 :

$$
\mathfrak{S}^p(\mathcal{T}r(H)) \ni |u\rangle\langle u| \underset{\text{同一視}}{\longleftrightarrow} u \in H \qquad (\|u\| = 1)
\tag{2.21}
$$

の下に,

$$
\mathfrak{S}^p(\mathcal{T}r(H)) = \{u \in H \ : \ \|u\| = 1\}
\tag{2.22}
$$

と見ることもできる. ただし, ここでは, 同一視 : $u \underset{\text{同一視}}{\longleftrightarrow} e^{i\theta}u$ $(\theta \in \mathbb{R})$ を考える.

////

定義 2.9. [Tr; トレース] トレース $\mathrm{Tr} : \mathcal{T}r(H) \to \mathbb{C}$ を次のように定める.

$$
\mathrm{Tr}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, Te_n\rangle \qquad (\forall T \in \mathcal{T}r(H))
\tag{2.23}
$$

ここで、$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ はヒルベルト空間 H 内の CONS(完全正規直交系). $\mathrm{Tr}(T)$ の値は CONS $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ の選び方に依存しない. また、次は頻繁に使う :

$$
{}_{\mathcal{T}rH}\Big(|u\rangle\langle u|, F\Big)_{B(H)} = \mathrm{Tr}(|u\rangle\langle u| \cdot F) = \langle u, Fu\rangle \quad (\forall ||u||_H = 1, F \in B(H))
\tag{2.24}
$$

$$
T = \begin{bmatrix} 3 & -1-i & -3i \\ 1-i & -6+i & 5 \\ 5+2i & 2-i & -2i \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}(T) \\
=&3 + (-6+i) + (-2i) \\
=&-3-i
\end{aligned}
$$

$$
T = \begin{bmatrix} -2i & -1-i & -3i \\ 2-i & -6+i & -3i \\ 5+2i & 2-i & 3 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(T) &= \sum_{k=1}^{3} \langle e_k, Te_k\rangle \\
&= -2i + (-6+i) + 3 \\
&= -3-i
\end{aligned}
$$

////

注意 2.10. ヒルベルト空間が有限次元のとき, すなわち, $H = \mathbb{C}^n$ のときは,

$$M(\mathbb{C}, n) = (n \times n)\text{-複素行列全体}$$

すなわち, $M(\mathbb{C}, n)$(="n 次複素正方行列全体"), つまり,

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix} \in M(\mathbb{C}, n) \tag{2.25}$$

このとき,

$$\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} = B(\mathbb{C}^n) = \mathcal{C}(H) = \mathcal{T}r(H) = M(\mathbb{C}, n) \tag{2.26}$$

であることは, 前節で注意した. さらに,

$$\mathcal{T}r_{+1}^{D}(\mathbb{C}^n) = \Big\{ \text{対角行列 } F = \begin{bmatrix} f_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix} \ \Big| \ f_{kk} \geq 0, \ \sum_{k=1}^{n} f_{kk} = 1 \Big\}$$

$$\mathcal{T}r_{+1}^{DP}(\mathbb{C}^n) = \Big\{ \text{対角行列 } F = \begin{bmatrix} f_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix} \ \Big| \ f_{kk} = 1 \ (\text{for some } k = j), = 0 \ (k \neq j) \Big\}$$

と定めると,
混合状態空間 $\mathcal{T}r_{+1}(\mathbb{C}^n)$ は

$$\mathcal{T}r_{+1}(\mathbb{C}^n) = \Big\{ UFU^* \ : \ F \in \mathcal{T}r_{+1}^{D}(\mathbb{C}^n), \ U \text{ はユニタリ行列} \Big\} \tag{2.27}$$

純粋状態空間 $\mathcal{T}r_{+1}^{p}(\mathbb{C}^n)$ は

$$\mathcal{T}r_{+1}^{p}(\mathbb{C}^n) = \Big\{ UFU^* \ : \ F \in \mathcal{T}r_{+1}^{DP}(\mathbb{C}^n), \ U \text{ はユニタリ行列} \Big\} \tag{2.28}$$

となる.

////

2.3 古典系の基本構造 $[C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega,\nu) \subseteq B(L^2(\Omega,\nu))]$

2.3.1 古典系の基本構造 $[C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega,\nu) \subseteq B(L^2(\Omega,\nu))]$

基本構造 $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}} \subseteq B(H)]$ は，古典系では，

$$[C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega,\nu) \subseteq B(L^2(\Omega,\nu))]$$

となり，次の図式を得る．

(A): 古典系の基本構造: $[C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega,\nu) \subseteq B(L^2(\Omega,\nu))]$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(\Omega) & & & \\
\boxed{C_0(\Omega)} \arrow[u, "共役"'] \arrow[r, "\subseteq", "部分代数：弱閉包"'] & \boxed{L^\infty(\Omega,\nu)} \arrow[d, "前共役"] \arrow[r, "\subseteq", "部分代数"'] & \boxed{B(L^2(\Omega,\nu))} \\
& L^1(\Omega,\nu) &
\end{tikzcd} \tag{2.29}$$

以下に，この図式を説明する．

2.3.1.1 可換 C^*-代数 $C_0(\Omega)$ について

古典系の C^* 代数は，可換 C^* 代数 $\mathcal{A} = C_0(\Omega)$ と見なせる．ここに，Ω は局所コンパクト空間であるが，具体的には，たとえば，Ω として，

$\mathbb{R}(=$ 実直線$)$，$\mathbb{R}^2(=$ 平面$)$，$[a,b](=$ 区間$)$，　有限集合$\Omega(=\{\omega_1,...,\omega_n\})$
(離散距離 d_D を考える)

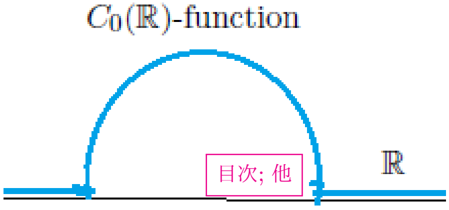
等を想定すればよいだろう．局所コンパクト空間 Ω 上の関数空間 $C_0(\Omega)$ を次のように定義する．

$$C_0(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ は連続で，} \lim_{\omega\to\infty} f(\omega) = 0\} \tag{2.30}$$

ここに，「$\lim_{\omega\to\infty} f(\omega) = 0$」の意味は，

(B) 任意の $\epsilon > 0$ に対して，次を満たすコンパクト集合 $K(\subseteq \Omega)$ が存在する：

$$\{\omega \mid \omega \in \Omega \setminus K, |f(\omega)| > \epsilon\} = \emptyset$$



目次; 他

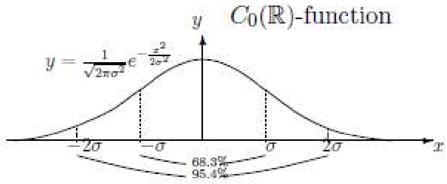
である．したがって，Ω がコンパクトならば，条件「$\lim_{\omega\to\infty} f(\omega) = 0$」は不要で，$C_0(\Omega)$ を $C(\Omega)$ と記すことが普通である．ただし，本書で

は, Ω がコンパクトでも $C_0(\Omega)$ と記すことが多々ある.

複素ベクトル空間 $C_0(\Omega)$ のノルム $\|\cdot\|_{C_0(\Omega)}$ を

$$\|f\|_{C_0(\Omega)} = \max_{\omega\in\Omega} |f(\omega)| \tag{2.31}$$

と定めて, バナッハ空間 $(C_0(\Omega), \|\cdot\|_{C_0(\Omega)})$ を得る.



$f, g \in C_0(\Omega)$ として, 「積 (fg)」と「共役元 (f^*)」は次のように定めるのは, 自然だろう.

$$(fg)(\omega) = f(\omega)g(\omega) \qquad (\forall\omega\in\Omega)$$
$$(f^*)(\omega) = \overline{f(\omega)}(= \text{"}f(\omega)\text{ の共役複素数"}) \qquad (\forall\omega\in\Omega)$$

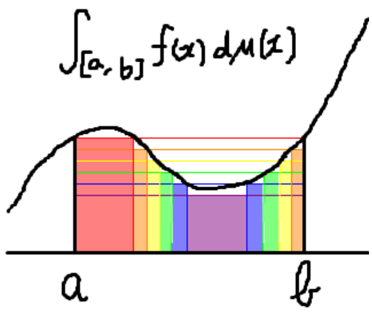
ここで, C^* 条件 : $\|ff^*\|_{C_0(\Omega)} = (\|f\|_{C_0(\Omega)\|})^2$ は自明なので, $C_0(\Omega)$ は C^* 代数になる. 特に, 可換性 (i.e., $fg = gf$) が成り立つので, 可換 C^* 代数と呼ばれる.

さて, Ω を局所コンパクト空間として, 測度空間 $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega, \nu)$ を考える. ここで, $\mathcal{B}_\Omega$ はボレル集合体, すなわち, Ω 内のすべての開集合を含む最小の σ-集合体とする. 更に, 次を仮定する:

(C) 任意の開集合 $U \subseteq \Omega$ に対して, $0 < \nu(U) \leqq \infty$ が成立する. また, 測度 ν は σ-有限とする.

♠ **注釈 2.1.** コンパクト化 (Stone-Čech コンパクト化) して, Ω をコンパクト空間としてもよい. また, 測度 ν は有限測度としても一般性を損なわない. たとえば, $\nu(\Omega) = 1$ としてもよい.

バナッハ空間 $L^r(\Omega,\nu)$ (ここで, $r = 1, 2, \infty$) を複素数値可測関数 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ で, $\|f\|_{L^r(\Omega,\nu)} < \infty$ を満たす関数全体とする. ここで, 関数 f のノルム $\|f\|_{L^r(\Omega,\nu)}$ は



$$\|f\|_{L^r(\Omega,\nu)} = \begin{cases} \left[\int_\Omega |f(\omega)|^r \,\nu(d\omega)\right]^{1/r} & (r = 1, 2 \text{ のとき}) \\ \operatorname*{ess.sup}_{\omega\in\Omega} |f(\omega)| & (r = \infty \text{ のとき}) \end{cases} \tag{2.32}$$

と定める. ここに,

$$\text{ess.sup}_{\omega\in\Omega}|f(\omega)| = \sup\{a \in \mathbb{R} \mid \nu(\{\omega\in\Omega \ : \ |f(\omega)| \geqq a\}) > 0\}$$

とする. $L^r(\Omega,\nu)$ は, 略して $L^r(\Omega)$ (または, 詳しくは $L^r(\Omega, \mathcal{B}_\Omega, \nu)$) と記すこともある.

注意 2.11. [「$C_0(\Omega) \subseteq B(L^2(\Omega,\nu))$」の見方] ヒルベルト空間 H を

$$H = L^2(\Omega,\nu)$$

とする． $f \in C_0(\Omega)$ に対して, $T_f \in B(L^2(\Omega,\nu))$ を

$$L^2(\Omega,\nu) \ni \phi \longrightarrow T_f(\phi) = f \cdot \phi \in L^2(\Omega,\nu) \tag{2.33}$$

と定めて, 次の同一視：

$$C_0(\Omega) \ni f \underset{\text{同一視}}{\longleftrightarrow} T_f \in B(L^2(\Omega,\nu))$$

の下に,

$$f \in C_0(\Omega) \subseteq B(L^2(\Omega,\nu)) \tag{2.34}$$

と見る．

次は, 可換 C^* 代数 $(C_0(\Omega), \|\cdot\|_{C_0(\Omega)})$ の共役バナッハ空間 $(C_0(\Omega)^*, \|\cdot\|_{C_0(\Omega)^*})$ について考える．リースの定理 (*cf.* [77]) によって,

$$C_0(\Omega)^* = \mathcal{M}(\Omega)(= \Omega \text{ 上の複素数値測度全体}) \tag{2.35}$$

である．したがって, $F \in C_0(\Omega)$, $\rho \in C_0(\Omega)^* = \mathcal{M}(\Omega)$ のとき, 双線形形式はいろいろな表現ができる．たとえば,

$$\rho(F) = {}_{C_0(\Omega)^*}\Big(\rho, F\Big)_{C_0(\Omega)} = {}_{\mathcal{M}(\Omega)}\Big(\rho, F\Big)_{C_0(\Omega)} = \int_\Omega F(\omega)\rho(d\omega) \tag{2.36}$$

等である．

また, 共役ノルムは,

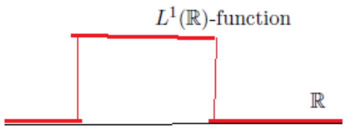
$$\begin{aligned}
&\|\rho\|_{C_0(\Omega)^*} = \sup\{|\rho(F)| \mid \|F\|_{C_0(\Omega)} = 1\} = \sup_{||F||_{C_0(\Omega)}=1} |\int_\Omega F(\omega)\rho(d\omega)| \\
=& \sup_{\Xi,\Gamma \in \mathcal{B}_\Omega} \Big(|Re(\rho(\Xi)) - Re(\rho(\Xi^c))|^2 + |Im(\rho(\Gamma)) - Im(\rho(\Gamma^c))|^2\Big)^{1/2} \\
=&\|\rho\|_{\mathcal{M}(\Omega)}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

ここに, Ξ^c は Ξ の補集合で, $Re(z)$=”複素数 z の実部”, $Im(z)$=”z の虚部” とする．

2.3.1.2 可換 W^*-代数 $L^\infty(\Omega,\nu)$ について

さて,

$$L^1(\Omega,\nu)^* = L^\infty(\Omega,\nu)$$



目次; 他

同じ意味で

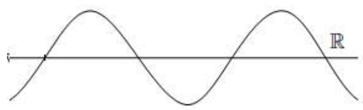
$$L^1(\Omega,\nu) = L^\infty(\Omega,\nu)_*$$

また,

$$C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega,\nu)$$

は自明.

任意の $f \in L^\infty(\Omega,\nu)$ に対して, $f_n \in C_0(\Omega)$ を, 次を満たすように取れる：



$L^\infty(\mathbb{R})$-function

$$\begin{cases} \nu(\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \neq f(\omega)\} = 0 \\ |f_n(\omega)| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega,\nu)} \quad (\forall \omega \in \Omega, \forall n = 1,2,3,...) \end{cases}$$

よって,

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} |\left\langle \phi, (f-f_n)\phi \right\rangle_{L^2(\Omega,\nu)}| \\ \leq &\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n(\omega) - f(\omega)| \cdot |\phi(\omega)|^2 \nu(d\omega) \\ =&0 \quad (\forall \phi \in L^2(\Omega,\nu)) \end{aligned}$$

したがって,

$C_0(\Omega)$ の弱閉包は, $L^\infty(\Omega,\nu)$

となる. したがって、次の古典基本構造を得る.

$$[C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega) \subseteq B(L^2(\Omega,\nu))] \tag{2.38}$$

定理 2.12. [ゲルファントの定理 ($cf.$ [70]) **]** 一般基本構造：

$$[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}} \subseteq B(H)]$$

において、$\mathcal{A}$ は可換 C^*-代数とする. このとき、次を満たす測度空間 $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega, \nu)$ (ここに Ω は局所コンパクト空間) が存在する：

$$\mathcal{A} = C_0(\Omega), \ \ \overline{\mathcal{A}} = L^\infty(\Omega,\nu), \ \ B(H) = B(L^2(\Omega,\nu))$$

このとき、Ω はスペクトラムと呼ばれる．スペクトラムは、8.6 節「時空とは何か？」において、基本的な役割をする．

2.3.2 量子言語の基本構造 $[C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega,\nu) \subseteq B(L^2(\Omega,\nu))]$ と状態空間; 古典系

古典系の基本構造 $[C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega,\nu) \subseteq B(L^2(\Omega,\nu))]$ を考える．

このとき， 状態空間としては, 次の図式を得る．

(D)：古典系の基本構造と状態空間

$$
\begin{tikzcd}
\underset{\substack{(\approx\Omega)\\ C^*-\text{純粋状態}}}{\mathcal{M}_{+1}^p(\Omega)} \subset \underset{\substack{(\text{確率測度空間})\\ C^*-\text{混合状態}}}{\mathcal{M}_{+1}(\Omega)} \subset \mathcal{M}(\Omega) & & \\
\boxed{C_0(\Omega)} \arrow[u, "\text{共役}"'] \arrow[r, "\subseteq", "\text{部分代数：弱閉包}"'] & \boxed{L^\infty(\Omega,\nu)} \arrow[r, "\subseteq", "\text{部分代数}"'] \arrow[d, "\text{前共役}"] & \boxed{B(L^2(\Omega,\nu))} \\
& \underset{\substack{(\text{確率密度関数空間})\\ W^*-\text{混合状態}}}{L_{+1}^1(\Omega,\nu)} \subset L^1(\Omega,\nu) &
\end{tikzcd}
\tag{2.39}
$$

混合状態空間 $\mathfrak{S}^m(C_0(\Omega)^*)$ は,

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{S}^m(C_0(\Omega)^*) =& \{\rho \in \mathcal{M}(\Omega) \ : \ \rho \geq 0, ||\rho||_{\mathcal{M}(\Omega)} = 1\} \\
=& \{\rho \in \mathcal{M}(\Omega) \ : \ \rho \text{は } \Omega \text{ 上の確率測度 } \} \\
=:& \mathcal{M}_{+1}(\Omega)
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

となる．

純粋状態空間 $\mathfrak{S}^p(C_0(\Omega)^*)$ は,

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{S}^p(C_0(\Omega)^*) =& \{\rho = \delta_{\omega_0} \in \mathfrak{S}^p(C_0(\Omega)^*) \ : \\
& \qquad \delta_{\omega_0} \text{は点 } \omega_0 (\in \Omega) \text{ での点測度}, \omega_0 \in \Omega\} \\
\equiv& \mathcal{M}_{+1}^p(\Omega)
\end{aligned}
\tag{2.41}
$$

となる．ここで, 点 $\omega_0 (\in \Omega)$ での点測度 $\delta_{\omega_0} \in \mathcal{M}(\Omega)$ は次を満たす測度である．

$$
\int_\Omega f(\omega) \delta_{\omega_0}(d\omega) = f(\omega_0) \quad (\forall f \in C_0(\Omega))
$$

したがって,

$$
\mathcal{M}_{+1}^p(\Omega) = \mathfrak{S}^p(C_0(\Omega)^*) \ni \delta_\omega \underset{\text{同一視}}{\longleftrightarrow} \omega \in \Omega
\tag{2.42}
$$

この同一視の下に,

$$\mathfrak{S}^p(C_0(\Omega)^*) = \Omega$$

と考える． また,

$$L^1(\Omega,\nu)^* = L^\infty(\Omega,\nu)$$

は, ルベーグ積分論の常識である． したがって，W^*-混合状態空間は

$$\begin{aligned} L^1_{+1}(\Omega,\nu) &= \{ f \in L^1(\Omega,\nu) \ : \ f \geq 0, \ \int_\Omega f(\omega)\nu(d\omega) = 1 \} \\ &= \text{確率密度関数全体の空間} \end{aligned} \tag{2.43}$$

となる.

注意 2.13. [有限集合 Ω について: $C_0(\Omega) = L^\infty(\Omega,\nu)$, $\mathcal{M}(\Omega) = L^1(\Omega,\nu)$] Ω を有限集合 $\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_n\}$ とする. 離散距離 d_D と個数測度 ν、すなわち、

$$\nu(D) = \sharp[D](= \text{“}D \text{ の要素の個数”})$$

とする. このとき次は明らか：

$$C_0(\Omega) = \{ F : \Omega \to \mathbb{C} \mid \ F \text{ は } \Omega \text{ 上の複素数値関数 } \} = L^\infty(\Omega,\nu)$$

また、

$$\rho \in \mathcal{M}_{+1}(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad \rho = \sum_{k=1}^n p_k \delta_{\omega_k} \quad (\sum_{k=1}^n p_k = 1, p_k \geq 0)$$

そして

$$f \in L^1_{+1}(\Omega,\nu) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^n f(\omega_k) = 1. \ \ f(\omega_k) \geq 0$$

したがって、次の同一視を得る：

$$\mathcal{M}_{+1}(\Omega) = L^1_{+1}(\Omega,\nu) \quad (\text{ or, } \mathcal{M}(\Omega) = L^1(\Omega,\nu))$$

結局、

$$C_0(\Omega) = L^\infty(\Omega) = \mathbb{C}^n \qquad \mathcal{M}(\Omega) = L^1(\Omega) = \mathbb{C}^n \tag{2.44}$$

を得る．ここに、ノルム $\|\cdot\|_{C_0(\Omega)}$ は

$$\|z\|_{C_0(\Omega)} = \max_{k=1,2,\ldots,n} |z_k| \qquad \forall z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n \tag{2.45}$$

で定まり、ノルム $\|\cdot\|_{\mathcal{M}(\Omega)}$ は

$$\|z\|_{\mathcal{M}(\Omega)} = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \qquad \forall z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n \tag{2.46}$$

で定まる．

2.4 状態と観測量——第一次性質と第二次性質—-

2.4.1 序 (ジョン・ロック)

当面の目的は, 次の呪文を「丸暗記」することである.

(A): 言語ルール 1(測定)　純粋型 (*cf.* 2.7 節で読めるようになる)

あらゆるシステムはある基本構造 $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}]_{B(H)}$ 内で定式化できる. $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}]_{B(H)}$ 内で定式化された W^*-測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}{=}(X,\mathcal{F},F), S_{[\rho]})$ $\Big($ または, C^*-測定 $\mathsf{M}_{\mathcal{A}}(\mathsf{O}{=}(X,\mathcal{F},F), S_{[\rho]})$ $\Big)$ を考えよう. すなわち,

- ある**状態** $\rho(\in \mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*)$: 状態空間) を持つシステムに対する**観測量** $\mathsf{O}{=}(X,\mathcal{F},F)$ の W^*-測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}, S_{[\rho]})$ $\Big($ または, C^*-測定 $\mathsf{M}_{\mathcal{A}}(\mathsf{O}{=}(X,\mathcal{F},F), S_{[\rho]})$ $\Big)$

を考える. このとき, W^*-測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}, S_{[\rho]})$ $\Big($ または, C^*-測定 $\mathsf{M}_{\mathcal{A}}(\mathsf{O}{=}(X,\mathcal{F},F), S_{[\rho]})$ $\Big)$ により得られる**測定値** x $(\in X)$ が, Ξ $(\in \mathcal{F})$ に属する確率は, (もし $F(\Xi)$ が ρ で本質的連続ならば) $\rho(F(\Xi))$ $(\equiv {}_{\mathcal{A}^*}(\rho, F(\Xi))_{\overline{\mathcal{A}}})$ で与えられる.

もちろん,「数学込みの丸暗記」で, たとえば,「基本構造 $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}]_{B(H)}$」,「状態空間 $\mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*)$」,「観測量 $\mathsf{O}{=}(X,\mathcal{F},F)$」,「因果作用素列 $\{\Phi_{t_1,t_2}$」等の数学的定義も暗記しなければならない.

前節では, 一般基本構造 $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}]_{B(H)}$ を導入して, その分類 (量子系と古典系) とそれに対応する状態空間を考えた. すなわち,

(B)　$\underset{\text{状態空間 } [\mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*), \mathfrak{S}^m(\mathcal{A}^*), \overline{\mathfrak{S}}^p(\overline{\mathcal{A}}_*)]}{\text{一般基本構造 } [\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}]_{B(H)}}$

$$
\bullet \begin{cases} \underset{\text{状態空間 } [\mathfrak{S}^p(\mathcal{T}r(H)), \mathfrak{S}^m(\mathcal{T}r(H)) = \overline{\mathfrak{S}}^m(\mathcal{T}r(H))]}{\text{量子基本構造 } [\mathcal{C}(H) \subseteq B(H)]_{B(H)}} \\[4ex] \underset{\text{状態空間 } [\Omega, \mathcal{M}_{+1}(\Omega), L^\infty(\Omega,\nu)]}{\text{古典基本構造 } [C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega,\nu)]_{B(L^2(\Omega,\nu))}} \end{cases}
$$

を議論した.

本節では,

「観測量」

の説明をする．

「状態」と「観測量」の二つは, ジョン・ロックの「第一次性質 (物の固有の性質)」と「第二次性質 (「物固有の性質 (第一次性質)」の感じ方；「甘い, 辛い」，「熱い, 冷たい」等)」に対応する．すなわち、

John Locke (1632-1704)
father of British empiricism

$$
\begin{cases} [\text{状態}] & \longleftrightarrow [\text{第一次性質}] \\ [\text{観測量}] & \longleftrightarrow [\text{第二次性質}] \end{cases} \tag{2.47}
$$

であり,

- 「状態」と「観測量」は, 二元論の根幹を形成する概念

である.

ロックによれば,

- 第一次性質 (物固有の性質)・・・ものの重さ, 形, 温度, 等
- 第二次性質 (「物固有の性質」の感じ方)・・・熱い, 甘い, すっぱい, 青い, 温かい, 等

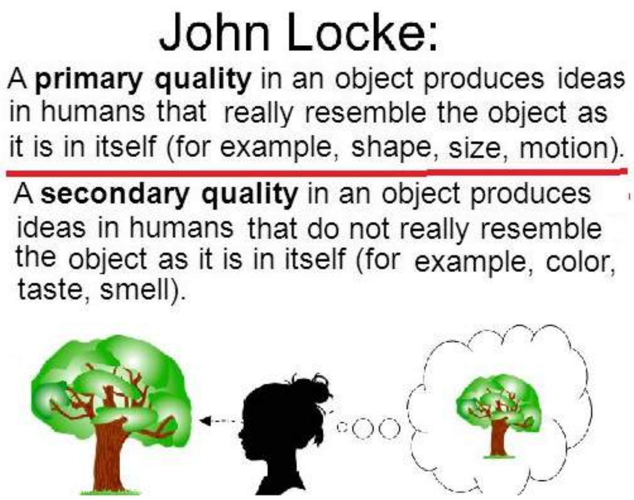
である.

すなわち,

ロックの世界

世界は,「物」と「測定者」の二元論からなる．「物」は性質 (=第一次性質) を持つ.「測定者」は感覚器という身体を持って, 第二次性質 (「熱い」とか「美しい」とか「神々しい」とか) を脳で感じる.

- 初めは, 白紙状態の「心 (= 脳=脳回路)」も, いろいろと見たり聞いたりして,「観念 (=脳回路の回線)」が生じる



また、次の表は「量子言語と他の世界記述法」の関係を理解し易くするだろう.

表 2.1　世界記述法のキーワード (観測量 · 状態 (コト) · システム (モノ))

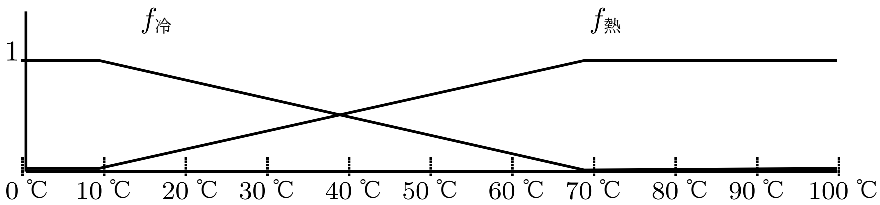
世界記述＼量子言語	観測量	状態	システム
プラトン	イデア	/	/
アリストテレス	/	形相	質料
ロック	第二次性質	第一次性質	/
ニュートン	/	状態	質点
統計学	/	パラメータ	母集団
量子力学	観測量	状態 (≈ 波動関数)	粒子

上で、アリストテレスとニュートンは一元論なので、書かない方が賢明だったかもしれない. 上の対応では、統計学が一番難しいと思う.

♠ **注釈 2.2.** 「観測量」と「測定器」について多少のことを説明しておく. **「観測量＝言葉の仕切り」**と思えばよい. すなわち、

$$\text{“観測量”} = \text{“言葉の仕切り”} = \text{“第二次性質”} \tag{2.48}$$

たとえば, 第 1 章 (図 1.2) を見れば, $(f_{冷}, f_{熱})$ は,「冷たい」と「熱い」という言葉の仕切りを表しているとも言える.



第 1 章 (図 1.2): 冷たい？または、熱い?

測定器は,「言葉の仕切り」を測定する装置 (すなわち，仕切られた言葉たちから，一つの言葉を選び出す装置) である．したがって,「観測量 $\neq$ 測定器」であるが,

$$観測量\ \mathsf{O}\ を測定する＝測定器\ \mathsf{O}\ で測定する \tag{2.49}$$

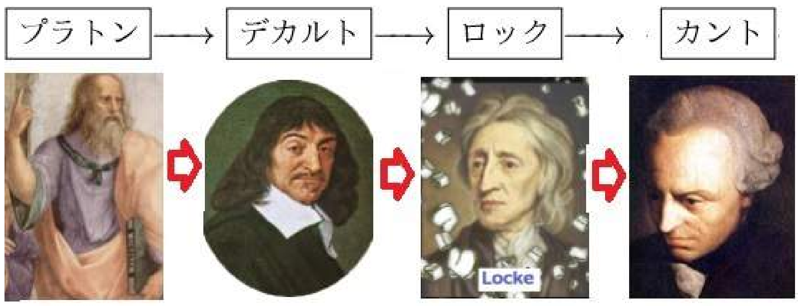
なので，この意味で,「**観測量＝測定器**」と思ってもよい．ただし,「測定器」と言うと，工学モデルに限定しているようなニュアンスがあるので，本書では「観測量」を多用するが，最初は「測定器」の方がわかりやすいかもしれない．

♠ **サプリ 2.2.** また，イギリス経験論の父であるジョン・ロック (1632 年–1704 年) のアイデアとされている「第一次性質」と「第二次性質」は有名であるが (高校の「倫理」の教科書参照)，これらのそれぞれが測定理論の「状態」と「観測量」に対応していると思えばよい．もちろん,

ジョン・ロックの「第一次性質・第二次性質」が有名なのは,

この言葉が二元論の根幹を形成している

からであると思う．そうだとしても、二元論的観念論の系譜：



が、何故西洋哲学の本流になり得たのか？　は著者は明確な答えをもっていない．二元論的観念論は東洋では禅問答に過ぎなかったわけで、しかも禅問答以上のものがあると信じる方がおかしいと思うからである．

2.4.2 二元論への執着

哲学のことをよく知っているわけではないが, やはり, 次の疑問：

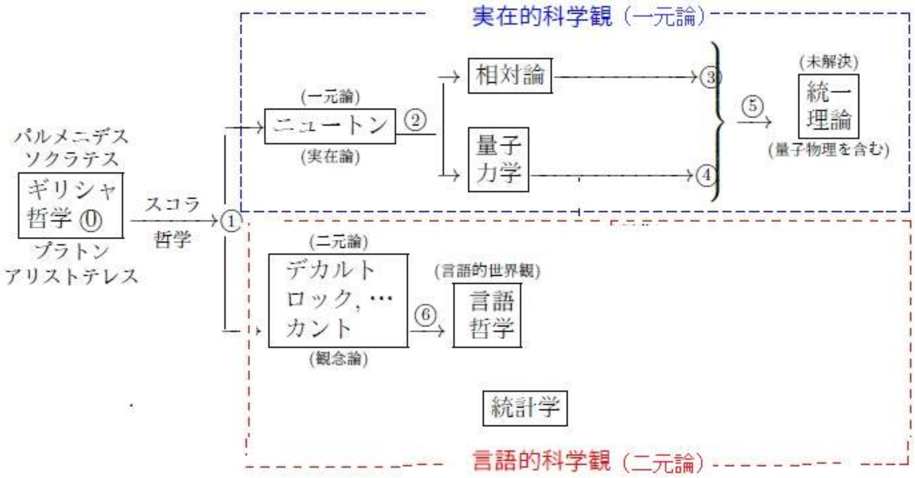
(C_1) 失敗の連続であったにもかかわらず, 哲学は何故「二元論」に拘るのか？

は気にかかる．常識的な答えは,

(C_2)「我」は特別なのもで,「世界」と一線を画したい

だと思う.

それにしても、下図のような状況なかで、



(D) 2500 年間以上も失敗し続けて理系に見下されても、哲学者たちはなぜ諦めないで二元論を追究し続けたのだろう

は不可解であるが、本書的には、「二元論の方が自然」と直感した哲学者たちの慧眼に敬意を払いたい.

♠ **サプリ 2.3.** 二元論 (’ または測定) に関して、次の禅問答は有名と思う.

- 誰もいないところで一本の木が倒れた. さて, この木は倒れるときに音を立てたか?

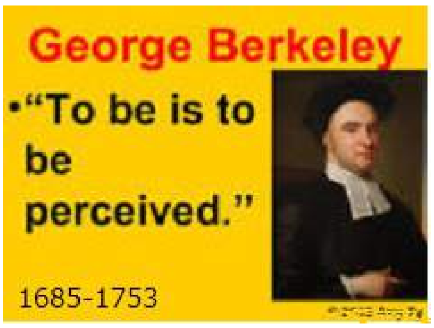
また、バークリーの

- To be is to be perceived (存在するとは知覚されること)

西洋では「哲学」, 東洋では「言葉遊び」(落語の小話) というように, 同じようなことに対する西洋と東洋のスタンスの違いは興味深い. しかし、世界的にみると、

- 二元論が普通の考えで、一元論がニュートンの天才による特殊な考えかもしれない

と思う.

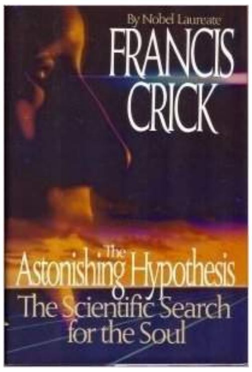


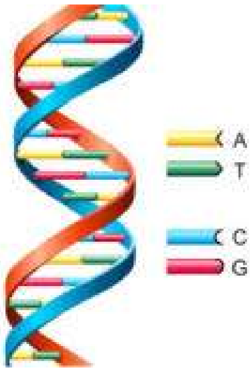
目次; 他

♠ **注釈 2.3.** 20 世紀の科学はいろいろあるにしても, 3 つ挙げるとしたら相対性理論, 量子力学, DNA 二重らせん構造の発見 (ワトソンとクリック) でしょう.
クリックの著書「驚くべき仮説 (The astonishing hypothesis)」の冒頭に,

(a) You, your joys and your sorrows, your memories and your ambitions,your sense of personal identity and free will,are in fact no more than the behaviour of a vast assembly of nerve cells and their associated molecules.
つまり,

(a′) 我々の心のいろいろな現象–喜び, 悲しみ, 記憶, 志, 自我, 自由意志等–は非常に多くの分子と細胞の相互関係の表現に過ぎない





とヒューム (1711-1776) の考えに近い意見を述べている. クリックは実体二元論 (この世界にはモノとココロという本質的に異なる独立した 二つの実体がある、とする考え方) を否定しているが (というか、実体二元論など信じているのは異端の宗教家だけだろうが)、もちろん、クリックは言語的二元論を否定しているわけではない. 量子言語の主張は,

(b) **一元論的な現象を, 二元論的言語 (=量子言語) で記述する**

のだから, クリックの主張 (a)(=大部分の科学者の意見) は二元論と矛盾するわけではない.
上で、クリックの主張を当たり前と言ったが、さらに突っ込んで次のように言い換えると異論があるかもしれない.

(c)「心」、「生命」は科学的テーマであって、哲学的テーマでない

である. 著者はこれも当然と思っている. 脳科学や生命科学の後追いを良しとする哲学者がいるわけがない. もちろん、「正しい心を持ちましょう」とか「命を大切にしましょう」とかのように、「心」、「生命」という語を使って倫理・道徳 (「生き方」) を説くことを否定しているわけではない. また、「心」、「生命」をキーワードとした文芸的随筆に納得させられることがあることを否定するものではない.

2.4.3 本質的連続

「言語ルール 1」の説明のために, 次の「本質的連続[*3]」から始める.

2.1.2 節では, 以下を述べた.

(E) : 一般基本構造と状態空間

$$
\begin{tikzcd}
\underset{C^*-\text{純粋状態}}{\mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*)} \arrow[r, phantom, "\subset"] & \underset{C^*-\text{混合状態}}{\mathfrak{S}^m(\mathcal{A}^*)} \arrow[r, phantom, "\subset"] & \mathcal{A}^* & & \\
 & & \boxed{\mathcal{A}} \arrow[u, "\text{共役}"'] \arrow[r, "\subseteq", "\text{部分代数・弱閉包}"'] & \boxed{\overline{\mathcal{A}}} \arrow[r, "\subseteq", "\text{部分代数}"'] \arrow[d, "\text{前共役}"] & \boxed{B(H)} \\
 & & & \underset{W^*-\text{混合状態}}{\overline{\mathfrak{S}}^m(\overline{\mathcal{A}}_*)} \subset \overline{\mathcal{A}}_* &
\end{tikzcd}
\tag{2.50}
$$

この図式を念頭において, 次の定義を読もう.

定義 2.14. [本質的連続] 要素 $F(\in \overline{\mathcal{A}})$ が $\rho_0(\in \mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*))$ で本質的に連続とは, 次を満たす複素数 α が一意に存在することである :

(F_1) もし ρ $(\in \overline{\mathfrak{S}}^m(\overline{\mathcal{A}}_*))$ が $\rho_0(\in \mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*))$ に弱収束すれば (すなわち, $\rho(G) \longrightarrow \rho_0(G)$ $(\forall G \in \mathcal{A}(\subseteq \overline{\mathcal{A}})$), $\rho(F)$ は α に収束する

このとき, $\rho_0(F)$ の値を α で定める.
もちろん, $F \in \mathcal{A}$ は, $\rho_0(\in \mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*))$ で本質的に連続である.

注意 2.15. [本質的連続 (量子系と古典系)] [I]: 基本構造が $[\mathcal{C}(H) \subseteq B(H)]_{B(H)}$ となる量子系では,

$$(\mathcal{C}(H))^* = \mathcal{T}r(H) = B(H)_*$$

なので, $\rho \in \mathfrak{S}^p(\mathcal{C}(H)^*) \subseteq \mathcal{T}r(H)$, $F \in \overline{\mathcal{C}(H)} = B(H)$ となり,

$$\rho(G) = {}_{\mathcal{T}r(H)}\Big(\rho, F\Big)_{B(H)} \tag{2.51}$$

はいつも定義可能で, 「本質的連続」は, 「連続」と同値になる.

[II]: また, 古典系の基本構造 $[C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega,\nu) \subseteq B(L^2(\Omega,\nu))]$ を考えよう. 関数 F $(\in$

[*3] 文献 [31]: A New Interpretation of Quantum Mechanics: JQIS: Vol.1(2), pp35-42, 2011

$L^\infty(\Omega,\nu))$ が「**点** ω_0 $(\in \Omega = \mathfrak{S}^p(C_0(\Omega)^*))$ **で本質的連続**」であるとは，次の条件 (F_2) を満たすことである：

(F_2) もし $\rho_n(\in L^1_{+1}(\Omega,\nu)$ が

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega G(\omega)\rho_n(\omega)\nu(d\omega) = G(\omega_0) \qquad (\forall G \in C_0(\Omega))$$

を満たすならば,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega F(\omega)\rho_n(\omega)\nu(d\omega) = \alpha \tag{2.52}$$

となる複素数 α が一意に存在する.

このとき，F の $\omega_0(\in \Omega)$ での値を α で定める．すなわち，$F(\omega_0) = \alpha$ とする．

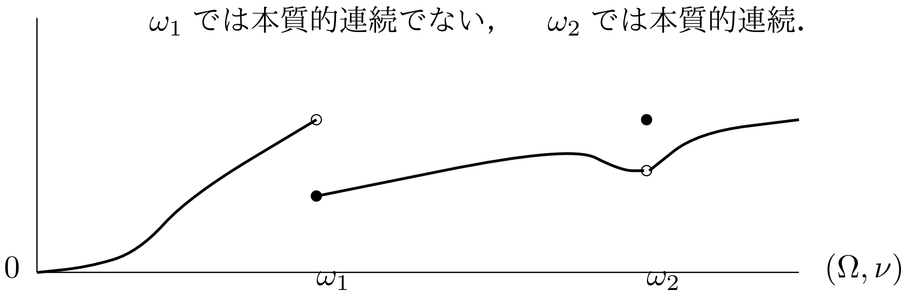


図 2.1　本質的連続性

2.4.4　観測量 (=測定器) の定義

次の定義は, 測度論のスタート点だろう.

定義 2.16. [集合環, 集合体, σ-集合体]　X を集合 (普通は, 局所コンパクト空間を想定するが, コンパクト化して, コンパクト空間と仮定しても, 特に一般性を損ねることはない) とする.

$\mathcal{F}(\subseteq 2^X(= \mathcal{P}(X) \equiv \{\Xi \mid \Xi \subseteq X\}))$ (または，２つ組 $(X,\mathcal{F})$) は次の条件 (a)-(c) を満たすとき集合環という.

(a) : $\emptyset(=$ 空集合$) \in \mathcal{F}$,

$$(\mathrm{b}): \Xi_i \in \mathcal{F} \quad (i=1,2,\ldots) \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} \Xi_i \in \mathcal{F}, \quad \bigcap_{i=1}^{n} \Xi_i \in \mathcal{F}$$

$$(\mathrm{c}): \Xi_1, \Xi_2 \in \mathcal{F} \Longrightarrow \Xi_1 \setminus \Xi_2 \in \mathcal{F} \quad (ここに, \Xi_1 \setminus \Xi_2 = \{x \mid x \in \Xi_1, x \notin \Xi_2\})$$

さらに条件 $X \in \mathcal{F}$ を満たすとき, 集合環 $\mathcal{F}$(または, 対 $(X,\mathcal{F})$) を**集合体**とよぶ. また, さらに, (b) で, 「$n=\infty$」とできるとき, 集合体 $\mathcal{F}$ (または, 対 $(X,\mathcal{F})$) を **σ-集合体**とよぶ.

////

Measuring instrument

次の定義は, 本書での最重要である.

定義 2.17. [観測量 (observable), **測定値空間** (measured value space), **測定値** (measured value)] 量子言語の基本構造 $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}} \subseteq B(H)]$ を考える.

(G_1):C^*-観測量

3 つ組 O=$(X,\mathcal{F},F)$ は, 次の条件 (i) と (ii) を満たすとき, $\mathcal{A}$ 内の **C^*-観測量 (=測定器)** と呼ばれる:

(i) $(X,\mathcal{F})$ を集合環とする.

(ii) 写像 $F:\mathcal{F} \to \mathcal{A}$ は次を満たす.

(a) $0 \leqq F(\Xi) \quad (\forall \Xi \in \mathcal{F}),\ F(\emptyset)=0,$

(b) 任意の $\rho(\in \mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*))$ に対して, (**サンプル確率空間**と呼ばれる) 確率空間 $(X,\overline{\mathcal{F}},P_\rho)$ が存在して (ただし, $\overline{\mathcal{F}}$ は集合環 $\mathcal{F}$ を含む最小の σ-集合体), つぎを満たす.

$$_{\mathcal{A}_*}\Big(\rho, F(\Xi)\Big)_{\mathcal{A}} = P_\rho(\Xi) \qquad (\forall \Xi \in \mathcal{F}) \tag{2.53}$$

また, X を**測定値空間**, その元 $x(\in X)$ を**測定値**と呼ぶ.

(G_2):W^*-観測量

3 つ組 O=$(X, \mathcal{F}, F)$ は，次の条件 (i) と (ii) を満たすとき，$\overline{\mathcal{A}}$ 内の W^***-観測量 (=測定器)** と呼ばれる：

(i) $(X, \mathcal{F})$ を σ-集合体とする.

(ii) 写像 $F : \mathcal{F} \to \overline{\mathcal{A}}$ は次を満たす.

(a) $0 \leqq F(\Xi) \quad (\forall \Xi \in \mathcal{F}),\ F(\emptyset) = 0,\ F(X) = I,$

(b) Ξ を $\mathcal{F}$ の任意の元とし，Ξ の任意の可算分割 $\{\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_n, \ldots\}$ $\Big($ すなわち，$\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Xi_n$，$\Xi_n \in \mathcal{F}, (n = 1, 2, \ldots)$，$\Xi_m \cap \Xi_n = \emptyset\ (m \neq n)$ $\Big)$ に対して，次の完全加法性が成立する.

$$
{}_{\overline{\mathcal{A}}_*}\Big(\rho, F(\Xi)\Big)_{\overline{\mathcal{A}}} = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} {}_{\overline{\mathcal{A}}_*}\Big(\rho, F(\Xi_n)\Big)_{\overline{\mathcal{A}}} \quad (\forall \rho \in \overline{\mathcal{A}}_*) \tag{2.54}
$$

また，X を**測定値空間**，その元 $x(\in X)$ を**測定値**と呼ぶ．また，

$$
F(\Xi)^2 = F(\Xi) \qquad (\forall \Xi \in \mathcal{F}
$$

のとき, O=$(X, \mathcal{F}, F)$ を射影観測量と呼ぶ.

W^*-観測量のサンプル空間については、次の用意をする.

定義 2.18. [サンプル確率空間 (W^*-観測量)] O=$(X, \mathcal{F}, F)$ を $\overline{\mathcal{A}}$ 内の W^*-観測量、$\rho(\in \mathfrak{S}^m(\mathcal{A}^*))$ とする．$\mathcal{F}_\rho = \{\Xi \in \mathcal{F} \mid \ F(\Xi)$ は ρ で本質的に連続 $\}$ とする．このとき、次を満たす確率空間 $(X, \mathcal{F}, P_\rho)$ をサンプル確率空間と呼ぶ.

($\sharp_1$) ”$\mathcal{F}_\rho$ を含む最小の σ-集合体”$= \mathcal{F}$

($\sharp_2$)

$$
{}_{\mathcal{A}^*}\Big(\rho, F(\Xi)\Big)_{\overline{\mathcal{A}}} = P_\rho(\Xi) \qquad (\forall \Xi \in \mathcal{F}_\rho) \tag{2.55}
$$

C^*-観測量に関しては、サンプル確率空間の存在は自明．．したがって、W^*-観測量に関して、以下に述べる．注意 2.15 で述べたように、量子系 (すなわち、$\mathcal{A}^* = \mathcal{T}r(H) = \overline{\mathcal{A}}_*$) の場合は明らかにサンプル確率空間は存在する．しかしながら、古典系の場合は、自明とは言えないが、重要な W^*-観測量は、サンプル確率空間を持つと考えてもよい．したがって、本書全体を通して、以下の仮定をする.

仮定 2.19. [サンプル確率空間の存在]. $\mathsf{O}=(X, \mathcal{F}, F)$ を $\overline{\mathcal{A}}$ 内の W^*-観測量、$\rho(\in \mathfrak{S}^m(\mathcal{A}^*))$ としたとき、サンプル確率空間 $(X, \mathcal{F}, P_\rho)$ の存在を仮定する.

目次; 他

2.5 観測量の例

本節では，観測量の例を幾つか述べる．例 2.20-例 2.23 は, C^*-観測量かつ W^*-観測量であるが, W^*-観測量として, 説明する.

例 2.20. [**存在観測量** (existence observable)]　$[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}} \subseteq B(H)]$ を基本構造とする.　X を任意の集合 (せいぜい, 局所コンパクト空間を想定するが, コンパクト化して, コンパクト空間と仮定しても, 特に一般性を損ねることはない) とする．$\overline{\mathcal{A}}$ 内の (射影) 観測量 $\mathsf{O}^{\text{存}} = (X, \{\emptyset, X\}, F^{\text{存}})$ を次のように定める:

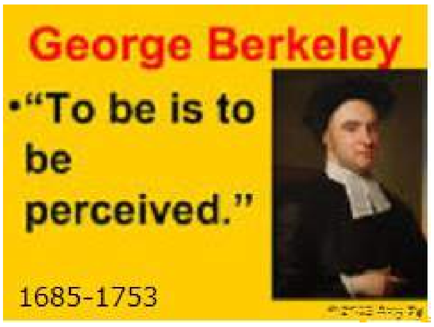
$$F^{\text{存}}(\emptyset) = 0, \quad F^{\text{存}}(X) = I \tag{2.56}$$

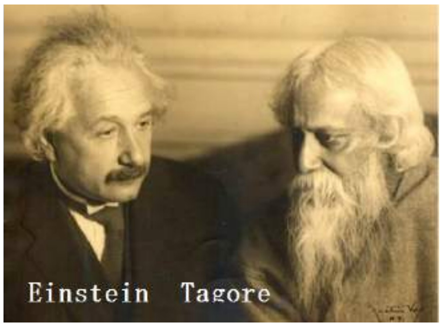
この $\mathsf{O}^{\text{存}} = (X, \{\emptyset, X\}, F^{\text{存}})$ を**存在観測量**と呼ぶ．さて，$\overline{\mathcal{A}}$ 内の任意の観測量 $\mathsf{O} = (X, \mathcal{F}, F)$ を考えよう．観測量の定義から，$\{\emptyset, X\} \subseteq \mathcal{F}$ (しかも，$\{\emptyset, X\}$ は $\mathcal{F}$ の部分 $\sigma-$ 集合体) で，しかも，

$$F(\emptyset) = 0, \quad F(X) = 1$$

となる．したがって，$(X, \{\emptyset, X\}, F^{\text{存}}) = (X, \{\emptyset, X\}, F)$ となり，任意の観測量 $\mathsf{O} = (X, \mathcal{F}, F)$ は，存在観測量 $\mathsf{O}^{\text{存}}$ を必ず含むことになる．

////





♠ 注釈 **2.4.** 二元論の神髄は、バークリー (1685-1753) の

($\sharp_1$) **To be is to be perceived** 「存在するとは、知覚されること」

である．これは二元論の根本命題で、アインシュタイン=タゴール会談でのアインシュタインの言葉 (一元論の根本命題)：

($\sharp_2$) 月は、見ていても、見ていなくても存在する (=[測定者がいなくても、物理学は成立する])

との対比される (*cf.*4.5 節ベルの不等式、注釈 10.1).

例 2.21. [1 の分解 (言葉の仕切り)]　$[C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega, \nu) \subseteq B(L^2(\Omega, \nu))]$ を古典系の基本構造

とする． 関数族 $\{f_x\}_{x \in X}$ が，状態空間 $\Omega(\approx \mathfrak{S}^p(C_0(\Omega)^*))$ 上の **1 の分解**であるとは，次を満たすときを言う:

> $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ は (高々) 加算集合．各 $x_k(\in X)$ に対して，連続関数 f_{x_k} $(\in L^\infty(\Omega, \nu))$ が定まって，次の (i) と (ii) を満たす:
>
> (i) $0 \leqq f_{x_k}(\omega) \leqq 1 \qquad (\forall x_k \in X, \forall \omega \in \Omega)$
>
> (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} f_{x_k}(\omega) = 1 \qquad (\forall \omega \in \Omega)$

各 $\Xi(\in \mathcal{F} \equiv 2^X)$ に対して，$F(\Xi)(\in L^\infty(\Omega, \nu))$ を

$$[F(\Xi)](\omega) = \sum_{x \in \Xi} f_x(\omega) \ \Big(= \sum_{k \in \{k \mid x_k \in \Xi\}} f_{x_k}(\omega) \Big) \qquad (\forall \omega \in \Omega)$$

と定める．このとき，$\mathsf{O} = (X, \mathcal{F}, F)$ は $L^\infty(\Omega, \nu)$ 内の観測量になる．
また，逆に，$L^\infty(\Omega, \nu)$ 内の観測量 $\mathsf{O} = (X(= \{x_1, x_2, \cdots\}), \mathcal{F}(= 2^X), F)$ において，任意の x $(\in X)$ に対して，関数 f_x $(\in L^\infty(\Omega))$ を，

$$f_x(\omega) = [F(\{x\})](\omega) \qquad (\forall \omega \in \Omega)$$

と定めれば，関数族 $\{f_x\}_{x \in X}$ は， Ω 上の 1 の分解となる．このとき，関数族 $\{f_x\}_{x \in X}$ を観測量 $\mathsf{O} = (X, 2^X, F)$ の **1 の分解表現** (または，**言葉の仕切り表現**) と呼ぶ．

たとえば，図 2.2 は，$X = \{x_1, x_2, x_3\}$ の場合の 1 の分解 $\{f_{x_1}, f_{x_2}, f_{x_3}\}$ の例である．

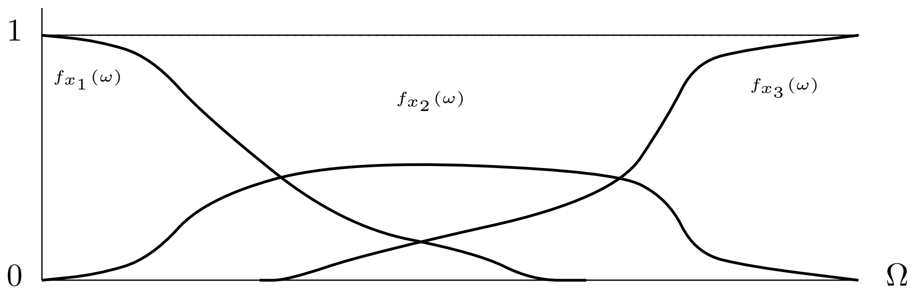


図 2.2　1 の分解 $\{f_{x_1}, f_{x_2}, f_{x_3}\}$

図 2.2 で，Ω = 閉区間 $[0, 100](\subset \mathbb{R})$ を温度の軸，$X = \{$ 冷, 温, 熱 $\}$ として，$f_{x_1} = f_{冷}$，$f_{x_2} = f_{温}$，$f_{x_3} = f_{熱}$ と見れば，1 の分解 $\{f_{x_1}, f_{x_2}, f_{x_3}\}$ は，「冷，温，熱」の 3 つの言葉の仕切りであることがわかると思う．

また，

$$\mathcal{F}(=2^X)=\{\emptyset,\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\},\{x_1,x_2\},\{x_2,x_3\},\{x_1,x_3\},X\}$$

として，

$$\begin{aligned}
&[F(\emptyset)](\omega)=0,\ \ [F(X)](\omega)=f_{x_1}(\omega)+f_{x_2}(\omega)+f_{x_3}(\omega)=1\\
&[F(\{x_1\})](\omega)=f_{x_1}(\omega),\ \ [F(\{x_2\})](\omega)=f_{x_2}(\omega),\ \ [F(\{x_3\})](\omega)=f_{x_3}(\omega)\\
&[F(\{x_1,x_2\})](\omega)=f_{x_1}(\omega)+f_{x_2}(\omega),\ \ [F(\{x_2,x_3\})](\omega)=f_{x_2}(\omega)+f_{x_3}(\omega)\\
&[F(\{x_1,x_3\})](\omega)=f_{x_1}(\omega)+f_{x_3}(\omega)
\end{aligned}$$

と定めれば，$C([0,100])$ 内の観測量 $(X,\mathcal{F}(=2^X),F)$ を得る．

////

例 2.22. [約–観測量 (rounding observable)]　$[C_0(\Omega)\subseteq L^\infty(\Omega,\nu)\subseteq B(L^2(\Omega,\nu))]$ を古典系の基本構造とする．　たとえば，状態空間を閉区間 $\Omega=[0,100]$ $(\subseteq\mathbb{R})$ で定める．各 $n\in\mathbb{N}_{10}^{100}=\{0,10,20,\ldots,100\}$ に対して，(三角型) 連続関数 $g_n:\Omega\to[0,1]$ を次のように定める (図 2.3):

$$g_n(\omega)=\begin{cases}0 & (0\leqq\omega\leqq n-10)\\ \dfrac{\omega-n-10}{10} & (n-10\leqq\omega\leqq n)\\ -\dfrac{\omega-n+10}{10} & (n\leqq\omega\leqq n+10)\\ 0 & (n+10\leqq\omega\leqq 100)\end{cases}\tag{2.57}$$

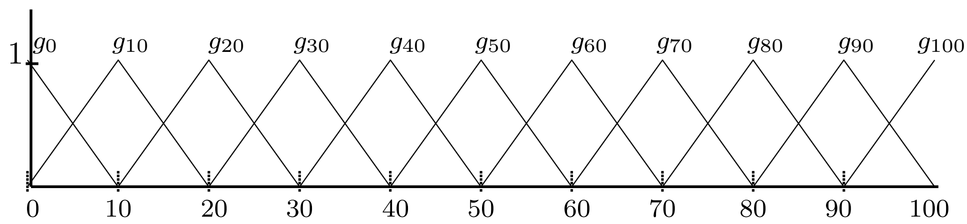


図 2.3　約-観測量

当然，関数族 $\{g_0,g_{10},g_{20},\ldots,g_{100}\}$ は，閉区間 $[0,100]$ 上の 1 の分解となる．ここで，測定値空間 Y を $Y=\mathbb{N}_{10}^{100}$ として，$\mathsf{O}_{約}=(Y,2^Y,G_{約})$ を次のように定める：

$$[G_{約}(\emptyset)](\omega)=0,\qquad [G_{約}(Y)](\omega)=1$$

$$[G_{約}(\Gamma)](\omega) = \sum_{n \in \Gamma} g_n(\omega) \quad (\forall \Gamma \in 2^{\mathbb{N}_{10}^{100}})$$

このとき，$\mathsf{O}_{約} = (Y(=\mathbb{N}_{10}^{100}), 2^Y, G_{約})$ を，$C([0,100])$ 内の**約-観測量**と呼ぶ.

////

例 2.23. [**正規観測量**]

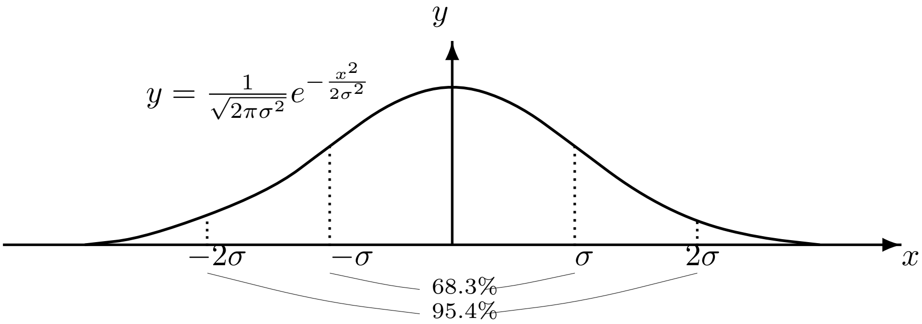


図 2.4　Error function

$[C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega,\nu) \subseteq B(L^2(\Omega,\nu))]$ を古典系の基本構造とする．ここで，$\Omega = \mathbb{R}(=$ 実直線$)$ または，$\Omega =$ 区間 $[a,b]$ $(\subseteq \mathbb{R})$ として，ルベーグ測度 $\nu(d\omega)(=d\omega)$ を仮定する．また，$\sigma > 0$ を標準偏差とする．$L^\infty(\Omega,\nu)$ 内の**正規観測量** $\mathsf{O}_{G_\sigma} = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, G_\sigma)$ を次のように定義する：

$$[G_\sigma(\Xi)](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_\Xi e^{-\frac{(x-\omega)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (\forall \Xi \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \forall \omega \in \Omega(=\mathbb{R}))$$

これは，統計学におけるもっとも基本的な観測量である．

////

次の例 2.24 と例 2.25 は, W^*-観測量であるが, C^*-観測量ではない． 特に, 精密観測量という基本的な観測量が C^*-観測量ではないことは, C^*-代数アプローチの限界であるといえる．

例 2.24. [**精密観測量** (exact observable)]　$[C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega,\nu) \subseteq B(L^2(\Omega,\nu))]$ を古典系の基本構造とする． $\mathcal{B}_\Omega$ をボレル σ-集合体とする．このとき，$L^\infty(\Omega,\nu)$ 内の (射影) 観測量 $\mathsf{O}^{(e)} = (\Omega, \mathcal{B}_\Omega, F^{(e)})$ を次のように定める: 定義関数 χ を使って書くと,

$$[F^{(e)}(\Xi)](\omega) = \chi_\Xi(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega \in \Xi(\in \mathcal{B}_\Omega)) \\ 0 & (\omega \notin \Xi(\in \mathcal{B}_\Omega)) \end{cases} \tag{2.58}$$

$\mathsf{O}^{(e)}$ は $L^\infty(\Omega,\nu)$ 内の観測量で，**精密観測量**と呼ぶ.

////

例 2.25. [四捨五入] $[C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega,\nu) \subseteq B(L^2(\Omega,\nu))]$ を古典系の基本構造とする． 状態空間 $\Omega(\approx \mathfrak{S}^p(C_0(\Omega)^*)) = \Omega$ を，閉区間 $[0,100]$ としてルベーグ測度 $d\omega$ を仮定する．各 $n \in \mathbb{N}_{10}^{100}{=}\{0,10,20,\ldots,100\}$ に対して，関数 $g_n : \Omega \to [0,1]$ を次のように定める:

$$
g_n(\omega) = \begin{cases} 0 & (0 \leqq \omega \leqq n-5) \\ 1 & (n-5 < \omega \leqq n+5) \\ 0 & (n+5 < \omega \leqq 100) \end{cases}
$$

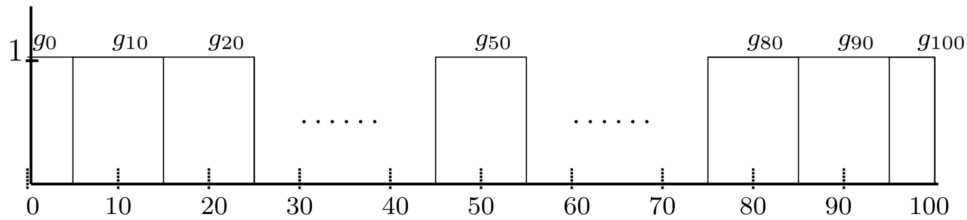


図 2.5 四捨五入

ここで，$\mathsf{O}_{四五} = (Y(=\mathbb{N}_{10}^{100}), 2^Y, G_{四五})$ を次のように定める：

$$
[G_{四五}(\emptyset)](\omega) = 0, \quad [G_{四五}(Y)](\omega) = 1
$$
$$
[G_{四五}(\Gamma)](\omega) = \sum_{n \in \Gamma} g_n(\omega) \quad (\forall \Gamma \in 2^Y = 2^{\mathbb{N}_{10}^{100}})
$$

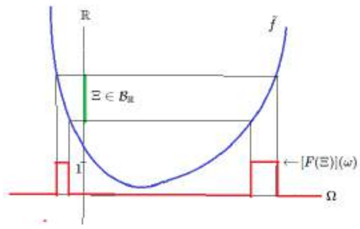
このとき，$\mathsf{O}_{四五} = (Y(=\mathbb{N}_{10}^{100}), 2^Y, G_{四五})$ は $L^\infty([0,100])$ 内の (射影) 観測量である．

2.6 システム量–観測量の原型

古典力学において，「観測量」という語は，通常は状態空間 $\Omega(\approx \mathfrak{S}^p(C_0(\Omega)^*))$ 上の実数値連続関数 (すなわち，**物理量**) の意味で使われる．W^*-観測量は物理量 (測定理論では，システム量と呼ぶ) の一般化である．以下に，このことを説明しよう．

例 2.26. [システム量]

$[C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega,\nu) \subseteq B(L^2(\Omega,\nu))]$ を古典系の基本構造とする． 実数値連続関数 $\widetilde{f}:\Omega\to\mathbb{R}$ (一般には，実数値可測関数 $\widetilde{f}:\Omega\to\mathbb{R}^n$ でよい) を，Ω 上の**システム量**と呼ぶ．基本代数 $L^\infty(\Omega,\nu)$ 内の射影観測量 $\mathsf{O}=(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},F)$ を次のように定義する：



$$[F(\Xi)](\omega)=\begin{cases} 1 & \omega\in\widetilde{f}^{-1}(\Xi) \text{ のとき} \\ \\ 0 & \omega\notin\widetilde{f}^{-1}(\Xi) \text{ のとき}\end{cases} \qquad (\forall\Xi\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$$

ここで，

$$\widetilde{f}(\omega)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N^2}^{N^2}\frac{n}{N}\Big[F\Big(\,[\frac{n}{N},\frac{n+1}{N})\,\Big)\Big](\omega)=\int_{\mathbb{R}}\lambda[F(d\lambda)](\omega) \tag{2.59}$$

であることに注意して，次の同一視:

$$\underset{(\Omega\text{ 上のシステム量})}{\widetilde{f}} \quad \longleftrightarrow \quad \underset{(L^\infty(\Omega,\nu)\text{ 内の射影観測量})}{\mathsf{O}=(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},F)} \tag{2.60}$$

を得る．この O をシステム量 $\widetilde{f}$ の**観測量表示**と呼ぶ．したがって，

(a) 同一視 (2.60) の下で，システム量を射影観測量と見なすことができる．すなわち，観測量は，実数値連続関数 (すなわち，システム量) $\widetilde{f}:\Omega\to\mathbb{R}$ の一般化で，システム量の拡張概念である．

////

例 2.27. [位置観測量，運動量観測量，エネルギー観測量] 基本代数 $L^\infty(\Omega,\nu)$ 内で，ニュートン力学を考える．簡単のために，2 次元空間を考えて，

$$\Omega=\mathbb{R}_q\times\mathbb{R}_p=\{(q,p)=(\text{位置},\text{運動量})\mid q,p\in\mathbb{R}\}$$

目次; 他

とする[*4]. 次の物理量は基本的である.

$$
\begin{aligned}
\widetilde{q}:\Omega\to\mathbb{R}, \qquad & \widetilde{q}(q,p)=q \quad (\forall(q,p)\in\Omega)\\
\widetilde{p}:\Omega\to\mathbb{R}, \qquad & \widetilde{p}(q,p)=p \quad (\forall(q,p)\in\Omega)\\
\widetilde{e}:\Omega\to\mathbb{R}, \qquad & \widetilde{e}(q,p)=[\text{ポテンシャルエネルギー}]+[\text{運動エネルギー}]\\
& \qquad = \underbrace{U(q)+\frac{p^2}{2m}}_{(\text{ハミルトニアン } \mathcal{H} \text{ の簡単な場合})} \qquad (\forall(q,p)\in\Omega)
\end{aligned}
$$

ここに, m は粒子の質量とする. これらの物理量は, (2.60) の対応の下に, それぞれ位置観測量, 運動量観測量, エネルギー観測量とも呼ばれる.

////

例 2.28. [エルミート行列は射影観測量] 基本構造 $[\mathcal{A}\subseteq\overline{\mathcal{A}}\subseteq B(H)]$ を有限量子系の基本構造 $[B(\mathbb{C}^n))\subseteq B(\mathbb{C}^n))\subseteq B(\mathbb{C}^n))]$ とする. エルミート行列 $A(\in B(\mathbb{C}^n))$ は射影観測量と見なすことができることを示そう (簡単のため, $n=3$ の場合で書く). エルミート行列の対角化定理により,

$$
A=U^*\begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0\\ 0 & x_2 & 0\\ 0 & 0 & x_3\end{bmatrix}U \tag{2.61}
$$

と表現できる. ここに, U $(\in B(\mathbb{C}^3))$ はユニタリ行列 (すなわち, $U^*U=UU^*=I=$ 単位行列), $x_k\in\mathbb{R}$ はエルミート行列 A の固有値である. ここで, $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ として,

$$
F_A(\{x_1\})=U^*\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}U,\quad F_A(\{x_2\})=U^*\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}U,
$$
$$
F_A(\{x_3\})=U^*\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}U
$$

として, $B(\mathbb{C}^3)$ 内の射影観測量 $\mathsf{O}_A=(X,2^X,F_A)$ を定めることができる. また, 逆に, 射影観測量 $\mathsf{O}_A=(X,2^X,F_A)$ から始めても, エルミート行列 A $(=\sum_{i=1}^{3}x_iF_A(\{x_i\})$) を構成できる. このようにして, エルミート行列 A を射影観測量 O_A とを同一視, すなわち, 次の同一視:

$$
\underset{(\text{エルミート行列})}{A} \longleftrightarrow \underset{(\text{射影観測量})}{\mathsf{O}_A=(X,2^X,F_A)} \tag{2.62}
$$

[*4] 普通は, 1-粒子系では, $\Omega=\mathbb{R}^6=\{(q_x,q_y,q_z,p_x,p_y,p_z)\}$. N-粒子系では, $\Omega=\mathbb{R}^{6N}$.

を得る[*5].

$A(\in B(\mathbb{C}^n))$ をエルミート行列とする.

$$\rho = |\omega\rangle\langle\omega|, \quad \omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n, \|\omega\| = 1$$

として、量子測定 $\mathsf{M}_{B(\mathbb{C}^n)}(\mathsf{O}_A, S_{[\rho]})$ を考えよう．ボルンの量子測定理論 (または, 言語ルール 1 (測定;2.7 節)) によれば、次が言える：

(♯) 量子測定 $\mathsf{M}_{B(\mathbb{C}^n)}(\mathsf{O}_A, S_{[\rho]})$ によって、測定値 $x(\in \mathbb{R})$ が得られる確率は、$\mathrm{Tr}(\rho \cdot F_A(\{x\}))$ ($= \langle\omega, F_A(\{x\})\omega\rangle$) で与えられる.

(ここで、トレース "Tr", 定義 2.9 を見よ).
したがって、測定値の期待値は次で与えられる：

$$\int_{\mathbb{R}} x\langle\omega, F_A(dx)\omega\rangle = \langle\omega, A\omega\rangle \tag{2.63}$$

また、分散 $(\delta_A^\omega)^2$ は次で与えられる：

$$\begin{aligned}(\delta_A^\omega)^2 &= \int_{\mathbb{R}} (x - \langle\omega, A\omega\rangle)^2 \langle\omega, F_A(dx)\omega\rangle = \langle A\omega, A\omega\rangle - |\langle\omega, A\omega\rangle|^2 \\ &= ||(A - \langle\omega, A\omega\rangle)\omega||^2 \end{aligned} \tag{2.64}$$

////

例 2.29. [スペクトル分解]

H を有限次元とは限らないヒルベルト空間とする.

基本構造 $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}} \subseteq B(H)]$ を量子系の基本構造 $[\mathcal{C}(H)) \subseteq B(H)) \subseteq B(H))]$ とする． 射影観測量 $\mathsf{O} = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, F)$ をスペクトル分解と呼ぶ. スペクトル分解定理の主張は, 次の同値性 ((a)⇔(b)) である.

(a) T はヒルベルト空間 H 上の (非有界) 自己共役作用素

[*5] ただし，たとえば，$x_1 = x_2$ のように固有値が重複する場合は $X = \{x_1, x_3\}$ となるが,

$$F_A(\{x_1\}) = U^* \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} U, \quad F_A(\{x_3\}) = U^* \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} U$$

として，射影観測量 $\mathsf{O}_A = (X, 2^X, F_A)$ を定めればいい.

(b) 射影観測量 $\mathsf{O} = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, F)$ を用いて,

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda F(d\lambda) \tag{2.65}$$

と表せる.

「(非有界) 自己共役作用素」の定義は, 簡単でないので, 本書では, 上の (b) をその定義とする. したがって, 同一視:

$$\text{自己共役作用素 } T \underset{\text{同一視}}{\longleftrightarrow} \text{スペクトル分解 } \mathsf{O} = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, F) \tag{2.66}$$

の下に, 自己共役作用素は射影観測量と見なせる. この同一視 (2.66) は, 古典版の同一視 (2.60) の量子版であることを再確認せよ. 上の議論は, 以下のように一般化できる. 次の同値性 ((c)⇔(d)) が成立する.

(c) T_1, T_2 はヒルベルト空間 H 上の (非有界) 自己共役作用素で可換とする

(d) 射影観測量 $\widehat{\mathsf{O}} = (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, G)$ を用いて,

$$T_1 = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda_1 G(d\lambda_1 d\lambda_2), \qquad T_2 = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda_2 G(d\lambda_1 d\lambda_2) \tag{2.67}$$

と表せる.

2.7 言語ルール 1 —測定なくして科学なし

測定理論は次のように定式化される．すなわち，

$$
\bullet\quad \underset{(=\text{量子言語})}{\boxed{\text{測定理論}}} := \underbrace{\overset{[\text{言語ルール 1}]}{\underset{(cf.\ \ 2.7\ \text{節})}{\boxed{\text{測定}}}} + \overset{[\text{言語ルール 2}]}{\underset{(cf.\ \ 8.3\ \text{節})}{\boxed{\text{因果関係}}}}}_{\text{一種の呪文 (ア・プリオリな認識)}} + \underbrace{\overset{[\text{言語的コペンハーゲン解釈}]}{\underset{(cf.\ \ 3.1\ \text{節})}{\boxed{\text{言語的解釈}}}}}_{\text{呪文の使い方のマニュアル}}
$$

となる．以下に，測定に関する言語ルール 1 を説明する．なお，因果関係に関する言語ルール 2(因果関係) は第 8 章で述べる．

2.7.1 言語ルール 1 (測定)

いかなる**システム (=測定対象)** S も，ある基本構造 $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}} \subseteq B(H)]$ 内で定式化される．システム S の**状態** (正確には，**純粋状態**) は，**状態空間** $\mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*)$ 内の元 ρ で表現される．**観測量** (または，**測定器**と言った方がわかりやすいかもしれない) は $\mathcal{A}$ 内の C^*-観測量 $\mathsf{O} = (X, \mathcal{F}, F)$ $\Big($ または，$\overline{\mathcal{A}}$ 内の W^*-観測量 $\mathsf{O} = (X, \mathcal{F}, F)$ $\Big)$ で表現される．また，

(A$_1$) **測定者が，状態** ρ **をもつ測定対象に対して，** $\left[\begin{array}{l}\textbf{観測量 } [\mathsf{O}] \textbf{ を} \\ \textbf{測定器 } [\mathsf{O}] \textbf{ で}\end{array}\right]$ **測定する**

を略して，

(A$_2$) W^***-測定** $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}, S_{[\rho]})$ $\Big($ または，C^***-測定** $\mathsf{M}_{\mathcal{A}}(\mathsf{O}, S_{[\rho]})$ $\Big)$ [*6]

と言う．また，W^***-測定** $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}, S_{[\rho]})$ $\Big($ または，C^***-測定** $\mathsf{M}_{\mathcal{A}}(\mathsf{O}, S_{[\rho]})$ $\Big)$ により**測定値** x $(\in X)$ を得る．

記法 2.30. 二つの「測定 (W^*-測定と C^*-測定)」があって, 混乱しがちなので, 念の為に確認すると,

$$
(\mathrm{A}_3)\quad \begin{cases} W^*\text{-測定 } \mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}, S_{[\rho]}) & \cdots \mathsf{O} \text{ は } W^*\text{-観測量}, \rho \in \mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*) \\ C^*\text{-測定 } \mathsf{M}_{\mathcal{A}}(\mathsf{O}, S_{[\rho]}) & \cdots \mathsf{O} \text{ は } C^*\text{-観測量}, \rho \in \mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*) \end{cases}
$$

である．本書では, 主に W^***-測定**に集中する．

[*6] $S_{[\rho]}$ の「S」は System の意

量子力学は, 次の形式を持つ：

$$\boxed{\text{量子力学}} = \underset{\text{(ボルン)}}{\boxed{\text{量子力学の確率解釈}}} + \underset{\text{(ハイゼンベルグ=シュレーディンガー)}}{\boxed{\text{量子運動方程式}}}$$

$$+ \boxed{\text{コペンハーゲン解釈}}$$

もちろん, 量子力学 (= [ボルンの量子力学の確率解釈]+[量子運動方程式]) は, 相対性理論と共に, 20 世紀最大の科学的発見の一つである.

「コペンハーゲン解釈」の意味は研究者によってまちまちであるが、本書では、「言語的コペンハーゲン解釈」として全編で述べることになる.

次の言語ルール 1 は, 「ボルンの量子力学の確率解釈」[*7] の言語化 (=ことわざ化) である. すなわち,

$$\underset{\text{(物理法則)}}{\boxed{\text{量子力学 (ボルンの量子測定)}}} \xrightarrow[\text{法則の形骸化}]{\text{ことわざ化}} \underset{\text{(言葉遣い)}}{\boxed{\text{測定理論 (言語ルール 1)}}} \tag{2.68}$$

である. 純粋型の測定に関する言語ルール 1 は次のようになる.

(B_1): 言語ルール 1(測定)　純粋型 (*cf.* この 2.7 節までの準備で読めるはず)

あらゆるシステムはある基本構造 $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}]_{B(H)}$ 内で定式化できる. $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}]_{B(H)}$ 内で定式化された W^*-測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}{=}(X, \mathcal{F}, F), S_{[\rho]})$ $\Big($ または, C^*-測定 $\mathsf{M}_{\mathcal{A}}(\mathsf{O}{=}(X, \mathcal{F}, F), S_{[\rho]})$ $\Big)$ を考えよう. すなわち,

- ある**状態** $\rho (\in \mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*)$: 状態空間) を持つシステムに対する**観測量** $\mathsf{O}{=}(X, \mathcal{F}, F)$ の W^*-測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}, S_{[\rho]})$ $\Big($ または, C^*-測定 $\mathsf{M}_{\mathcal{A}}(\mathsf{O}{=}(X, \mathcal{F}, F), S_{[\rho]})$ $\Big)$

を考える. このとき, W^*-測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}, S_{[\rho]})$ $\Big($ または, C^*-測定 $\mathsf{M}_{\mathcal{A}}(\mathsf{O}{=}(X, \mathcal{F}, F), S_{[\rho]})$ $\Big)$ により得られる**測定値** x $(\in X)$ が, Ξ $(\in \mathcal{F})$ に属する確率は, (もし $F(\Xi)$ が ρ で本質的連続ならば) $\rho(F(\Xi))$ $(\equiv {}_{\mathcal{A}^*}(\rho, F(\Xi))_{\overline{\mathcal{A}}})$ で与えられる[a].

[a] 本講義では, W^* − 測定を主に扱う. C^* − 測定は使いやすいが, 適用範囲が狭い.

[*7] Born, M. "Zur Quantenmechanik der Stoßprozesse (Vorläufige Mitteilung)", Z. Phys. (37) pp.863–867 (1926)

目次; 他

♠ **注釈 2.5.** 上記の言語ルール 1 の源流は　ボルン (1926) による．ボルンの主張を本書流に書くと次のようになる．

($\sharp_1$) H をヒルベルト空間とする．量子基本構造 $[\mathcal{C}(H) \subseteq B(H)]_{B(H)}$ 内で定式化された W^*-**測定** $\mathsf{M}_{B(H)}(\mathsf{O}{=}(X, \mathcal{F}, F), S_{[\rho]})$ を考える．このとき，W^*-測定 $\mathsf{M}_{B(H)}(\mathsf{O}{=}(X, \mathcal{F}, F), S_{[\rho]})$ により得られる**測定値** x $(\in X)$ が，Ξ $(\in \mathcal{F})$ に属する**確率**は，$\rho(F(\Xi))$ $(\equiv \langle u, F(\Xi)u \rangle)$ で与えられる (ここに、　$\rho = |u\rangle\langle u|$)

となる．”確率” に関しては、いろいろな意見があるかもしれない．たとえば、アインシュタインはボルンに以下のような手紙を送っている　(1926):

($\sharp_2$) 量子力学にはとても尊敬の念を抱いています．しかし内なる声が私に、その理論はまだ完璧ではないと言っています．量子力学はとても有益なものではありますが、神の秘密にはほとんど迫っていません．少なくとも私には、

神はサイコロを振らない

という確信があるのです

量子言語の立場からは、ボルンもアインシュタインも正しいのだと思う．なぜならば、

$$
\underset{\text{(アインシュタイン)}}{\overset{\text{人間がいなくても物理は成立する}}{\boxed{\text{実在的科学観 (一元論)}}}}
\;\underset{\text{v.s.}}{\longleftrightarrow}\;
\underset{\text{(ボルン)}}{\overset{\text{測定無くして科学無し}}{\boxed{\text{言語的科学観 (二元論)}}}}
$$

と言っても、両者は対立するものではなくて、両立するものだからである．

2.7.2　簡単な例

次の例は，例 1.4 とまったく同じものを，言語ルール 1 (測定;2.7 節) の下に書いたに過ぎない．

例 2.31. [コップの水の冷・熱の測定 (例 1.4 の続き)]　さて，

古典系の基本構造 $[C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega, \nu) \subseteq B(L^2(\Omega, \nu))]$

を考えよう．ここで，$\Omega =$ 閉区間 $[0, 100] (\subset \mathbb{R})$ として，可換 C^* 代数 $\mathcal{A} = C_0(\Omega)$ と可換 W^* 代数 $\overline{\mathcal{A}} = L^\infty(\Omega, \nu)$ を考える．状態空間 $\mathfrak{S}^p(C_0(\Omega)^*)$ は

$$
\mathfrak{S}^p(C_0(\Omega)^*) = \{\delta_\omega \in \mathcal{M}(\Omega) \mid \omega \in \Omega\} \approx \Omega = [0, 100]
$$

となる．

測定値空間 $X = \{$ 冷, 熱 $\}$ として，冷熱-測定器 $\mathsf{O} = (X, 2^X, F)$ を以下のように定義する．すなわち，関数 $f_{冷}$:

$\Omega \to [0,1]$ と $f_{熱} : \Omega \to [0,1]$ を次のように定める:

$$
f_{冷}(\omega) = \begin{cases} 1 & (0 \leqq \omega \leqq 10) \\ (70-\omega)/60 & (10 \leqq \omega \leqq 70) \\ 0 & (70 \leqq \omega \leqq 100) \end{cases}
$$
$$
f_{熱}(\omega) = 1 - f_{冷}(\omega)
$$

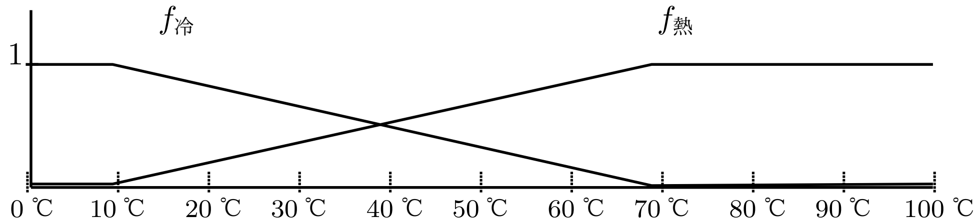


図 2.6　冷たいか？　熱いか？

さて，基本代数 $L^\infty(\Omega,\nu)$ 内の観測量 $\mathsf{O}_{冷熱} = (X, 2^X, F_{冷熱})$ を次のように定める：

$$
[F_{冷熱}(\emptyset)](\omega) = 0, \qquad [F_{冷熱}(X)](\omega) = 1
$$
$$
[F_{冷熱}(\{冷\})](\omega) = f_{冷}(\omega), \qquad [F_{冷熱}(\{熱\})](\omega) = f_{熱}(\omega)
$$

よって，測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega,\nu)}(\mathsf{O}_{冷熱}, S_{[\delta_\omega]})$ を得る．したがって，たとえば，$\omega_0 = 55$ ℃ として，例 1.4 の日常言語の文言 (A_1) の測定理論的記述は次のようになる． $F_{冷熱}(\Xi)$ の (本質的) 連続性より，

$$
{}_{C_0(\Omega)^*}\Big(\delta_{\omega_0}, F_{冷熱}(\Xi)\Big)_{L^\infty(\Omega,\nu)} = [F_{冷熱}(\Xi)](\omega_0)
$$

に注意して，

(a) 測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega,\nu)}(\mathsf{O}_{冷熱}, S_{[\delta_{55}]})$ により得られる測定値 $x (\in X = \{冷, 熱\})$ が，

$$
集合 \begin{bmatrix} \emptyset(=空集合) \\ \{冷\} \\ \{熱\} \\ \{冷,熱\} \end{bmatrix} に属する確率は \begin{bmatrix} [F_{冷熱}(\emptyset)](55) = 0 \\ [F_{冷熱}(\{冷\})](55) = 0.25 \\ [F_{冷熱}(\{熱\})](55) = 0.75 \\ [F_{冷熱}(\{冷,熱\})](55) = 1 \end{bmatrix}
$$

となる．省略しないで書くと，

(b) 測定者が，$\underset{状態\ \omega=55℃}{[55℃]}$ の $\underset{測定対象}{[コップの水]}$ が $\underset{観測量\ \mathsf{O}_{冷熱}}{[冷たいか熱いか]}$ を

$\underset{測定\ \mathsf{M}_{L^\infty(\Omega,\nu)}(\mathsf{O}_{冷熱}, S_{[\omega(=55)]})}{[調べた]}$ ら，　その測定値 $x (\in X = \{冷, 熱\})$ が，

$$
\text{集合}\begin{bmatrix} \emptyset(=\text{空集合}) \\ \{\text{冷}\} \\ \{\text{熱}\} \\ \{\text{冷},\text{熱}\} \end{bmatrix}\text{に属する確率は}\begin{bmatrix} [F_{\text{冷熱}}(\emptyset)](55)=0 \\ [F_{\text{冷熱}}(\{\text{冷}\})](55)=0.25 \\ [F_{\text{冷熱}}(\{\text{熱}\})](55)=0.75 \\ [F_{\text{冷熱}}(\{\text{冷},\text{熱}\})](55)=1 \end{bmatrix}\text{である.}
$$

////

2.8 古典測定の簡単な例 (壺問題等)

2.8.1 言語的科学観—人間の言語能力の驚異

物理学 (実在的記述法) の適用範囲はかなり明確であるが，測定理論 (言語的記述法) の適用範囲は漠然としている．ことわざの「猿も木から落ちる」の適用範囲が明確でないのと同じである．実在的科学観に刷り込まれた感覚からは，本節で述べる例に違和感を持って当然と思う．頼りにできるのは，(実験検証できない) 言語ルール 1 (測定;2.7 節) だけで，我々のできることは，

(a) $\left\{ \begin{array}{l} \text{(a}_1\text{): 言語ルール 1 (測定;2.7 節) の言葉遣いに，完全に忠実であること} \\ \text{(a}_2\text{): 人間の言語能力を信じること} \end{array} \right.$

だけである．こう言うと，

(b) これで科学になるのか？

と思うかもしれない．しかし，言語的科学観 (「言葉が先，世界が後」の精神) は，実在的科学観 (「世界が先，言葉が後」の精神) とは，まったく異なる原理から成り立つ科学観である．これに留意して，以下の例を読んでもらいたい．

2.8.2 基本的な例—壺問題等

測定理論は言語なので，多くの例を演習・訓練しなければ，上達しない．言語ルール 1 (測定;2.7 節)(測定) の言葉遣いで表現できるような現象の例をいくつか述べる．もちろん，どれも中高生レベルを超えるものではない．シュテルン=ゲルラッハの実験の例も, 数学的には,「高校の数学 2」レベルである．

例 2.32. [コップの水の温度の近似測定 (例 2.22[約-観測量] の続き)] いろいろな温度 ω ℃ $(0 \leqq \omega \leqq 100)$ のコップの水 (お湯) に，多くの被験者 (たとえば，1000 人) に飲んでもらって，「約何十℃ですか？」をアンケート形式で質問する．そして，得られたデータ (たとえば，$h_n(\omega)$ 人が，約 n ℃ $(n = 0, 10, 20, \ldots, 90, 100)$ と答えたとして，これを正規化 (かつ，折れ線化) して，以下の $g_n(\omega) = h_n(\omega)/$被験者数 を得たとする．すなわち，各 $n \in \mathbb{N}_{10}^{100}$=$\{0, 10, 20, \ldots, 100\}$ に対して，関数 $g_n : \Omega \to [0, 1]$ を次のように定める (図 2.2 と同じで，再び式を書くと):

$$
g_n(\omega) = \begin{cases} 0 & (0 \leqq \omega \leqq n-10) \\ \quad (\omega - n - 10/10 & (n-10 \leqq \omega \leqq n) \\ -(\omega - n + 10)/10 & (n \leqq \omega \leqq n+10) \\ 0 & (n+10 \leqq \omega \leqq 100) \end{cases}
$$

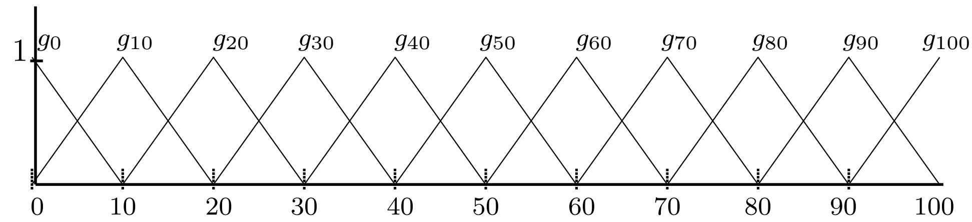


図 2.7　約-観測量

したがって，

(a) 1000 人の被験者の中から 1 人選んで，47 ℃のコップの水を飲んでもらって，「約何十℃ですか？」と質問したとき，

$$
\text{その被験者が} \begin{bmatrix} \text{約 } 40\ ℃ \\ \text{約 } 50\ ℃ \end{bmatrix} \text{と答える確率は} \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{bmatrix} \text{である．}
$$

この日常言語の文言 (a) を言語ルール 1 (測定;2.7 節) の言葉で表現しよう．

閉区間 $\Omega = [0, 100]$ 上の関数空間として，可換 C^* 代数 $C_0([0, 100])$ を得る．すなわち，

$$
\text{古典系の基本構造 } [C_0([0,100]), L^\infty([0,100], \nu)]_{B(L^2(\Omega,\nu))}
$$

を考える． 状態空間 $\mathfrak{S}^p(C_0([0, 100])^*)$ は，

$$
\mathfrak{S}^p(C_0([0,100])^*) = \{\delta_\omega \mid \omega \in \Omega\}
$$

(ここに，δ_ω は，点 $\omega (\in \Omega)$ における点測度) であった．

$L^\infty([0, 100], \nu)$ 内の約-観測量 $\mathsf{O}_{約} = (Y (=\mathbb{N}_{10}^{100}), 2^Y, G_{約})$ を次のように定める：

$$
[G_{約}(\emptyset)](\omega) = 0, \qquad [G_{約}(X)](\omega) = 1
$$

$$
[G_{約}(\Gamma)](\omega) = \sum_{n \in \Gamma} g_n(\omega) \qquad (\forall \Gamma \in 2^{\mathbb{N}_{10}^{100}})
$$

このとき，$\mathsf{O}_{約} = (Y (=\mathbb{N}_{10}^{100}), 2^Y, G_{約})$ は $L^\infty([0, 100], \nu)$ 内の観測量で，したがって，測定 $\mathsf{M}_{L^\infty([0,100],\nu)}(\mathsf{O}_{約}, S_{[\omega]})$ が定まる．

また，任意の $\Gamma (\in 2^{\mathbb{N}_{10}^{100}})$ に対して，$G_{約}(\Gamma)$ $(\in L^\infty([0, 100], \nu))$ は任意の状態 $\omega_0 (\in [0, 100])$ で

(本質的に) 連続である． したがって，測定 $\mathsf{M}_{L^\infty([0,100],\nu)}(\mathsf{O}_{約}, S_{[\omega_0]})$ の ω_0 でのサンプル空間は，$(Y(=\mathbb{N}_{10}^{100}), 2^Y, [G_{約}(\cdot)](\omega_0))$ となる．
たとえば，$\omega = 47$ ℃ として，次の測定理論による記述を得る:

(b) 測定 $\mathsf{M}_{L^\infty([0,100],\nu)}(\mathsf{O}_{約}, S_{[\omega(=47)]})$ により得られる測定値が $\begin{bmatrix} 約 40 ℃ \\ 約 50 ℃ \end{bmatrix}$ である確率は

$$\begin{bmatrix} {}_{C_0(\Omega)^*}\Big(\delta_{47}, G_{約}(\{40\})\Big)_{L^\infty(\Omega,\nu)} = [G_{約}(\{40\})](47) = 0.3 \\ {}_{C_0(\Omega)^*}\Big(\delta_{47}, G_{約}(\{50\})\Big)_{L^\infty(\Omega,\nu)} = [G_{約}(\{50\})](47) = 0.7 \end{bmatrix}$$ である．

となる．
すなわち、

$$\underset{(日常言語)}{\boxed{文言 (a)}} \xrightarrow[翻訳]{} \underset{(量子言語)}{\boxed{文言 (b)}} \tag{2.69}$$

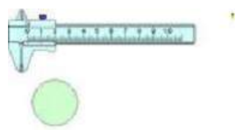
////

例 2.33. [精密測定 (exact observable)]

さて，

古典系の基本構造 $[C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega,\nu) \subseteq B(L^2(\Omega,\nu))]$

を考える． $\mathcal{B}_\Omega$ をボレル σ-集合体とする． このとき，
$L^\infty(\Omega,\nu)$ 内の精密観測量 $\mathsf{O}^{(e)} = (X(=\Omega), \mathcal{F}(=\mathcal{B}_\Omega), F^{(e)})$
を次のように定める: 定義関数 χ を使って書くと, ,



$$[F^{(e)}(\Xi)](\omega) = \chi_\Xi(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega \in \Xi) \\ \\ 0 & (\omega \notin \Xi) \end{cases} \qquad (\forall \Xi \in \mathcal{B}_\Omega)$$

状態 $\delta_{\omega_0} \approx \omega_0 (\in \Omega)$ に対して，精密測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega,\nu)}(\mathsf{O}^{(e)}, S_{[\delta_{\omega_0}]})$ を考える．

(a) $\omega_0 \in D \subseteq \Omega$ となる任意の開集合 D を考える． 精密測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega,\nu)}(\mathsf{O}^{(e)}, S_{[\delta_{\omega_0}]})$ によって得られる測定値が D に属する確率は,

$$ {}_{C_0(\Omega)^*}\Big(\delta_{\omega_0}, \chi_D\Big)_{L^\infty(\Omega,\nu)} = 1$$

である．

ここで, D の任意性から,

(b) 精密測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega,\nu)}(\mathsf{O}^{(e)}, S_{[\delta_{\omega_0}]})$ によって, 確率 1 で, 測定値 ω_0 を得る,

となる.
また,

$$\mathcal{F}_{\omega_0} = \{\Xi \in \mathcal{F} \ : \ \omega_0 \notin \text{"}\Xi \text{ の閉包} \setminus \text{"}\Xi \text{ の内包"}\}$$

とすれば, $\Xi \in \mathcal{F}_{\omega_0}$ のとき, $F(\Xi)$ は ω_0 で連続で, しかも, $\mathcal{F}$ は, $\mathcal{F}_{\omega_0}$ を含む最小の σ-集合体である. したがって, 次を満たす確率空間 $(X, \mathcal{F}, P_{\delta_{\omega_0}})$ が存在する：

$$P_{\delta_{\omega_0}}(\Xi) = [F(\Xi)](\omega_0) \qquad (\forall \Xi \in \mathcal{F}_{\omega_0})$$

すなわち,

精密測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega,\nu)}(\mathsf{O}^{(e)}, S_{[\delta_{\omega_0}]})$ はサンプル空間 $(X, \mathcal{F}, P_{\delta_{\omega_0}})$ を持つ

ことがわかる.

////

例 2.34. [壷問題]　2 つの壷 U_1, U_2 がある. 壷 U_1 には 8 個の白球と 2 個の黒球, 壷 U_2 には 4 個の白球と 6 個の黒球が入っているとする (表 2.2).

表 2.2　壷問題

壷＼　白・黒	白球	黒球
壷 U_1	8	2
壷 U_2	4	6

次のような現象を考える:

(a) 壷 U_2 から 1 つの球を取り出すとき, その球が $\begin{bmatrix} \text{白} \\ \text{黒} \end{bmatrix}$ である確率は $\begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix}$ である.

ここで, この日常言語の文言 (a) を測定理論 (言語ルール 1 (測定;2.7 節)) の言葉遣いで記述することを考える.
　ここで,

古典系の基本構造 $[C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega, \nu) \subseteq B(L^2(\Omega, \nu))]$

を考えよう.　$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ として, 離散距離空間 (Ω, d_D) を考えて, 可換 C^* 代数 $C_0(\Omega)$ を

得る．また, 測度空間 $(\Omega, 2^\Omega, \nu)$ を

$$\nu(\{\omega_1\}) = 1, \quad \nu(\{\omega_2\}) = 1$$
$$(\text{別に}, \nu(\{\omega_1\}) = a, \quad \nu(\{\omega_2\}) = b \text{ でも可 } (a, b > 0))$$

として，可換 W^* 代数 $L^\infty(\Omega, \nu)$ を得る．したがって, 純粋状態空間は

$$\mathfrak{S}^p(C_0(\Omega)^*) = \{\delta_{\omega_1}, \delta_{\omega_2}\} \approx \{\omega_1, \omega_2\} = \Omega$$

となる．ここで, ,

$U_1 \quad \cdots \quad$ “状態 δ_{ω_1} をもつ壺”, $\qquad U_2 \quad \cdots \quad$ “状態 δ_{ω_2} をもつ壺”

として， 次の同一視を考える (したがって，図 2.8 のような状況を考える):

$$U_1 \approx \delta_{\omega_1}, \qquad U_2 \approx \delta_{\omega_2}$$

更に， $L^\infty(\Omega)$ 内の観測量 $\mathsf{O}_{\text{白黒}} = (\{\text{ 白}, \text{黒 }\}, 2^{\{\text{ 白}, \text{ 黒 }\}}, F_{\text{白黒}})$ を次のように定義する：

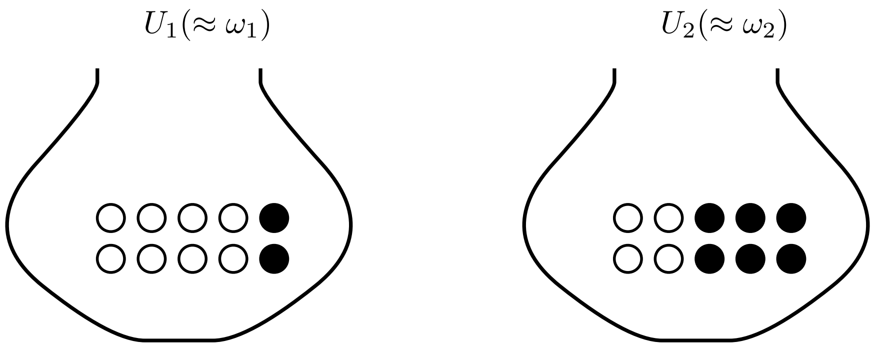


図 2.8　壺問題

$$[F_{\text{白黒}}(\{\text{ 白 }\})](\omega_1) = 0.8, \qquad [F_{\text{白黒}}(\{\text{ 黒 }\})](\omega_1) = 0.2$$
$$[F_{\text{白黒}}(\{\text{ 白 }\})](\omega_2) = 0.4, \qquad [F_{\text{白黒}}(\{\text{ 黒 }\})](\omega_2) = 0.6$$

したがって，次も言える：

$$[F_{\text{白黒}}(\{\text{ 白}, \text{黒 }\})](\omega_1) = 1, \qquad [F_{\text{白黒}}(\{\text{ 白}, \text{黒 }\})](\omega_2) = 1$$
$$[F_{\text{白黒}}(\emptyset)](\omega_1) = 0, \qquad [F_{\text{白黒}}(\emptyset)](\omega_2) = 0$$

このようにして，測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}_{\text{白黒}}, S_{[\delta_{\omega_2}]})$ を得る．よって，上述の (a) は，測定理論の言葉で次のように記述できる:

(b) 測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathsf{O}_{白黒}, S_{[\omega_2]})$ により，測定値 $\begin{bmatrix} 白 \\ 黒 \end{bmatrix}$ が得られる確率は

$$
\begin{bmatrix}
{}_{C_0(\Omega)^*}\Big(\delta_{\omega_2}, F_{白黒}(\{\ 白\ \})\Big)_{L^\infty(\Omega,\nu)} = [F_{白黒}(\{\ 白\ \})](\omega_2) = 0.4 \\
{}_{C_0(\Omega)^*}\Big(\delta_{\omega_2}, F_{白黒}(\{\ 黒\ \})\Big)_{L^\infty(\Omega,\nu)} = [F_{白黒}(\{\ 黒\ \})](\omega_2) = 0.6
\end{bmatrix} \text{である}
$$

となる．

すなわち、

$$
\underset{(日常言語)}{\boxed{文言\ (a)}} \xrightarrow[翻訳]{} \underset{(量子言語)}{\boxed{文言\ (b)}} \tag{2.70}
$$

♠ **注釈 2.6.** $[L^\infty(\Omega,\nu)$, or in short, $L^\infty(\Omega)]$ 上の例において，個数測度 ν (i.e., $\nu(\{\omega_1\}) = \nu(\{\omega_2\}) = 1$) が不可欠というわけではない．たとえば、$\nu(\{\omega_1\}) = 2$, $\nu(\{\omega_2\}) = 1/3$ と仮定しても同じ結論を得る．したがって、測度を省いて、

$L^\infty(\Omega,\nu)$ はしばしば $L^\infty(\Omega)$ と省略される

と記すこともある

♠ **注釈 2.7.** 例 2.34[壺問題] の (a)，すなわち，「壺 U_2 から 1 つの球を取り出すとき，その球が "白" である確率は 0.4 である」は保証されているわけではない．測定理論は言語なので，

もし (a) のような現象があったならば，それは (b) のように記述すべきである

と主張しているだけである．また当然のことだが，数学だけから「確率」が求まることはない．たとえば，次の ($\sharp_1$)，($\sharp_2$) 等は正しいとは言えない:

($\sharp_1$) 集合 $\{1,2,3,4,5\}$ から，一つの数を選んだとき，その数が偶数である確率は 2/5 である

($\sharp_2$) 閉区間 $[0,1]$ 内から，実数 x を選んだとき，「$x \in [a,b] (\subseteq [0,1])$」となる確率は，$|b-a|$ である

このように「(世界と断絶している) 数学だけから確率を導出する」ことの論拠がないことは，ベルトランの逆理 (*cf.* 7.12 節) としてよく知られている．したがって，「無作為に」とか「ランダムに」等の言葉を枕詞のように付け加えるのが普通だが，本書では，「常識的にわかること」として省略した．

例 2.35. [血液型]

日本人全体の集合を U_1，インド人全体の集合を U_2 とする． 日本人の血液型 [O:A:B:AB] の比は, [3:4:2:1] で，インド人の血液型 [O:A:B:AB] の比は, [3:2:4:1] である． (表 2.3).

次のような現象を考える:

(a) インド人全体 U_2 から無作為に一人を選んで，その人の血液型が

$\begin{bmatrix} O \\ A \\ B \\ AB \end{bmatrix}$ である確率は $\begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.2 \\ 0.4 \\ 0.1 \end{bmatrix}$ である.

表 2.3　日本人とインド人の血液型の比

人種＼血液型	O	A	B	AB
日本人 U_1	30%	40%	20%	10%
インド人 U_2	30%	20%	40%	10%

ここで, この日常言語の文言 (a) を測定理論 (の言葉遣いで記述することを考える. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ として, 離散距離空間 (Ω, d_D) を考えて, 可換 C^* 代数 $C_0(\Omega)$ を得る. さて,

古典系の基本構造 $[C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega, \nu) \subseteq B(L^2(\Omega, \nu))]$

を考えよう.　したがって, 純粋状態空間は

$$\mathfrak{S}^p(C_0(\Omega)^*) = \{\delta_{\omega_1}, \delta_{\omega_2}\}$$

となる. ここで, ,

$$\delta_{\omega_1} \quad \cdots \quad \text{“日本人全体の集合 } U_1\text{(母集団) の状態”}$$

[*8]

$$\delta_{\omega_2} \quad \cdots \quad \text{“インド人全体の集合 } U_2\text{(母集団) の状態”},$$

として，次の同一視を考える (したがって，図 2.9 のような状況を考える):

$$U_1 \approx \delta_{\omega_1}, \qquad U_2 \approx \delta_{\omega_2}$$

更に，$L^\infty(\Omega, \nu)$ 内の観測量 $\mathsf{O}_{\text{血液型}} = (\{O, A, B, AB\}, 2^{\{O,A,B,AB\}}, F_{\text{血液型}})$ を次のように定義する：

$$[F_{\text{血液型}}(\{O\})](\omega_1) = 0.3, \qquad [F_{\text{血液型}}(\{A\})](\omega_1) = 0.4$$
$$[F_{\text{血液型}}(\{B\})](\omega_1) = 0.2, \qquad [F_{\text{血液型}}(\{AB\})](\omega_1) = 0.1 \tag{2.71}$$

[*8] 「母集団とは何か？」と問われたら, 言語ルール 1 の中から探すしかない.　そうならば, 「システム」と答えるしかない. 「システム (=母集団)」は, ニュートン力学の「質点」に対応する概念で, 意外と難しい. アリストテレス哲学の「質料 ↔ 形相」は, 測定理論では「システム ↔ 状態」となる.

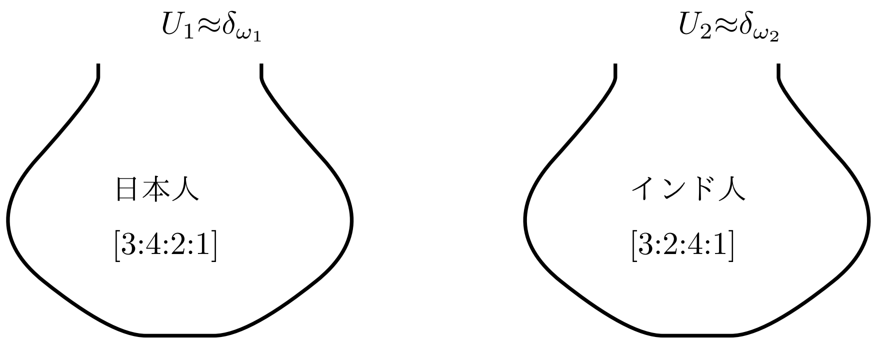


図 2.9 母集団 (=システム)≈ 壷

そして，

$$
[F_{血液型}(\{O\})](\omega_2) = 0.3, \qquad [F_{血液型}(\{A\})](\omega_2) = 0.2
$$
$$
[F_{血液型}(\{B\})](\omega_2) = 0.4, \qquad [F_{血液型}(\{AB\})](\omega_2) = 0.1 \tag{2.72}
$$

，測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega,\nu)}(\mathsf{O}_{血液型}, S_{[\delta_{\omega_2}]})$ を得る．よって，上述の (a) は，測定理論の言葉で次のように記述できる:

(b) 測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega,\nu)}(\mathsf{O}_{血液型}, S_{[\delta_{\omega_2}]})$ により，測定値 $\begin{bmatrix} O \\ A \\ B \\ AB \end{bmatrix}$ が得られる確率は

$$
\begin{bmatrix}
{}_{C_0(\Omega)^*}\Big(\delta_{\omega_2}, F_{血液型}(\{O\})\Big)_{L^\infty(\Omega,\nu)} = [F_{血液型}(\{O\})](\omega_2) = 0.3 \\
{}_{C_0(\Omega)^*}\Big(\delta_{\omega_2}, F_{血液型}(\{A\})\Big)_{L^\infty(\Omega,\nu)} = [F_{血液型}(\{A\})](\omega_2) = 0.2 \\
{}_{C_0(\Omega)^*}\Big(\delta_{\omega_2}, F_{血液型}(\{B\})\Big)_{L^\infty(\Omega,\nu)} = [F_{血液型}(\{B\})](\omega_2) = 0.4 \\
{}_{C_0(\Omega)^*}\Big(\delta_{\omega_2}, F_{血液型}(\{AB\})\Big)_{L^\infty(\Omega,\nu)} = [F_{血液型}(\{AB\})](\omega_2) = 0.1
\end{bmatrix} \text{である}
$$

となる．

////

♠ **注釈 2.8.** 本節では，簡単な例を，物々しく (しかも，まどろっこしく) 書いているように思うかもしれない．「これでは，小学生の本ではないか？」と思うかもしれない．しかし，

($\sharp$) これ以外に書く方法を知らないから，仕方なくこう書いた

だけで，我々のできることは，

$$\bullet \begin{cases} \text{言語ルールに忠実} \\ \\ \text{人間の言語能力の信頼} \end{cases}$$

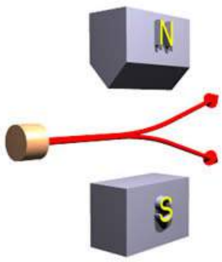
だけである．もしも読者がこれとは別の書き方を発見したならば (すなわち，言語ルール 1 (測定;2.7 節) の一語でも一句でも改変や何かを付け加えることができたならば)，量子力学以上のものを作り上げたことに等しく，科学史上最大級の発見をしたことになるだろう． 前にも (第 1 章の主張 1.1 で) 述べたように，「量子言語」が最終到達点であると考える． 現状では, これ以外のアイデアを知らないからである．.

2.9 簡単な量子測定 (シュテルン=ゲルラッハの実験)

2.9.1 シュテルン=ゲルラッハの実験

例 2.36. [シュテルン=ゲルラッハの実験 (1922 年)]

電子は磁場の中 (すなわち，N 極と S 極の間) を通り抜けると，図 2.10 のように，上かまたは下に曲がる．それをスクリーンに設置したガイガーカウンターで検出するシュテルン=ゲルラッハの実験について考えよう．さて，㊤か㊦のどちらのガイガーカウンターが鳴るだろうか？



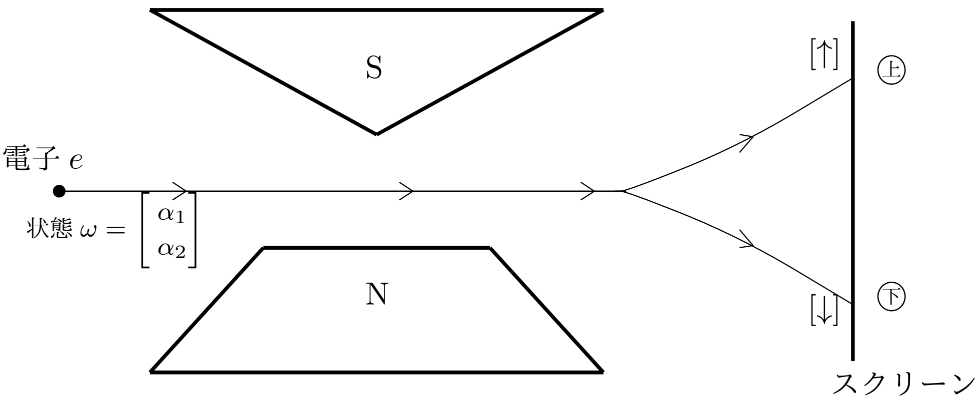


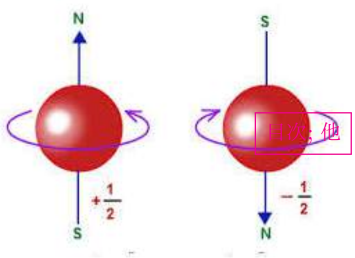
図 2.10　シュテルン=ゲルラッハの実験 (1922 年)

基本構造 $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}} \subseteq B(H)]$ を量子系として，

$$[\mathcal{C}(\mathbb{C}^2) \subseteq \overline{\mathcal{C}(\mathbb{C}^2)} \subseteq B(\mathbb{C}^2)]$$

を考えよう．

有限次元なので，$\mathcal{C}(\mathbb{C}^2) = \overline{\mathcal{C}(\mathbb{C}^2)} = B(\mathbb{C}^2)$ であることに注意しよう． 状態空間 $\mathfrak{S}^p(\mathcal{C}(\mathbb{C}^2)^*) = \{\rho = |u\rangle\langle u| \ : \ \|u\|_{\mathbb{C}^2} = 1\}$ であり，電子 e のスピン状態 ρ は状態空間 $\mathfrak{S}^p(\mathcal{C}(\mathbb{C}^2)^*)$ の



元で表現できる．ここで, $u = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$ とおく (ここに, $\|u\|^2 = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 = 1$)．また，測定値空間を $X = \{\uparrow, \downarrow\}$ として，「電子の z-軸方向のスピン」の観測量 $\mathsf{O} = (X, 2^X, F^z)$ は次のように定まる:

$$
\begin{aligned}
&F_z(\{\uparrow\}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_z(\{\downarrow\}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
&F_z(\emptyset) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_z(\{\uparrow, \downarrow\}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.73}
$$

このようにして，量子測定 $\mathsf{M}_{B(\mathbb{C}^2)}(\mathsf{O}, S_{[\rho(=|u\rangle\langle u|)]})$ を得る．

このとき，ボルンの量子測定理論 [(量子版) 言語ルール 1(測定;2.7 節) (=注釈 2.5 の $(\sharp_1)$) により，次が言える:

(a) 量子測定 $\mathsf{M}_{B(\mathbb{C}^2)}(\mathsf{O}, S_{[\rho(=|u\rangle\langle u|)]})$ によって，

測定値 $\begin{bmatrix} \uparrow \\ \downarrow \end{bmatrix}$ が得られる確率は $\begin{bmatrix} \langle u, F^z(\{\uparrow\})u\rangle = |\alpha_1|^2 \\ \langle u, F^z(\{\downarrow\})u\rangle = |\alpha_2|^2 \end{bmatrix}$ である．

すなわち，

(b)

スピン状態 ω $(= \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \in \widehat{\Omega})$ をもつ電子 e が磁場を通ったとき, $\begin{bmatrix} ㊤ \\ ㊦ \end{bmatrix}$ の

ガイガーカウンターが鳴る確率は $\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\alpha}_1 & \overline{\alpha}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = |\alpha_1|^2 \\ \\ \begin{bmatrix} \overline{\alpha}_1 & \overline{\alpha}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = |\alpha_2|^2 \end{bmatrix}$

である．

となる．

////

注意 2.37. スピン観測量をまとめておく． 測定値空間を $X = \{\uparrow, \downarrow\}$ として，

[z-軸方向のスピン観測量] 「電子の z-軸方向のスピン」の観測量 $\mathsf{O}_z = (X, 2^X, F^z)$ は次のよう

に定まる:

$$F^z(\{\uparrow\}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F^z(\{\downarrow\}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[x-軸方向のスピン観測量] 「電子の x-軸方向のスピン」の観測量 $\mathsf{O}_x = (X, 2^X, F^x)$ は次のように定まる:

$$F^x(\{\uparrow\}) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad F^x(\{\downarrow\}) = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \tag{2.74}$$

[y-軸方向のスピン観測量] 「電子の y-軸方向のスピン」の観測量 $\mathsf{O}_y = (X, 2^X, F^y)$ は次のように定まる:

$$F^y(\{\uparrow\}) = \begin{bmatrix} 1/2 & -i/2 \\ i/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad F^y(\{\downarrow\}) = \begin{bmatrix} 1/2 & i/2 \\ -i/2 & 1/2 \end{bmatrix} \tag{2.75}$$

ここで

$$\begin{aligned} &\hat{S}_x = F_x(\{\uparrow\}) - F_x(\{\downarrow\}), \quad \hat{S}_y = F_y(\{\uparrow\}) - F_y(\{\downarrow\}), \\ &\hat{S}_z = F_z(\{\uparrow\}) - F_z(\{\downarrow\}) \end{aligned}$$

とするとき, 次の交換関係は, 注目に値する.

$$\hat{S}_y\hat{S}_z - \hat{S}_z\hat{S}_y = 2i\hat{S}_x, \quad \hat{S}_z\hat{S}_x - \hat{S}_x\hat{S}_z = 2i\hat{S}_y, \quad \hat{S}_x\hat{S}_y - \hat{S}_y\hat{S}_x = 2i\hat{S}_z \tag{2.76}$$

♠ **サプリ 2.4.** 高校生が (2×2)-行列で遊んでいたとしよう．上の (2.76) 式を美しいと思って、その式を満たすような行列を見つけようと思ったとする．そうして、高校生がスピン行列 $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ を発見したとしても不思議な話ではない．そうだとすると、物理以前にあるのは現象のはずなの、

数学が物理に先行する

という奇妙な話になってしまう．奇妙であるが、そうなのかもしれないし、そうではないのかもしれない．大学初年度で微積分と行列を教えていたことがあるが、微積分では良問ができるが、行列では決まりきったパターンの問題しかできない．微積分では心を学生に伝えることができた気分になれたが、行列ではテキストを棒読みしただけの気分だった．行列はわかった気分になれない数学なのだと思う．「物理以前に数学がある」という気分は、量子論の数学が (わかった気分になれない) 行列であることと関係する話なのかもしれない．

2.10 簡単な量子測定 (ド・ブロイのパラドックス)

2.10.1 ド・ブロイのパラドックスの $B(\mathbb{C}^2)$ 版

非常に困ったことであるが、

- 言語ルール 1(測定;2.7 節) は, パラドックス (超光速・非局所性・遠隔作用等と呼ばれるパラドックス) を内蔵している.

以下にこれを説明する.

例 2.38. [ド・ブロイのパラドックスの $B(\mathbb{C}^2)$ 版].

H を 2 次元ヒルベルト空間, すなわち, $H = \mathbb{C}^2$ とする. ここで, 基本構造 $[\mathcal{C}(H), B(H)]_{B(H)}$ を

$$[\mathcal{C}(H), B(H)]_{B(H)} = [B(\mathbb{C}^2), B(\mathbb{C}^2)]_{B(\mathbb{C}^2)}$$

と定める. $f_1, f_2 \in H$ を

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とする.

さて,

$$u = \frac{f_1 + f_2}{\sqrt{2}}$$

として, 状態 $\rho = |u\rangle\langle u|$ $(\in \mathfrak{S}^p(B(\mathbb{C}^2)))$ を固定する.

ユニタリ作用素 $U (\in B(\mathbb{C}^2))$ を

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/2} \end{bmatrix}$$

として、同型写像 $\Phi : B(\mathbb{C}^2) \to B(\mathbb{C}^2)$ を以下のように定める.

$$\Phi(F) = U^* F U \qquad (\forall F \in B(\mathbb{C}^2))$$

ここで，$B(\mathbb{C}^2)$ 内の観測量 $\mathsf{O} = (\{1,2\}, 2^{\{1,2\}}, F)$ を次のように定める．

$$F(\{1\}) = |f_1\rangle\langle f_1|, \quad F(\{2\}) = |f_2\rangle\langle f_2|$$

次の図 2.11 の状況を考えよう．

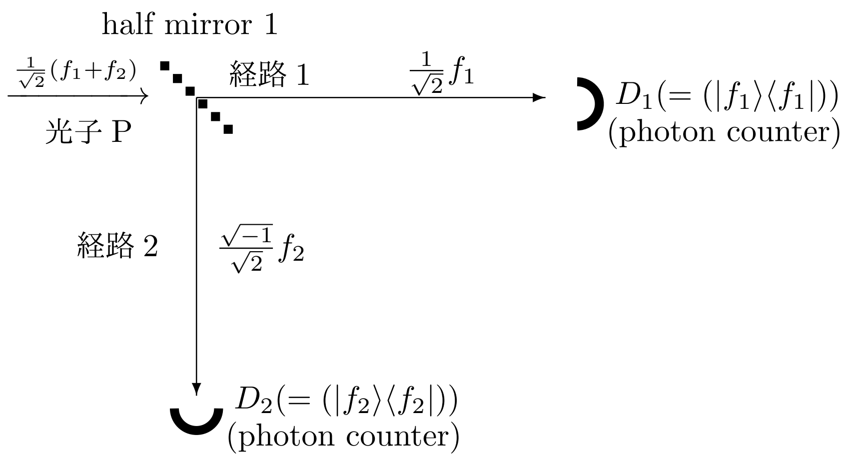


図 2.11. $[D_2 + D_1] =$ 観測量 O

上図の気分を説明しよう． 状態 $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_1 + f_2)$ (正確には, 状態 $|u\rangle\langle u|$) を持つ光子 P がハーフミラー 1 に突入するとしよう．

(A_1) u の f_1 部分はハーフミラー 1 を通過して経路 1 に沿って運動して，光子カウンター D_1 に向かう．

(A_2) f_2 はハーフミラー 1 で反射して, 経路 2 に沿って運動して (通常は, 位相が 90 度ずれるので $\sqrt{-1}$ を掛けて $\sqrt{-1}f_2$ とするが, これを気にすることはない), それから, 光子カウンター D_2 に向かう．

$\Phi\mathsf{O} = (\{1,2\}, 2^{\{1,2\}}, \Phi F)$ として、次の測定:

$$\mathsf{M}_{B(\mathbb{C}^2)}(\Phi\mathsf{O}, S_{[\rho]}) \tag{2.77}$$

を得る． このとき,

(B) 測定 $\mathsf{M}_{B(\mathbb{C}^2)}(\Phi\mathsf{O}, S_{[\rho]})$ によって, $\begin{bmatrix} \text{測定値 } 1 \\ \text{測定値 } 2 \end{bmatrix}$ が得られる確率は,

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Tr}(\rho \cdot \Phi F(\{1\})) \\ \mathrm{Tr}(\rho \cdot \Phi F(\{2\})) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle u, \Phi F(\{1\})u \rangle \\ \langle u, \Phi F(\{2\})u \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle Uu, F(\{1\})Uu \rangle \\ \langle Uu, F(\{2\})Uu \rangle \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} |\langle u, f_1 \rangle|^2 \\ |\langle u, f_2 \rangle|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

で与えられる.

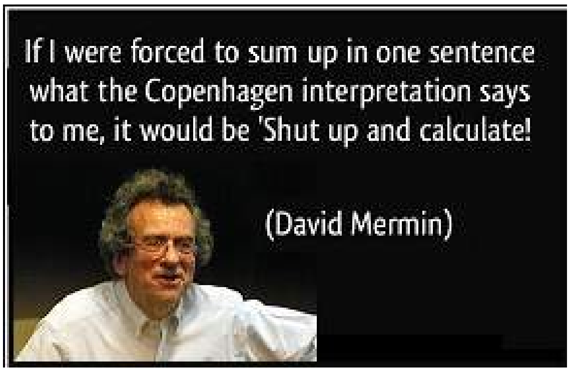
結局, 光子カウンター D_1 と D_2 のいずれか一方が, 半々の確率で, カウントされることになる. つまり, (B) の状況を理解するには,

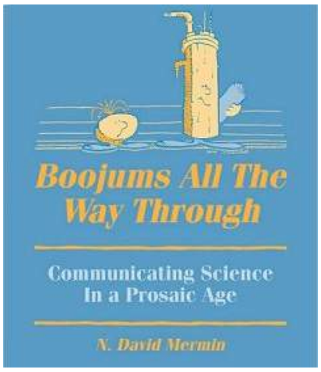
(C) 粒子 P がカウンター D_1 で発見されたならば, この粒子がカウンター D_2 で発見されては困るわけで, このことを超光速でカウンター D_2 の波動関数 $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} f_2$ に伝えて, 消去させた (逆に, 粒子 P がカウンター D_2 で発見されたならば, 同様に, カウンター D_1 の波動関数に伝えて, 消去させた)

(*cf.* [13]) と考えるしかないということになってしまう. これがド・ブロイのパラドックスである. 困ったことになってしまったが、量子言語の立場は,

悩むのは止めよう (Stop to be bothered!)
黙って、計算せよ (Shut up and calculate!)
もしあなたが天才で、悩みたいならば、主張 1.1 の [量子物理学：⑤] で悩もう

である.





////

♠ **注釈 2.9.** ド・ブロイのパラドックス (非局所性（光より速い何かがある）) は、量子力学において

頻出のパラドックスである．シュテルン=ゲルラッハの実験 (例 2.36) も「非局所性」を示唆しているわけで、言語ルール 1 (測定;2.7 節) を使うときは必ず「非局所性」に関わってくる．量子言語の立場からは、

「量子力学における唯一のパラドックス」

であるとも言える．これから本書ではいくつかのパラドックス (たとえば、「シュレーディンガーの猫」) を議論するが、非局所性以外のパラドックスは、量子言語の立場からはそれなりに理解できる．

・