

Colorings of Graphs and
Vertex Partitions of Graphs with
Degree Conditions

February 2025

Masaki Kashima

報告番号	㊦ 乙 第	号	氏 名	鹿島 枉
主 論 文 題 名 : Colorings of Graphs and Vertex Partitions of Graphs with Degree Conditions (グラフの彩色及び次数条件のもとでのグラフの頂点分割)				
(内容の要旨) 本論文では、グラフが彩色を持つための十分条件及びグラフが特定の頂点分割を持つための十分条件を、独立した二部構成で考察する。 第一部は、グラフの彩色のバリエーションとして知られているオンラインリスト彩色、odd 彩色、proper conflict-free 彩色 (PCF 彩色) に関する章からなる。 オンラインリスト彩色はリスト彩色を拡張として導入された概念であり、多くのグラフにおいてリスト彩色と似た振る舞いを行うことが知られている。第三章では完全2部グラフのオンラインリスト彩色について考察し、完全2部グラフの彩色においてはオンラインリスト彩色とリスト彩色は異なる振る舞いを行うことを示す。 Odd 彩色と PCF 彩色は、いずれも通常の彩色にさらに近傍の色の制約を加えた彩色である。第五章、第六章においては、平面的グラフ及び関連するグラフの族の odd 彩色を考察する。特に第五章では外平面的グラフが4色で odd 彩色できるための必要十分条件を与え、第六章では k-tree の odd 彩色に必要な色数の上界を与える。前者は外平面的グラフ、極大外平面的グラフの odd 彩色に関する先行研究を統合する結果となっている。 第七章においては PCF 彩色における Brooks 型の定理及び次数彩色に関して考察する。染色数と最大次数の関係式を Brooks 型の定理と呼び、多くの彩色において Brooks 型の定理が研究されてきた。本論文では PCF 彩色における次数彩色の類似を新たに導入し、外平面的グラフ、最大次数を制限したグラフ等のいくつかのグラフの族に対して上界を与える。 第二部は、グラフの新たな次数条件である「独立頂点集合上の最小次数和」の性質、及びそれを用いた 2-proper partition (2-p.p.) 及び 2-因子の存在を保証する十分条件に関する章からなる。独立頂点集合上の最小次数和はグラフの独立数及び最小次数和の二つの側面を持つ不変量であり、既存の次数条件である最小次数、最小次数積と関係がある。その他の基本的な性質については第八章において述べる。 グラフの 2-p.p. とは、グラフの頂点集合の分割で、分割された各集合が誘導する部分グラフが 2-連結となるものである。第九章では、グラフが 2-p.p. を持つための次数条件について考察し、独立頂点集合上の最小次数和に関する十分条件を与える。この結果は先行研究による最小次数条件、最小次数和条件を拡張したものとなっている。 グラフの 2-因子とは、グラフの 2-正則な全域部分グラフであり、ハミルトン閉路との関係から多くの研究が行われてきた対象である。第十章では、グラフが 2-因子を持つための独立頂点集合上の最小次数和条件を考察し、さらにその連結成分数の上界を与える結果を示す。				

Thesis Abstract

No. 1

Registration Number	☒ "KOU" ☐ "OTSU" No. *Office use only	Name	Masaki Kashima
Thesis Title Colorings of Graphs and Vertex Partitions of Graphs with Degree Conditions			
Thesis Summary In this thesis, we investigate two major topics in graph theory, colorings of graphs, and degree conditions for graphs to have a structure with a property. The first part is devoted to three types of colorings, the online list coloring, the odd coloring, and the proper conflict-free coloring (PCF coloring) of graphs. The online list coloring was introduced as an extended concept of the list coloring. In Chapter 3, we investigate the online list coloring of complete bipartite graphs and show that the online list coloring has different behavior from the list coloring on complete bipartite graphs. In Chapters 5 and 6, we study the odd coloring of planar graphs and related classes of graphs. In particular, we give a characterization of odd 4-colorable outerplanar graphs in Chapter 5 and give bounds of the odd chromatic number of k-trees in Chapter 6. The former result unifies two known results on the odd coloring of outerplanar graphs. In Chapter 7, we investigate Brooks-type theorems and degree-choosability for the PCF coloring. A Brooks-type theorem describes a relation between chromatic number and maximum degree of graphs, and the degree-choosability result is its extension to list coloring. In this thesis, we introduce degree-choosability for the PCF coloring and show results on some classes of graphs including outerplanar graphs and graphs with bounded maximum degree. The second part consists of chapters for a new degree condition named "minimum degree sum on large independent sets" (we call this sigma-star condition). The sigma-star condition was introduced by the authors recently, and some relations to other degree conditions are known. In Chapter 9, we investigate sigma-star conditions for a graph to have a 2-proper partition. A 2-proper partition (2-p.p.) of a graph is a partition of vertices such that each part induces a 2-connected subgraph. We give a sigma-star condition for a graph to have a 2-p.p., which implies two known degree conditions for a graph to have a 2-p.p. In Chapter 10, we focus on sigma-star conditions for a graph to have a 2-factor. A 2-factor of a graph is a 2-regular spanning subgraph, and towards the hamiltonicity of graphs, has been actively studied. We give sigma-star conditions for a graph to have a 2-factor and show a result on a 2-factor with a bounded number of components.			