Quotients of inverse semigroups, étale groupoids and C*-algebras

August 2021

紅村 冬大

主 論 文 要 旨

No.1

報告番号	甲 乙 第 号	氏 名	紅村 冬大

主論文題名：

Quotients of inverse semigroups, étale groupoids and C*-algebras
（逆半群、エタール亜群、C*環の商について）

（内容の要旨）

本論文では，逆半群，エタール亜群，C*環という三種の対象を扱う．逆半群とは一般化逆元を備えた半群のことであり，エタール亜群とはある種の離散性を備えた亜群のことである．C*環はノルムと対合を備えた複素多元環のことである．逆半群が位相空間に作用しているとき，変換亜群と呼ばれるエタール亜群を構成することができる．また，エタール亜群からは亜群C*環と呼ばれるC*環を構成することができる．逆半群と変換亜群の関係や，エタール亜群と亜群C*環の関係を調べることは基本的な問題であり，実際に様々な研究が行われてきた．本論文では，逆半群，エタール亜群，C*環のそれぞれの商の関係について述べる．

前半では，エタール亜群と亜群C*環のそれぞれの商の関係について述べる．まず，エタール亜群の商について基本的な性質をまとめ，エタール亜群の商が引き起こす亜群C*環の商について考察する．その後，亜群C*環のアーベル化について考察する．具体的には，エタール亜群に対しそのアーベル化ともいうべきエタール亜群を定義し，その亜群C*環が元々の亜群C*環のアーベル化になっていることを示す．また，亜群C*環のアーベル化は可換C*環なのでGelfandスペクトラムが定義されるが，亜群C*環のアーベル化のGelfandスペクトラムが材料となったエタール亜群のアーベル化の双対亜群になっていることを示す．これは，群C*環のアーベル化のGelfandスペクトラムが材料となった群のポントリャーギン双対になることを一般化する定理である．

後半では，逆半群とエタール亜群のそれぞれの商の関係について述べる．逆半群から普遍亜群と呼ばれるエタール亜群を構成することができる．本論文では，逆半群の商が普遍亜群の商を誘導することを示し，商逆半群の普遍亜群が元々の普遍亜群の商になっていることを示す．次に，この結果を用いて，逆半群のアーベル化と普遍亜群のアーベル化が対応することや，普遍亜群を不動点集合に制限することが逆半群のクリフォード化と対応することを示す．最後に，自由クリフォード半群の普遍亜群の計算や，変換亜群の不動点の個数の評価を行う．

別表６
（3）

Keio University

Thesis Abstract

No　　.

Registration Number	☑ “KOU”　□ “OTSU” No.　　　　*Office use only	Name	Fuyuta Komura

Thesis Title

Quotients of inverse semigroups, étale groupoids and C*-algebras

Thesis Summary

Main objects in this thesis are inverse semigroups, étale groupoids and C*-algebras. An inverse semigroup is a semigroup where every element has a unique generalized inverse. An étale groupoid is a topological groupoid which is discrete in some sense. A C*-algebra is an algebra over the field of the complex numbers equipped with a norm and an involution. When an inverse semigroup acts on a topological space, we may associate an étale groupoid, which is called a transformation groupoid. Similarly, for a given étale groupoid, we may construct a C*-algebra, which is called a groupoid C*-algebra. It is a fundamental task to study the relation among inverse semigroups, étale groupoids and C*-algebras. Indeed, many researchers have studied their relation. In this thesis, we study the the relation among inverse semigroups, étale groupoids and C*-algebras from the viewpoint of quotients.

In the former part of this thesis, we study the relation between quotients of étale groupoids and quotients of groupoid C*-algebras. First we introduce the fundamental properties of quotient étale groupoids. Then we observe that quotients of étale groupoid induce quotients of C*-algebras. Using these facts, we study the abelianizations of groupoid C*-algebras. More precisely, we define the abelianizations of étale groupoids. Then we show that the abelianization of a groupoid C*-algebra is isomorphic to the groupoid C*-algebra associated to the abelianization of the étale groupoid. In addition, we show that Gelfand spectrum of the abelianization of a groupoid C*-algebra becomes the dual groupoid of the abelianization of the original étale groupoid. This result is a generalization of the fact that the Gelfand spectrum of the abelianization of a group C*-algebra becomes the Pontryagin dual of the original group.

In the latter half of this thesis, we study the relation between quotients of inverse semigroups and quotients of étale groupoids. For a given inverse semigroup, we may associate an étale groupoid, which is called a universal étale groupoid. In this thesis, we show that quotients of inverse semigroups induce quotients of the universal étale groupoids. Then we show that the universal étale groupoid associated to a quotient inverse semigroup is isomorphic to the quotient of the original universal étale groupoid. In addition, using these facts, we show that (i) the abelianization of an inverse semigroup corresponds to the abelianization of the universal étale groupoid and (ii) the Cliffordization of an inverse semigroup corresponds to the restriction of universal étale groupoid to the set of fixed points. Finally, we compute the universal étale groupoid associated to the free Clifford inverse semigroups and evaluate the number of fixed points in transformation groupoids.