

学位論文 博士（理学）

極低温 Fermi 原子気体における
ずり粘性率の理論研究

2020 年度

慶應義塾大学大学院理工学研究科

鏡原大地

目次

第 1 章	序論	1
1.1	極低温 Fermi 原子気体分野の概観	1
1.2	Feshbach 共鳴	2
1.3	BCS-BEC クロスオーバー	6
1.4	極低温 Fermi 原子気体のずり粘性率の測定	10
1.5	Kovtun-Son-Starinets (KSS) 予想	11
1.6	本論文の目的と構成	20
第 2 章	極低温 Fermi 原子気体に対する強結合理論	23
2.1	モデルハミルトニアン	23
2.2	自己無撞着 T 行列近似 (SCTMA)	24
2.3	超流動相転移温度と BCS-BEC クロスオーバー現象	27
2.4	ずり粘性率の計算方法	30
2.5	エントロピー密度の計算方法	33
2.6	質量インバランス系への拡張	34
2.7	2 章のまとめ	40
第 3 章	BCS-BEC クロスオーバー領域のずり粘性率	43
3.1	弱結合 BCS 領域におけるずり粘性率	43
3.2	中間結合領域におけるずり粘性率	48
3.3	強結合 BEC 領域におけるずり粘性率	50
3.4	中間結合領域のずり粘性率の相互作用依存性	58
3.5	3 章のまとめ	60
第 4 章	ずり粘性率とエントロピー密度の比 η/s および質量インバランス効果	63
4.1	質量バランス系の BCS-BEC クロスオーバー領域における η/s	63
4.2	ずり粘性率 η およびエントロピー密度 s への質量インバランス効果	69

4.3	ずり粘性率とエントロピー密度の比 η/s および KSS 予想との比較	75
4.4	4 章のまとめ	79
第 5 章	まとめ	81
付録 A	ずり粘性率の公式の導出	87
A.1	運動量密度相関関数によるずり粘性率の公式の導出	87
A.2	応力テンソル相関関数によるずり粘性率の公式の導出	92
付録 B	応力テンソルの表式の導出	95
付録 C	Boltzmann 方程式によるずり粘性率	97
付録 D	Bose 分子に対する有効分子間相互作用および崩壊レートの強結合極限	103
D.1	質量バランス系の場合	103
D.2	質量インバランスを有する場合	106
参考文献		111

第 1 章

序論

本章では、極低温 Fermi 原子気体の分野の概説、および、本研究の動機について説明する。1.1 節では、極低温 Fermi 原子気体の研究分野を概観する。1.2 節では、極低温原子気体における重要な実験手法である、Feshbach 共鳴について説明する。1.3 節では、極低温 Fermi 原子気体における重要な研究対象である、Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)–Bose-Einstein Condensation (BEC) クロスオーバー現象について述べる。1.4 節では、極低温 Fermi 原子気体における輸送係数の測定の発展について述べ、特に本研究が対象とするずり粘性率の測定について説明する。1.5 節では、ずり粘性率に関する予想である、Kovtun-Son-Starinets (KSS) 予想 [1] について説明、極低温 Fermi 原子気体の研究分野でどのように議論されているか、について述べる。1.6 節において、本研究の目的と構成について述べる。

1.1 極低温 Fermi 原子気体分野の概観

極低温 Fermi 原子気体とは、 ${}^6\text{Li}$ 、 ${}^{40}\text{K}$ といった金属原子をガス化し、 $10^5 \sim 10^8$ 個程度を磁氣的、光学的手法により捕獲、レーザー冷却 [2] や蒸発冷却 [3] により 10^2 nK 程度の極低温まで冷却することで実現される、量子多体系である [4–6]。この系は、不純物を含まないうえに、様々な状況が実験的に実現可能である。よって、問題が山積する量子多体系を統一的に調べるのに理想的な場を提供する。例えば、光学格子による結晶構造 [4, 5, 7] や、低次元性 [8, 9] の実現、量子ポイントコンタクトによる輸送現象の観測 [10, 11]、流入と散逸を有する定常状態の実現 [12]、対向 Raman レーザー [13, 14] による人工ゲージ場の導入、異種原子を用いることに因る異なる質量を有する 2 成分混合系 [15–21]、異種原子や同位体原子を用いることに因る異なる統計性を有する 2 成分混合系 [22–27]、などが挙げられる。さらに、この系特有の長所として、Feshbach 共鳴 [6] と呼ばれる機構を利用することで、粒子間の相互作用を実験的に制御することができる。

Feshbach 共鳴による可変な粒子間相互作用を利用し、2004 年に、C. A. Regal らにより ^{40}K 極低温 Fermi 原子気体 [28] において、また、M. W. Zwierlein らにより ^6Li 極低温 Fermi 原子気体 [29] において、超流動化が実現、同時に、BCS-BEC クロスオーバー現象 [30–37] が観測された。BCS-BEC クロスオーバー現象とは、Fermi 粒子間の引力相互作用が強くなるにつれ、Fermi 粒子系超流動の性質が、弱結合 BCS 状態から、超流動転移温度以上で既に形成されている 2 つの Fermi 粒子からなる Bose 分子が凝縮する Bose-Einstein 凝縮へと、連続的に移行する現象である。BCS-BEC クロスオーバー現象の実現以来、極低温 Fermi 原子気体において、BCS-BEC クロスオーバー現象は重要な研究対象となり、BCS-BEC クロスオーバー現象の強い引力相互作用が物性にもたらす影響が広く研究されている [4, 5]。

更に近年では実験技術の進歩により、極低温 Fermi 原子気体において、ずり粘性率 [38–40] やスピン輸送係数 [41, 42]、拡散係数 [43] などの輸送現象の観測にも成功している。そのため、熱平衡状態だけでなく、流体力学的性質に対しても幅広い相互作用領域での系統的研究が可能になってきている。Fermi 粒子系の輸送現象は、銅酸化物高温超伝導体 [44]、グラフェン [45]、中性子星の合体 [46]、クォークグルーオンプラズマや初期宇宙 [47] など、幅広い分野において議論されている。従って、極低温 Fermi 原子気体分野における輸送現象の理解の発展は、これらの分野に貢献していくと考えられる。

1.2 Feshbach 共鳴

Feshbach 共鳴とは、2 原子の散乱の際に共鳴束縛状態として分子が形成される現象であり、実験的に原子間の相互作用を調整することを可能にする。ここでは、極低温 Fermi 原子気体の実験でよく用いられる ^6Li 極低温 Fermi 原子気体の場合を用いて説明する。

まず、 ^6Li Fermi 原子の原子核スピンおよび電子スピン状態に関するエネルギー準位について説明する。 ^6Li 原子は、原子核スピン \mathbf{I} の大きさは 1 であり、外殻電子は 2s 軌道であるので、電子角運動量は電子スピン \mathbf{s} で与えられ大きさは 1/2 である。したがって、 z 軸を向いた外部磁場 $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ 中の ^6Li 原子における、微細構造状態に関するハミルトニアン (H_{hf}) [5, 48] は、

$$H_{\text{hf}} = a_{\text{hf}} \mathbf{I} \cdot \mathbf{s} + g\mu_{\text{B}} B s_z - \mu B I_z. \quad (1.1)$$

ここで、 $a_{\text{hf}} (=152.1 \text{ MHz})$ [48] は超微細構造結合の結合定数、 g は電子の g 因子、 μ_{B} は Bohr 磁子、 $\mu (=0.448 \times 10^{-3} \mu_{\text{B}})$ [48] は ^6Li 原子の基底状態の核磁気モーメントである。また、式 (1.1) では、原子核スピンおよび電子スピン状態に関するエネルギー順位を議論するため、運動エネルギーの項は省略した。図 1.1 にハミルトニアン (1.1) のエネルギー準位を示す。図 1.1 に示すように、各状態を、強磁場領域でエネルギーが低い順に、

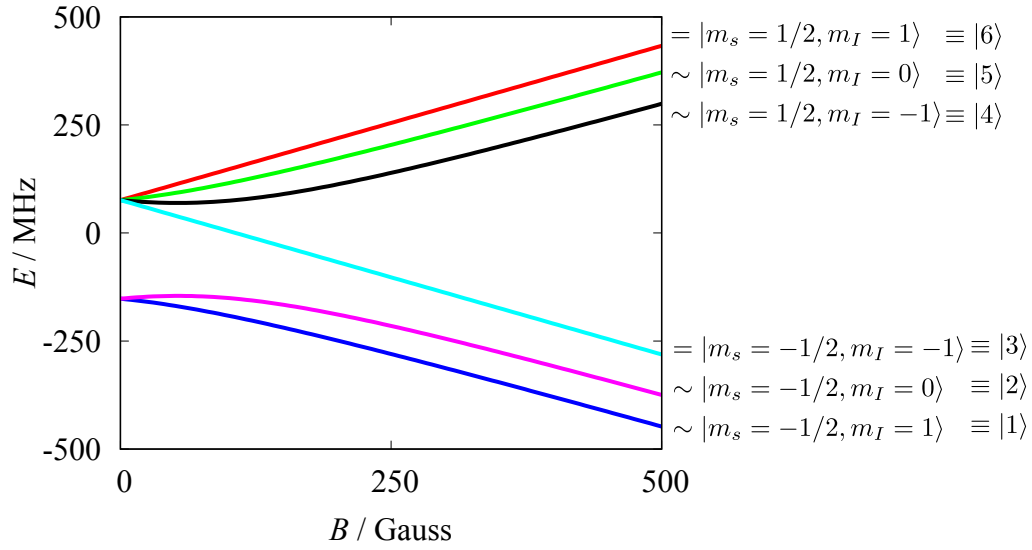


図 1.1 ${}^6\text{Li}$ Fermi 原子におけるエネルギー準位 (E) の磁場 (B) 依存性。各エネルギー準位の右に示されている微細構造状態は、高磁場領域において支配的な状態である。便宜のため、高磁場領域において支配的な状態を、エネルギー準位が低い順に $|1\rangle, |2\rangle, \dots$ と呼ぶ。尚、 $|3\rangle$ と $|6\rangle$ はすべての磁場で厳密に固有状態である。 m_s, m_I はそれぞれ、電子スピン、原子核スピンの磁気量子数を表す。

$|i\rangle (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ と呼ぶ。超微細構造結合は、 $|1\rangle \equiv |m_s = -1/2, m_I = 1\rangle$ と $|5\rangle \equiv |m_s = 1/2, m_I = 0\rangle$ を、 $|2\rangle \equiv |m_s = -1/2, m_I = 0\rangle$ と $|4\rangle \equiv |m_s = 1/2, m_I = -1\rangle$ を結合させる。ここで、 m_s, m_I はそれぞれ、電子スピン、原子核スピンの磁気量子数である。しかし、 $|1\rangle$ と $|5\rangle$ 間、および、 $|2\rangle$ と $|4\rangle$ 間、のエネルギー差が大きいため、十分高磁場中では $|1\rangle$ と $|2\rangle$ の 2 つの状態を用意できる。

次に、2 原子間に相互作用があり、散乱を起こす場合を考える。2 つの原子は、遠距離では van der Waals 力 (London 分散力を含む、分子間力の一つ) によって相互作用する [48]。近距離では、2 原子の電子スピン状態 ($|m_{1,s}\rangle|m_{2,s}\rangle$) が三重項の場合、

$$|m_{1,s} = \frac{1}{2}\rangle|m_{2,s} = \frac{1}{2}\rangle, \quad (1.2)$$

$$|m_{1,s} = -\frac{1}{2}\rangle|m_{2,s} = -\frac{1}{2}\rangle, \quad (1.3)$$

$$\frac{|m_{1,s} = \frac{1}{2}\rangle|m_{2,s} = -\frac{1}{2}\rangle + |m_{1,s} = -\frac{1}{2}\rangle|m_{2,s} = \frac{1}{2}\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (1.4)$$

と一重項の場合、

$$\frac{|m_{1,s} = \frac{1}{2}\rangle|m_{2,s} = -\frac{1}{2}\rangle - |m_{1,s} = -\frac{1}{2}\rangle|m_{2,s} = \frac{1}{2}\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (1.5)$$

で、図 1.2 に模式的に示すように、散乱ポテンシャルが異なる。これは、電子スピン一重

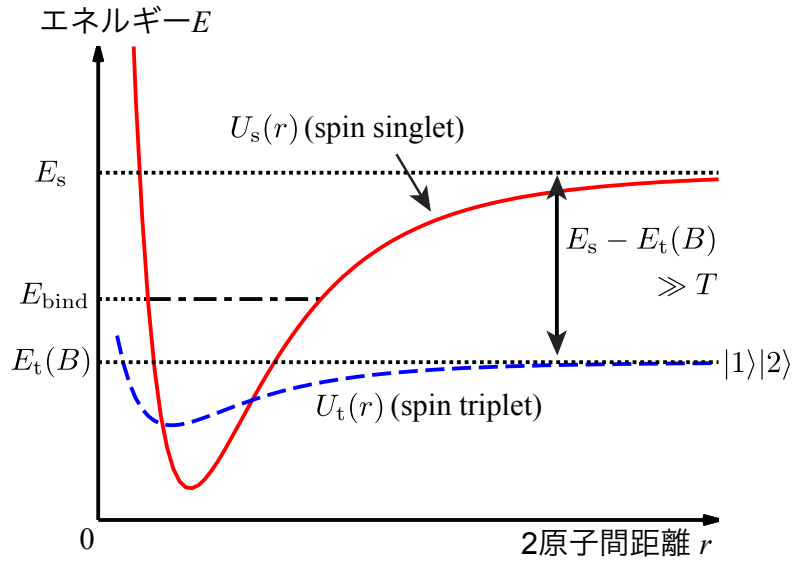


図 1.2 Feshbach 共鳴に用いられる相互作用ポテンシャルの模式図。電子スピンの一重項の場合と、三重項の場合でポテンシャルが異なる。電子スピンの一重項 (三重項) の場合の 2 原子間の距離が十分離れている場合のエネルギー (乖離エネルギー) を E_s (E_t) と表す。電子スピンの三重項の場合、外部磁場 B により E_t は $-g\mu_B B$ だけ調整できるため $E_t(B)$ と表している。電子スピンの一重項の場合、外部磁場による Zeeman エネルギーの利得はない。Feshbach 共鳴を用いる場合は、 $E_s - E_t \gg T$ (T は系の温度) として、電子スピン一重項状態を終状態とする散乱を起こさないようにする。また、一重項ポテンシャルは少なくとも 1 つ以上の束縛状態を持つとし、そのエネルギー準位を E_{bind} とする。

項の場合は、結合性軌道に対応するのに対し、三重項の場合は非結合性軌道に相当するからである [48]。|1> と |2> の状態の散乱を考えると、電子スピン三重項状態であるので、|1> と |2> の状態は三重項のポテンシャル U_t で相互作用する。超微細構造結合により、|1> が |5>、または、|2> が |4> に遷移した場合に、|1> と |4>、または、|2> と |5> の状態の散乱を考えると、|1> と |4>、または、|2> と |5> は電子スピン一重項状態であるので、一重項のポテンシャル U_s で相互作用する。

散乱する 2 原子の状態が、|1>|2> の場合、電子スピンに関し、外部磁場 B により $-g\mu_B B$ の Zeeman エネルギーの利得があるが、|1>|5> または |2>|4> の場合は、外部磁場による Zeeman エネルギーの利得はない。電子スピンの一重項、三重項の場合の 2 原子間の距離が十分離れている場合のエネルギー (乖離エネルギー) をそれぞれ E_s 、 $E_t(B)$ と表す。ここで、三重項の乖離エネルギーは、磁場に依存するので、 $E_t(B)$ と表した。また、 $E_s - E_t(B) = g\mu_B B$ である。このことを利用し、 $E_s - E_t(B) \gg T$ (T は系の温度) になるように磁場を設定しておくとする。この場合、散乱前後でエネルギーが保存しなければならないので、|1> と |2> の 2 原子が十分接近して散乱を起こし、互いに十分離れた場合

に、一重項の $|1\rangle$ と $|4\rangle$ や $|2\rangle$ と $|5\rangle$ 状態に遷移していることはない。したがって、 $|1\rangle$ と $|2\rangle$ の 2 原子が散乱しても、超微細構造状態は変わらず $|1\rangle$ と $|2\rangle$ が終状態として得られる。超微細構造状態間の遷移は、散乱の中間状態としてのみ現れる。

この場合、超微細構造結合に関する 2 次摂動を考えると、状態 $|1\rangle|2\rangle$ から状態 $|1\rangle|2\rangle$ への遷移振幅 T は、

$$\langle 1, 2|T|1, 2\rangle = \sum_n \frac{|\langle n|\sum_{i=1,2} g_{\text{hf}} \mathbf{I}_i \cdot \mathbf{s}_i|1, 2\rangle|^2}{E_t(B) - E_n}. \quad (1.6)$$

ここで衝突する 2 原子の状態 $|1\rangle|2\rangle$ を $|1, 2\rangle$ と表した。また、衝突する際の運動エネルギーは無視し、式 (1.6) の右辺の分母に、衝突前のエネルギーとして乖離エネルギー $E_t(B)$ を用いた。 $i = 1, 2$ は衝突する 2 原子を指定するラベルである。 $|n\rangle$ は超微細構造結合を除いたハミルトニアン固有値 E_n に対応する固有状態であり、完全系をなす。図 1.2 に示したように、電子スピン一重項の場合の束縛状態のエネルギー E_{bind} が、乖離エネルギー $E_t(B)$ に近い大きさを持つ場合を考える。乖離エネルギー $E_t(B)$ に近い E_{bind} が支配的な寄与を与え、それ以外の項はエネルギーに弱く依存するので無視すると、

$$\langle 1, 2|T|1, 2\rangle = \frac{|\langle \text{bind}|\sum_{i=1,2} g_{\text{hf}} \mathbf{I}_i \cdot \mathbf{s}_i|1, 2\rangle|^2}{E_t(B) - E_{\text{bind}}}, \quad (1.7)$$

と近似できる。ここで、 $|\text{bind}\rangle$ は束縛エネルギー E_{bind} に対応する固有状態である。 $E_t(B)$ は電子スピン三重項状態、 E_{bind} は電子スピン一重項状態にそれぞれ対応するので、外部磁場に対する Zeeman エネルギーの利得が、 $g\mu_B B$ と 0 で異なる。したがって、 $E_t(B) - E_{\text{bind}}$ を外部磁場によって大きさが調整できる。結果として、遷移振幅 T の大きさは、外部磁場によって調整できる。 $E_t(B) - E_{\text{bind}} = 0$ を満たす磁場を共鳴磁場 B_0 とすると、共鳴磁場 B_0 近傍では、遷移振幅 T は、

$$\langle 1, 2|T|1, 2\rangle = \frac{W}{B - B_0}, \quad (1.8)$$

と近似できる。遷移振幅 T の入射粒子の低エネルギー極限は、相互作用の大きさに対応する s 波散乱長 a_s と、

$$\langle 1, 2|T|1, 2\rangle \rightarrow \frac{4\pi a_s}{m}, \quad (1.9)$$

と関係する。 $|1\rangle|2\rangle$ 間の三重項散乱ポテンシャルに因る s 波散乱長 $a_{s,\text{bg}}$ を加えることで、Feshbach 共鳴により制御された s 波散乱長 a_s は、

$$a_s(B) = a_{s,\text{bg}} \left(1 + \frac{W_{\text{res}}}{B - B_0} \right), \quad (1.10)$$

と与えられる。ここで W_{res} は Feshbach 共鳴の幅に対応するパラメーターである。

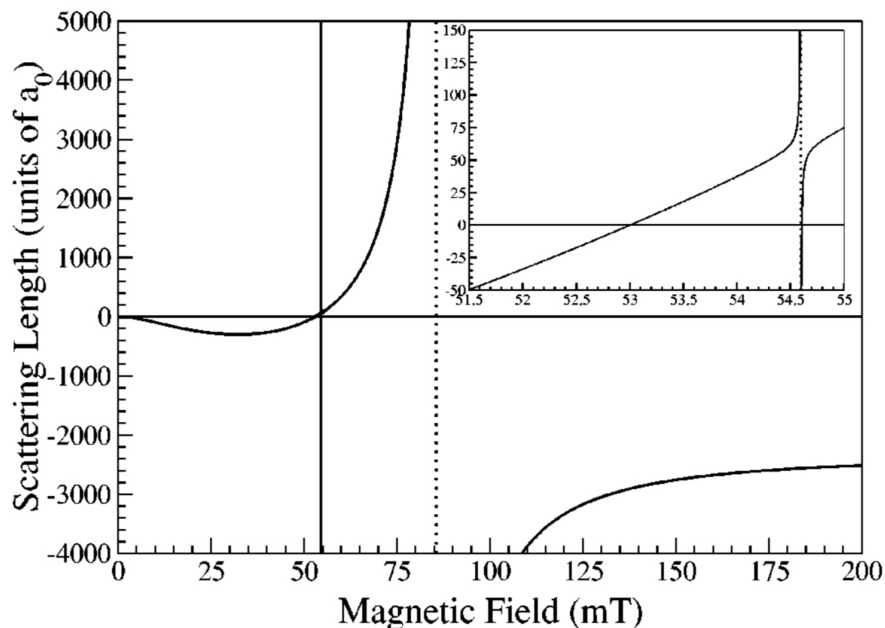


図 1.3 ${}^6\text{Li}$ 極低温 Fermi 原子気体の超微細構造状態 $|1\rangle$ と $|2\rangle$ との間の s 波散乱長の磁場依存性 [50]。縦軸は Bohr 半径 a_0 で規格化された s 波散乱長であり、横軸は外部磁場 B である。垂直の破線は、 $B_0 \simeq 83.2$ mT の Feshbach 共鳴磁場を表している。尚、 $B_0 \simeq 55.6$ mT にも共鳴幅が狭い Feshbach 共鳴点が存在し、挿入図は $B_0 \simeq 55.6$ mT 近傍の拡大図である。[Reprinted figure with permission from K. M. O'Hara, S. L. Hemmer, S. R. Grande, M. E. Gehm, J. E. Thomas, V. Venturi, E. Tiesinga, and C. J. Williams, Phys. Rev. A **66**, 041401(R) (2002). Copyright (2002) by the American Physical Society. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.66.041401>]

図 1.3 は、 ${}^6\text{Li}$ 原子の $|1\rangle|2\rangle$ 間の s 波散乱長の外部磁場依存性である。実験では図 1.3 の幅の広い Feshbach 共鳴がよく用いられ、式 (1.10) のパラメーターは、

$$\begin{aligned} a_{s,\text{bg}} &= -1582a_0, \\ W_{\text{res}} &= 262.3 \text{ G}, \\ B_0 &= 832.18 \text{ G}, \end{aligned}$$

と与えられる [49]。ここで、 $a_0 (\simeq 0.5292 \times 10^{-10} \text{ m})$ は Bohr 半径である。

1.3 BCS-BEC クロスオーバー

Feshbach 共鳴による可変な相互作用により、原子間にはたらく相互作用の強度が弱い場合から強い場合までの物性を、系統的に調べる事が可能となった。これを Fermi 粒子系超流動へ適用することで、C. A. Regal らにより ${}^{40}\text{K}$ 極低温 Fermi 原子気体 [28] において、また、M. W. Zwierlein らにより ${}^6\text{Li}$ 極低温 Fermi 原子気体 [29] において、BCS-BEC

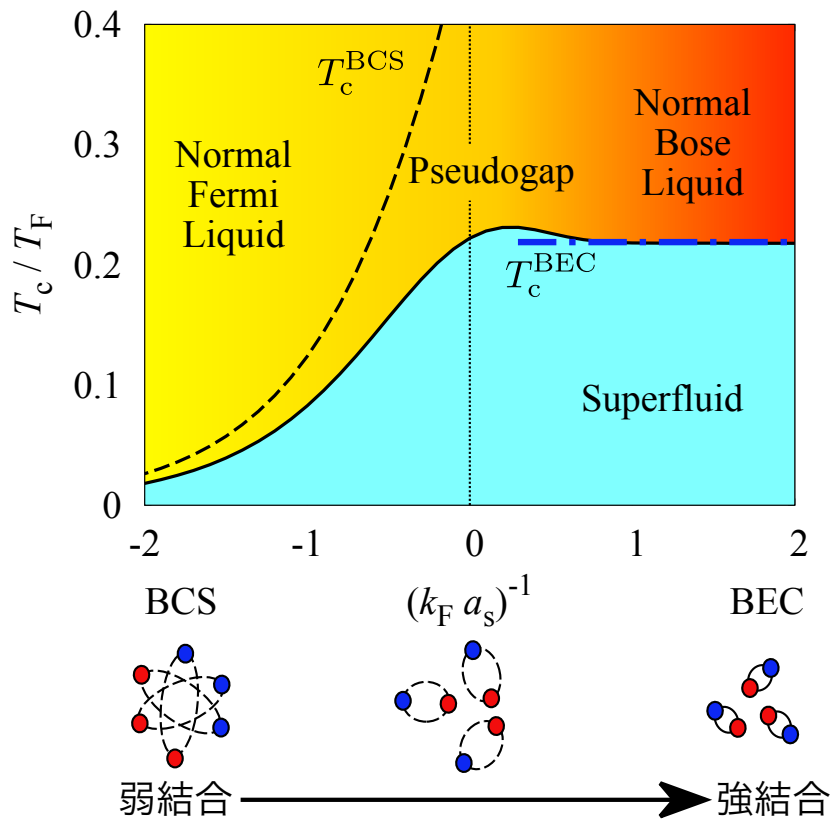


図 1.4 BCS-BEC クロスオーバー現象の定性的な相図。横軸は、粒子間相互作用を s 波散乱長 a_s の逆数で表したものである。 k_F は Fermi 波数、 T_F は Fermi 温度を表す。 $(k_F a_s)^{-1} \lesssim -1$ は弱結合 BCS 領域、 $(k_F a_s)^{-1} \gtrsim 1$ は強結合 BEC 領域、 $-1 \lesssim (k_F a_s)^{-1} \lesssim 1$ はユニタリ領域もしくは BCS-BEC クロスオーバー領域と呼ばれる。特に、 $(k_F a_s)^{-1} = 0$ はユニタリ極限と呼ばれる。実線の超流動相転移温度 T_c は、強結合理論 [33] により得られたものである。強結合理論により得られた T_c は、弱結合 BCS 領域では、破線で示す平均場 BCS 理論により得られた超流動転移温度 T_c^{BCS} (式 1.11) に、一点鎖線で示す強結合 BEC 領域では、理想 Bose 分子気体の Bose-Einstein 凝縮温度 T_c^{BEC} (式 (1.13)) に、それぞれ漸近する。相図の下に描かれている図は、各領域における、Cooper 対の模式図である。弱結合 BCS 領域では、平均粒子間距離よりも大きいサイズの Cooper 対が形成されるが、相互作用を強くしていくにつれサイズが小さくなっていく。強結合 BEC 領域では、平均粒子間距離よりも小さいサイズの Cooper 対が、Bose 分子のように振る舞う。また、中間結合領域の常流動相では、1 粒子状態密度に BCS 状態に類似の窪みが見られる、擬ギャップ (pseudogap) 現象 [51–55] が議論されている。

クロスオーバー [30–37] が 2004 年に実現した。その後、BCS-BEC クロスオーバーは、理論、実験共に精力的に研究されている [4, 5]。先ず、BCS-BEC クロスオーバー現象について説明する。BCS-BEC クロスオーバー現象は、Fermi 粒子間の引力相互作用が強くなるにつれ、Fermi 粒子系超流動の性質が、弱結合 BCS 状態から、2 つの Fermi 原

子が固く結合した Bose 分子の BEC 状態へと、連続的に移り変わる現象である。これは Fermi 粒子系超流動と Bose 粒子系超流動を統一的に扱うことを可能とする。図 1.4 に BCS-BEC クロスオーバー現象の相図の模式図を示す。原子間引力相互作用が弱い場合 $((k_F a_s)^{-1} \lesssim -1)$ 、超流動相転移は BCS 理論で説明され、Cooper 対を形成して超流動相転移する。この時の超流動相転移温度は [33]、

$$T_c^{\text{BCS}} = \frac{8}{e^2} \frac{\gamma}{\pi} \varepsilon_F e^{-\frac{\pi}{2} \frac{1}{k_F |a_s|}}, \quad (1.11)$$

($\gamma \simeq 1.781$ 、 ε_F は Fermi エネルギー) である。また、Cooper 対のサイズ ξ は [33]、

$$\xi \sim \frac{1}{k_F} e^{\frac{\pi}{2} \frac{1}{k_F |a_s|}}. \quad (1.12)$$

この値は平均粒子間距離の目安である k_F^{-1} より遥かに大きい。引力相互作用を強くしていくと、Cooper 対のサイズは小さくなっていく。同時に、Cooper 対の結合エネルギーが増大するので、超流動相転移温度は高くなっていく。一方、原子間引力相互作用が十分強い場合 $((k_F a_s)^{-1} \gtrsim 1)$ 、Fermi 原子は束縛エネルギー $E = 1/(ma_s^2)$ の束縛 Bose 分子を形成する。束縛 Bose 分子のサイズは典型的に a_s 程度 [33] と見積もられ、平均粒子間距離より小さくなる。よって、系は Bose 分子の気体と見なして良いことになる。したがって、この領域では、超流動相転移は、Bose 分子気体の Bose-Einstein 凝縮によって起こる。したがって、強結合極限では、粒子数密度 $n/2$ 、質量 $2m$ の理想 Bose 気体の BEC 転移温度 [33]、

$$T_c^{\text{BEC}} = \frac{2\pi}{2m} \left(\frac{n/2}{\zeta(3/2)} \right)^{3/2} \simeq 0.218 T_F, \quad (1.13)$$

へと漸近する。これら弱結合、強結合の超流動の描像が、連続的に接続されているのが、BCS-BEC クロスオーバー現象である。

以上の BCS-BEC クロスオーバー現象の定性的な理解から、相互作用領域は大まかに 3 つに分類できる: $(k_F a_s)^{-1} \lesssim -1$ の弱結合 BCS 理論が適用できる領域を、弱結合 BCS 領域、 $(k_F a_s)^{-1} \gtrsim 1$ の強く束縛した Bose 分子が系の性質を支配する領域を、強結合 BEC 領域、 $-1 \lesssim (k_F a_s)^{-1} \lesssim 1$ のそれらの中間にある領域を、BCS-BEC クロスオーバー領域またはユニタリ領域と呼ぶ。BCS-BEC クロスオーバー領域では、強い引力相互作用がもたらす超流動揺らぎが系の性質に大きく影響を及ぼすと考えられている。例えば、強い引力相互作用により、 T_c 以上で凝縮していない Cooper 対が形成され、その結果、正常相の 1 粒子状態密度の Fermi 準位近傍に BCS 状態に類似の窪み構造が現れる、擬ギャップ現象 [51–55] などが議論されている。

BCS-BEC クロスオーバー現象は、2004 年に、C. A. Regal らにより、 ^{40}K 極低温 Fermi 原子気体において、初めて観測された [28]。図 1.5 は、 ^{40}K 極低温 Fermi 原子気体

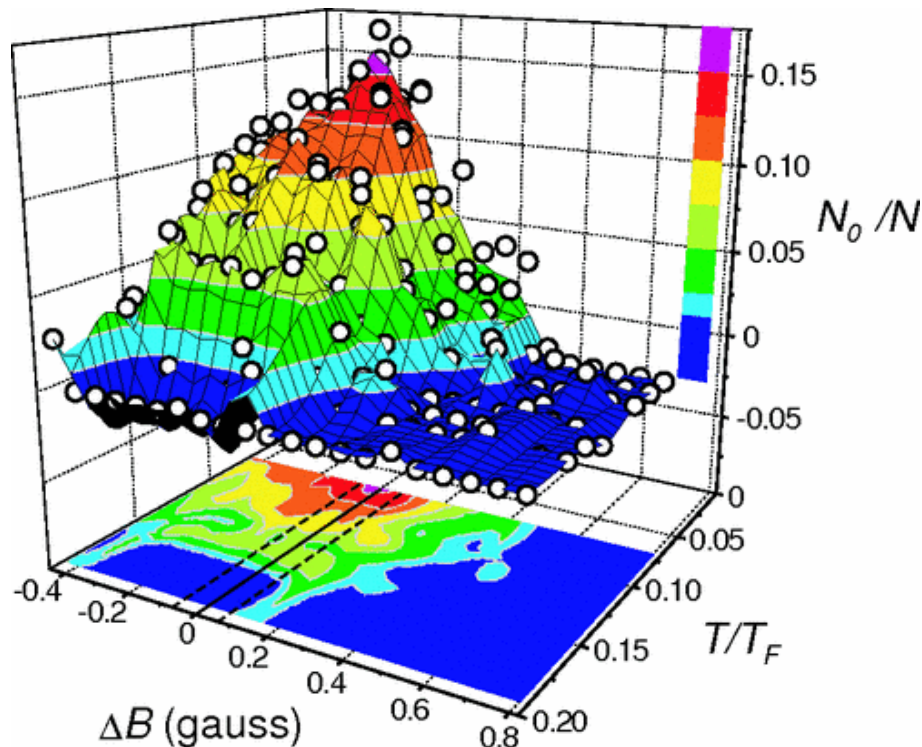


図 1.5 ^{40}K 極低温 Fermi 原子気体で観測された凝縮粒子数 N_0 (Bose 凝縮している Cooper 対の数) の相互作用、温度依存性 [28]。この実験では N_0 が有限になる領域が超流動状態であると判定している。超微細構造状態 $F = 9/2$ のうち $|F_z = -7/2\rangle$ と $|F_z = -9/2\rangle$ を捕獲、その間にはたらく引力相互作用を Feshbach 共鳴により外部磁場で制御している。 $N \simeq 10^5$ は全粒子数、 $T_F = 0.35 \mu\text{K}$ は Fermi 温度、 ΔB は Feshbach 共鳴により相互作用を制御するための外部磁場である。尚、 ΔB が正の領域が弱結合、負の領域が強結合に対応する。磁場 ΔB は Feshbach 共鳴磁場 $B_0 (= 202.10 \pm 0.07 \text{ G})$ を原点にとっている。 [Reprinted figure with permission from C. Regal, M. Greiner, and D. S. Jin, Phys. Rev. Lett. **92**, 040403 (2004). Copyright (2004) by the American Physical Society. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.040403>.]

の凝縮粒子数 N_0 (Bose 凝縮している Cooper 対の数) の相互作用、温度依存性の測定結果 [28] である。Feshbach 共鳴磁場 B_0 (図 1.5 の場合は $B_0 = 202.10 \pm 0.07 \text{ G}$) を基準とした外部磁場 ΔB が正の領域は引力相互作用が弱い弱結合領域、負の領域は引力相互作用が強い強結合領域である。超流動状態は、 $N_0 > 0$ の領域であり、超流動転移温度 T_c は T - ΔB 平面で水色の部分 (N_0 が 0 から $N_0 > 0$ となる領域) にあると考えられる。すなわち、相互作用が弱い領域では BCS 理論と同様 T_c は相互作用が強くなると単調増加するのに対し、相互作用が強い領域では T_c が一定値 ($T_c/T_F \sim 0.17$; T_F は Fermi 温度) になる。このように、BCS-BEC クロスオーバー現象特有の T_c の振る舞いが観察された。また、この実験の直後、 ^6Li Fermi 原子気体でも超流動化、および BCS-BEC クロスオーバー現象が実現している [29]。

1.4 極低温 Fermi 原子気体のずり粘性率の測定

BCS-BEC クロスオーバー現象の実現以降、極低温 Fermi 原子気体における、強い引力相互作用に起因する強い超流動揺らぎの物性への影響が精力的に研究されてきた。状態方程式 [56–58]、比熱 [59]、圧縮率 [58, 59]、エントロピー [60, 61]、スピン帯磁率 [41, 62–65] などの熱力学量が観測され、これら熱力学量における強結合効果 [66–71] が研究、解明されてきた。近年では、上述の熱力学量に加え、ずり粘性率 [38–40]、スピン輸送係数 [41, 42] や拡散係数 [43] などの輸送係数も、極低温 Fermi 原子気体で測定できるようになっている。

図 1.6 は、2011 年に、C. Cao らにより測定された、 ${}^6\text{Li}$ 極低温 Fermi 原子気体のユニタリ極限 (s 波散乱長 a_s が発散する相互作用強度の場合) のずり粘性率 η のエネルギー依存性である [38]。この実験では、異方的拡散実験と breathing モードの減衰測定を併用し、 η を測定している。図 1.6 において高エネルギー側の赤点は異方的拡散実験 [38, 72]、低エネルギー側の青点が breathing モードの減衰測定 [38, 48] から測られた結果である。

異方的拡散実験 [38, 72] では、図 1.7(A) のように、異方的なトラップポテンシャルで原子気体を捕獲する。空間的に狭い方向は広い方向より運動量の不定性が大きくなるため、この方法で運動量の大きい方向 (空間的に狭い方向) と小さい方向 (空間的に広い方向) を作ることが出来る。この気体をトラップから開放して、原子気体の広がりを時間とともに測定する。ずり粘性率の効果により、流体の運動量の大きい部分が小さい部分を引きずり、ずり粘性率の大きさによりそれぞれの方向への広がりの比が変わる。これを、図 1.7(B) のように、流体力学方程式によるシミュレーションと比較することにより、ずり粘性率 η を測定している。

低エネルギー領域では、異方的拡散実験では大きな誤差を含むことから、breathing モードと呼ばれるガス全体の振動モード [48] の減衰率からずり粘性率が測定されている。この方法では、原子気体をトラップポテンシャルから開放し、その直後に再びトラップポテンシャルをかけ捕獲し直すことで、breathing モードという気体全体の振動を励起する。ずり粘性率に依存して、breathing モードの振動が減衰することを利用して測定している。

このように現在では極低温 Fermi 原子気体は熱平衡状態の性質だけでなく流体力学的性質も観測可能となっており、Fermi 粒子系における強結合効果の統一的な理解において、より重要な役割を果たすことができるようになった。特に、ずり粘性率 η は、次節で述べる、2005 年に Kovtun らにより提唱された、Kovtun-Son-Starinets (KSS) 予想 [1] との関連で、現在、非常に注目されている [38–40, 73–102]。

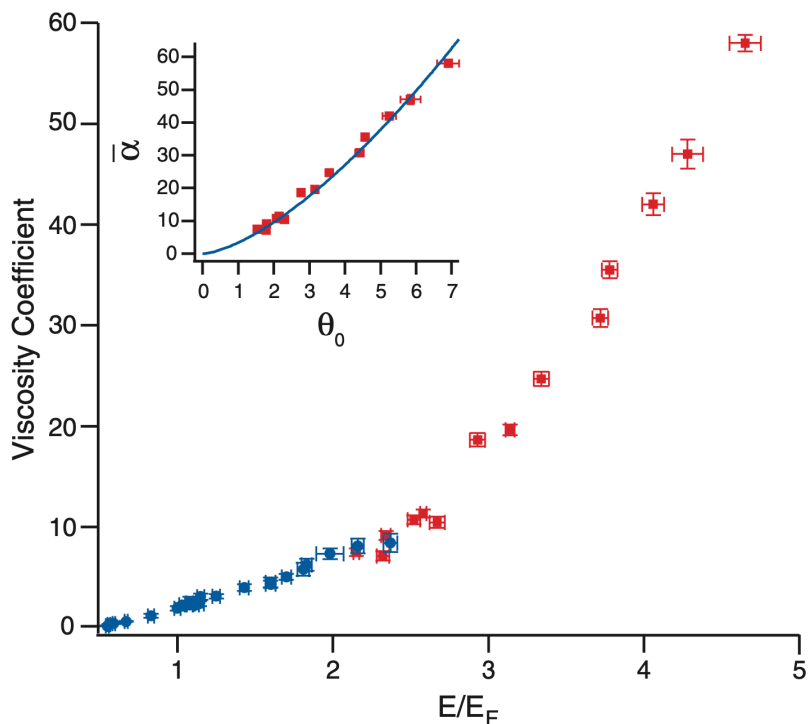


図 1.6 ${}^6\text{Li}$ 極低温 Fermi 原子気体で観測されたユニタリ極限 $((k_F a_s)^{-1} = 0, k_F$ は Fermi 波数) におけるずり粘性率 η [38]。縦軸はずり粘性率、横軸は 1 粒子あたりの平均エネルギー (E_F は Fermi エネルギー) である。挿入図は、ずり粘性率の温度依存性で、 $\theta_0 = T/T_F$ (T_F は Fermi 温度) であり、 $\bar{\alpha}$ はトラップ平均されたずり粘性率を表す。赤点は異方的拡散実験から、青点は breathing モードの減衰率から、ずり粘性率を測定したデータである。異方的拡散実験では $T_F = 9.9 \mu\text{K}$ 、 $E_F = k_B \times 9.9 \mu\text{K}$ 、breathing モードの減衰率の測定では $T_F = 2.4 \mu\text{K}$ 、 $E_F = k_B \times 2.4 \mu\text{K}$ である。[From C. Cao, E. Elliott, J. Joseph, H. Wu, J. Petricka, T. Schäfer, J. E. Thomas, “Universal Quantum Viscosity in a Unitary Fermi Gas”, *Science* 331, 58 (2011). Reprinted with permission from AAAS. <http://dx.doi.org/10.1126/science.1195219>.]

1.5 Kovtun-Son-Starinets (KSS) 予想

極低温 Fermi 原子気体のずり粘性率 η の測定は、Kovtun-Son-Starinets (KSS) 予想 [1] との関連で注目を集めている。KSS 予想とは、ずり粘性率 η とエントロピー密度 s の比 η/s に対し、

$$\frac{\eta}{s} \geq \frac{\hbar}{4\pi k_B}, \quad (1.14)$$

という不等式が、すべての有限温度で化学ポテンシャルが零の相対論的場の量子論に対して、成り立つというものである。また、この不等式は、光速 c を含まないことから、式

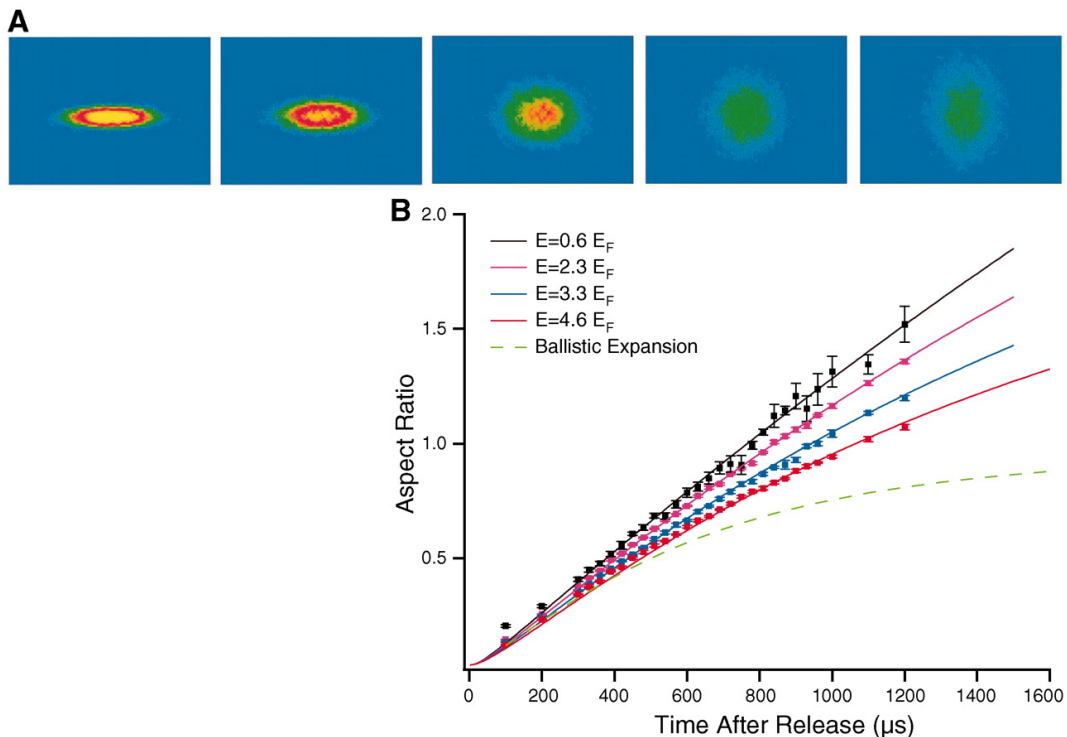


図 1.7 非等方拡散実験によるずり粘性率 η の測定 [38]。(A)1 粒子あたりの平均エネルギー $E = 2.3E_F$ における、原子雲の時間依存性。左から順に、トラップから開放してから 0.2, 0.3, 0.6, 0.9, 1.2 ms 後の原子雲である。(B) 原子雲の密度分布 $n(x, y, z, t)$ をガウシアンフィットした場合 ($n(x, y, z, t) = N/(\pi^{3/2}\sigma_x\sigma_y\sigma_z)\exp[-x^2/\sigma_x - y^2/\sigma_y - z^2/\sigma_z]$) の、アスペクト比 $\sigma_x(t)/\sigma_z(t)$ の時間依存性。各データのエラーバーは、統計誤差を表す。各実線は、ずり粘性率をフィッティングパラメーターとした、流体力学に基づくアスペクト比の時間依存性である。尚、黒の実線は、ずり粘性率をゼロとした場合の流体力学に基づくアスペクト比の時間依存性である。また、破線は、相互作用しない気体のアスペクト比の時間依存性である。[From C. Cao, E. Elliott, J. Joseph, H. Wu, J. Petricka, T. Schäfer, J. E. Thomas, “Universal Quantum Viscosity in a Unitary Fermi Gas”, Science 331, 58 (2011). Reprinted with permission from AAAS. <http://dx.doi.org/10.1126/science.1195219>.]

(1.14) はスピン 0 やスピン 1/2 の非相対論の場合に対しても適用可能であると、Kovtun らは予想した。

式 (1.14) の右辺の \hbar は KSS 予想が量子効果の帰結であることを示唆する。ここでは、ずり粘性率 η とエントロピー密度 s の比 η/s に下限値があることを、Heisenberg の不確定性関係を用い簡単に説明する。ずり粘性率 η は [103]、

$$\eta \sim np_{\text{av}}l_{\text{mfp}}, \quad (1.15)$$

と見積もられる。ここで、 n は粒子数密度、 p_{av} は平均運動量、 l_{mfp} は平均自由行程であ

る。また、エントロピー密度 s は、

$$s \sim nk_B, \quad (1.16)$$

程度であるので、ずり粘性率とエントロピー密度の比は、

$$\frac{\eta}{s} \sim \frac{p_{\text{av}} l_{\text{mfp}}}{k_B}, \quad (1.17)$$

と表される。式 (1.17) の右辺には、運動量の次元をもつ p_{av} と長さの次元を持つ l_{mfp} の積を含むので、単純に Heisenberg の不確定性関係をこの積に適用すると、

$$\frac{\eta}{s} \gtrsim \frac{\hbar}{k_B}, \quad (1.18)$$

であることが分かる。この簡単な評価から、ずり粘性率とエントロピー密度の比には量子力学によって定められた下限が存在すると期待される。KSS 予想はその下限値を具体的に与えたものと考えることが出来る。

次に、Kovtun らが式 (1.14)、特に $\hbar/4\pi k_B$ という因子を得た議論について説明する。 η/s の評価式 (1.17) に現れている平均自由行程 l_{mfp} は、系内の一つの準粒子に着目した時に散乱されずに進む距離なので、準粒子間相互作用が強く散乱が頻繁に起こるほど短い。したがって、 η/s は準粒子間の相互作用が非常に強い場合に小さくなる。この点で、ある種の強結合極限が計算できる、anti de-Sitter/conformal field theory (AdS/CFT) 対応と呼ばれる手法は有用である。AdS/CFT 対応で強結合極限が計算できる $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論の、ずり粘性率 η_{YM} 、および、エントロピー密度 s_{YM} の強結合極限は、

$$\frac{\eta_{\text{YM}}}{s_{\text{YM}}} = \frac{\hbar}{4\pi k_B}, \quad (1.19)$$

である [1]。強結合極限から相互作用を弱くした時の補正は、この比を $\hbar/4\pi k_B$ より大きくする [1]。また、図 1.8 に、液体 He、窒素、水の η/s の温度依存性を示す。これらの物質の η/s は、図 1.8 に “viscosity bound” で示された $\hbar/4\pi k_B$ より遥かに大きいことが分かる。これらの結果から、Kovtun らは、ずり粘性率 η とエントロピー密度 s の比は $\hbar/4\pi k_B$ より大きいのではないかと予想した。

ここで、理想気体に近い流体と、超流動流体は、式 (1.14) の下限を下回ることができそうに思えるが実際はそうではないことに注意する。理想気体に近い流体を考える。平均自由行程 l_{mfp} を、古典気体に対する見積もり [103] で評価すると、粒子数密度 n と散乱断面積 σ を用い、

$$l_{\text{mfp}} \sim \frac{1}{n\sigma}, \quad (1.20)$$

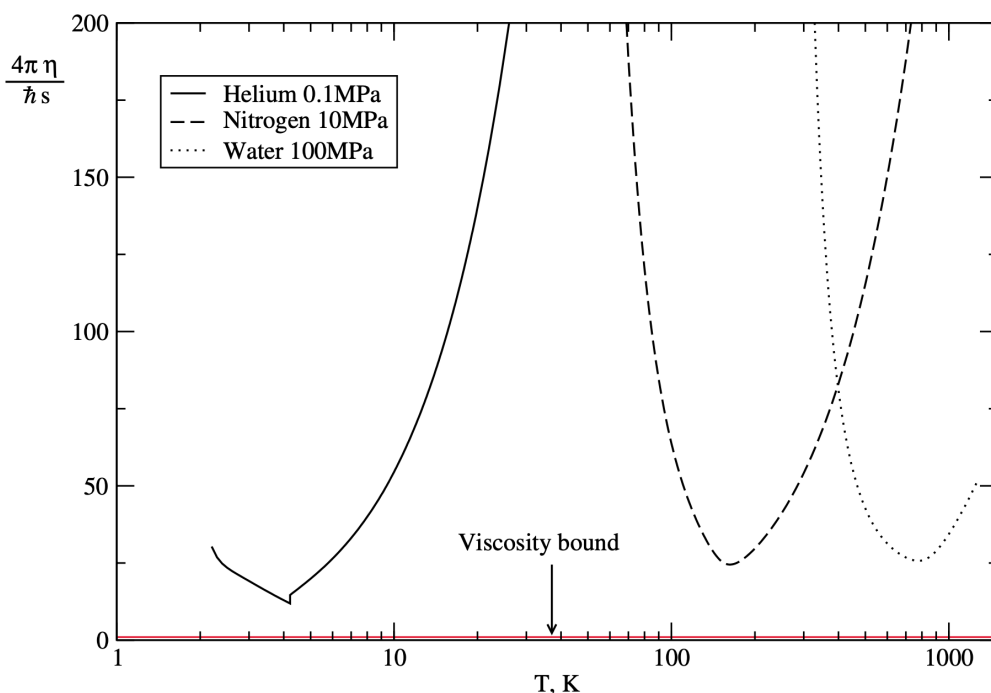


図 1.8 液体ヘリウム、窒素、水のずり粘性率 η とエントロピー密度 s の比 η/s の温度依存性 [1]。液体ヘリウムは圧力 0.1 MPa、窒素は圧力 10 MPa、水は圧力 100 MPa でのものである。“viscosity bound” で示されている横軸に水平な線は、 $\hbar/4\pi k_B$ を表す。[Reprinted figure with permission from P. K. Kovtun, D. T. Son, and A. O. Starinets, Phys. Rev. Lett. **94**, 111601 (2005). Copyright (2005) by the American Physical Society. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.94.111601>.]

と与えられる。したがって、式 (1.15) より、ずり粘性率は、

$$\eta \sim \frac{p_{\text{av}}}{\sigma}. \quad (1.21)$$

理想気体は、散乱断面積 σ が小さい極限であるので、ずり粘性率は非常に大きい。尚、ここでの議論は流体力学的記述が成り立つ範囲でのものである。流体力学では、記述しようとする流れの典型的な長さスケール L より、平均自由行程 l_{mfp} が十分小さい必要がある。理想気体の極限は l_{mfp} が大きい極限でもあるが、 $l_{\text{mfp}} > L$ になるともはや流れは流体力学的に振る舞わないので、この場合は上述の議論の範囲外である。また、超流動流体は、Landau の 2 流体理論によると、正常成分と超流動成分の混合した流体とみなすことができる。超流動成分はずり粘性に寄与しないが、正常成分が有限のずり粘性率を担う。また超流動状態では秩序化によりエントロピー密度が小さくなり、これも η/s を大きくする方向にはたらく。

KSS 予想には、いくつかの反例が理論的に見つかっている [104–109] が、式 (1.14) は

系の詳細によらないので、 η/s は量子流体を統一的な視点から議論する際に有用であると考えられる。式 (1.17) より、 η/s は相互作用が強い場合に小さくなるが、相互作用が強い場合はしばしば信頼性の高い η/s の評価が得られないので、相互作用が強い場合に特に有用である。Schäfer と Teaney[110] によりまとめられた実験結果によると、液体 ${}^4\text{He}$ 、ユニタリ極限の Fermi 原子気体、クォークグルーオンプラズマ、といった相互作用の強い流体の η/s は、 $\hbar/(4\pi k_B)$ を単位として、

$$\eta/s \geq \begin{cases} 8.8: & \text{液体 } {}^4\text{He}, \\ 6.3: & \text{ユニタリ極限の Fermi 原子気体 } ({}^6\text{Li}), \\ 5.0: & \text{クォークグルーオンプラズマ (QGP)}, \end{cases} \quad (1.22)$$

である。これらの値は室温 1 気圧の水の η/s の値 [1]、

$$\left(\frac{\eta}{s}\right)_{\text{water}} \sim 380 \times \frac{\hbar}{4\pi k_B}, \quad (1.23)$$

に比べると非常に低く、KSS 予想の下限値に近いことが分かる。

極低温 Fermi 原子気体のずり粘性率 η とエントロピー密度 s の比 η/s を考える。まず、弱結合 BCS 極限および強結合 BEC 極限においては、系はそれぞれ、理想 Fermi 気体および理想 Bose 気体に漸近していく。よって、式 (1.17) のずり粘性率の表式により、 η/s は非常に大きくなっていく。次に、BCS-BEC クロスオーバー領域について考える。式 (1.20) の平均自由行程 l_{mfp} の見積もりにおいて、 $\sigma \sim a_s^2$ と期待できることから、

$$l_{\text{mfp}} \sim \frac{1}{na_s^2}. \quad (1.24)$$

したがって、式 (1.17) より、ユニタリ極限 $a_s = \infty$ では η/s は零となると期待される。もちろんこれは古典論による粗い見積もりであるものの、ユニタリ極限にある極低温 Fermi 原子気体は、BCS-BEC クロスオーバー領域において η/s が最小値を取る良い候補となる。これが、近年ユニタリ極限にある極低温 Fermi 原子気体が注目を集めている理由の 1 つである。

極低温 Fermi 原子気体は、ずり粘性率 η だけでなく、エントロピー密度 s も測定可能であるため、 η/s を幅広い相互作用領域で実験的に決定することが可能である。極低温 Fermi 原子気体ではエントロピーは次のようにして測定される [60, 61]: 先ず、測定したい相互作用 ([60, 61] では、磁場 840 G のユニタリ極限近傍)、1 粒子平均エネルギー (または温度) の系を用意する。そして、外部磁場を断熱準静的に変化させることで、相互作用を弱くしていく ([60, 61] では、磁場 1200 G の $(k_F a_s)^{-1} \simeq -1.3$ の弱結合領域)。断熱準静的に変化させたのでエントロピーは変化しない。また、磁場の変更後は、相互作用が十分弱いことから、自由粒子系と近似する。変更後の自由粒子系のエントロピーは、もとの相互作用におけるエントロピーに等しい。変化後の原子雲の密度分布を測定し、温度、

および、化学ポテンシャルを見積もる。トラップポテンシャルの影響を考慮した 1 粒子状態密度を $D(\varepsilon)$ として、トラップ中の自由粒子のエントロピー密度 s を、

$$s = \int d\varepsilon D(\varepsilon) k_B \left[n_F(\varepsilon) \ln n_F(\varepsilon) + [1 - n_F(\varepsilon)] \ln [1 - n_F(\varepsilon)] \right], \quad (1.25)$$

と評価することで自由 Fermi 粒子系のエントロピーを決める。このようにして、1 粒子平均エネルギー (または温度) とエントロピーの関係を実験的に決めることが出来る。尚、図 1.3 より、外部磁場 B を 528 G へと共鳴磁場 840 G より減らしていくことで、 s 波散乱長をゼロにすることができるものの、実験 [60, 61] では外部磁場を増やしている。 s 波散乱長をゼロにできればエントロピーを厳密に求めることができる利点がある。しかし、共鳴磁場 840 G より磁場を減らすことは、強結合 ($a_s > 0$) にしていくことに相当する。したがって、分子の形成および乖離を経過することとなり、これらが余分な発熱を生じさせるという難点がある [60]。

図 1.9 は図 1.6 のずり粘性率 η と、対応するエントロピー密度 s の測定から作られた、 η/s の結果である。挿入図の破線が、KSS 予想の下限 $\hbar/4\pi k_B$ であり、極低温 Fermi 原子気体は、低温でこの下限に近い値を与えることが分かる。したがって、KSS 予想は極低温 Fermi 原子気体においても有効である可能性が高いことを示唆している。

図 1.6 および図 1.9 で紹介した実験は中間的な相互作用に対応するユニタリ極限 ($(k_F a_s)^{-1} = 0$) におけるものである。現在、極低温 Fermi 原子気体の BCS-BEC クロスオーバー領域において、 η/s が最小値を示す詳細な条件は明らかになっていない。この点に関して、より小さい η/s を得られる方法について、以下の 2 点が先行研究によって指摘されている:

- (1) ${}^6\text{Li}$ 極低温 Fermi 原子気体の、ずり粘性率 η のみの相互作用依存性の実験結果 [39] では、ユニタリ極限ではなく、強結合領域 ($0.25 \lesssim (k_F a_s)^{-1} \lesssim 0.5$) において、 η は最小値を示す。
- (2) 2次元極低温 Fermi 原子気体に対し、Boltzmann 方程式による理論的アプローチの範囲で、2成分 Fermi 原子間の質量インバランスの存在が η/s を低下させる [86]。

以下でそれぞれについて説明する。

図 1.10 は、2014 年に E. Elliott らにより測定された、ずり粘性率の相互作用依存性の実験結果 [39] である。これによると、ずり粘性率はユニタリ極限 ($(k_F a_s)^{-1} = 0$) より強結合側に最小値がある。一般にエントロピー密度の相互作用依存性は弱いことから、ずり粘性率とエントロピー密度の比 η/s の最小値もユニタリ極限より強結合領域で得られる可能性が高い。そのため、極低温 Fermi 原子気体の BCS-BEC クロスオーバー領域において、ユニタリ極限だけでなく BCS-BEC クロスオーバー領域を系統的に調べることは

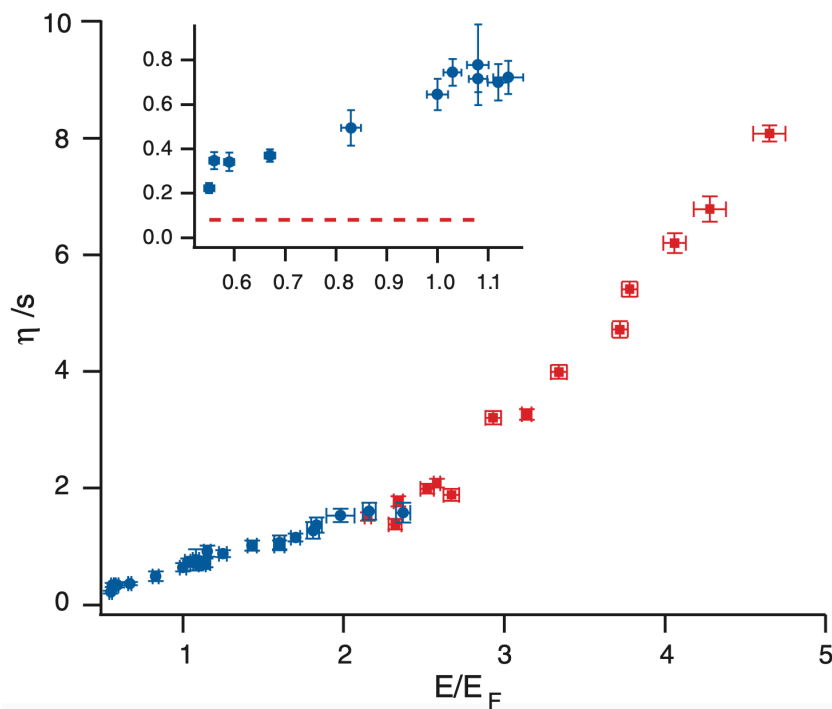


図 1.9 ${}^6\text{Li}$ 極低温 Fermi 原子気体で観測されたユニタリ極限 ($(k_F a_s)^{-1} = 0$) におけるずり粘性率 η とエントロピー密度 s の比 η/s [38]。縦軸はトラップ平均されたずり粘性率とエントロピー密度の比 (\hbar/k_B を単位としている)。横軸は 1 粒子あたりの平均エネルギーである。挿入図は低エネルギー領域の測定結果の拡大図であり、破線は KSS 予想の下限 $\hbar/4\pi k_B$ である。図 1.6 と同じく実験結果の赤点は異方的拡散実験、青点は breathing モードの減衰率からずり粘性率 η を決定している。[From C. Cao, E. Elliott, J. Joseph, H. Wu, J. Petricka, T. Schäfer, J. E. Thomas, “Universal Quantum Viscosity in a Unitary Fermi Gas”, *Science* 331, 58 (2011). Reprinted with permission from AAAS. <http://dx.doi.org/10.1126/science.1195219>.]

非常に重要である。

図 1.11 は、2012 年に G. M. Bruun により、Boltzmann 方程式に基づくアプローチで計算された、2次元極低温 Fermi 原子気体のずり粘性率 [86] である。図 1.11 では、同種原子を用いた場合の質量比 ($m_1/m_2 = 1$)、および、 ${}^6\text{Li}$ - ${}^{40}\text{K}$ 原子混合系に対応する質量比 ($m_1/m_2 = 6/40$) のずり粘性率が示されている。図 1.11 の挿入図には同種原子を用いた場合、および、 ${}^6\text{Li}$ - ${}^{40}\text{K}$ 原子混合の場合の η/s が示されている。図 1.11 の挿入図より、質量インバランスを有する場合の方が、ずり粘性率 η とエントロピー密度 s の比 η/s は小さい値が得られる。尚、図 1.11 の結果は 2次元極低温 Fermi 原子気体に対するものであるが、G. M. Bruun は 3次元の極低温 Fermi 原子気体に対する Boltzmann 方程式に基づく方法でも、やはり質量インバランス効果は小さいずり粘性率とエントロピー密度の比 η/s を与えることを指摘している [86]。また、2次元系においては、系の体積が無限

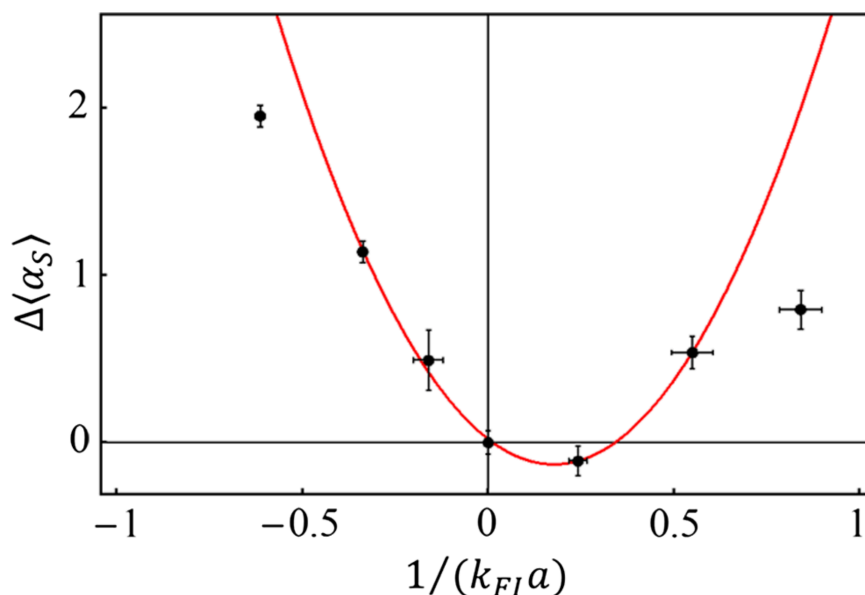


図 1.10 ${}^6\text{Li}$ 極低温 Fermi 原子ガスで観測されたずり粘性率 η の相互作用依存性 [39]。縦軸 $\Delta\langle\alpha_S\rangle$ はずり粘性率のユニタリ極限からのずれを表し、粒子数を N として $N\hbar$ で規格化されている。横軸はトラップ中心における Fermi 波数 k_{FI} と s 波散乱長 a の積の逆数で相互作用に対応する。実線はユニタリ極限とそれに近い 4 点 ($(k_{\text{FI}}a)^{-1} \simeq -0.34, -0.16, 0.25, 0.55$) を 2 次関数でフィッティングしたもので、 $\Delta\langle\alpha_S\rangle = -1.7(k_{\text{FI}}a)^{-1} + 4.8(k_{\text{FI}}a)^{-2}$ である。[Reprinted figure with permission from E. Elliott, J. A. Joseph, and J. E. Thomas, Phys. Rev. Lett. **113**, 020406 (2014). Copyright (2014) by the American Physical Society. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.020406>.]

大の場合は、Boltzmann 方程式に基づく方法は有限のずり粘性率を与えるが、より一般的な方法である、線形応答理論に基づく相関関数による方法では、ずり粘性率は発散することが知られている [111]。したがって、質量インバランスのずり粘性率への効果は、3次元系において調べる必要がある。

以上の 2 点より、本論文は、極低温 Fermi 原子気体のずり粘性率 η とエントロピー密度 s の比 η/s を (1)BCS-BEC クロスオーバー領域、および、(2)成分間の質量インバランスを有する場合、において明らかにすることを目的とする。この点において、BCS-BEC クロスオーバー領域の強い対形成揺らぎを扱える、強結合理論を用いる必要がある。さらに、 η/s を目標とするので、 η 、および、 s を同じ理論的枠組みで求めることが重要である。この点において、保存近似 [112, 113] と呼ばれる理論は有用である。なぜなら、この理論は、同じ理論的枠組み内で、エントロピー密度 s のような熱力学量を求める事ができ、また、ずり粘性率 η のような輸送係数を、各種保存則を満たしながら求めることができるからである。以上の観点から、本研究では、保存近似の一つである、自己無撞着 T 行

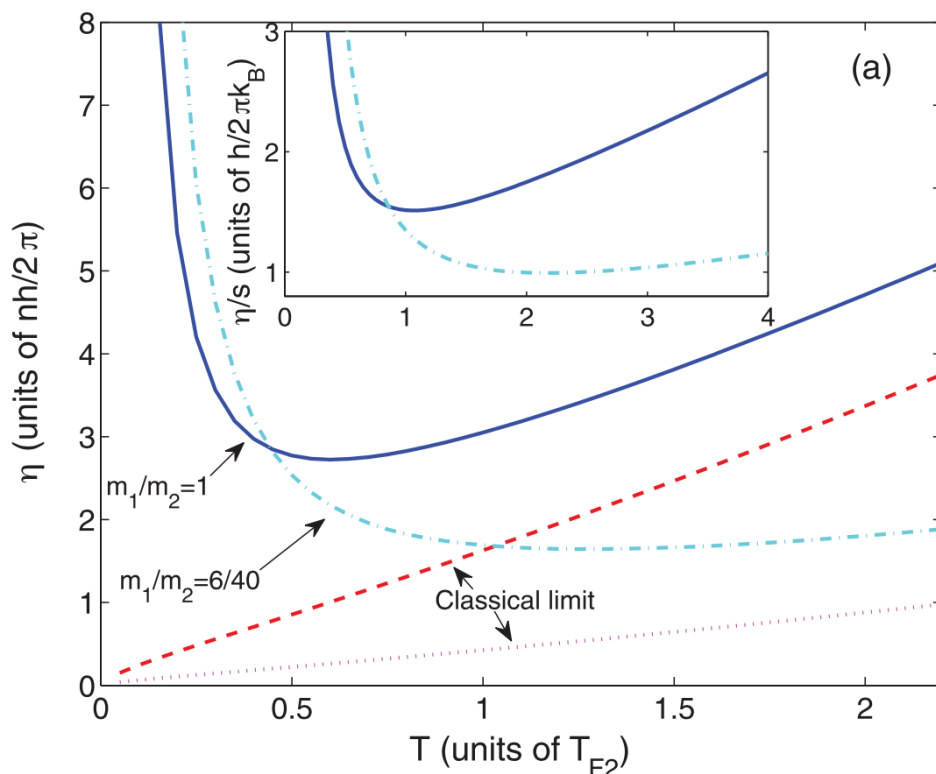


図 1.11 Boltzmann 方程式に基づく理論的アプローチで計算された 2 次元極低温 Fermi 原子気体のずり粘性率の温度依存性 [86]。 m_1 および $m_2 (> m_1)$ は原子の質量を表しており、 $m_1/m_2 = 1$ は同種原子を用いた場合、 $m_1/m_2 = 6/40$ は ${}^6\text{Li}$ - ${}^{40}\text{K}$ 原子混合系の場合に対応する質量比である。 n は気体の密度であり、 $T_{F2} = k_F^2/(2m_2)$ は重い成分の Fermi 温度 (k_F は Fermi 波数) である。相互作用強度は、2 体の束縛エネルギーを E_b として、 $\ln(E_b/T_{F2}) = 1$ となるように設定されている。破線および点線で示されているのは、それぞれ $m_1/m_2 = 1$ および $m_1/m_2 = 6/40$ の古典極限のずり粘性率である。挿入図は、ずり粘性率 η とエントロピー密度 s の比 η/s であり、1 点鎖線で示されている $m_1/m_2 = 6/40$ の場合の方が、小さい値を示す。 [Reprinted figure with permission from G. M. Bruun, Phys. Rev. A **85**, 113636 (2012). Copyright (2012) by the American Physical Society. [https://doi.org/10.1103/PhysRevA.85.013636.](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.85.013636)]

列理論 (Self-consistent T -matrix approximation: SCTMA)[34, 35, 66, 81, 114] を採用する。SCTMA は、質量バランス系、および、質量インバランス系、どちらの場合においても BCS-BEC クロスオーバー現象を記述することが知られている [34, 35, 114]。

KSS 予想は、極低温 Fermi 原子気体のみならず、高エネルギー物理学のクォークグルーオンプラズマ [115] や、凝縮系物理学のグラフェン [116]、銅酸化物高温超伝導体 [117]、液体 He[118] など、様々な分野で議論されている。したがって、極低温 Fermi 原子気体において、 η/s の最小値を得る具体的な条件を明らかにすることは、これらの分野へイン

パクトを与えると考えられる。この点で、Feshbach 共鳴を利用した可変な相互作用や、 ${}^6\text{Li}$ - ${}^{40}\text{K}$ [15–18] や ${}^{40}\text{K}$ - ${}^{161}\text{Dy}$ [19–21] などの質量インバランスを有する Fermi 原子気体の存在は、極低温 Fermi 原子気体の研究分野が有する利点である。

1.6 本論文の目的と構成

本論文の目的は、極低温 Fermi 原子気体の BCS-BEC クロスオーバー領域において、ずり粘性率 η に対する強結合効果を明らかにするとともに、ずり粘性率 η とエントロピー密度 s の比 η/s についても調べ、KSS 予想との比較を行うことである。BCS-BEC クロスオーバー領域で重要となる強い引力相互作用に由来する超流動揺らぎの効果を、自己無撞着 T 行列理論 [34, 35, 66, 81, 114] で取り入れ、同じ理論的枠組み内で、超流動相転移温度以上の正常相におけるずり粘性率 η 、および、エントロピー密度 s の温度依存性を弱結合領域から強結合領域に至るまで明らかにする。また、その結果から、ずり粘性率とエントロピー密度の比 η/s の最小値を具体的に求め KSS 予想と比較を行う。また、質量インバランスを有する場合にも拡張し、 η/s が質量比にどのように影響されるのかを明らかにする。

本論文の構成は以下のとおりである。

第 2 章は、自己無撞着 T 行列理論 (SCTMA) に基づく強結合理論の定式化を説明する。まず、質量バランス系の極低温 Fermi 原子気体の場合に、SCTMA が BCS-BEC クロスオーバー現象を記述できる理論であることを示す。次に、SCTMA の枠内でずり粘性率 η 、および、エントロピー密度 s の計算方法を説明する。また、質量インバランスを有する場合へ SCTMA を拡張し、質量インバランスを有する場合の BCS-BEC クロスオーバー現象を説明する。さらに、この状況での η と s の計算方法についても述べる。

第 3 章は、質量バランス系における、BCS-BEC クロスオーバー領域におけるずり粘性率 η について議論する。弱結合 BCS 領域では、ずり粘性率に、“窪みおよびピーク構造”といった特徴的な温度依存性が現れることを指摘し、特にピーク構造が、超流動揺らぎに起因することを明らかにする。強結合 BEC 領域では、2 体束縛状態である Bose 分子の形成が、ずり粘性率を増大させることを指摘する。また、図 1.10 などの、近年行われた実験結果との比較も行う。

第 4 章は、ずり粘性率 η とエントロピー密度 s の比 η/s について議論する。まず、質量バランス系における η/s について述べ、やはりユニタリ極限ではなく強結合領域で最小値が得られることを指摘する。次に、この最小値を得るうえで重要な量子効果を明らかにする。さらに、質量インバランスを有する場合に議論を進め、ずり粘性率 η 、および、エントロピー密度 s それぞれに対する質量インバランス効果を述べる。最後に、 η/s の質量比依存性について議論する。

第5章は本論文のまとめを述べる。なお、本論文では、特に断らない限り、 $\hbar = k_B = 1$ とし、体積 V についても $V = 1$ とおく。

第 2 章

極低温 Fermi 原子気体に対する強結合理論

この章では、本研究で用いる強結合理論、および、それに基づく物理量の計算方法を説明する。まず、同一の質量を持つ 2 成分 Fermi 原子気体についてモデルハミルトニアンについて述べた後に、自己無撞着 T 行列理論の枠組みについて述べる。次に、化学ポテンシャル μ と超流動相転移温度 T_c の決め方について述べ、超流動転移温度の結果から自己無撞着 T 行列理論が BCS-BEC クロスオーバー現象をよく記述している強結合理論であることを示す。次に、ずり粘性率について自己無撞着 T 行列理論の枠内で求める方法について説明し、続けてエントロピー密度の同枠組み内での求め方についても説明する。最後に、質量インバランスを有する Fermi 原子気体に対し上述の理論がどのように拡張されるのかを述べる。

2.1 モデルハミルトニアン

擬スピン $\sigma = \uparrow, \downarrow$ で指定される 2 種類の超微細構造状態にある Fermi 原子が同数存在 ($N_\uparrow = N_\downarrow$) する 2 成分 Fermi 原子気体を考える。系のハミルトニアンは次式で与えられる:

$$H = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \xi_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}, \sigma}^\dagger c_{\mathbf{p}, \sigma} - U \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{q}} c_{\mathbf{p}+\mathbf{q}, \uparrow}^\dagger c_{\mathbf{p}'-\mathbf{q}, \downarrow}^\dagger c_{\mathbf{p}', \downarrow} c_{\mathbf{p}, \uparrow} \quad (2.1)$$

ここで、 $c_{\mathbf{p}, \sigma}^\dagger$ は運動量 \mathbf{p} 、擬スピン σ の Fermi 原子の生成演算子である。 $\xi_{\mathbf{p}} = \varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu = \mathbf{p}^2/2m - \mu$ は Fermi 化学ポテンシャル μ から測った運動エネルギーを表し、 m は Fermi 原子の質量である。式 (2.1) の 2 項目は Feshbach 共鳴による接触型 2 体引力相互作用で、 $-U (< 0)$ は相互作用強度を表している。よく知られているように、この接触型相互作用を用い物理量を計算すると、紫外発散が生じるため人為的なカットオフ運動量 p_c が必要

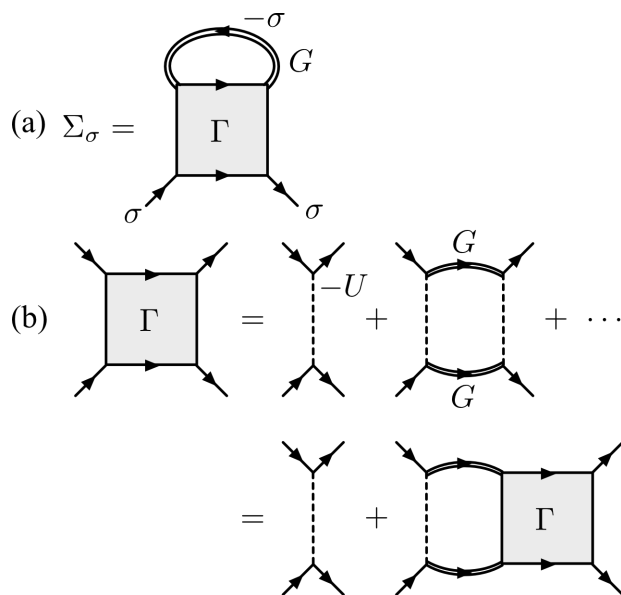


図 2.1 自己無撞着 T 行列理論の自己エネルギー Σ_σ (a) と多体散乱行列 Γ (b) のダイアグラム表現。二重線は相互作用の効果を取り込んだ Fermi 原子の繰り込まれた Green 関数 G を表し、破線は引力相互作用 $-U (< 0)$ を表す。(a) において、 σ は Fermi 原子の擬スピンを、 $-\sigma$ は擬スピン σ の反対の成分を表す。

となる [119]。この問題を回避するため、観測可能量である s 波散乱長 a_s 、

$$\frac{4\pi a_s}{m} = \frac{-U}{1 - U \sum_p^{p_c} \frac{m}{p^2}}, \quad (2.2)$$

を導入し、カットオフ運動量 p_c の影響を取り除く [119]。この s 波散乱長を用いて表される相互作用強度は、Fermi 波数 k_F と組み合わせると、 $(k_F a_s)^{-1} \lesssim -1$ が金属超伝導における BCS 理論でよく記述される弱結合領域、 $(k_F a_s)^{-1} \gtrsim 1$ が T_c 以上で形成された強く結合した分子ボソンが Bose-Einstein 凝縮 (BEC) を起こす強結合領域を表す。また、 $-1 \lesssim (k_F a_s)^{-1} \lesssim 1$ は BCS-BEC クロスオーバー領域と呼ばれ、超流動揺らぎが強い領域である。特に $(k_F a_s)^{-1} = 0$ はユニタリ極限と呼ばれる。

2.2 自己無撞着 T 行列近似 (SCTMA)

この節では、本論文でずり粘性率やエントロピー密度の解析に用いる自己無撞着 T 行列近似 (Self-consistent T -matrix approximation: SCTMA) について説明する。式 (2.1) のハミルトニアンで記述される系を温度 Green 関数法 [120, 121] を用いて解析する。1 粒子温度 Green 関数 $G_\sigma(\mathbf{r}, \tau, \mathbf{r}', \tau')$ は、Fermi 原子の場の演算子 $\psi_\sigma(\mathbf{r}, \tau)$ を用い、

$$G_\sigma(\mathbf{r}, \tau, \mathbf{r}', \tau') = -\langle T_\tau \psi_\sigma(\mathbf{r}, \tau) \psi_\sigma^\dagger(\mathbf{r}', \tau') \rangle, \quad (2.3)$$

と定義される。ここで、

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{\text{Tr}[\exp(-H/T)\hat{A}]}{\text{Tr}[\exp(-H/T)]}, \quad (2.4)$$

は演算子 \hat{A} に対するグランドカノニカルアンサンブルによる統計平均、 τ は虚時間、 T は系の温度、 T_τ は虚時間に関する時間順序演算子である。また、

$$\psi_\sigma(\mathbf{r}, \tau) = e^{H\tau} \psi_\sigma(\mathbf{r}) e^{-H\tau}, \quad (2.5)$$

である。Fourier 変換した 1 粒子温度 Green 関数、

$$G_\sigma(\mathbf{p}, \tau) = -\langle T_\tau c_{\mathbf{p},\sigma}(\tau) c_{\mathbf{p},\sigma}^\dagger(0) \rangle, \quad (2.6)$$

$$G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n) = \int_0^{1/T} d\tau G_\sigma(\mathbf{p}, \tau) e^{i\omega_n \tau}, \quad (2.7)$$

を用いると解析に便利である。ここで、 $\omega_n = \pi T(2n + 1)$ (n は整数) は Fermi 粒子の松原周波数 [120, 121] である。

SCTMA における Green 関数 $G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n)$ は、相互作用の効果を含む自己エネルギー $\Sigma_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n)$ を使い、

$$G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}} - \Sigma_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n)}, \quad (2.8)$$

と表すことができる。SCTMA では、自己エネルギー $\Sigma_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n)$ は図 2.1(a) のダイアグラムで与えられ、その表式は、

$$\Sigma_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n) = T \sum_{\mathbf{q}, i\nu_m} \Gamma(\mathbf{q}, i\nu_m) G_{-\sigma}(\mathbf{q} - \mathbf{p}, i\nu_m - i\omega_n) e^{i(\nu_m - \omega_n)\delta}. \quad (2.9)$$

ここで、 $\nu_m = 2\pi Tm$ (m は整数) は Bose 粒子の松原周波数 [120, 121] で、 δ は無限小の正の定数である。 $\Gamma(\mathbf{q}, i\nu_m)$ は多体散乱行列 (T 行列) で、図 2.1(b) のダイアグラムで与えられるように、

$$\Gamma(\mathbf{q}, i\nu_m) = -U + U\Pi(\mathbf{q}, i\nu_m)\Gamma(\mathbf{q}, i\nu_m), \quad (2.10)$$

を満たす。これを解いて次式を得る:

$$\Gamma(\mathbf{q}, i\nu_m) = \frac{-U}{1 - U\Pi(\mathbf{q}, i\nu_m)}. \quad (2.11)$$

式 (2.11) において、 $\Pi(\mathbf{q}, i\nu_m)$ は超流動揺らぎを表す 2 体相関関数であり、

$$\Pi(\mathbf{q}, i\nu_m) = T \sum_{\mathbf{p}, i\omega_n} G_\uparrow(\mathbf{p}, i\omega_n) G_\downarrow(\mathbf{q} - \mathbf{p}, i\nu_m - i\omega_n). \quad (2.12)$$

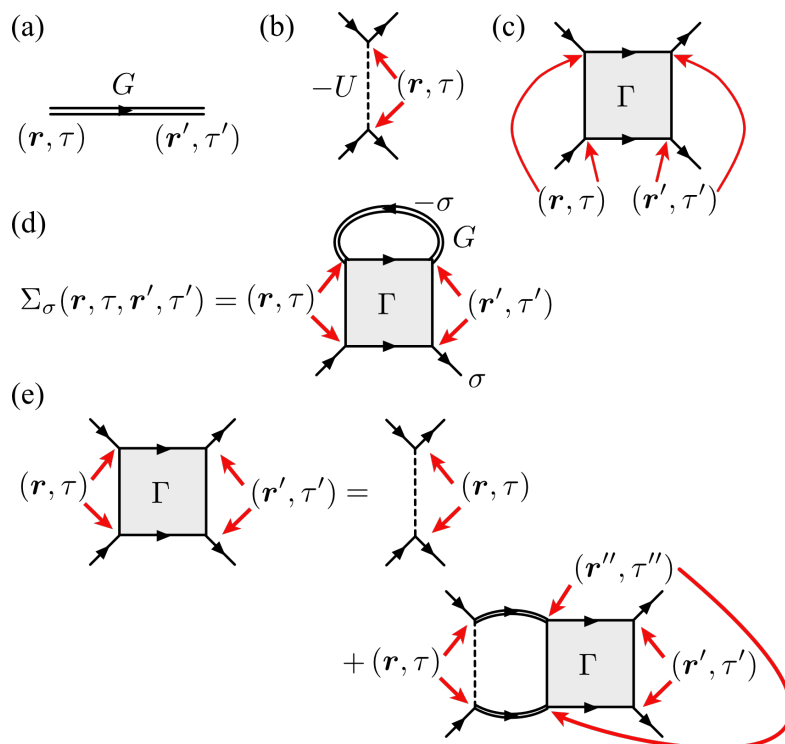


図 2.2 図 2.1 における、(a) 線り込まれた Green 関数 G 、(b) 相互作用 $-U$ 、(c) 多体散乱行列 Γ 、(d) 自己エネルギー Σ のダイアグラムと“時空”(位置および虚時間)の関係。

図 2.1 のダイアグラムについて補足する。図 2.2 に、Green 関数 G 、相互作用 $-U$ 、多体散乱行列 Γ 、自己エネルギー Σ のダイアグラムと対応する“時空”(位置および虚時間)の関係を示した。二重線で表す線り込まれた Green 関数 G のダイアグラムの両端は、式 (2.3) の場の演算子の“時空”と対応する。また、点線で表す接触型引力相互作用 $-U$ のダイアグラムの両端は、同じ位置および同じ虚時間でのみ引力がはたらくので、同じ“時空”点を表す。多体散乱行列 Γ は、図 2.1(b) より、四角形の左側の 2 頂点は同じ“時空”点で、右側の 2 頂点は別の“時空”点を表す。端や頂点が繋がっていると、それらは同じ“時空”点に対応する。ダイアグラムは、おおまかには、各部分の積の数式と対応する。例えば、図 2.1(a) の自己エネルギー Σ のダイアグラムは、

$$\Sigma_{\sigma}(\mathbf{r}, \tau, \mathbf{r}', \tau') = \Gamma(\mathbf{r}, \tau, \mathbf{r}', \tau') G_{-\sigma}(\mathbf{r}', \tau', \mathbf{r}, \tau), \quad (2.13)$$

と数式に翻訳される。これを Fourier 変換すると、式 (2.9) を得る。尚、用いる理論やダイアグラムによって、数因子や符号、積分を必要とする。数因子や符号の決め方などの、ダイアグラムから数式を得る規則を、Feynmann 則と呼ぶ [120, 121]。

なお、SCTMA の“自己無撞着”の名称は Green 関数 G もしくは自己エネルギー Σ が自己無撞着に決まることに由来する。実際、自己エネルギー Σ の式 (2.9) と多体散乱行列

Γ の式 (2.10) において式 (2.8) で与えられる相互作用の効果を用いて自己エネルギー Σ を用いて取り込んだ Green 関数 G を用いているため、Green 関数 G や自己エネルギー Σ は自己無撞着になるように決める。

2.3 超流動相転移温度と BCS-BEC クロスオーバー現象

SCTMA では、式 (2.8) で与えられる Green 関数を用い、全粒子数期待値 $N(= N_{\uparrow} + N_{\downarrow})$ に対する方程式、

$$N = T \sum_{\mathbf{p}, \omega_n, \sigma} G_{\sigma}(\mathbf{p}, i\omega_n) e^{i\omega_n \delta}, \quad (2.14)$$

を解くことで化学ポテンシャル μ を決定する。超流動転移温度 T_c は Thouless の判定条件 [122] により、超流動不安定性が発生する温度として求める。SCTMA の場合、超流動不安定性が発生することは多体散乱行列 $\Gamma(\mathbf{q}, i\nu_m)$ が $\mathbf{q} = 0, i\nu_m = 0$ で発散することとして解釈される:

$$\Gamma(\mathbf{q} = 0, i\nu_m = 0, T = T_c)^{-1} = 0. \quad (2.15)$$

図 2.3 は粒子数方程式 (2.14) と Thouless の判定条件 (2.15) を自己無撞着に解くことで得られた、超流動相転移温度 T_c と対応する化学ポテンシャル $\mu(T_c)$ の相互作用依存性である。図 2.3 において、“TMA” は非自己無撞着 T 行列理論の結果を表している。非自己無撞着自 T 行列理論とは、自己エネルギー Σ の式 (2.9) と多体散乱行列 Γ の式 (2.11) において式 (2.8) で与えられる相互作用の効果を受けた Green 関数 $G_{\sigma}(\mathbf{p}, i\omega_n)$ の代わりに自由粒子の Green 関数、

$$G_{0,\sigma}(\mathbf{p}, i\omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}}}, \quad (2.16)$$

を用いる理論である。非自己無撞着自 T 行列理論の場合における Thouless の判定基準 (2.15) は、

$$\frac{m}{4\pi a_s} + \sum_{\mathbf{p}} \left[\frac{1}{2\xi_{\mathbf{p}}} \tanh\left(\frac{\xi_{\mathbf{p}}}{2T_c}\right) - \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{p}}} \right] = 0, \quad (2.17)$$

となり、BCS 理論におけるギャップ方程式において超流動秩序変数 Δ を $\Delta = 0$ としたものとも一致する [123]。また平均場理論 [123] の結果は、Thouless の判定条件 (2.17) と自由 Fermi 気体の粒子数方程式、

$$N = T \sum_{\mathbf{p}, \omega_n, \sigma} G_{0,\sigma}(\mathbf{p}, i\omega_n) e^{i\omega_n \delta} = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{p}}), \quad (2.18)$$

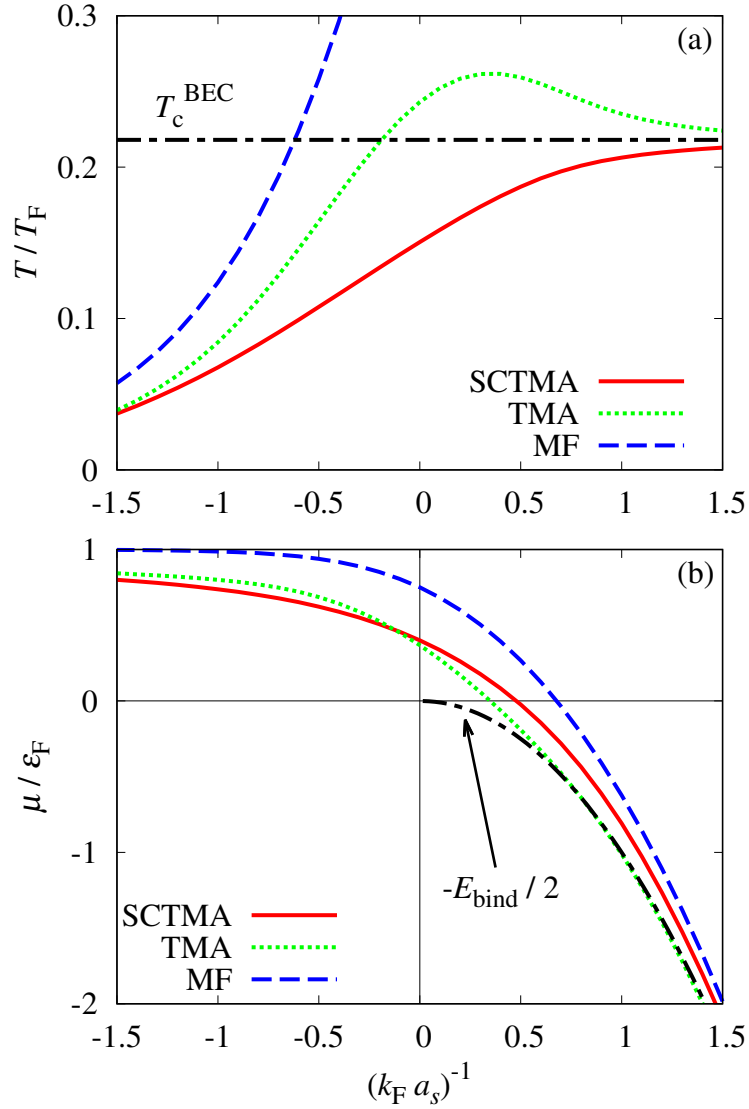


図 2.3 SCTMA で計算された (a)BCS-BEC クロスオーバー領域における超流動相転移温度 T_c と (b) 超流動相転移温度 T_c における化学ポテンシャル $\mu(T_c)$ 。実線は自己無撞着 T 行列理論 (SCTMA)、破線は非自己無撞着 T 行列理論 (TMA)、破線は平均場理論 (MF) の結果を表す。(a) における一点鎖線は分子ボソンの BEC 相転移温度 $T_c^{\text{BEC}} = 0.218T_F$ を、(b) における一点鎖線は 2 体問題を解いて得られる分子ボソンの結合エネルギー $E_{\text{bind}} = -1/ma_s^2$ の半分を表す。

を自己無撞着に解いて得られたものである。ここで、

$$n_F(x) = \frac{1}{e^{x/T} + 1}, \quad (2.19)$$

は熱平衡 Fermi 分布関数である。

図 2.3 より、弱結合領域 ($(k_F a_s)^{-1} \lesssim -1$) では、超流動揺らぎの効果が弱いため $\Sigma_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n) \simeq 0$ の平均場理論 [123] でよく記述され、自己無撞着 T 行列理論および非自

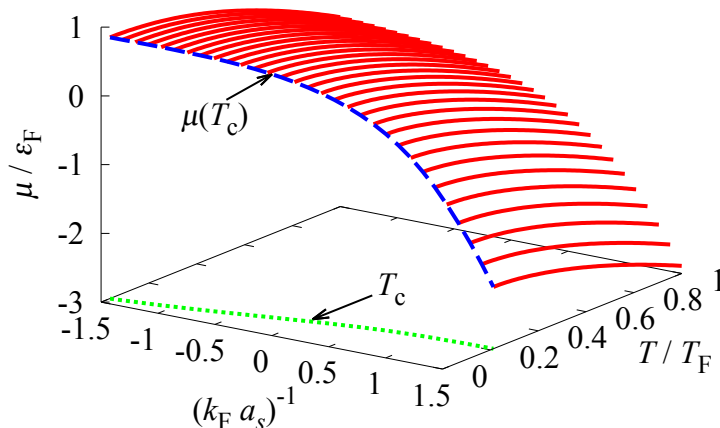


図 2.4 超流動相転移温度 T_c 以上における自己無撞着 T 行列理論の化学ポテンシャル μ の相互作用 $(k_F a_s)^{-1}$ および温度 T 依存性。

己無撞着 T 行列理論はともに平均場理論の結果に漸近していくことが分かる。平均場理論によると、化学ポテンシャルは $\mu \simeq \varepsilon_F$ (ε_F は Fermi エネルギー) となり、超流動相転移温度は、

$$T_c^{\text{BCS}} = \frac{8}{\pi} e^{\gamma-2} \varepsilon_F e^{\frac{\pi}{2k_F a_s}}. \quad (2.20)$$

となる ($\gamma = 0.577 \dots$ は Euler 定数)[32, 33]。一方、強結合領域 ($(k_F a_s)^{-1} \gtrsim 1$) では、自己無撞着 T 行列理論および非自己無撞着 T 行列理論の T_c は平均場の結果からは大きくずれ、質量 $2m$ で粒子数 $N/2$ の理想分子 Bose 気体の Bose-Einstein 凝縮温度、

$$T_c^{\text{BEC}} = \frac{\pi}{m} \left(\frac{N}{2\zeta(3/2)} \right)^{2/3} \simeq 0.218 T_F, \quad (2.21)$$

に近づく ($\zeta(3/2) \simeq 2.612$ は Riemann の ζ 関数)[32, 33]。同時に、化学ポテンシャル μ は強結合領域では負となり、2 体分子の束縛エネルギー $-1/ma_s^2$ の半分に漸近する [31–35]。これは、この領域の超流動転移が T_c 以上で形成された結合した分子ボソンの BEC で記述されるという BCS-BEC クロスオーバーの様相をよく記述している。

超流動相転移温度 T_c 以上では、与えられた温度 T に対して粒子数方程式 (2.14) のみを解き化学ポテンシャル μ を決定する。図 2.4 はこうして得られた自己無撞着 T 行列理論の化学ポテンシャルの相互作用温度依存性である。図 2.4 の $\mu(T)$ は、ずり粘性率 η やエントロピー密度 s の温度依存性を計算する際に用いる。

2.4 ずり粘性率の計算方法

ずり粘性率 η は付録 A で示すように線形応答理論によって、

$$\eta = - \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\text{Im} \Xi^{\text{R}}(\omega)}{\omega}, \quad (2.22)$$

と与えられる。ここで $\Xi^{\text{R}}(\omega)$ は応力テンソル演算子の xy 成分 $\hat{\Pi}_{x,y}$ の遅延相関関数、

$$\Xi^{\text{R}}(\omega) = -i \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} \int d^3\mathbf{r} \langle [\hat{\Pi}_{x,y}(\mathbf{r}, t), \hat{\Pi}_{x,y}(\mathbf{0}, 0)] \rangle, \quad (2.23)$$

である。応力テンソル演算子の xy 成分 $\hat{\Pi}_{x,y}$ は付録 B に示すように、以下の式で与えられる:

$$\hat{\Pi}_{x,y} = \sum_{\sigma} \frac{1}{2m} \left[(\nabla_x \psi_{\sigma}^{\dagger})(\nabla_y \psi_{\sigma}) + (\nabla_y \psi_{\sigma}^{\dagger})(\nabla_x \psi_{\sigma}) - \frac{1}{2} \nabla_x \nabla_y (\psi_{\sigma}^{\dagger} \psi_{\sigma}) \right]. \quad (2.24)$$

ずり粘性率の公式 (2.22) に対し SCTMA を用いてずり粘性率を計算することを考える。式 (2.22) から分かるように、応力テンソルの遅延相関関数 $\Xi^{\text{R}}(\omega)$ を求めることでこの物理量を計算することが出来るが、温度 Green 関数を用いた方法では、遅延相関関数 $\Xi^{\text{R}}(\omega)$ を直接計算するより、その虚時間形式、

$$\Xi(i\nu_m) = - \int_0^{1/T} d\tau e^{i\nu_m \tau} \int d^3\mathbf{r} \langle T_{\tau} [\hat{\Pi}_{x,y}(\mathbf{r}, \tau) \hat{\Pi}_{x,y}(\mathbf{0}, 0)] \rangle, \quad (2.25)$$

を計算し、解析接続、

$$\Xi^{\text{R}}(\omega) = \Xi(i\nu_m \rightarrow \omega + i\delta), \quad (2.26)$$

で $\Xi^{\text{R}}(\omega)$ を得るという方法がよく用いられる。本研究でもこの方法を採用する。

一般に、相関関数 $\Xi(i\nu_m)$ は各種の保存則によって Green 関数 G もしくは自己エネルギー Σ と関係付けられる [112, 113, 123, 124]。そのため、保存則を満たすように、自己エネルギーと無矛盾に相関関数 $\Xi(i\nu_m)$ を決めなければならない。ずり粘性率の場合は運動量保存則を満たす必要があるが、図 2.5 の相関関数は運動量保存則を満たすことが知られている [81, 112, 113]。

相関関数 $\Xi(i\nu_m)$ は図 2.5 のダイアグラムで表され、その具体的表式は、

$$\Xi(i\nu_m) = T \sum_{\mathbf{p}, \omega_n, \sigma} \frac{p_x p_y}{m} G_{\sigma}(\mathbf{p}, i\omega_n) T_{x,y,\sigma}(\mathbf{p}, i\omega_n, i\omega_n + i\nu_m) G_{\sigma}(\mathbf{p}, i\omega_n + i\nu_m). \quad (2.27)$$

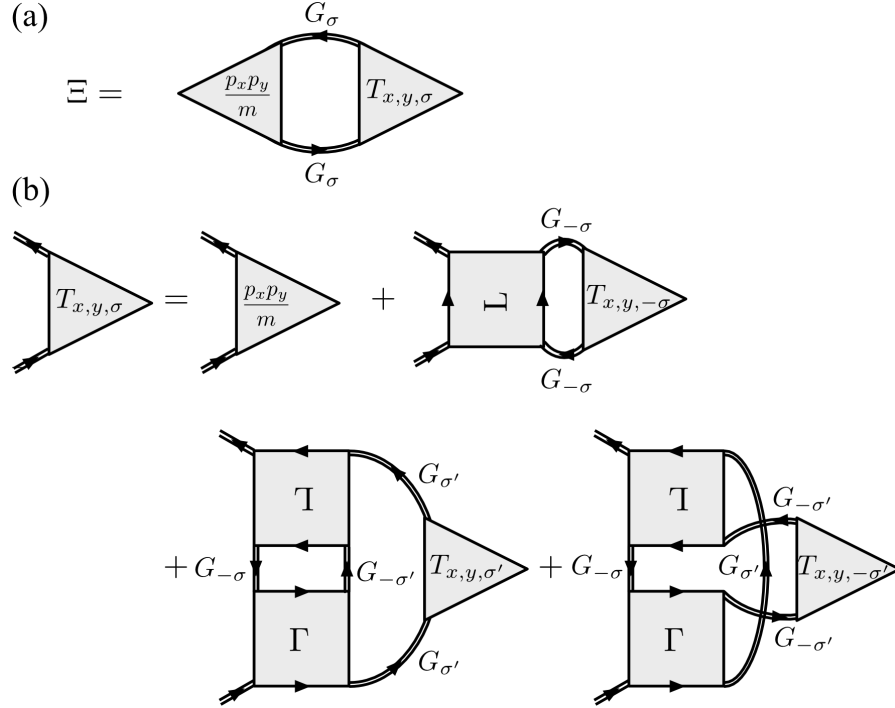


図 2.5 SCTMA における式 (2.25) で与えられる $\Xi(i\nu_m)$ のダイアグラム表示。2 重線は相互作用の効果を取り込んだ Green 関数 G を表す。 $p_x p_y / m$ は入ってくる Green 関数の運動量が \mathbf{p} のとき $p_x p_y / m$ を掛けることを意味する。 $T_{x,y,\sigma}$ は頂点関数、 $T_{x,y,\sigma}$ の 2 項目は MT ダイアグラム [125]、3, 4 項目は AL ダイアグラム [125] と呼ばれる。

ここで $T_{x,y,\sigma}(\mathbf{p}, i\omega_n, i\nu_m)$ は頂点関数と呼ばれる量で、図 2.5(b) のダイアグラムより

$$T_{x,y,\sigma}(\mathbf{p}, i\omega_n, i\omega_n + i\nu_m) = \frac{p_x p_y}{m} + T_{x,y,\sigma}^{\text{MT}}(\mathbf{p}, i\omega_n, i\omega_n + i\nu_m) + T_{x,y,\sigma}^{\text{AL}}(\mathbf{p}, i\omega_n, i\omega_n + i\nu_m), \quad (2.28)$$

と、裸の応力テンソルに相当する $p_x p_y / m$ の項、Maki-Thompson (MT) 項 [125] $T_{x,y,\sigma}^{\text{MT}}(\mathbf{p}, i\omega_n, i\omega_n + i\nu_m)$ 、および、Aslamazov-Larkin (AL) 項 [125] $T_{x,y,\sigma}^{\text{AL}}(\mathbf{p}, i\omega_n, i\omega_n + i\nu_m)$ の和で与えられる。MT 項と AL 項はそれぞれ図 2.5(b) の第 2 項と第 3, 4 項で与えられ、その表式は、

$$T_{x,y,\sigma}^{\text{MT}}(\mathbf{p}, i\omega_n, i\omega_n + i\nu_m) = T \sum_{\mathbf{q}, \nu'_m} \Gamma(\mathbf{q}, i\nu'_m) \tilde{T}_{x,y,-\sigma}(\mathbf{q} - \mathbf{p}, i\nu'_m - i\omega_n - i\nu_m, i\nu'_m - i\omega_n), \quad (2.29)$$

$$T_{x,y,\sigma}^{\text{AL}}(\mathbf{p}, i\omega_n, i\omega_n + i\nu_m) = -T \sum_{\mathbf{q}, \nu'_m} \tilde{S}_{x,y}(\mathbf{q}, i\nu'_m, i\nu'_m + i\nu_m) G_{-\sigma}(\mathbf{q} - \mathbf{p}, i\nu'_m - i\omega_n). \quad (2.30)$$

ここで、 $\tilde{T}_{x,y,\sigma}$ と $\tilde{S}_{x,y}$ は以下のように与えられる:

$$\tilde{T}_{x,y,\sigma}(\mathbf{p}, i\omega_n, i\omega_n + i\nu_m) = G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n) T_{x,y,\sigma}(\mathbf{p}, i\omega_n, i\omega_n + i\nu_m) G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n + i\nu_m), \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{x,y}(\mathbf{q}, i\nu'_m, i\nu'_m + i\nu_m) &= \Gamma(\mathbf{q}, i\nu'_m) \Gamma(\mathbf{q}, i\nu'_m + i\nu_m) \\ &\times T \sum_{\mathbf{p}, \omega_n, \sigma} G_{-\sigma}(\mathbf{q} - \mathbf{p}, i\nu'_m - i\omega_n) \tilde{T}_{x,y,\sigma}(\mathbf{p}, i\omega_n, i\omega_n + i\nu_m). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Green 関数 G_σ と同じように、頂点関数 $T_{x,y,\sigma}$ も自己無撞着になるように決定される。

虚時間形式の相関関数 $\Xi(i\nu_m)$ から解析接続 (2.26) によって遅延相関関数 $\Xi^R(\omega)$ を得る際、本研究では Padé 近似を用い数値的に実行する [126]。Padé 近似とは、松原周波数 ν_m の相関関数 $\Xi(i\nu_m)$ のデータに対し、有理関数、

$$f(z) = \frac{\sum_{i=0}^k a_i z^i}{1 + \sum_{i=1}^l b_i z^i}, \quad (2.33)$$

がデータ $\Xi(i\nu_m)$ を再現するように、すなわち、

$$f(i\nu_m) = \Xi(i\nu_m), \quad (2.34)$$

を満たすように $f(z)$ を構築し、 $\Xi^R(\omega) = f(\omega + i\delta)$ によって遅延相関関数を近似する方法である。

上記の Padé 近似を用いた解析接続の方法を本研究に適用した際に生じた問題点とその解決方法について触れておく。Padé 近似を用いて近似された遅延相関関数から得たずり粘性率において、本来非物理的な負の値や、非物理的なほど非常に大きな値が得られることがあった。しかしながら、この問題は虚時間形式の相関関数 (2.27) を評価する際に用いたカットオフ運動量 k_c (式 (2.2) に現れている p_c とは無関係である) や、Padé 近似を実行する際に用いた松原周波数の数に依存していた。そのため、以下の処置を行った: 式 (2.27) の運動量の和において $10k_F \leq k_c \leq 60k_F$ の様々な値のカットオフ運動量に対し相関関数 $\Xi(i\nu_m)$ を計算し、それぞれの k_c の $\Xi(i\nu_m)$ に対し 50 から 100 個の松原周波数を用いて Padé 近似を用いてずり粘性率を計算した。このデータセットに対し、先ず非物理的な負の値のデータ (Padé 近似によるアーティファクト) を除外し、さらに、異常なデータの影響を避けるため、残ったデータから値が大きい順に 10%、小さい順に 10% のデータを除外した。最後に残ったデータの平均値 $\bar{\eta}$ と標準偏差 $\bar{\sigma}$ を計算し、 $\bar{\eta}/\bar{\sigma}$ が 0.1 以下のものを計算されたずり粘性率として採用し以下の結果の節において図に示す。 $\bar{\eta}/\bar{\sigma}$ が 0.1 以上の場合は、結果に信頼性がないとして以下の結果の節において図から除外した。

2.5 エントロピー密度の計算方法

エントロピー密度 s は熱力学恒等式、

$$-PV = E - TS - \mu N, \quad (2.35)$$

を利用して求めることができる。ここで、 P は圧力、 E は内部エネルギー、 S はエントロピーである。また、本段落では、体積 V をあらわに示す。まず、式 (2.35) を導出する。温度 T 、体積 V 、化学ポテンシャル μ を自然な変数とする完全な熱力学関数 (熱力学ポテンシャル) は、グランドポテンシャル $\Omega(T, V, \mu)$ である。グランドポテンシャルは示量性を持ち、自然な変数のうち示量性を示すものは体積 V だけである。したがって、 λ を実数として、

$$\lambda\Omega(T, V, \mu) = \Omega(T, \lambda V, \mu), \quad (2.36)$$

が成立する。上式を λ で微分し、 $\lambda = 1$ と置くことにより、

$$\Omega(T, V, \mu) = \frac{\partial\Omega}{\partial V}V = -P(T, V, \mu)V, \quad (2.37)$$

を得る。一方、グランドポテンシャル Ω は、内部エネルギー E から、エントロピー S および粒子数 N に関する Legendre 変換から得られ、

$$\Omega(T, V, \mu) = E(T, V, \mu) - TS(T, V, \mu) - \mu N(T, V, \mu). \quad (2.38)$$

式 (2.37) と式 (2.38) より、式 (2.35) を得る。

式 (2.35) よりエントロピー密度 $s (= S/V)$ は、

$$s = \frac{E + P - \mu N}{T}, \quad (2.39)$$

のように内部エネルギー E と圧力 P を用いて表す事ができる。極低温 Fermi 原子気体では Tan の圧力関係式 [127–129]、

$$P = \frac{2}{3}E + \frac{C}{12\pi m a_s}, \quad (2.40)$$

が成り立つので、エントロピー密度 s は、

$$s = \frac{1}{T} \left[\frac{5}{3}E + \frac{C}{12\pi m a_s} - \mu N \right], \quad (2.41)$$

と内部エネルギー E とコンタクト C を求めることで計算できる。

内部エネルギー E は一般に、

$$E = T \sum_{\mathbf{p}, \omega_n, \sigma} \left[\varepsilon_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \Sigma_{\sigma}(\mathbf{p}, i\omega_n) \right] G_{\sigma}(\mathbf{p}, i\omega_n), \quad (2.42)$$

と与えられる。コンタクト C は、運動量分布、

$$n_{\mathbf{p}, \sigma} = T \sum_{i\omega_n} G_{\sigma}(\mathbf{p}, i\omega_n), \quad (2.43)$$

の高運動量領域における振る舞い、

$$n_{\mathbf{p}, \sigma} \sim \frac{C}{p^4}, \quad (2.44)$$

によって定義される [127–129]。SCTMA では、

$$C = -m^2 T \sum_{\mathbf{q}, \nu_m} \Gamma(\mathbf{q}, i\nu_m), \quad (2.45)$$

で与えられる [81]。

2.6 質量インバランス系への拡張

以上の定式化を質量インバランス系へ拡張することを考える。基本的には、2成分の Fermi 原子のうち片方 (例えば \uparrow) を軽い質量 (m_L) を持つ成分 L、他方 (例えば \downarrow) を重い質量 (m_H) を持つ成分 H と置き換えることで質量インバランス系の自己無撞着 T 行列近似は得られる。以下では質量インバランスによって変更を受けた点を説明する。

質量インバランス系のハミルトニアンは、

$$H = \sum_{\mathbf{p}, \sigma=L, H} \xi_{\mathbf{p}, \sigma} c_{\mathbf{p}, \sigma}^{\dagger} c_{\mathbf{p}, \sigma} - U \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{q}} c_{\mathbf{p}+\mathbf{q}, L}^{\dagger} c_{\mathbf{p}'-\mathbf{q}, H}^{\dagger} c_{\mathbf{p}', H} c_{\mathbf{p}, L}. \quad (2.46)$$

ここで $c_{\mathbf{p}, L}^{\dagger}$ 、 $c_{\mathbf{p}, H}^{\dagger}$ はそれぞれ質量 m_L の軽い成分、質量 $m_H (> m_L)$ の重い成分の生成演算子である。 $\xi_{\mathbf{p}, \sigma} = \varepsilon_{\mathbf{p}, \sigma} - \mu_{\sigma} = p^2 / (2m_{\sigma}) - \mu_{\sigma}$ は σ 成分の Fermi 化学ポテンシャル μ_{σ} から測った運動エネルギーを表す。各成分の質量が異なることにより、運動エネルギー $\varepsilon_{\mathbf{p}, \sigma}$ および化学ポテンシャル μ_{σ} が成分ごとに違う値を取り得る。 $-U (< 0)$ は相互作用強度を表している。質量バランス系の場合と同様に、相互作用強度 $-U$ は s 波散乱長 a_s に、

$$\frac{4\pi a_s}{m_r} = \frac{-U}{1 - U \sum_{\mathbf{p}} \frac{p_c m_r}{p^2}}, \quad (2.47)$$

の関係式を用いて繰り込む [130]。ここで m_r は、

$$m_r = \frac{2m_L m_H}{m_L + m_H}, \quad (2.48)$$

で与えられる換算質量の 2 倍の量であり、質量バランス系 ($m_L = m_H = m$) の場合には $m_r = m$ に帰着する。式 (2.47) は、質量バランス系の場合の対応する式 (2.2) と比較すると、原子の質量 m が換算質量の 2 倍の量 m_r に置き換わっている。

付録 A に示すように質量インバランスがあってもずり粘性率の公式、

$$\eta = - \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\text{Im} \Xi^R(\omega)}{\omega}, \quad (2.49)$$

は質量バランス系と同じ形で成立する。ただし、応力テンソル演算子の xy 成分は、

$$\hat{\Pi}_{x,y} = \sum_{\sigma=L,H} \frac{1}{2m_\sigma} \left[(\nabla_x \psi_\sigma^\dagger)(\nabla_y \psi_\sigma) + (\nabla_y \psi_\sigma^\dagger)(\nabla_x \psi_\sigma) - \frac{1}{2} \nabla_x \nabla_y (\psi_\sigma^\dagger \psi_\sigma) \right], \quad (2.50)$$

と各成分の質量に依存する。

質量インバランスのある場合の自己無撞着 T 行列理論および各成分の化学ポテンシャル μ_σ や超流動相転移温度 T_c の決定方法について述べる。質量インバランスのある場合でも Green 関数 G_σ は以下のように与えられる:

$$G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \xi_{\mathbf{p},\sigma} - \Sigma_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n)}. \quad (2.51)$$

質量インバランスの効果は $\xi_{\mathbf{p},\sigma}$ に反映されている。また、自己エネルギー Σ_σ は成分ごとに違う値を持つ。自己エネルギーは図 2.6(a) で与えられ、その表式は、

$$\Sigma_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n) = T \sum_{\mathbf{q}, i\nu_m} \Gamma(\mathbf{q}, i\nu_m) G_{-\sigma}(\mathbf{q} - \mathbf{p}, i\nu_m - i\omega_n) e^{i(\nu_m - \omega_n)\delta}. \quad (2.52)$$

ここで $-\sigma$ は $\sigma = L, H$ の反対の成分を表す。また多体散乱行列 Γ は、

$$\Gamma(\mathbf{q}, i\nu_m) = \frac{-U}{1 - U\Pi(\mathbf{q}, i\nu_m)}. \quad (2.53)$$

ここで $\Pi(\mathbf{q}, i\nu_m)$ は超流動揺らぎを表す 2 体相関関数であり、

$$\Pi(\mathbf{q}, i\nu_m) = T \sum_{\mathbf{p}, i\omega_n} G_L(\mathbf{p}, i\omega_n) G_H(\mathbf{q} - \mathbf{p}, i\nu_m - i\omega_n). \quad (2.54)$$

各成分の化学ポテンシャル μ_σ を決定するには、各成分の粒子数方程式、

$$N_\sigma = T \sum_{\mathbf{p}, \omega_n} G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n), \quad (2.55)$$

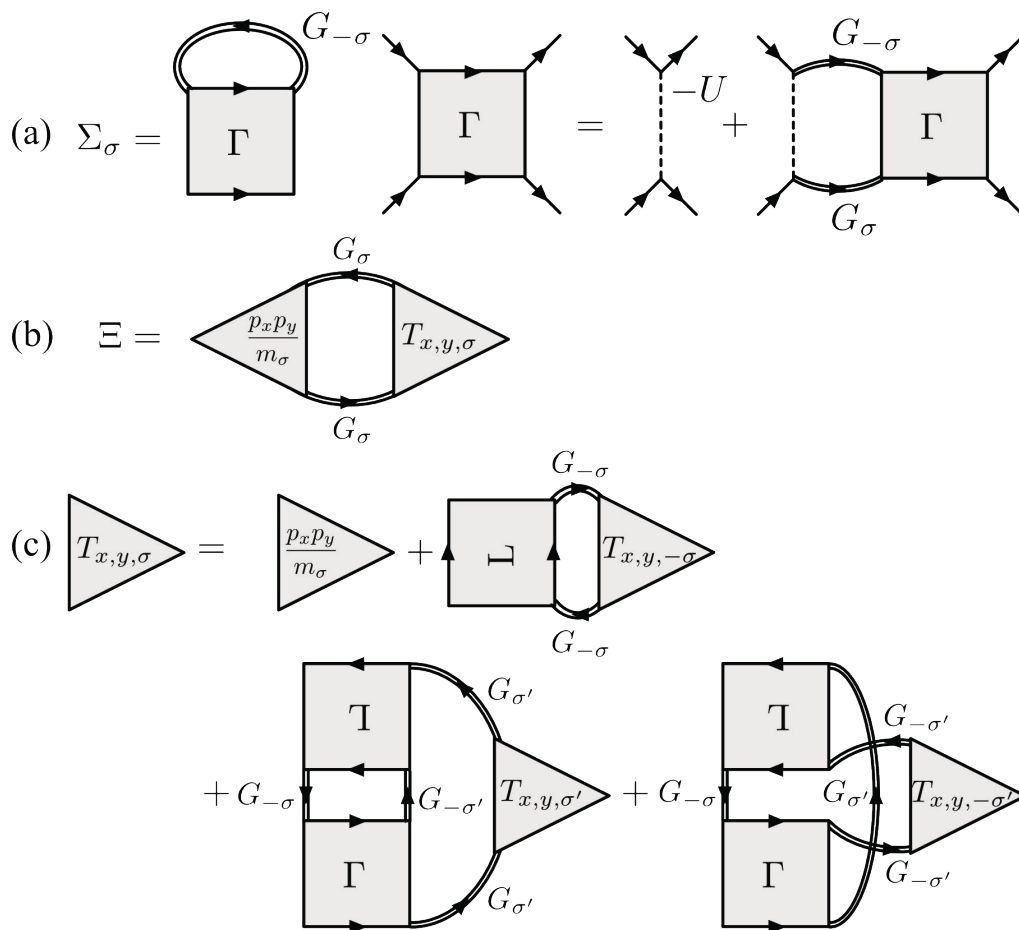


図 2.6 質量インバランスのある場合の自己無撞着 T 行列における (a) 自己エネルギー Σ_σ および多体散乱行列 Γ , (b) 応力テンソル相関関数 Ξ , (c) 頂点関数 $T_{x,y,\sigma}$ のダイアグラム表現。

を与えられた粒子数 N_σ に対し解く。本研究では各成分の粒子数は等しい場合 ($N_L = N_H$) を扱う。また、超流動相転移温度は、質量バランス系のとおり Thouless の判定条件、

$$\Gamma(\mathbf{q} = \mathbf{0}, i\nu_m = 0)^{-1} = 0, \quad (2.56)$$

を式 (2.55) と同時に解くことで決定する。

図 2.7 に $L/H = 0.5$ と $L/H = 40/161$ の場合における超流動相転移温度 T_c と対応する化学ポテンシャル $\mu(T_c)$ を示す。質量インバランスがある場合、Fermi エネルギーは軽い成分のもの $\varepsilon_{F,L} = k_F^2/2m_L$ 、重い成分のもの $\varepsilon_{F,H} = k_F^2/2m_H$ とあるが、図 2.7 ではそれらの平均、

$$\varepsilon_F = \frac{1}{2} [\varepsilon_{F,L} + \varepsilon_{F,H}] = \frac{k_F^2}{2m_r}, \quad (2.57)$$

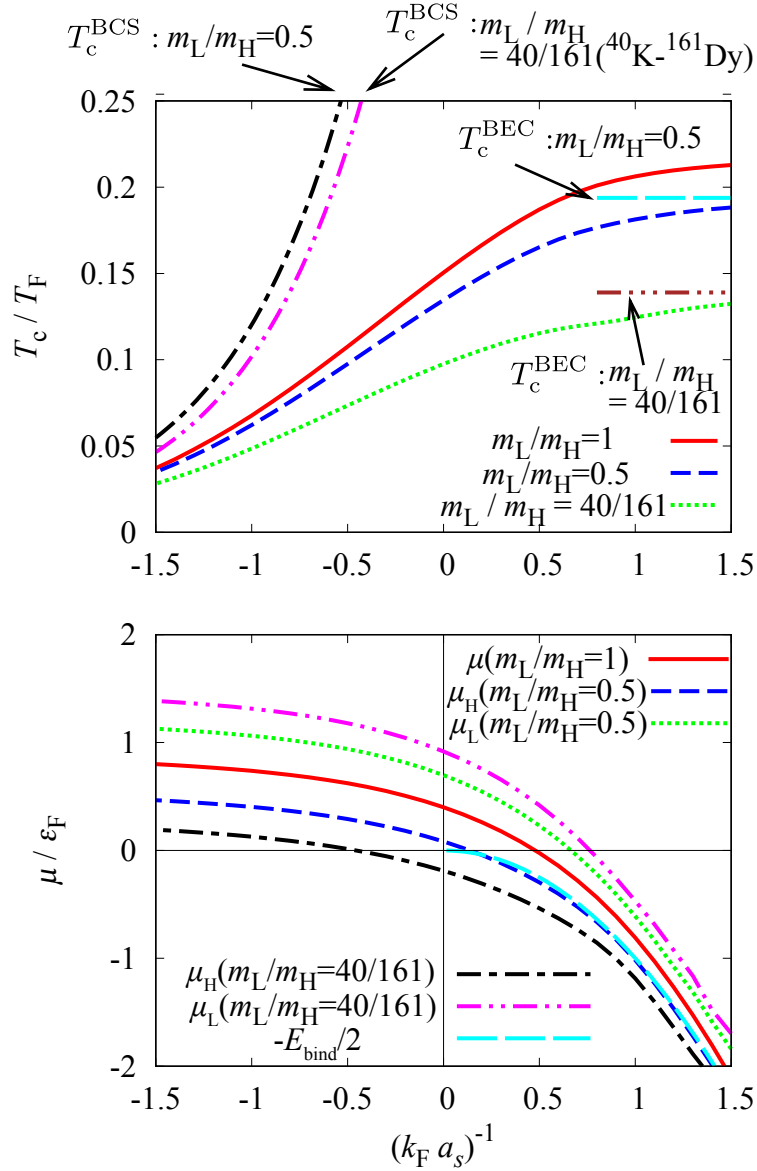


図 2.7 SCTMA で得られた $L/H = 1$, $L/H = 0.5$ および $L/H = 40/161$ の場合の (a) 超流動相転移温度 T_c および (b) 対応する化学ポテンシャル μ_σ 。ここで ϵ_F は式 (2.57) で与えられる“平均化されたフェルミエネルギー”で、 T_F は ϵ_F に対応するフェルミ温度である。

で化学ポテンシャルを、対応する Fermi 温度 $T_F (= \epsilon_F)$ で温度を規格化している。 $L/H = 0.5$ と $L/H = 40/161$ のどちらの場合も、超流動相転移温度 T_c は弱結合領域で平均場理論による結果 [131]、

$$T_c^{\text{BCS}} = \frac{8}{\pi} e^{\gamma-2} \sqrt{\epsilon_{F,L} \epsilon_{F,H}} e^{\frac{\pi}{2} \frac{1}{k_F a_s}}, \quad (2.58)$$

に、強結合領域で理想 Bose 分子の BEC 転移温度 [132]、

$$T_c^{\text{BEC}} = \frac{2\pi}{m_L + m_H} \left(\frac{N}{2\zeta(3/2)} \right)^{2/3}, \quad (2.59)$$

に漸近する。また、図 2.7(b) に T_c での化学ポテンシャル μ_σ を示した。 $\mu_\sigma(T_c)$ は相互作用を強くするに従い単調に減少する。強結合領域では、軽い原子と重い原子が Bose 分子を組み BEC を起こす。軽い原子と重い原子を 1 つずつ系に入れると Bose 分子の束縛エネルギー $E_{\text{bind}} = 1/m_r a_s^2$ だけ系のエネルギーが低下するので、 T_c における化学ポテンシャル $\mu_\sigma(T_c)$ は、

$$\mu_L(T_c) + \mu_H(T_c) = -E_{\text{bind}}, \quad (2.60)$$

に近づいていく。以上のように、SCTMA は質量インバランスの存在の下でも BCS-BEC クロスオーバー現象をよく記述する。

図 2.8 は (a)L/H = 0.5、(b)L/H = 40/161 の場合における粒子数方程式の解の化学ポテンシャル μ_L 、 μ_H である。それぞれの化学ポテンシャルのおおまかな温度相互作用依存性は質量バランス系の場合の図 2.4 と似ているが、質量インバランスを大きくすると軽い成分が値が大きく、重い成分が値が小さくなっていくのが見て取れる。図 2.8 の化学ポテンシャル μ_σ は以下の章で KSS 予想の検証と関連しずり粘性率 η およびエントロピー密度 s を評価する際に用いる。

ずり粘性率を求めるための応力テンソル自己相関関数 $\Xi(i\nu_m)$ は図 2.6(b) で与えられ、

$$\Xi(i\nu_m) = T \sum_{\mathbf{p}, \omega_n, \sigma} \frac{p_x p_y}{m_\sigma} G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n) T_{x,y,\sigma}(\mathbf{p}, i\omega_n, i\omega_n + i\nu_m) G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n + i\nu_m). \quad (2.61)$$

ここで頂点関数 $T_{x,y,\sigma}(\mathbf{p}, i\omega_n, i\omega_n + i\nu_m)$ は図 2.6(c) を満たす：

$$\begin{aligned} T_{x,y,\sigma}(p, p+q) &= \frac{p_x p_y}{m_\sigma} + T \sum_{\mathbf{p}', \omega'_n} \Gamma(p + p' + q) \tilde{T}_{x,y,-\sigma}(p', p' + q) \\ &\quad - T \sum_{\mathbf{q}', \nu'_n} G_{-\sigma}(q' - p) \Gamma(q') \Gamma(q' + q) \\ &\quad \times \sum_{\mathbf{p}', \omega'_n, \sigma'} \left[G_{-\sigma'}(q' - p') \tilde{T}_{x,y,\sigma'}(p', p' + q) \right]. \end{aligned} \quad (2.62)$$

式 (2.62) において、

$$\tilde{T}_{x,y,\sigma}(p', p' + q) = G_\sigma(p') T_{x,y,\sigma}(p', p' + q) G_\sigma(p' + q), \quad (2.63)$$

であり、簡単のため $p = (\mathbf{p}, i\omega_n)$ 、 $q = (0, i\nu_m)$ 、 $p' = (\mathbf{p}', i\omega'_n)$ および $q' = (\mathbf{q}', i\nu'_m)$ と略記した。質量インバランスにより裸の応力テンソルに相当する $p_x p_y / m_\sigma$ の項が成分に依存し、これにより頂点関数 $T_{x,y,\sigma}$ も成分に依存する。

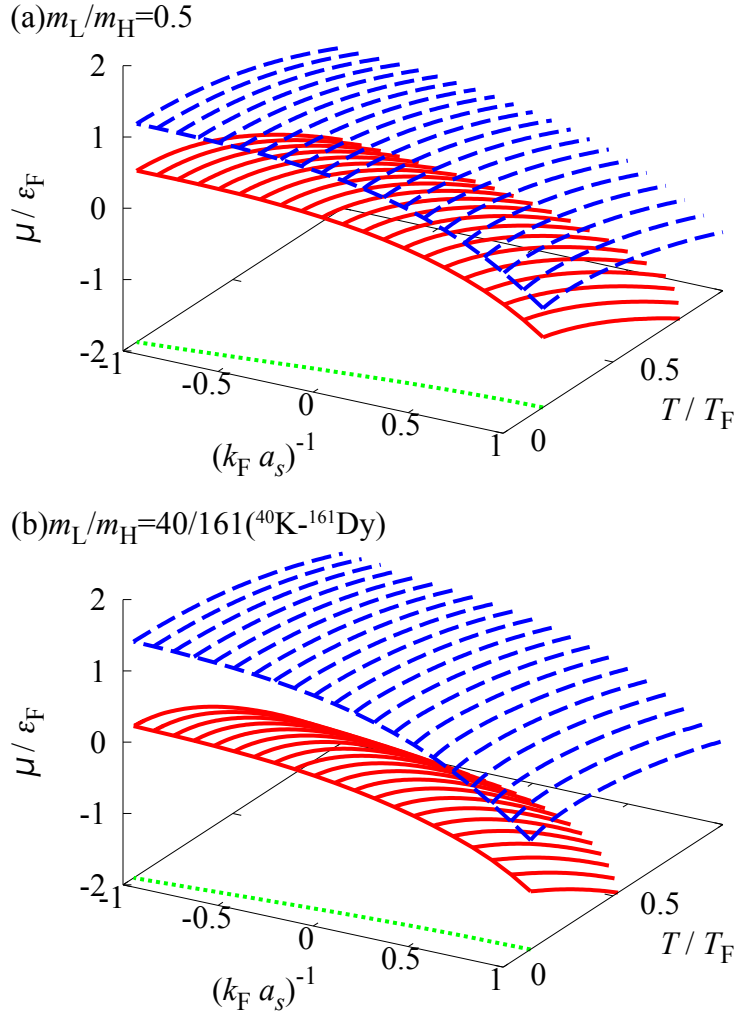


図 2.8 SCTMA で得られた質量インバランスのある場合の Fermi 原子気体の各成分の化学ポテンシャル μ_σ 。質量比はそれぞれ (a) $L/H = 0.5$ および (b) $L/H = 40/161(^{40}\text{K}-^{161}\text{Dy})$ 。破線は軽い成分 L の、実線は重い成分 H の化学ポテンシャルを表す。

応力テンソル相関関数 Ξ が求めれば、解析接続により式 (2.49) から粘り率を求める事ができる。本研究では質量バランス系と同じく Padé 近似を用いて解析接続を行う。ただし、質量インバランス系でも、質量バランス系と同じく 2.4 節で議論した数値計算上の問題点に遭遇したので、2.4 節で用いた処方を質量インバランス系でも用いる。

質量インバランスのある場合でもエントロピー密度を求めるには Tan の圧力関係式、

$$P = \frac{2}{3}E + \frac{C}{12\pi m_r a_s}, \quad (2.64)$$

と化学ポテンシャルの異なる 2 成分混合系に対する熱力学恒等式、

$$s = \frac{1}{T} [P + E - \mu_L N_L - \mu_H N_H], \quad (2.65)$$

を利用する。Tan の圧力関係式において、質量バランス系の場合の原子の質量 m が換算質量の2倍 m_r に置き換わっている。また、コンタクト C は、質量インバランス系においても、運動量分布、

$$n_{\mathbf{p},\sigma} = T \sum_{i\omega_n} G_{\sigma}(\mathbf{p}, i\omega_n), \quad (2.66)$$

の高運動量領域における振る舞い、

$$n_{\mathbf{p},\sigma} \sim \frac{C}{p^4}, \quad (2.67)$$

によって与えられる。尚、質量インバランスがあっても、両成分ともに、高運動量領域では、式(2.67)のように振る舞う。式(2.64)と式(2.65)から、エントロピー密度の公式として、

$$s = \frac{1}{T} \left[\frac{5}{3} E + \frac{C}{12\pi m_r a_s} - \mu_L N_L - \mu_H N_H \right], \quad (2.68)$$

を得る。ここで内部エネルギー及びコンタクトはそれぞれ、

$$E = T \sum_{\mathbf{p}, \omega_n, \sigma} \left[\frac{p^2}{2m_{\sigma}} + \frac{1}{2} \Sigma_{\sigma}(\mathbf{p}, i\omega_n) \right] G_{\sigma}(\mathbf{p}, i\omega_n), \quad (2.69)$$

$$C = -m_r^2 T \sum_{\mathbf{q}, \nu_m} \Gamma(\mathbf{q}, i\nu_m), \quad (2.70)$$

で与えられる。

2.7 2章のまとめ

この章では、本論文で用いる強結合理論について説明し、ずり粘性率 η とエントロピー密度 s の計算方法について説明した。2.1節から2.5節では、質量バランス系に対する定式化を述べた。2.1節では、質量バランス系に対するハミルトニアンについて述べ、2.2節では、自己無撞着 T 行列理論 (SCTMA) について説明した。2.3節では、SCTMA が BCS-BEC クロスオーバー現象を記述する理論であることを、超流動相転移温度 T_c 、および、対応する化学ポテンシャル $\mu(T_c)$ の計算結果から示した。2.4節では、SCTMA の範囲内で、ずり粘性率 η を求める方法について説明した。また、Padé 近似に基づく数値的に解析接続を実行する方法を述べ、その方法を本研究に適用した際に生じた問題点とその解決方法についても述べた。2.5節では、熱力学恒等式に基づいて、エントロピー密度を解析する方法について述べた。2.6節は、2.1節から2.5節の質量バランス系に対する定式化を、質量インバランス系へ拡張した。質量インバランス系においても、SCTMA は

BCS-BEC クロスオーバー現象を記述する理論であることを、 T_c 、および、 $\mu_\sigma(T_c)$ の計算結果から示した。また、SCTMA の枠内で、ずり粘性率やエントロピー密度に対する計算方法についても説明した。

第 3 章

BCS-BEC クロスオーバー領域のずり粘性率

この章では、質量バランス系 ($m_L = m_H$) に対する BCS-BEC クロスオーバー領域のずり粘性率 η について議論し、ずり粘性率 η に強結合効果がどのように現れるかを明らかにする。3.1 節では、弱結合側から中間結合領域におけるずり粘性率について述べる。この領域で見られるずり粘性率の“窪みおよびピーク構造”について詳細に議論する。3.2 節では、中間結合領域におけるずり粘性率を示し、ユニタリ極限の ${}^6\text{Li}$ Fermi 原子気体で行われた実験結果と SCTMA で計算されたずり粘性率との比較を行う。3.3 節では、強結合側のずり粘性率について議論する。この領域のずり粘性率が固く束縛された Bose 分子による寄与で支配されることを指摘する。3.4 節では、ずり粘性率の相互作用依存性を示し、ずり粘性率が小さくなる相互作用領域を明らかにする。さらに、近年行われたずり粘性率の相互作用依存性の実験結果と本研究の計算結果との比較も行う。

3.1 弱結合 BCS 領域におけるずり粘性率

図 3.1 は $T \geq T_c$ の BCS-BEC クロスオーバー領域における質量バランス系 ($m_L = m_H$) のずり粘性率 η の計算結果である。弱結合 BCS 領域から相互作用強度を強くしていくと、 $(k_F a_s)^{-1} \lesssim -0.5$ の弱結合 BCS 領域ではずり粘性率 η は、窪みやピークを持つ非単調な温度依存性を示すが、 $-0.5 \lesssim (k_F a_s)^{-1} \lesssim 0.7$ においては非単調な振る舞いがなくなり、温度を下げるに従い単調に減少する温度依存性を示す事がわかる。 $(k_F a_s)^{-1} \gtrsim 0.7$ の強結合 BEC 領域では、 T_c 近傍の低温では 2 章で説明した数値計算上の問題からずり粘性率が評価できなかったものの、本研究の計算の範囲でも再び窪み構造を持つ非単調な温度依存性を示すようになることまでは分かる。中間結合領域および強結合領域の振る舞いについては次節以降で議論することとし、本節では弱結合領域の η の振る舞いに焦点を当

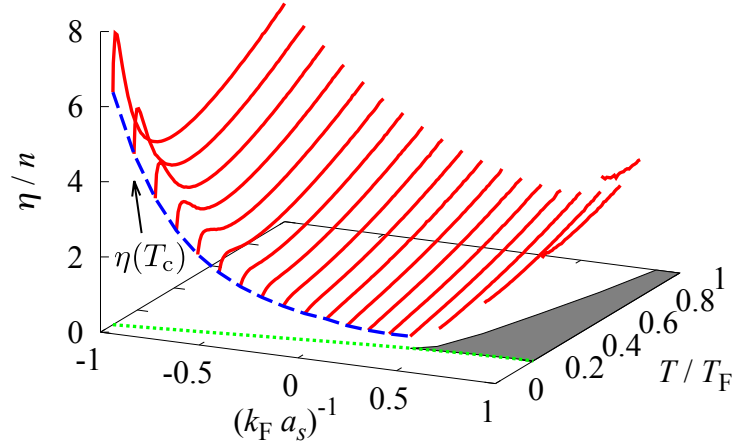


図 3.1 SCTMA に基づき計算された $T \geq T_c$ の BCS-BEC クロスオーバー領域におけるずり粘性率 η 。破線は T_c での η であり、また、 n は粒子数密度である。 $(k_F a_s)^{-1}$ - T 平面において、強結合 BEC 側の影のついた領域は 2 章で述べた問題により η が求められない領域である。

てて議論する。

図 3.2 に弱結合 BCS 領域のずり粘性率 η の温度依存性を示す。また、比較のため、弱結合 BCS 領域で有効な Boltzmann 方程式に基づくずり粘性率も図 3.2 に示してある。なお、図 3.2 の Boltzmann 方程式によるずり粘性率の計算方法は付録 C にまとめてある。図 3.2 より、 $(k_F a_s)^{-1} \lesssim -0.5$ の弱結合 BCS 領域では、温度が Fermi 温度 T_F より低くなると、ずり粘性率 η は最初減少するが、ある温度を境に上昇に転じるという窪み構造を示し、超流動相転移温度 T_c 近傍で η はピークを取り再び減少するという、非単調な温度依存性を持つことが分かる。このずり粘性率 η の“窪みおよびピーク構造”は $(k_F a_s)^{-1} \sim -0.5$ から存在し、少なくとも $(k_F a_s)^{-1} \sim -2.5$ まで存在することを数値計算の範囲で確かめており、広く弱結合領域に存在する構造であると考えられる。

図 3.2(b) に示すように、窪み構造は相互作用のかなり弱い領域 ($(k_F a_s)^{-1} \lesssim -2$) では Boltzmann 方程式でよく記述できることが分かる。ここで用いた Boltzmann 方程式によるアプローチは対形成揺らぎによる効果が考慮されていないことから、この窪み構造は BCS-BEC クロスオーバー現象の対形成揺らぎに因るものではないと考えられる。付録 C にまとめてあるように、Boltzmann 方程式によるずり粘性率は高温で、

$$\eta(T) \propto \begin{cases} T^{3/2} & (T \gg 1/(ma_s^2)), \\ T^{1/2} & (T \ll 1/(ma_s^2)), \end{cases} \quad (3.1)$$

と振る舞い [73, 74]、どちらも温度を下げるに従い減少する。一方、低温の Fermi 縮退領域 ($T \ll T_F$) では Boltzmann 方程式は、

$$\eta(T) \propto T^{-2}, \quad (3.2)$$

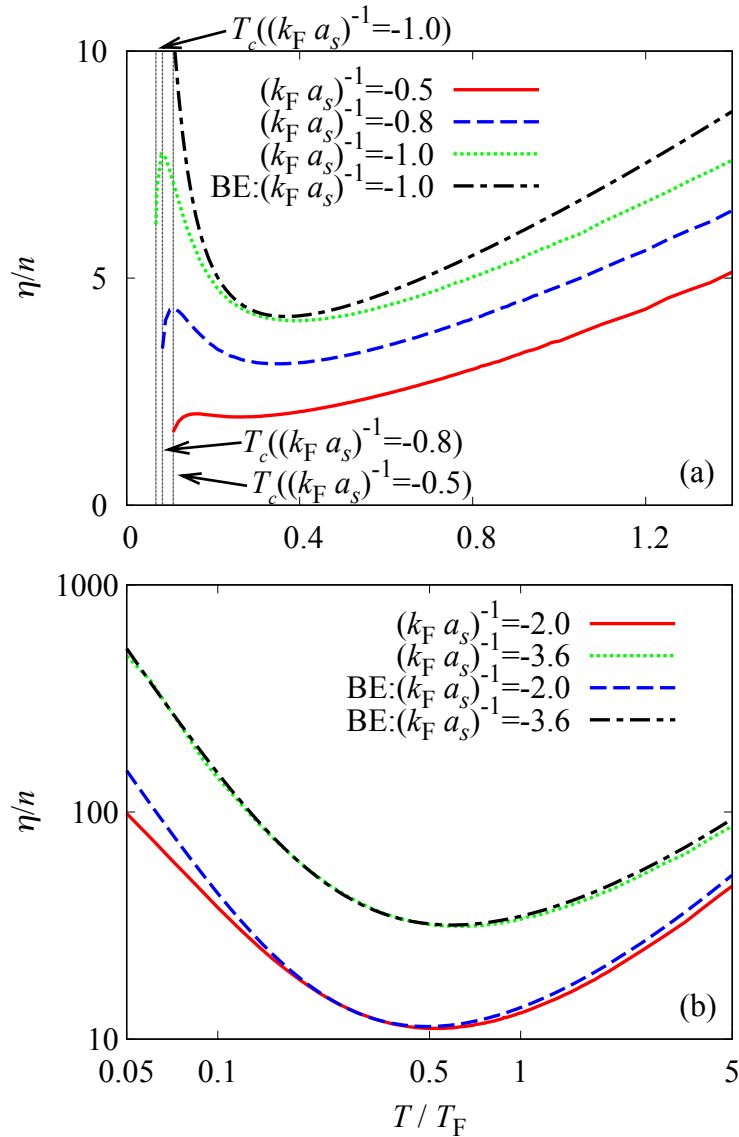


図 3.2 弱結合 BCS 領域 $((k_F a_s)^{-1} \lesssim 0)$ におけるずり粘性率 η の温度依存性。それぞれの図で ‘BE’ で示されている結果は Boltzmann 方程式により得られたものである。(b) では対数スケールを用いている。 n は粒子数密度を表し、 T_F は Fermi 温度である。

のずり粘性率を与える [73, 74]。これら高温、低温の振る舞いは、それぞれ窪み構造を示す温度 ($\equiv T_{\text{dip}}^{\text{BCS}}$) の高温側、低温側の $\eta(T)$ の温度依存性をよく説明する (図 3.2(b) 参照)。

次に、図 3.1 および図 3.2 の、 $(k_F a_s)^{-1} \lesssim -0.5$ の領域に見られる T_c 近傍のピーク構造を考える。図 3.2 に見られるように、Boltzmann 方程式によるずり粘性率はこのピーク構造を説明できず、Boltzmann 方程式のアプローチで無視されていた対形成揺らぎが T_c 近傍で顕著になった結果であると考えられる。実際、図 3.3 に示すように、ずり粘性率がピークを取る温度 T_{peak} は、対形成揺らぎに由来する特徴的温度の一つである擬ギャップ温度 T^* [114] と、弱結合領域でよく似た振る舞いをする。擬ギャップ温度 T^* とは、超

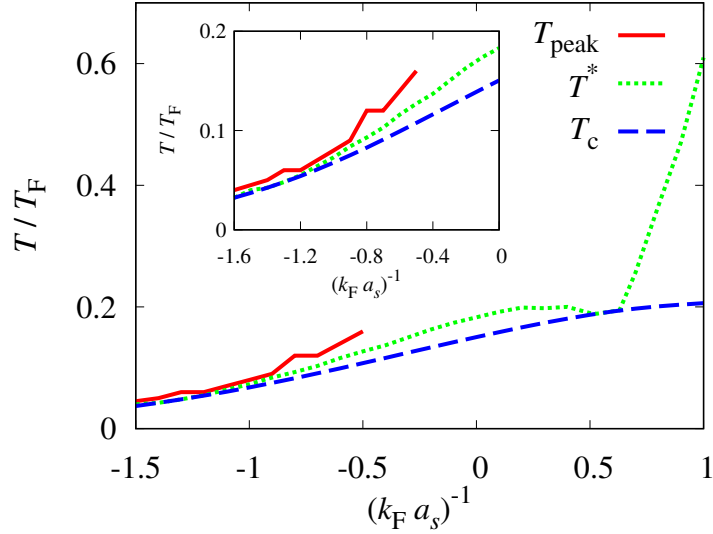


図 3.3 ずり粘性率がピークを取る温度 T_{peak} と擬ギャップ温度 T^* 。挿入図は弱結合 BCS 領域 $((k_F a_s)^{-1} \lesssim 0)$ の拡大図である。

流動相転移温度 T_c 以上であるのにも関わらず、 T^* 以下で一粒子状態密度、

$$\rho(\omega) = -\frac{1}{\pi} \sum_{\mathbf{p}} \text{Im}[G(\mathbf{p}, i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta)], \quad (3.3)$$

に、BCS 状態に類似した窪み構造 (擬ギャップ:pseudogap) が Fermi 準位 $\omega = 0$ 近傍に現れる量子多体現象で、強い対形成揺らぎまたは非凝縮 Cooper 対の形成に由来する。すなわち、擬ギャップ温度近傍では対形成揺らぎが物理量に顕著に影響を与えるが、ずり粘性率のピーク温度は擬ギャップ温度に近い振る舞いをするので、このピーク現象も対形成揺らぎに起因する現象であると考えられる。

擬ギャップ温度 T^* は、相転移温度ではなく、対形成揺らぎによる効果が顕著に物理量に影響を及ぼす目安の温度であり、その定義には任意性がある。そのため、本論文で擬ギャップ温度 T^* をどのように定義したかを簡単に述べる。式 (3.3) の 1 粒子状態密度 $\rho(\omega)$ において、窪み構造が現れることを、 $\omega = 0$ 近傍に $d\rho(\omega)/d\omega < 0$ の領域があることで判定した。対形成揺らぎのない自由粒子の状態密度 $\rho_{\text{free}}(\omega)$ は、

$$\rho_{\text{free}}(\omega) = \frac{m^{3/2}}{4\pi^2} \sqrt{\omega + \mu}, \quad (3.4)$$

であるので、この場合はすべての ω で $d\rho(\omega)/d\omega \geq 0$ である。したがって、窪み構造により $d\rho(\omega)/d\omega < 0$ の領域があることで擬ギャップ現象を捉えられる。図 3.4 にユニタリ極限 $(k_F a_s)^{-1} = 0$ で計算された 1 粒子状態密度を示す。図 3.4 に実線で示されている超流動相転移温度 T_c の 1 粒子状態密度には大きな窪み構造が見られ、一点鎖線で示されてい

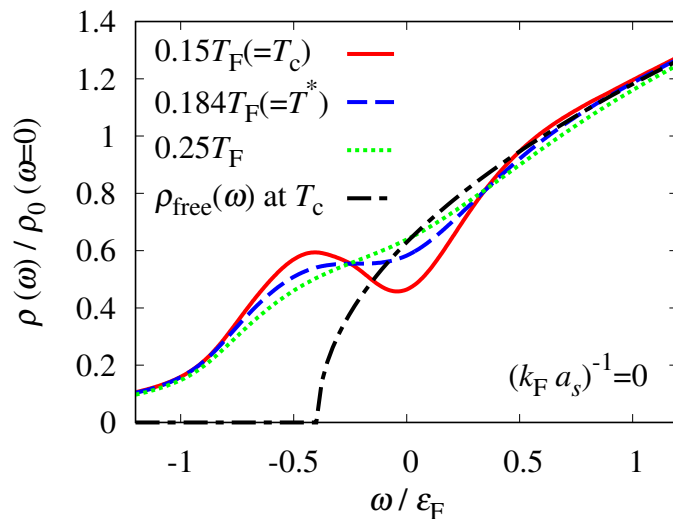


図 3.4 ユニタリ極限 $(k_F a_s)^{-1} = 0$ における 1 粒子状態密度。実線が超流動相転移温度 $T_c (= 0.15T_F)$ 、破線が擬ギャップ温度 $T^* (= 0.184T_F)$ 、点線が $T = 0.25T_F$ の結果である。ここで $\rho_0(\omega = 0)$ は $T = 0$ の Fermi 面上 $\omega = 0$ の自由粒子系の状態密度を表す。また、 T_c における化学ポテンシャル $\mu(T_c)$ を用いた自由粒子系の 1 粒子状態密度 (式 (3.4)) を一点鎖線で示した。

る自由粒子系の 1 粒子状態密度 (式 (3.4)) とは大きく異なる振る舞いを示している。温度を上げて行くと、窪み構造は小さくなっていき、図 3.4 に破線で示されている、上述の判定方法により決定された擬ギャップ温度 T^* で窪み構造が消失する。

T_{peak} 付近の対形成揺らぎがずり粘性率に与える影響を議論するため、ずり粘性率に対する表式 $\eta \sim n l_{\text{mfp}} p_{\text{av}}$ [103] を用いる。ここで n は Fermi 原子の数密度、 l_{mfp} は平均自由行程、 p_{av} は平均運動量である。平均自由行程 l_{mfp} は、準粒子の寿命 τ と、

$$l_{\text{mfp}} \sim v_{\text{av}} \tau, \quad (3.5)$$

と関係付けられる。ここで、 v_{av} は準粒子の平均速度を表す。したがって、ずり粘性率 η は準粒子の寿命 τ に比例する。Fermi 縮退領域では、平均運動量 p_{av} や準粒子の平均速度 v_{av} はそれぞれ、 k_F 、および、 k_F/m 程度であると考えられる。したがって、ずり粘性率 η の振る舞いは、準粒子の寿命 τ によって決まる。 $T \ll T_F$ の Fermi 縮退領域において、

$$\tau \sim \frac{1}{|\Gamma|^2 T^2}, \quad (3.6)$$

と評価される [133]。 T_c より十分高い温度では、多体散乱行列 Γ で与えられる粒子間の有効相互作用は温度にほとんど依存しないので、従来の Fermi 液体論と同様に、

$$\tau \propto T^{-2}, \quad (3.7)$$

を得る。対応するずり粘性率は、式 (3.2) と同様の、 $\eta(T) \propto T^{-2}$ となり $T_{\text{peak}} \leq T \leq T_{\text{dip}}^{\text{BCS}}$ のずり粘性率の温度依存性 $\eta(T)$ を説明する。一方、 T_c の近傍では、対形成揺らぎによって多体散乱行列 Γ が増強され、最終的に T_c において $\Gamma(\mathbf{0}, 0)$ が発散する (Thouless の判定条件 (2.15))。すなわち低温ほど Γ が大きくなるので、対形成揺らぎは T_c に近づくほど準粒子の寿命 τ を短くする。 Γ が温度依存性を有するようになることを $\Gamma(T)$ と示す。結果として、ずり粘性率は、

$$\eta(T) \propto \tau \sim \frac{1}{|\Gamma(T)|^2 T^2}, \quad (3.8)$$

と評価され、 T_c に近づくほど、 $\Gamma(T)$ が大きくなるので、 $\eta(T)$ が小さくなることを説明する。

弱結合側の議論を終える前に、低温でのずり粘性率 η の、Fermi 液体理論で見られるような T^{-2} に比例した振る舞いについてコメントする。本来、Fermi 液体理論は、斥力相互作用する Fermi 粒子系の低温での振る舞いをよく記述する理論である。現在考えている系は“引力”相互作用する Fermi 粒子系ではあるが、Fermi 縮退を起こし、かつ超流動相転移温度から十分離れた対形成揺らぎが強くない温度領域 ($T_{\text{peak}} \lesssim T \lesssim T_{\text{dip}}^{\text{BCS}}$) では、ずり粘性率 η は Fermi 液体理論に“類似した” T^{-2} に比例した振る舞いをする事がわかる。この点で、Fermi 液体理論においては、斥力相互作用の大きさについては特に制限がない一方で、今の場合には、ずり粘性率が T^{-2} に比例した振る舞いは相互作用が十分弱い領域にのみ見られるという違いがある。

3.2 中間結合領域におけるずり粘性率

次に中間結合側のずり粘性率 η の振る舞いについて議論する。図 3.1 および図 3.5 より、 $-0.4 \lesssim (k_F a_s)^{-1} \lesssim 0.6$ の中間結合領域 (BCS-BEC クロスオーバー領域) においては、弱結合 BCS 側で見られたような窪み構造が η の温度依存性に見られない。これは Fermi 原子間にはたらく強い引力相互作用により対形成揺らぎが増大したためであると考えられる。図 3.6 に、ずり粘性率 η が窪みを示す温度 T_{dip} と、ピークを示す温度 T_{peak} を示した。引力相互作用が強くなるにつれ、系は強結合極限の Bose 分子の気体に近づいていくため、Fermi 統計性の効果は弱くなっていく。そのため、図 3.6 のように、 T_{dip} は相互作用を強くするにつれ減少していく。また、 T_{peak} は、相互作用を強くするにつれ対形成揺らぎが増大するので、高くなる。最終的に $(k_F a_s)^{-1} \simeq -0.4$ 程度で、窪みとピークが合流し、窪み構造が消失する。結果として、ずり粘性率 $\eta(T)$ は温度を下げるに従い、 T_c まで単調に減少する。図 3.7 に示すように、ユニタリ領域におけるずり粘性率の温度に対して単調な振る舞いは、ユニタリ極限における ${}^6\text{Li}$ Fermi 気体でも観測されている [40, 101]。また、このユニタリ極限におけるずり粘性率の温度に対して単調な振る舞いは先行

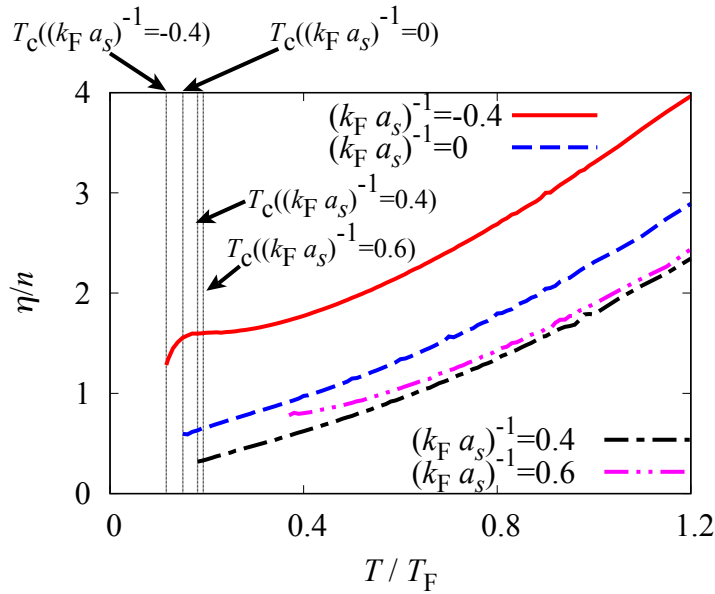


図 3.5 中間結合領域 ($-0.4 \lesssim (k_F a_s)^{-1} \lesssim 0.6$) における SCTMA により計算されたずり粘性率 η の温度依存性。この領域では η は温度が下がると共に単調に減少する。

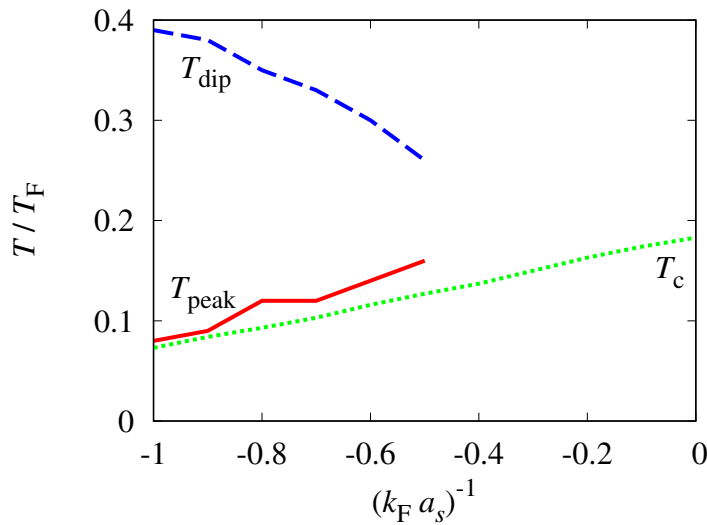


図 3.6 SCTMA により計算されたずり粘性率 η が、弱結合 BCS 側において、ピークを示す温度 T_{peak} (実線) と窪みを示す温度 T_{dip} (破線) の相互作用依存性。点線は超流動相転移温度 T_c である。

研究の理論でも得られている [81, 92]。

図 3.7 における実験結果 [40] に見られる T_c 近傍の隆起構造が SCTMA の計算結果には見られないことにコメントする。図 3.7 に示した実験結果 [101] は実験結果 [40] で得られた実験データを再解析したものであり、この解析では T_c 近傍の隆起は見られない。す

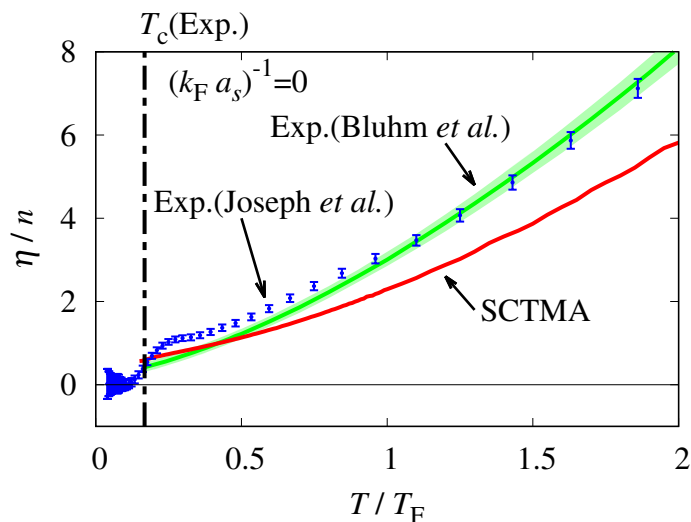


図 3.7 SCTMA により計算されたずり粘性率 η と ${}^6\text{Li}$ Fermi 原子気体による実験結果 [40, 101] の比較。Exp.(Joseph *et al.*) は文献 [40] の、Exp.(Bluhm *et al.*) は文献 [101] の実験結果を表す。 $T_c(\text{Exp.})$ は実験で観測された超流動相転移温度 T_c [59] である。

なわち、実験結果 [40] の T_c 近傍の振る舞いは、現時点ではどのような解析でずり粘性率を実験データから得るかに依存しており、実験的にも未解明の問題である。

図 3.5 において η の相互作用依存性に着目すると、弱結合側 $(k_F a_s)^{-1} = -0.4$ から相互作用を強くしていくと $(k_F a_s)^{-1} = 0.4$ まではずり粘性率は小さくなる傾向になるが、 $(k_F a_s)^{-1} = 0.6$ のずり粘性率は $(k_F a_s)^{-1} = 0.4$ のずり粘性率より大きくなっており、強結合側では相互作用を強くすると再びずり粘性率が增大する事がわかる。この振る舞いは、BCS-BEC クロスオーバー領域において、ずり粘性率 η はユニタリ極限ではなく少し強結合側で最小値が得られるという実験結果 [39] とよく一致する。ずり粘性率の相互作用依存性および実験結果 [39] との具体的な比較は 3.4 節で議論する。

3.3 強結合 BEC 領域におけるずり粘性率

ユニタリ領域よりさらに強結合領域 ($(k_F a_s)^{-1} \gtrsim 0.5$) へ相互作用を強くしていくと、ずり粘性率 $\eta(T)$ は図 3.1 や図 3.8 に示すように、相互作用を強くするとともに増加する傾向を示す。更に、 $(k_F a_s)^{-1} \gtrsim 0.7$ においては、ユニタリ領域のずり粘性率 $\eta(T)$ に見られた単調な温度変化と異なり、図 3.8 に示すようにずり粘性率 $\eta(T)$ の温度変化は非単調な窪み構造を示すようになる。(ここで図 3.8 において T_c の近傍において η が得られていないのは 2 章で述べた数値計算上の問題のためである。) ずり粘性率が窪み

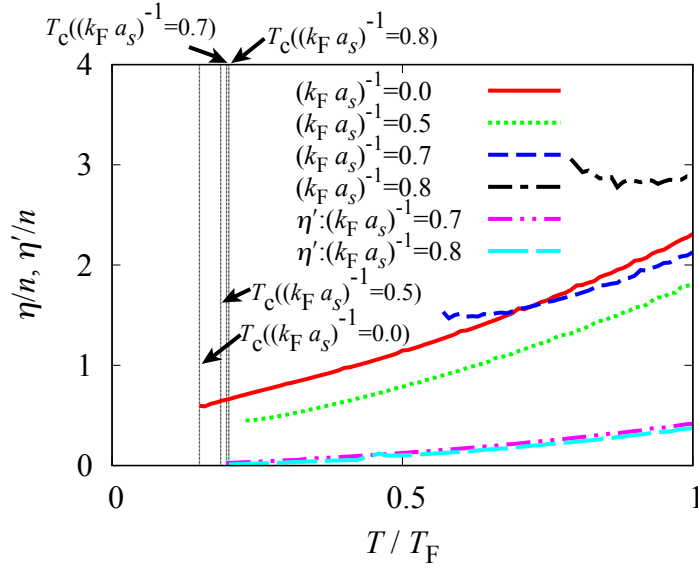


図 3.8 強結合 BEC 領域 $(k_F a_s)^{-1} > 0$ における、SCTMA により計算されたずり粘性率 η の温度依存性。 η' は頂点補正を無視した場合のずり粘性率である。SCTMA のずり粘性率 η において、強結合領域 $(k_F a_s)^{-1} = 0.5, 0.7, 0.8$ において、超流動相転移温度 T_c 近傍の $\eta(T)$ が示されていないのは 2 章で議論した数値解析上の問題点のためである。(これらは図 3.1 の $(k_F a_s)^{-1}-T$ 平面における影領域の部分に相当する。)

を示す温度を $T_{\text{dip}}^{\text{BEC}}$ とすると、図 3.9 に示すように、 $T_{\text{dip}}^{\text{BEC}}$ は 2 粒子の束縛エネルギー $E_{\text{bind}} = 1/(m a_s^2)$ とよく似た振る舞いをする事が分かる。この振る舞いは、BEC 領域の窪み構造が $T \lesssim T_{\text{dip}}^{\text{BEC}}$ で 2 体束縛分子状態を形成することに由来することを示唆している。

強結合 BEC 領域で 2 体束縛状態の Bose 分子がずり粘性率 η にどのように影響するかを議論するため、応答関数 $\Xi(i\nu_l)$ を Bose 分子の自由度を用いて表す事を考える。強結合 BEC 領域 $((k_F a_s)^{-1} \gg 1)$ では、多体散乱行列 $\Gamma(\mathbf{q}, i\nu_l)$ は強く束縛した分子ボソンを記述することが知られている。実際、式 (2.12) の対相関関数 $\Pi(\mathbf{q}, i\nu_m)$ において、SCTMA の Green 関数 G を近似的に自由粒子の Green 関数、

$$G_{0,\sigma}(\mathbf{p}, i\omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}}}, \quad (3.9)$$

に置き換えて評価すると、多体散乱行列は以下のように近似できる [34]:

$$\Gamma(\mathbf{q}, i\nu_m) \simeq \frac{8\pi}{m^2 a_s} \frac{1}{i\nu_m - \xi_{\mathbf{q}}^{\text{B}}}. \quad (3.10)$$

ここで、

$$\xi_{\mathbf{q}}^{\text{B}} = \frac{\mathbf{q}^2}{4m} - \mu_{\text{B}}, \quad (3.11)$$

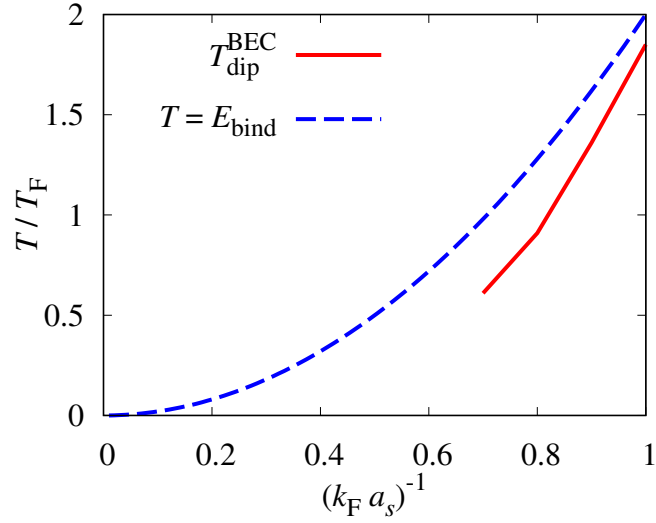


図 3.9 強結合 BEC 領域 $(k_F a_s)^{-1} > 0$ における粘性率 η の窪み温度 $T_{\text{dip}}^{\text{BEC}}$ 。破線は 2 体束縛状態のエネルギー $E_{\text{bind}} = 1/ma_s^2$ と等しい温度を表す。

は質量 $2m$ の分子ボソンの運動エネルギーを、Bose 分子の化学ポテンシャル、

$$\mu_B = 2\mu + E_{\text{bind}}, \quad (3.12)$$

より測ったものである。このように、多体散乱行列は Bose 分子の Green 関数、

$$B_0(\mathbf{q}, i\nu_m) = \frac{1}{i\nu_m - \xi_{\mathbf{q}}^B}, \quad (3.13)$$

に比例し、Bose 分子の自由度を表現していることが分かる。したがって、 $\Xi(i\nu_l)$ を以下の操作で Bose 分子の自由度のみで表す事ができる。

1. 図 2.5 の $\Xi(i\nu_l)$ において多体散乱行列 Γ を Bose 分子の Green 関数とみなす (図 3.10(a) において波線で示す。)。
2. 有効分子間相互作用 U_B (図 3.10(b))、裸の分子頂点関数 $S_{0;x,y}$ および繰り込まれた分子頂点関数 $S_{x,y}$ (それぞれ図 3.10(c)、(d)) を導入する。

以上の操作により、図 3.10(e) のように図 2.5 において AL 型のダイアグラムが Bose 分子の応力テンソル応答関数を含んでいる事がわかる。

図 3.10 の Bose 分子の自由度で書かれた応力テンソル相関関数 Ξ について詳しく説明する。まず、式 (3.13) の自由 Bose 分子の Green 関数 B_0 には分子の寿命が入っておらず、ずり粘性率が評価できないことに注意する。そのため、分子の寿命が入った Bose 分子の Green 関数 $B(\mathbf{q}, i\nu_m)$ を式 (3.10) に倣い、

$$\Gamma(\mathbf{q}, i\nu_m) = \frac{8\pi}{m^2 a_s} B(\mathbf{q}, i\nu_m), \quad (3.14)$$

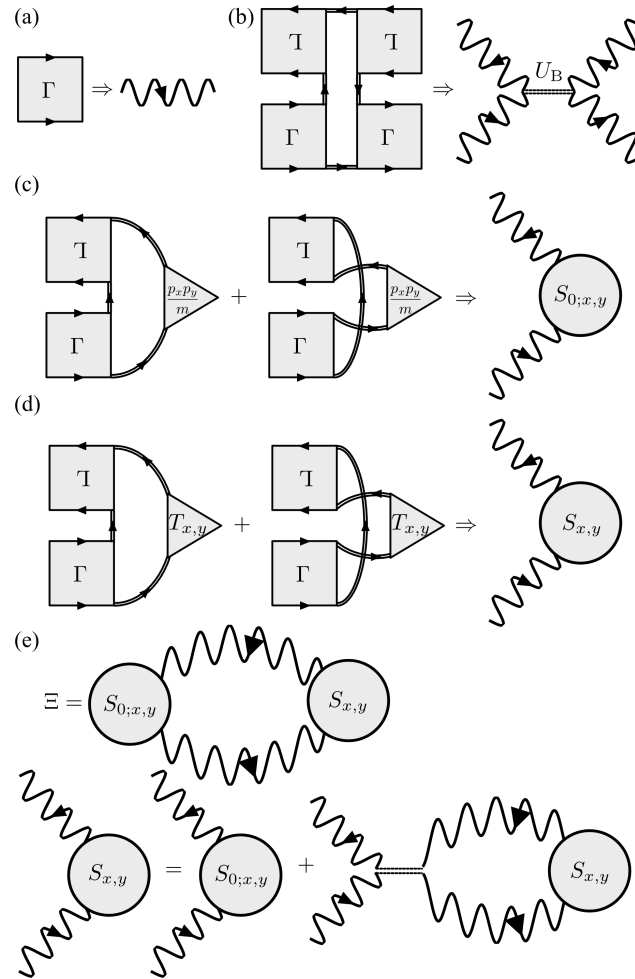


図 3.10 強結合 BEC 領域における応力テンソル相関関数 Ξ の Bose 分子の自由度による表現。この領域では、多体散乱行列 Γ は、(a) の矢印の右側において波線で示す、Bose 分子の Green 関数とみなす事ができる。また、(b) の矢印の左側に示す乖離した 4 つの Fermi 原子 (二重線) により Bose 分子間の有効相互作用 U_B が媒介される。この Bose 分子間の有効相互作用 U_B を、(b) の矢印の右側に示すように、二重点線で表す。さらに、(c) および (d) の矢印の左側において、 Γ の右側にある Fermi 原子および応力テンソル ($p_x p_y / m$ および $T_{x,y}$ と記された三角形) により、分子に対する裸の応力テンソルに対応する、裸の分子頂点関数 $S_{0;x,y}$ および練り込まれた分子頂点関数 $S_{x,y}$ が媒介される。これら頂点関数を (c) および (d) の矢印の右側において、丸で示す。この場合、(e) で表される Bose 分子の応答関数を図 2.5 の AL 型のダイアグラムより導くことができる。

と定義する。SCTMA においては、有効分子間相互作用 U_B は 4 つの Fermi 原子によって媒介される (図 3.10(b))。ここで図 3.10(b) の 4 つの Fermi 原子で表される部分を、再び SCTMA の Green 関数 G を自由粒子の Green 関数 G_0 に置き換えることで評価する

と、付録 D に示すように、

$$T \sum_{\mathbf{p}, i\omega_n} G_0(\mathbf{p}, i\omega_n)^2 G_0(-\mathbf{p}, -i\omega_n)^2 \sim \left(\frac{m^2 a_s}{8\pi} \right)^2 \frac{4\pi a_s}{m}, \quad (3.15)$$

を得る。ここで、図 3.10(b) の多体散乱行列もしくは Bose 分子の運動量 \mathbf{q} および松原周波数 $i\nu_m$ を低運動量低エネルギー極限 $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{0}, i\nu_m \rightarrow 0$ とした。図 3.10(b) を Bose 分子の Green 関数 $B(\mathbf{q}, i\nu_m)$ のみで書き直すと、式 (3.15) は Bose 分子間の相互作用とみなせる。この相互作用は斥力であり、以下のように与えられる [34]:

$$U_B = \frac{4\pi a_B}{M}. \quad (3.16)$$

ここで $M = 2m$ は Bose 分子の質量であり、 $a_B = 2a_s > 0$ は Bose 分子間散乱に関する s 派散乱長である。また、裸の 3 点頂点関数 $S_{0;x,y}$ は以下で与えられる:

$$S_{0;x,y} = -\frac{m^2 a_s}{8\pi} \frac{q_x q_y}{M}. \quad (3.17)$$

ここで式 (3.17) の q は図 3.10(c) の多体散乱行列の運動量 \mathbf{q} に対応する。式 (3.16) と同様に、Bose 分子の応力として、

$$S_{0;x,y} = \frac{q_x q_y}{M}. \quad (3.18)$$

図 3.10(e) より、繰り込まれた分子 3 点頂点関数は、

$$S_{x,y}(\mathbf{q}, i\nu'_m, i\nu_m) = S_{0;x,y}(\mathbf{q}, i\nu'_m, i\nu_m) - \sum_{\mathbf{q}', i\nu''_m} U_B \Gamma(\mathbf{q}', i\nu''_m) S_{x,y}(\mathbf{q}', i\nu''_m, i\nu_m) \Gamma(\mathbf{q}', i\nu''_m + i\nu_m), \quad (3.19)$$

で与えられるが、分子間相互作用 U_B が式 (3.16) のように与えられる場合、 $S_{x,y}$ が $q_x q_y$ に比例するために右辺第 2 項は零となる。これらより、図 3.10(e) で表される Bose 分子の応力テンソル相関関数は以下で与えられる:

$$\Xi(i\nu_m) = -T \sum_{\mathbf{q}, i\nu_m} \frac{q_x q_y}{M} B(\mathbf{q}, i\nu_m) \frac{q_x q_y}{M} B(\mathbf{q}, i\nu_m + i\nu_m). \quad (3.20)$$

BEC 領域においては、ほとんど全ての Fermi 原子が強く束縛した Bose 分子を構成しているため、ずり粘性率は図 3.10(e) の Bose 分子の応力テンソル応答関数が支配的な寄与であると考えられる。

上述のダイアグラムを用いた解析を裏付けするため、図 3.11 に、図 2.5 の最初の項のみを用い、MT 型や AL 型の頂点補正を無視して計算されたずり粘性率 ($\equiv \eta'$) を示す。図 3.11 より、 η' は弱結合 BCS 領域から強結合 BEC 領域まで相互作用を強くするのに従い

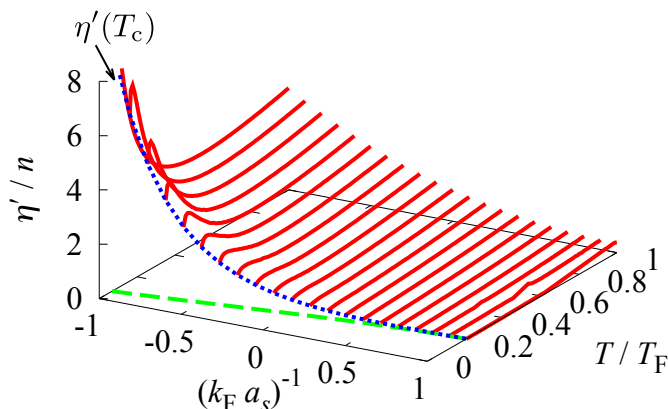


図 3.11 MT 型および AL 型の頂点補正を無視した場合のずり粘性率 η' 。図 3.1 とは異なり、強結合領域においても 2 章で述べた数値計算上の問題点は生じない。

単調に減少する。これは、図 3.1 の頂点補正を含めた η が、相互作用を弱結合領域から強くするにつれ、最初は減少するが、強結合 BEC 領域においては増大に転じることと著しく異なる振る舞いである (図 3.1、または図 3.5, 3.8 参照)。また、図 3.8 にも η' を示したが、強結合 BEC 領域 ($(k_F a_s)^{-1} \geq 0.7$) において、 η' は温度が下がるに従い単調に減少する。この傾向は頂点補正を含めた η の、高温から温度を下げると初めは減少するが $T_{\text{dip}}^{\text{BEC}}$ で窪み構造を示しさらに低温では増大するという温度依存性とは対照的である。強結合 BEC 領域で見られていた η の特徴が、頂点補正を無視すると得られないことから、強結合領域では頂点補正、特に Bose 分子の寄与を担う AL 型の頂点補正が、ずり粘性率の振る舞いを理解する上で非常に重要であることが分かる。

次に、Bose 分子によるずり粘性率 η がどのように与えられるかを調べるため、Bose 分子の寿命 τ_B に着目する。なぜなら、ずり粘性率の表式 $\eta \sim n l_{\text{mfp}} \bar{p}$ を BEC 領域の Bose 分子気体にも用いることにすると、平均自由行程 l_{mfp} は分子の寿命 τ_B と密接な関わりがあるからである。この点に関し、SCTMA は式 (3.16) で与えられる分子間相互作用 U_B の効果を平均場レベルで取り入れていることに注意する [34]。よって、SCTMA においては、分子間相互作用 U_B に由来する分子の寿命 τ_B は全て無視されている。分子の寿命が無限大の時には平均自由行程 $l_{\text{mfp}} \propto \tau_B$ も無限大なので、ずり粘性率 $\eta \sim n l_{\text{mfp}} \bar{p}$ も発散する。したがって、図 3.1 や図 3.8 の有限の $\eta(T)$ は、分子間相互作用 U_B 以外に分子の寿命に寄与する過程が存在することを示唆する。

式 (2.11) の多体散乱行列 $\Gamma(\mathbf{q}, i\nu_m)$ は強結合 BEC 領域で分子ボソンの Green 関数に帰着するため、分子の寿命は対相関関数 $\text{Im}[\Pi(\mathbf{q}, i\nu_m \rightarrow \omega_+)]$ ($\equiv \gamma(\mathbf{q}, \omega)$) から生じる。どのような過程が分子の寿命に寄与するのかを見るため、分子の崩壊レート $\gamma(\mathbf{q}, \omega)$ を、対相関関数に含まれる Green 関数 G を以下の単純な自己エネルギー [51] を用いて近似す

ることで評価する:

$$\begin{aligned}
\Sigma(\mathbf{p}, i\omega_n) &\simeq T \sum_{\mathbf{q}, \nu_m} \Gamma(\mathbf{q}, i\nu_m) G_0(\mathbf{q} - \mathbf{p}, i\nu_m - i\omega_n) \\
&\simeq G_0(-\mathbf{p}, -i\omega_n) \times T \sum_{\mathbf{q}, \nu_m} \Gamma(\mathbf{q}, i\nu_m) \\
&\equiv -\Delta_{\text{pg}}^2 G_0(-\mathbf{p}, -i\omega_n). \tag{3.21}
\end{aligned}$$

ここで、簡単のため SCTMA の Green 関数 G を自由 Fermi 原子のもの G_0 に置き換え、されらに Thouless の判定条件により多体散乱行列の低運動量低エネルギー極限 $\Gamma(\mathbf{0}, 0)$ は T_c 近傍で増大されるため、自由粒子の Green 関数 G_0 において $\mathbf{q} = \nu_m = 0$ と近似した。式 (3.21) において、

$$\Delta_{\text{pg}} = \sqrt{-T \sum_{\mathbf{q}, i\nu_m} \Gamma(\mathbf{q}, i\nu_m)}, \tag{3.22}$$

は擬ギャップパラメーターと呼ばれ [51, 134]、対形成揺らぎが 1 粒子励起に与える影響を記述する。対応する Green 関数 G は、形式的には、BCS 理論における Green 関数の対角成分において、超流動秩序変数 Δ を擬ギャップパラメーター Δ_{pg} に置き換えたもの、

$$G(\mathbf{p}, i\omega_n) = -\frac{i\omega_n + \xi_{\mathbf{p}}}{\omega_n^2 + \xi_{\mathbf{p}}^2 + \Delta_{\text{pg}}^2}. \tag{3.23}$$

と一致する [120, 121]。式 (3.23) を式 (2.12) に代入し ω_n に関する松原周波数の和を実行し、 $i\nu_m \rightarrow \omega + i\delta$ と解析接続を行うことで、分子の崩壊レート $\gamma(\mathbf{q}, \omega)$ として以下を得る:

$$\begin{aligned}
\gamma(\mathbf{q}, \omega \geq 0) &= \frac{\pi}{4} \sum_{\mathbf{p}} \left[1 + \frac{\xi_{\mathbf{q}/2+\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{q}/2+\mathbf{p}}} \right] \left[1 + \frac{\xi_{\mathbf{q}/2-\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{q}/2-\mathbf{p}}} \right] \\
&\quad \times [1 - n_{\text{F}}(E_{\mathbf{q}/2+\mathbf{p}}) - n_{\text{F}}(E_{\mathbf{q}/2-\mathbf{p}})] \delta(\omega - [E_{\mathbf{q}/2+\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}/2-\mathbf{p}}]) \\
&\quad - \frac{\pi}{2} \sum_{\mathbf{p}} \left[1 + \frac{\xi_{\mathbf{q}/2+\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{q}/2+\mathbf{p}}} \right] \left[1 - \frac{\xi_{\mathbf{q}/2-\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{q}/2-\mathbf{p}}} \right] \\
&\quad \times [n_{\text{F}}(E_{\mathbf{q}/2+\mathbf{p}}) - n_{\text{F}}(E_{\mathbf{q}/2-\mathbf{p}})] \delta(\omega - [E_{\mathbf{q}/2+\mathbf{p}} - E_{\mathbf{q}/2-\mathbf{p}}]). \tag{3.24}
\end{aligned}$$

ここで、 $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{p}}^2 + \Delta_{\text{pg}}^2}$ であり、

$$n_{\text{F}}(x) = \frac{1}{\exp(x/T) + 1}, \tag{3.25}$$

は熱平衡 Fermi 分布関数である。

式 (3.24) において、第 1 項目と第 2 項目はそれぞれバンド間励起、バンド内励起と呼ばれ、異なる励起過程による寿命への寄与を表している [135]。バンド間励起は Cooper 対もしくは Bose 分子の破壊によって起こるため、

$$\omega_{\text{th}} = \text{Min}[E_{\mathbf{q}/2+\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}/2-\mathbf{p}}] = 2|\Delta_{\text{pg}}|, \quad (3.26)$$

の閾値エネルギー ω_{th} が励起に必要である。結果として、この項は低エネルギー励起 $\omega \leq \omega_{\text{th}}$ においては分子の崩壊レート $\gamma(\mathbf{q}, \omega)$ に寄与しない。一方、バンド内励起は熱的に励起された対を組んでいない Fermi 原子の散乱であるので、閾値エネルギーは存在しない。BEC 領域においても、束縛分子の熱的な対乖離によって対を組んでいない Fermi 原子が少数ながら存在するので、低エネルギーにおいて分子の崩壊レート $\gamma(\mathbf{q}, \omega)$ はこの過程に支配される。強結合 BEC 領域で超流動相転移温度 T_c 近傍では [31–35]、

$$\mu \rightarrow -E_{\text{bind}}/2 = -1/(2ma_s^2) \ll -\varepsilon_{\text{F}}, \quad (3.27)$$

と与えられるので、強結合 BEC 領域では、

$$E_{\mathbf{p}} \simeq \varepsilon_{\mathbf{p}} + E_{\text{bind}}/2, \quad (3.28)$$

と近似できる。これを用いると、付録 D に示すように分子の崩壊レート $\gamma(\mathbf{q}, \omega \geq 0)$ は、

$$\gamma(\mathbf{q}, \omega \geq 0) \simeq \frac{m^2 \Delta_{\text{pg}}^2}{8\pi|\mu|^2} \left(\frac{\omega}{q}\right) e^{-\frac{m}{2T}\left(\frac{\omega}{q}\right)^2} e^{-\frac{E_{\text{bind}}}{2T}}. \quad (3.29)$$

束縛分子の熱的な対乖離によって対を組んでいない Fermi 原子が存在することは、式 (3.29) において $\exp[-E_{\text{bind}}/(2T)] (\ll 1)$ の熱因子に反映されている。対応する Bose 分子の寿命は、

$$\tau_{\text{B}}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{m^2 a_s}{8\pi} \frac{1}{\gamma(\mathbf{q}, \omega)} = \frac{a_s E_{\text{bind}}^2}{4\Delta_{\text{pg}}^2} \left(\frac{q}{\omega}\right) e^{\frac{m}{2T}\left(\frac{\omega}{q}\right)^2} e^{\frac{E_{\text{bind}}}{2T}}, \quad (3.30)$$

と与えられ、Fermi 原子への熱解離に由来する小さい因子が BEC 領域における分子の長寿命を説明する。

強結合 BEC 領域においては、ほとんど全ての Fermi 原子は固く束縛された分子を形成しているので、ずり粘性率 η は図 3.10(e) の分子の寄与により支配される。長寿命の分子が $\eta(T)$ にどのように影響を与えるのかを簡単に見るため、式 (3.30) の運動量エネルギー依存性を無視した $\tau_{\text{B}} = \lambda e^{E_{\text{bind}}/(2T)}$ で分子の寿命が与えられる Bose 分子を考える。この場合、式 (3.20) に Bose 分子の Green 関数として以下を用いる:

$$B(\mathbf{q}, i\nu_m) = \frac{1}{i\nu_m - \xi_{\mathbf{q}}^{\text{B}} + i\frac{|\nu_m|}{\nu_m} \tau_{\text{B}}}. \quad (3.31)$$

この単純なモデルでは、ずり粘性率として以下を得る:

$$\eta = -\frac{\lambda}{2} e^{\frac{E_{\text{bind}}}{2T}} \sum_{\mathbf{q}} \left(\frac{q_x q_y}{2m} \right)^2 \left(\frac{\partial n_{\mathbf{B}}(\xi_{\mathbf{q}}^{\text{B}})}{\partial \xi_{\mathbf{q}}^{\text{B}}} \right), \quad (3.32)$$

ここで、

$$n_{\mathbf{B}}(x) = \frac{1}{e^{x/T} - 1}, \quad (3.33)$$

は熱平衡 Bose 分布関数である。式 (3.32) と、図 3.9 に示した $T_{\text{dip}}^{\text{BEC}} \sim E_{\text{bind}}$ の結果より、図 3.8 に見られる $T_{\text{dip}}^{\text{BEC}}$ 以下のずり粘性率 $\eta(T)$ の増大は長寿命の Bose 分子が現れたことに由来することが分かる。また、相互作用を強くすると束縛エネルギー E_{bind} が増大するので、式 (3.32) のずり粘性率は大きくなる。これは図 3.1 や図 3.8 に見られたような、強結合領域では相互作用を強くするに従いずり粘性率が増大する振る舞いとよく一致する。

SCTMA で無視されている、分子間の相互作用によるずり粘性率への効果についてコメントする。SCTMA は式 (3.16) で与えられる分子間の有効相互作用 U_{B} による分子間散乱の効果を無視しているが、実際には U_{B} による分子間散乱は分子の寿命に寄与する。また、SCTMA は分子間の相互作用を過大評価していることが知られている。詳細な計算 [136–138] によると、分子間の相互作用による散乱長 a_{B} は、

$$a_{\text{B}} = 0.6a_s, \quad (3.34)$$

で与えられ、これは SCTMA の $a_{\text{B}} = 2a_s$ より小さい。これらの効果を取り入れるのは今後の重要な課題である。分子間散乱の効果を取り入れると、現状の SCTMA の結果に比べて追加の分子の崩壊過程が存在し、寿命が短くなると考えられるので、強結合 BEC 領域では η の大きさが今の計算結果に比べ減少すると考えられる。

3.4 中間結合領域のずり粘性率の相互作用依存性

図 3.12 に η を相互作用強度の関数として示した。図 3.12 より、 η の最小値はユニタリ極限ではなく BEC 側において得られることが分かる。この結果は ${}^6\text{Li}$ Fermi 原子気体による実験結果 [39] と符合する。尚、実験結果はトラップポテンシャルに捕獲された ${}^6\text{Li}$ Fermi 原子気体に対し行われ、また、

$$\frac{3}{N} \int d\mathbf{r} p(\mathbf{r}) = E_{\text{F}}, \quad (3.35)$$

の条件を課して行われた。ここで N はトラップ中の全粒子数、 $p(\mathbf{r})$ はトラップ中の局所圧力、 E_{F} はトラップ中心における Fermi エネルギーである。式 (3.35) の左辺はグランド

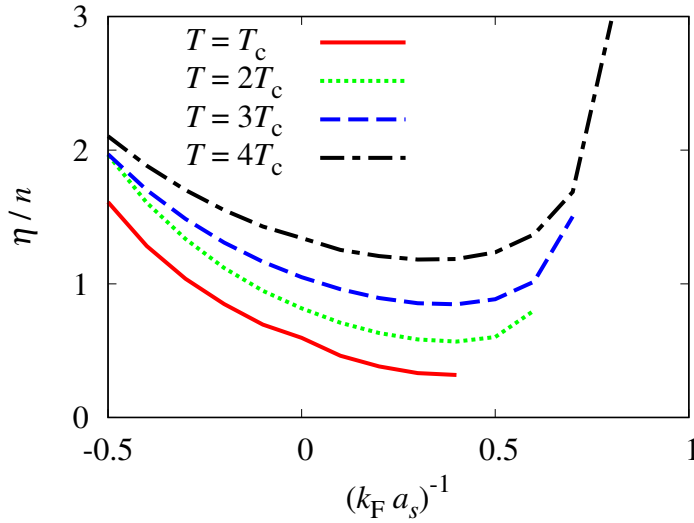


図 3.12 SCTMA のずり粘性率の相互作用依存性。 $T = T_c, 2T_c, 3T_c$ の結果において強結合領域の結果が示されていないのは 2 章に述べた数値計算上の問題のためである。

ポテンシャルの 3 倍に対応する。本研究の一様系の理論はトラップの効果を記述出来ないが、グランドポテンシャルの 3 倍と Fermi エネルギーが等しい、という条件を一様系に適用し、

$$\frac{3}{N}P = \varepsilon_F, \quad (3.36)$$

の条件の下で SCTMA の範囲でずり粘性率 η を計算した結果を図 3.13 に示している。ここで P は一様系の圧力である。図 3.13 は SCTMA の結果が、 $(k_F a_s)^{-1} \sim 0.25$ で極小値を取る実験結果の $\eta(T)$ を、半定量的に説明することを示している。

式 (3.35) や $3P/N = \varepsilon_F$ の条件下では、温度が固定されていないが、同じ温度でユニタリ極限と BEC 領域のずり粘性率 η を比べても、やはり BEC 領域の η の方がユニタリ極限よりも小さいと考えられる。SCTMA において、 $3P/N = \varepsilon_F$ の条件下では、温度は図 3.13 の挿入図のように与えられる。実験が行われた環境に関して温度の情報が与えられていないが、図 3.13 に示した実験結果においても温度が変化していると考えられる。実験状況の温度に対して、図 3.13 の挿入図に示した SCTMA の温度と同じ振る舞いをすると考えると、実験データにおいて BEC 領域の温度はユニタリ領域の温度より高いと考えられる。ここで、SCTMA のずり粘性率 η は $(k_F a_s)^{-1} \lesssim 0.5$ の BEC 側において温度を下げるに従い単調に減少していたことに注意する。よって、例えば $(k_F a_s)^{-1} = 0.25$ において、 η がユニタリ極限と同じ温度で観測されたときは、図 3.13 に示された $(k_F a_s)^{-1} = 0.25$ の値より小さいと考えられる。その値は明らかにユニタリ極限の値より小さいので、 η の最小値はやはり BEC 領域で得られると考えられる。この結

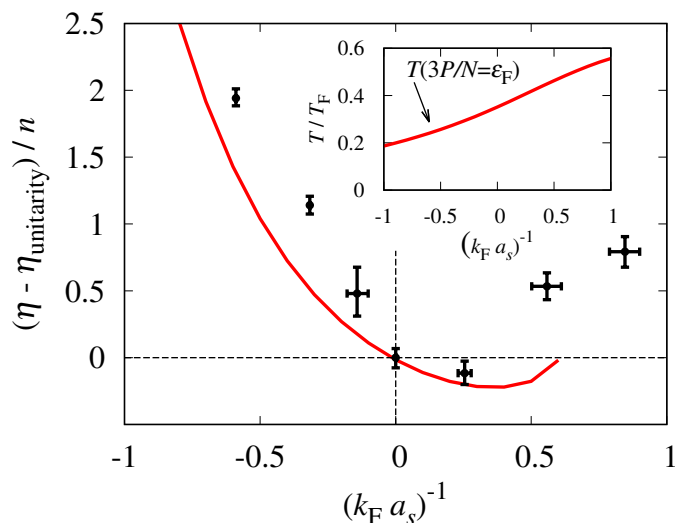


図 3.13 SCTMA のずり粘性率 (実線) と ${}^6\text{Li}$ Fermi 原子気体における実験結果 (エラーバー付きの黒丸)[39] との比較。縦軸はユニタリ極限のずり粘性率を原点としたずり粘性率を表す。実験結果は式 (3.35) の条件の下で得られたトラップ平均されたものである。SCTMA の計算結果は、式 (3.35) の条件の代わりに、 $3P/N = \epsilon_F$ の条件の下で得られたずり粘性率 η を示した。挿入図には SCTMA で $3P/N = \epsilon_F$ の条件を満たす温度を示してある。

果はずり粘性率とエントロピー密度の比 η/s もユニタリ極限ではない領域で最小値を取ることが示唆される。この問題については次章でより詳細に議論する。

3.5 3章のまとめ

この章では、質量バランス系に対する BCS-BEC クロスオーバー領域のずり粘性率 η について議論した。3.1 節では、弱結合領域におけるずり粘性率について述べた。弱結合領域では、Fermi 温度より高温 ($T \gg T_F$) から温度を下げるにつれ、ずり粘性率が低下して行くが、Fermi 温度より低温のある温度で増大に転じ、さらに超流動相転移温度近傍で再び減少に転じるという特徴的な構造を持つことを示した。これらの振る舞いが、高温から順に、古典気体、縮退した Fermi 気体、対形成揺らぎ、と関係していることを指摘した。3.2 節では、中間結合領域のずり粘性率について議論した。中間結合領域では弱結合領域で見られた非単調な振る舞いが見られないことを明らかにした。また、ユニタリ極限で行われた実験結果と SCTMA で計算されたずり粘性率との比較を行った。3.3 節では、強結合領域におけるずり粘性率について述べた。強結合側においては、高温から温度を下げるにつれ、ずり粘性率が低下して行くが、ある温度で増大に転じることを示した。このずり粘性率の増減が切り替わる温度が 2 体束縛状態の束縛エネルギーに近いことを指摘し

た。さらに、固く束縛された Bose 分子のずり粘性率を調べ、低温でのずり粘性率の増大が Bose 分子に由来することを示した。3.4 節では、ずり粘性率の相互作用依存性を示し、ずり粘性率が小さくなる相互作用領域について調べた。さらに、ずり粘性率の相互作用依存性の実験結果とも比較を行い、共に強結合領域でずり粘性率が小さくなる結果を得た。

第 4 章

ずり粘性率とエントロピー密度の比 η/s および質量インバランス効果

この章では、前章で得られた結果を用い、ずり粘性率 η とエントロピー密度 s の比 η/s について調べ、Kovtun-Son-Starinets (KSS) 予想と比較する。さらに、質量インバランスを有する極低温 Fermi 原子気体についても解析し、 η/s の質量インバランスへの依存性について調べる。4.1 節では、質量バランス系のずり粘性率とエントロピー密度の比 η/s について述べ、 η/s の下限値を得るうえでどのような効果が重要なのかを議論する。4.2 節では、質量インバランス系に解析を拡張し、質量インバランスがずり粘性率 η およびエントロピー密度 s にもたらす効果について述べる。4.3 節では、質量インバランスを有する極低温 Fermi 原子気体において、 η/s を求め KSS 予想との比較、検証を行う。

4.1 質量バランス系の BCS-BEC クロスオーバー領域における η/s

図 4.1 に質量バランス系 ($m_L = m_H$) における SCTMA のずり粘性率 η とエントロピー密度 s の比 η/s , η および s を示す。図 4.1(b) は前章で議論したずり粘性率 η の図 3.1 と同じものであり、比較のため再掲してある。温度依存性に着目すると、ずり粘性率 η は、前章で議論したように、弱結合領域、中間結合領域、および、強結合領域それぞれにおいて、特徴的なずり粘性率の温度依存性を示しているが、図 4.1(c) に示すエントロピー密度は、すべての相互作用領域において降温とともに単調減少を示す。また、相互作用依存性については、ずり粘性率 η は弱結合極限および強結合極限に近づくにつれて、理想 Fermi 気体および理想 Bose 気体でのずり粘性率の発散を反映し、増大していく。一方、エントロピー密度 s の相互作用依存性はずり粘性率ほど顕著ではない。以上のことから、BCS-BEC クロスオーバー領域におけるずり粘性率とエントロピー密度の比 η/s の振

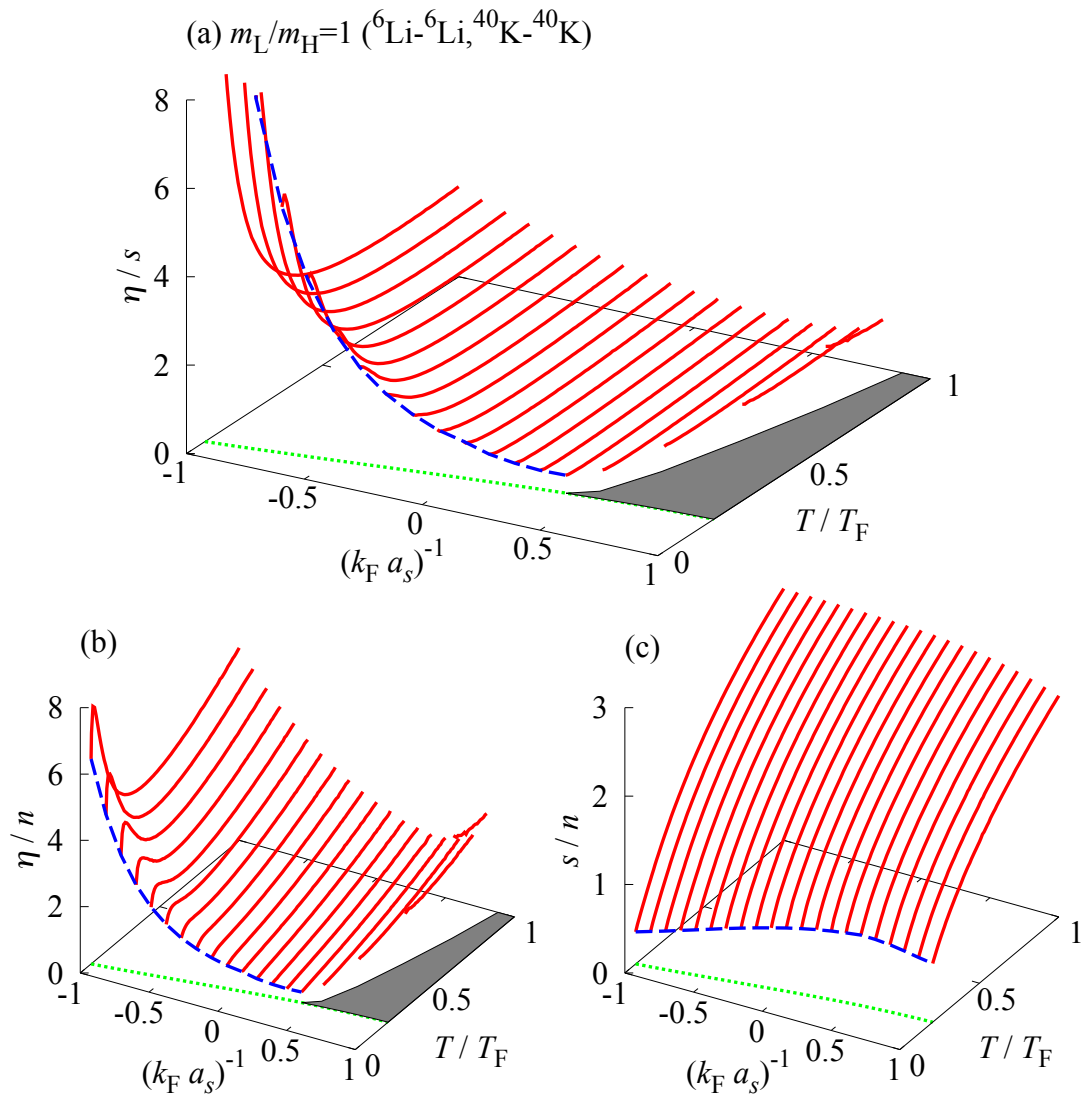


図 4.1 質量バランス系の Fermi 原子気体の正常相における (a) ずり粘性率 η とエントロピー密度 s の比 η/s , (b) η , (c) s . それぞれの図で破線は T_c での結果である。また、(a), (b) において、強結合 BEC 領域の T_c 近傍で結果が示されていないのは、2 章で議論した数値計算上の問題点のためである。これらの図には結果が得られない領域を $(k_F a_s)^{-1}$ - T 平面に影領域で示してある。

る舞いは、大まかには η によって決まる。つまり、 η/s は、弱結合領域から相互作用強度を強くしてにつれ小さくなっていき、中間結合領域で最も小さくなり、強結合領域で再び増大する。

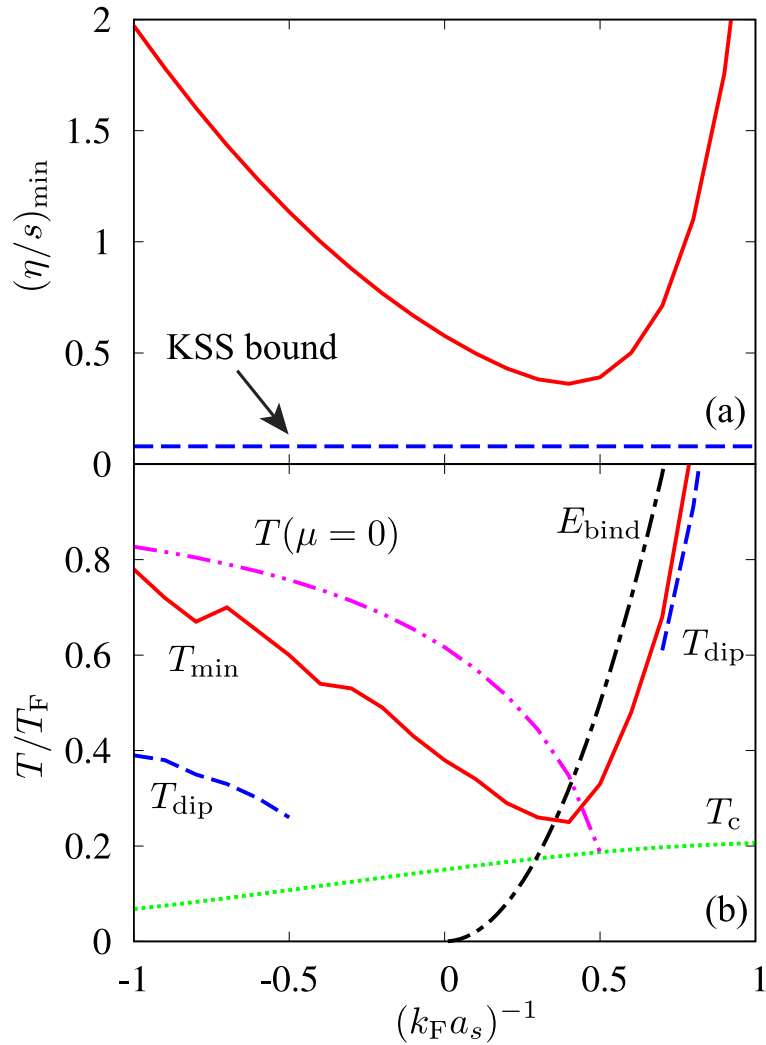


図 4.2 (a) 質量バランス系の Fermi 原子気体の正常相におけるずり粘性率とエントロピー密度の比 η/s の各相互作用における最小値 $(\eta/s)_{\min}$ 。破線 (“KSS bound”) は KSS 予想の下限値 $\hbar/(4\pi k_B)$ である。(b) 各相互作用における $(\eta/s)_{\min}$ が得られる温度 T_{\min} 。破線: ずり粘性率 η が窪み構造を示す温度 T_{dip} 。1 点鎖線: 2 体束縛エネルギーに等しい温度 $T = E_{\text{bind}} = 1/(ma_s^2)$ 。2 点鎖線: Fermi 化学ポテンシャル μ が零となる温度 $T(\mu = 0)$ 。

4.1.1 η/s の最小値

図 4.2(a) に BCS-BEC クロスオーバー領域の各相互作用における η/s の最小値 $(\eta/s)_{\min}$ を示す。また、図 4.2(b) には、各相互作用における $(\eta/s)_{\min}$ が得られる温度 T_{\min} を示す。この図より、極低温 Fermi 原子気体の η/s の下限値 $(\eta/s)_{\text{l.b.}}$ として、

$$\left(\frac{\eta}{s}\right)_{\text{l.b.}} \simeq 4.5 \times \frac{\hbar}{4\pi k_B}, \quad (4.1)$$

が相互作用強度 $(k_F a_s)^{-1} \simeq 0.4$ および $T \simeq 0.25 T_F$ で得られる。ユニタリ極限では、本研究では、

$$\left(\frac{\eta}{s}\right)_{\min}^{\text{unitarity}} \simeq 7.1 \frac{\hbar}{4\pi k_B}, \quad (4.2)$$

であり、また、 ${}^6\text{Li}$ Fermi 原子気体の実験 [101] では、

$$\left(\frac{\eta}{s}\right)_{\min(\text{exp.})}^{\text{unitarity}} \simeq 6.3 \times \frac{\hbar}{4\pi k_B}, \quad (4.3)$$

であるので、ユニタリ極限より少し強結合側で、極低温 Fermi 原子気体の η/s の下限値が得られることが分かる。現在、これに対応する実験は行われていないが、3章の図 3.13 で議論したように、 ${}^6\text{Li}$ - ${}^6\text{Li}$ 極低温 Fermi 原子気体の実験 [39] では、ずり粘性率 η 単体でも、ユニタリ極限より少し強結合側 ($0.25 \lesssim (k_F a_s)^{-1} \lesssim 0.5$) で η の最小値が得られており、ここで得られた結果とは符合している。

4.1.2 η/s の下限値に重要な量子効果

次に、図 4.2(b) に示した 2 つの特徴的溫度、

- (1) Fermi 化学ポテンシャル μ が零となる溫度 $T(\mu = 0)$,
- (2) 2 体束縛状態の束縛エネルギーに等しい溫度 $T = E_{\text{bind}}$,

が T_{\min} と密接に関係していることを説明する。まず、弱結合 BCS 領域で、 $T(\mu = 0)$ が $(\eta/s)_{\min}$ を得るうえで重要であることについて述べる。高温の古典領域から溫度を下げていくと、ずり粘性率 η は減少するが、ある溫度 T_{dip} で窪み構造を示し、 T_{dip} より低温の Fermi 縮退領域では、 η は増大に転じる。この増大は、Pauli の排他原理により準粒子間の散乱が抑制され、準粒子寿命が T^{-2} に比例し、その結果ずり粘性率が T^{-2} に比例するためである。さらに低温の超流動相転移溫度 T_c 近傍では、対形成揺らぎがずり粘性率の低下をもたらすが、低温の s が非常に小さいため、この溫度領域での η/s は非常に大きい。以上の議論より、弱結合 BCS 領域では、 T_{\min} は T_{dip} とよく似た振る舞いをする事がわかる。一方で、Pauli の排他律は、化学ポテンシャル μ が正である $T(\mu = 0)$ 以下の Fermi 縮退領域でのみはたらく。したがって、 $T_{\text{dip}} < T(\mu = 0)$ の関係がある。

T_{\min} の弱結合 BCS 領域から BCS-BEC クロスオーバー領域への相互作用依存性に着目すると、エントロピー密度 s は相互作用の大きさにあまり依存しないので、図 4.2(b) に示すように、 T_{dip} および $T(\mu = 0)$ とよく似た振る舞いをする。ただし、 η/s の分母のエントロピー密度 s が、降温に対し単調減少の溫度依存性を示すため、 $T_{\min} > T_{\text{dip}}$ である。相互作用を強くしていくと、 $T(\mu = 0)$ は $(k_F a_s)^{-1} \simeq 0.5$ で T_c に達する。そのため、 T_{\min} は $(k_F a_s)^{-1} \simeq 0.5$ 近傍で T_c に非常に近くなる。BCS-BEC クロスオーバー領域で

は、相互作用強度を強くしていくと、対形成揺らぎが強くなり準粒子の寿命が短くなるので、 $\eta/s(\propto \tau)$ が小さくなっていく。結果として、 $(\eta/s)_{\min}$ も、弱結合 BCS 領域から相互作用を強くしていくと小さくなる。

次に強結合 BEC 領域を考える。この領域では、温度が $T = E_{\text{bind}}$ 以下になると、2 体束縛状態の Bose 分子の形成が、分子の乖離より優勢になり、Bose 分子が系の性質を支配するようになる。3 章で議論したように、分子の寿命 τ_B は非常に長く、対応するずり粘性率 $\eta(\propto \tau_B)$ も非常に大きくなる。そのため、 $T \gg E_{\text{bind}}$ の高温から温度を下げていくと、前章で指摘したように、束縛エネルギー E_{bind} 付近の温度 (T_{dip}) で窪み構造をとる。また、強結合 BEC 領域でも、エントロピー密度 s の相互作用依存性は η のそれに比べ弱い。結果、 T_{\min} は図 4.2(b) のように $T = E_{\text{bind}}$ に近い温度で得られる。束縛エネルギーは $E_{\text{bind}} = 1/(ma_s^2)$ で与えられるので、ユニタリ極限 ($(k_F a_s)^{-1} = 0$) に近づくほど束縛エネルギーは小さくなる。したがって、強結合領域からユニタリ極限に相互作用を弱くしていくと、 T_{\min} もやはり小さくなっていく。同時に、3 章で議論したように、Bose 分子間の相互作用がユニタリ極限に近づくほど強くなることや、分子の崩壊が顕著になっていくことから、Bose 分子のずり粘性率 η への寄与は小さくなる。結果として、 $(\eta/s)_{\min}$ も、強結合 BEC 領域から相互作用を強くしていくと小さくなる。

以上の弱結合 BCS 領域および強結合 BEC 領域における議論を合わせると、ずり粘性率とエントロピー密度の比 η/s の下限値 $(\eta/s)_{\text{l.b.}}$ は、

$$T(\mu = 0) \simeq E_{\text{bind}}, \quad (4.4)$$

が満たされた場合に得られると期待できる。実際、図 4.2(b) では、式 (4.4) が実現している相互作用 $(k_F a_s)^{-1} = 0.4$ で $(\eta/s)_{\text{l.b.}}$ が得られている。

KSS 予想の右辺に現れている \hbar は、量子効果の現れであることを意味するが、上述の 2 つの効果、Pauli の排他律および 2 体束縛状態の形成は、ともに量子効果である。弱結合 BCS 領域で T_{\min} を決めていた、Pauli の排他律は、もちろん量子統計性の帰結である。また、2 体束縛状態の形成も、束縛エネルギーが \hbar を明示すると $\hbar^2/(ma_s^2)$ と与えられることから、量子効果の一つであることが分かる。よって、少なくとも極低温 Fermi 原子気体においては、これら 2 つの効果は $(\eta/s)_{\text{l.b.}}$ を得るうえで重要な量子効果であると言える。これら 2 つは、Pauli の排他律は弱結合 BCS 領域で Fermi 原子の寿命を、2 体束縛状態の形成は強結合 BEC 領域で Bose 分子の寿命を、それぞれ長くするという効果をもたらす。そのため、ずり粘性率 η は低温で増大するので、 η/s の温度依存性に窪み構造をもたらす。このことは、量子効果により η/s に下限が現れるという、KSS 予想の主張と符合する。

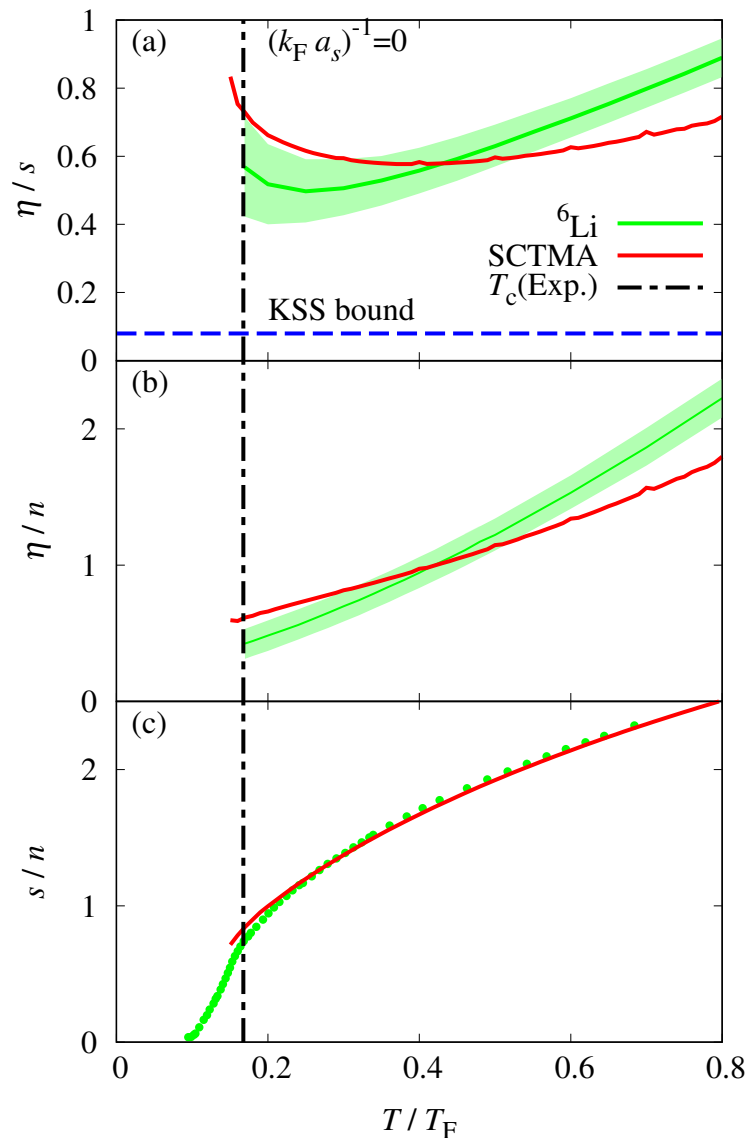


図 4.3 (a)SCTMA で計算されたずり粘性率 η とエントロピー密度 s の比 η/s と、質量バランス系である ${}^6\text{Li}$ - ${}^6\text{Li}$ Fermi 原子気体の η/s の実験結果 [101] の比較。(b)、および、(c) はそれぞれ、(a) に対応するずり粘性率 η およびエントロピー密度 s の理論と実験との比較である。

4.1.3 実験および量子モンテカルロ計算との比較

図 4.3 に、SCTMA により計算されたずり粘性率とエントロピー密度の比 η/s と、近年 ${}^6\text{Li}$ - ${}^6\text{Li}$ 極低温 Fermi 原子気体で行われた実験結果の η/s [101] との比較を示す。図 4.3(a) に示すように、SCTMA と実験結果の η/s はよく似た振る舞いをし、特に、共に T_c 近傍で窪み構造を示す。ただし、 η/s が窪みを示す温度は、SCTMA では $T \simeq 0.4T_F$ であるが、実験結果では $T \simeq 0.3T_F$ である。図 4.3(b)、および、(c) に (a) に対応するずり粘性

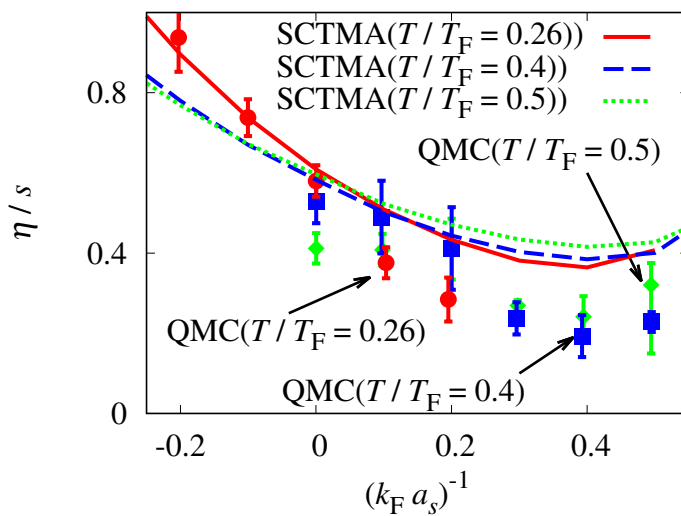


図 4.4 SCTMA によるずり粘性率 η とエントロピー密度 s の比 η/s (実線) と、量子モンテカルロ計算 [99] による η/s (エラーバー付きの点) の比較。 $T = 0.26T_F$ の SCTMA のデータが $(k_F a_s)^{-1} \simeq 0.5$ までしか示されていないのは図 4.1 に示した影領域に入るためである。

率 η およびエントロピー密度 s を示すが、SCTMA のエントロピー密度 s はよく実験結果を再現するので、この窪み温度の違いはずり粘性率の詳細な温度依存性の違いに起因することが分かる。

現在、ずり粘性率とエントロピー密度の比 η/s はユニタリ極限以外では測定されていないものの、前述したように、 ${}^6\text{Li}$ - ${}^6\text{Li}$ 極低温 Fermi 原子気体の実験 [39] よりずり粘性率 η がユニタリ極限より少し強結合側 ($0.25 \lesssim (k_F a_s)^{-1} \lesssim 0.5$) で最小値を取ることが示されており、我々の予言と符合する。また、 $(\eta/s)_{\text{l.b.}}$ がユニタリ極限以外で得られるということは、近年量子モンテカルロ計算 [99] においても得られており、図 4.4 に SCTMA と量子モンテカルロ計算の η/s の比較を示す。SCTMA および量子モンテカルロ計算の結果は、共に、 $(k_F a_s)^{-1} \simeq 0.4$ で η/s の最小値が得られることを示している。

4.2 ずり粘性率 η およびエントロピー密度 s への質量インバランス効果

次に、質量インバランスを有する極低温 Fermi 原子気体 ($m_H > m_L$) に対し、ずり粘性率 η とエントロピー密度 s の比 η/s を議論する。図 4.5 に質量インバランスがある場合の BCS-BEC クロスオーバー領域におけるずり粘性率 η とエントロピー密度 s の比 η/s を示す。また、対応するずり粘性率 η とエントロピー密度 s も図 4.5 に示してある。ここ

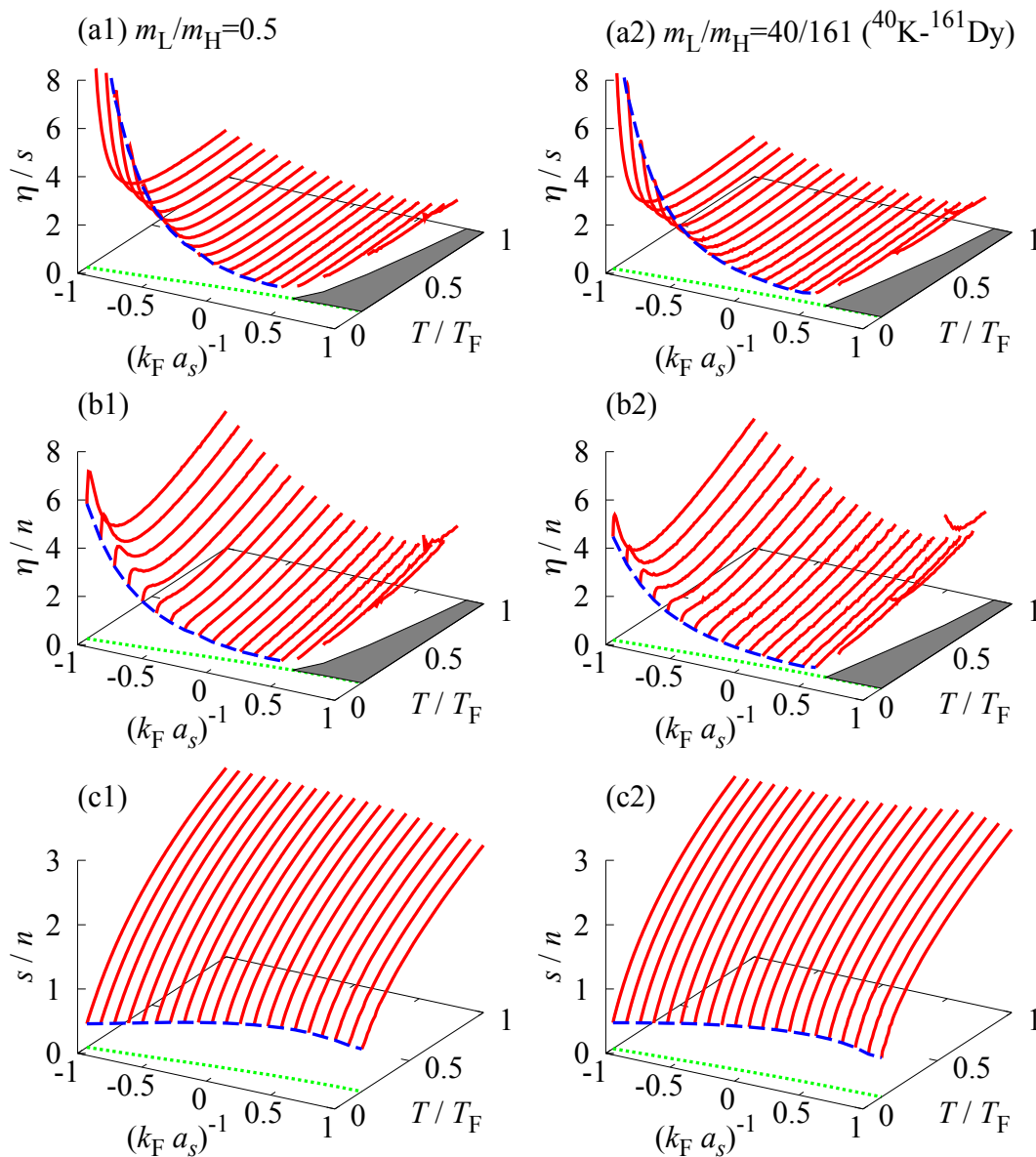


図 4.5 質量インバランスを有する極低温 Fermi 原子気体の BCS-BEC クロスオーバー領域における (a) ずり粘性率 η とエントロピー密度 s の比 η/s , (b) η , (c) s . (i1), (i2) ($i=a,b,c$) はそれぞれ、 $m_L/m_H = 0.5$ と $m_L/m_H = 40/161$ (^{40}K - ^{161}Dy) の質量比に対応する結果である。 $(k_F a_s)^{-1}$ - T 平面の点線は超流動相転移温度 T_c を表し、破線は T_c における結果を表す。横軸の温度は、式 (4.7) で与えられる“平均化された Fermi 温度”で規格化されている。また (a) および (b) の $(k_F a_s)^{-1}$ - T 平面の影領域は 2 章で議論した数値計算上の問題によりずり粘性率 η が求められない領域を示す。

で、質量インバランスがある場合、軽い質量 m_L を持つ成分の Fermi 温度、

$$T_{F,L} = \frac{k_F^2}{2m_L}, \quad (4.5)$$

と、重い質量 m_H を持つ成分の Fermi 温度、

$$T_{F,H} = \frac{k_F^2}{2m_H}, \quad (4.6)$$

が異なる。このため、図 4.5 では、温度は“平均化された Fermi 温度”、

$$T_F = \frac{1}{2} [T_{F,L} + T_{F,H}] = \frac{k_F^2}{2m_r}, \quad (4.7)$$

で規格化されている。また、質量インバランス系を考えているが、粒子数は各成分で同数の場合 ($N_L = N_H$) を考えているので、全粒子数密度 $n (= n_L + n_H)$ は質量バランス系と同じである。したがって、図 4.5(b), (c) でずり粘性率 η およびエントロピー密度 s の規格化に用いられている n は質量比によって変わらない。また、Fermi 波数 $k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$ も質量比によって変わらない。

4.2.1 BCS-BEC クロスオーバー領域における η および s の振る舞い

図 4.5 は、質量インバランス系であっても、 η 、 s の大まかな振る舞いは質量バランス系の場合 (図 4.1) とよく似ていることを示している。実際、図 4.5 より、質量インバランス系であっても、質量バランス系の場合と同様の以下の特徴があることが分かる:

- (1) エントロピー密度 s は、すべての相互作用強度において、温度に対して単調に減少する。さらに、 s の相互作用依存性はあまり顕著ではない。
- (2) ずり粘性率 η の相互作用依存性に関し、弱結合 BCS 領域および強結合 BEC 領域において増大する。
- (3) ずり粘性率 η の温度依存性に関し、弱結合領域で“窪みおよびピーク構造”を、中間結合領域で単調減少の温度依存性を、強結合領域で窪み構造を示す。

これら (2)、(3) の類似性より、質量インバランス系のずり粘性率の特徴に対しても、質量バランス系と同じ解釈が適用できると考えられる。すなわち、ずり粘性率 η は以下の特徴があると考えられる:

- (i) 高温極限では、古典気体の振る舞いを反映し、 $\eta \propto T^\kappa$ (κ は正の定数) と振る舞う。なお、質量バランス系では、付録 C に示したように、 $0.5 \lesssim \kappa \lesssim 1.5$ である。
- (ii) 弱結合 BCS 領域の低温では、Pauli の排他律により準粒子間散乱が弱められ、準粒子寿命は T^{-2} に比例するようになり、結果としてずり粘性率 η も T^{-2} に比例するようになる。
- (iii) 弱結合 BCS 領域の超流動相転移温度 T_c 近傍では、対形成揺らぎの増大により、温度を下げるに従い平均自由行程 l_{mfp} が短くなり、ずり粘性率 η も減少する。

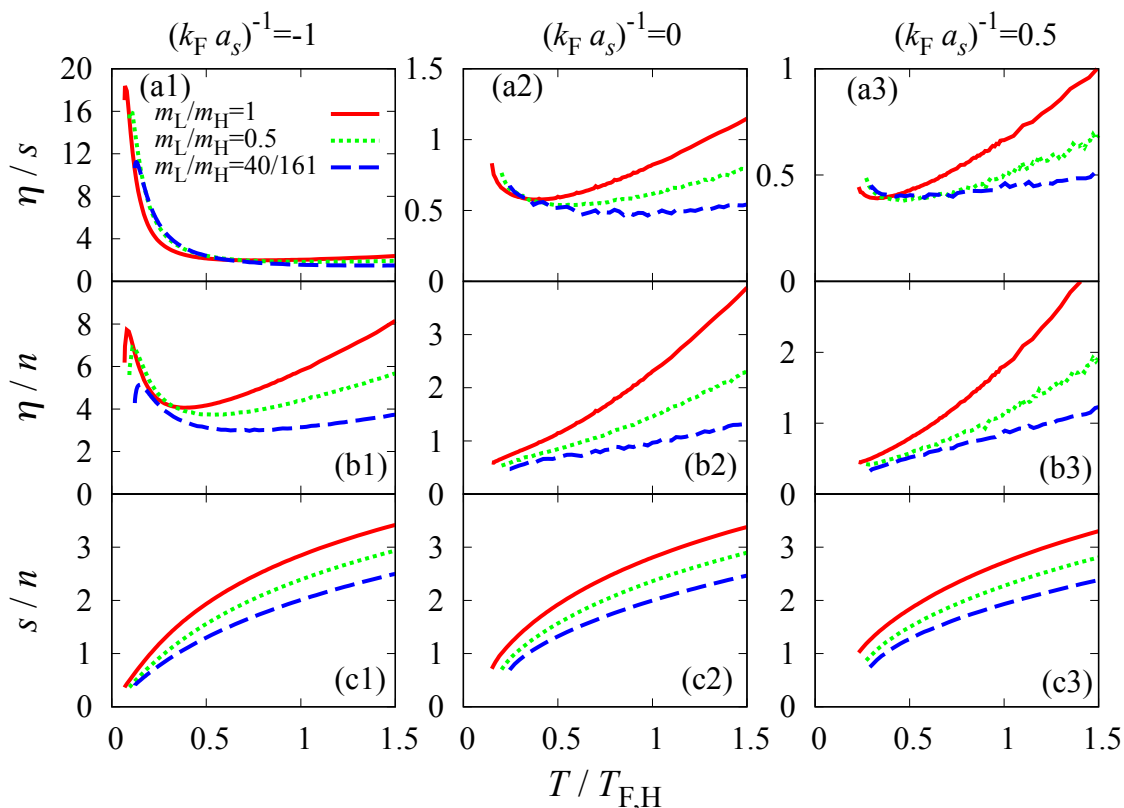


図 4.6 質量バランス系 ($m_L/m_H = 1$) および質量インバランス系 ($m_L/m_H = 0.5, 40/161$) の (a) ずり粘性率 η とエントロピー密度 s の比 η/s , (b) η , (c) s の温度依存性。(i1), (i2), (i3) ($i=a, b, c$) はそれぞれ、相互作用強度が弱結合 BCS 領域 ($(k_F a_s)^{-1} = -1$)、ユニタリ極限 ($(k_F a_s)^{-1} = 0$)、強結合 BEC 領域 ($(k_F a_s)^{-1} = 0.5$) の結果である。横軸の温度は重い成分の Fermi 温度 $T_{F,H}$ で規格化されている。この場合、 $T = T_{F,L}$ の温度は、 $T_{F,L}/T_{F,H} = m_H/m_L$ であるので、 $m_L/m_H = 0.5$ の場合 $T = 2T_{F,H}$, $m_L/m_H = 40/161$ の場合 $T = (161/40)T_{F,H} \sim 4T_{F,H}$ である。

(iv) 強結合 BEC 領域では、2 体束縛状態の形成が起こり、低温でずり粘性率が增大する。

以上の議論より、 η 、 s 、 η/s とともに、大まかな振る舞いは質量インバランスによらずに同じであるが、図 4.5 や図 4.6 が示すように、定量的には質量比依存性を有する。次に、質量インバランスが η 、 s に及ぼす影響について述べる。

図 4.6 に質量バランス系および質量インバランス系のずり粘性率 η とエントロピー密度 s の比 η/s の温度依存性を弱結合領域、ユニタリ極限および強結合 BEC 領域において示す。尚、この図では、温度は重い質量の Fermi 温度 $T_{F,H}$ (式 (4.6)) で規格化されている。この規格化は、重い成分の質量 m_H を固定し、軽い成分の質量 m_L を軽くしていくことによって質量比 m_L/m_H を調整していることに相当し、質量インバランスの影響が議論しやすい。図 4.6 より、軽い成分の質量を軽くし、質量比 m_L/m_H を小さくしていくと、ずり

り粘性率 η およびエントロピー密度 s はともに小さくなっていくことが分かる。

4.2.2 ずり粘性率 η に対する質量インバランス効果

まず、弱結合側のずり粘性率 η の質量インバランス効果について議論する。弱結合領域で、温度 T が $T_{F,L}$ より少し小さく、 $T_{F,H}$ より十分大きい (図 4.6 において $T/T_{F,H} \gg 1$) とき、軽い成分は Fermi 縮退領域にあるが、重い成分は古典領域にある。この場合、質量バランス系の Fermi 温度近傍に比べ、Fermi 縮退により散乱が抑制される効果である、Pauli ブロッキング効果は弱い。そのため、平均自由行程は短くなり、ずり粘性率 η は低下する。この傾向は図 4.6 の高温領域に見てとれる。

弱結合領域で $T \lesssim T_{F,H}$ の場合、軽い成分および重い成分はともに Fermi 縮退にある。また、 $T \ll T_{F,L}$ なので軽い成分はすでに深く Fermi 縮退を起こしている。結果として、準粒子散乱に対する Pauli ブロッキング効果は、質量バランス系の場合に比べ顕著になる。そのため、Pauli ブロッキングに由来するずり粘性率の温度依存性に見られる窪み温度が、質量インバランスを大きくすると上昇すると考えられる。実際、図 4.6 において、 $(k_F a_s)^{-1} = -1$ の場合、 m_L/m_H を $(m_L/m_H = 1)$ より小さくしていくと、ずり粘性率 η が最小値を取る温度は、 $m_L/m_H = 1$ のとき、 $0.388T_{F,H}$ ($T_{F,H} = T_F$)、 $m_L/m_H = 0.5$ のとき、 $0.534T_{F,H}$ 、 $m_L/m_H = 40/161$ のとき、 $0.727T_{F,H}$ と、上昇していくことが確認できる。

次に、強結合領域における質量インバランスのずり粘性率への影響を議論する。強結合 BEC 領域では、固く結合した Bose 分子が系を支配していくので、Bose 分子への質量インバランスの効果が、ずり粘性率 η へ反映されると考えられる。付録 D に示すように、SCTMA では、Bose 分子間の散乱は以下のように与えられる：

$$U_B = \frac{4\pi a_B}{M}. \quad (4.8)$$

ここで $M = m_L + m_H$ は Bose 分子の質量で、

$$a_B = \frac{M}{m_r} a_s = \frac{(m_L + m_H)^2}{2m_L m_H} a_s, \quad (4.9)$$

は Bose 分子間散乱に対する s 波散乱長である。この散乱は m_L/m_H を小さくするほど大きくなるので、対応するずり粘性率は小さくなると考えられる。

また、Bose 分子の寿命に関してバンド内励起の寄与を考慮すると、分子の崩壊レート $\gamma(\mathbf{q}, \omega \geq 0)$ は、付録 D に示すように、

$$\gamma(\mathbf{q}, \omega \geq 0) = \sum_{\sigma=L,H} \frac{m_\sigma^2 \Delta_{pg}^2}{16\pi |\mu_{av}|^2} e^{\mu_\sigma/T} \left(\frac{\omega}{q}\right) e^{-\frac{m_\sigma}{2T} \left(\frac{\omega}{q}\right)^2}. \quad (4.10)$$

ここで μ_{av} は平均された化学ポテンシャル、

$$\mu_{\text{av}} = \frac{\mu_{\text{L}} + \mu_{\text{H}}}{2}, \quad (4.11)$$

で、 Δ_{pg}^2 は擬ギャップパラメータであり、質量インバランスが存在していても、質量バランス系の式 (3.22) と同様、

$$\Delta_{\text{pg}} = \sqrt{-T \sum_{\mathbf{q}, i\nu_m} \Gamma(\mathbf{q}, i\nu_m)}, \quad (4.12)$$

で与えられる。強結合 BEC 領域では、 μ_{L} と μ_{H} は共に負の値になり、 $|\mu_{\text{L}} + \mu_{\text{H}}| = E_{\text{bind}}$ を満たすようになる。ここで質量インバランスの存在下では、束縛エネルギー E_{bind} は $1/(m_{\text{T}} a_{\text{s}}^2)$ と与えられる。また、質量インバランスが存在すると $\mu_{\text{L}} > \mu_{\text{H}}$ を満たし、さらに $\mu_{\text{L}} - \mu_{\text{H}}$ は $m_{\text{L}}/m_{\text{H}}$ を小さくするほど大きくなる。そのため、式 (4.10) において、

$$e^{\mu_{\text{L}}/T} > e^{E_{\text{bind}}/T} > e^{\mu_{\text{H}}/T}, \quad (4.13)$$

となり、分子の崩壊レート $\gamma(\mathbf{q}, \omega \geq 0)$ は $m_{\text{L}}/m_{\text{H}}$ を小さくするほど大きくなる。結果として Bose 分子の寿命が短くなるので、ずり粘性率 η は小さくなる。

4.2.3 エントロピー密度 s に対する質量インバランス効果

次に、エントロピー密度の質量インバランス効果について考える。弱結合 BCS 領域では、 $T \lesssim T_{\text{F,H}}$ の時、軽い成分と重い成分ともに Fermi 縮退領域にある。この場合、軽い成分は重い成分より深く縮退しており、軽い成分のエントロピーは重い成分のエントロピーより小さい。したがって、質量インバランスを有する場合の方が、エントロピーは小さくなる。また、統計性が重要でない高温領域では、質量 m_{L} の古典理想気体と質量 m_{H} の古典理想気体の混合系のエントロピー密度に帰着すると考えられる。ここで、質量 m 、粒子数密度 n の古典理想気体のエントロピー密度は、

$$\frac{s}{n} = \ln \left[\left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} n \right] + \frac{5}{2}, \quad (4.14)$$

で与えられるので、やはり質量インバランスを大きく (m_{L} を小さく) していくとエントロピー密度は減っていくことが分かる。

一方の強結合 BEC 領域では、図 4.6 では重い成分の質量 m_{H} を固定して軽い成分の質量 m_{L} を軽くしているので、Bose 分子の質量 $M = m_{\text{L}} + m_{\text{H}}$ は質量インバランスを大きくすると軽くなっていく。Bose 分子のエントロピー密度 s への質量インバランス効果として、以下の3点がある:

1. 理想 Bose 気体の BEC 転移温度 T_{BEC} は粒子の質量の逆数に比例するので、質量インバランスを大きくするほど ($T_{\text{F,H}}$ で規格化された) BEC 転移温度は上昇する。
2. BEC 転移温度における粒子数密度 $n/2$ の理想 Bose 気体のエントロピー密度 s は、

$$s = \frac{5\zeta(5/2)}{4\zeta(3/2)} n \simeq 0.642n, \quad (4.15)$$

と Bose 分子の質量に依存しない。

3. T_{BEC} 以上では、分子質量が小さくなるほどエントロピー密度も小さい。これは、粒子の質量が軽いほど熱的に励起しにくくなるためである。

以上の 3 点から、強結合領域においても、質量比 $m_{\text{L}}/m_{\text{H}}$ を質量バランスの場合 ($m_{\text{L}}/m_{\text{H}} = 1$) より小さくするにつれ、エントロピー密度 s は小さくなる。また、 $T \gg E_{\text{bind}}, T_{\text{F,L}}, T_{\text{F,H}}$ の高温では、Bose 分子はもはや存在せず、質量の異なる 2 つの古典粒子が混合しているのみである。よって、弱結合領域の高温側と同じ議論が適用できるので、やはり質量比 $m_{\text{L}}/m_{\text{H}}$ を小さくするにつれ、エントロピー密度 s は小さくなる。

4.3 ずり粘性率とエントロピー密度の比 η/s および KSS 予想との比較

4.3.1 η/s の最小値

次に、質量インバランスを有する極低温 Fermi 原子気体のずり粘性率とエントロピー密度の比 η/s を、Kovtun-Son-Starinets 予想と比較する。図 4.7(a) に、質量比が $m_{\text{L}}/m_{\text{H}} = 1, 0.5, 40/161$ の場合の、各相互作用における η/s の最小値 $(\eta/s)_{\text{min}}$ を示す。 $(\eta/s)_{\text{min}}$ は、質量インバランスがあっても、質量バランス系と同様に、弱結合領域から相互作用を強くしていくにつれ低下していくが、 $(k_{\text{F}} a_s)^{-1} \simeq 0.4$ で (η/s) の下限値 $(\eta/s)_{\text{l.b.}}$ をとり、さらに相互作用を強くしていくと上昇していく。

図 4.7(b) に、質量比 $m_{\text{L}}/m_{\text{H}} = 0.5$ の場合の、各相互作用における η/s の最小値 $(\eta/s)_{\text{min}}$ が得られる温度 T_{min} を示す。 T_{min} は質量バランスの場合 (図 4.2) とよく似た振る舞いをするので、質量バランス系と同様、Pauli ブロッキング効果と 2 体束縛状態の形成が重要である、という解釈が適用できると考えられる。しかし、質量バランス系で Pauli ブロッキング効果が重要になり始める温度であった、Fermi 化学ポテンシャル μ が零となる温度 $T(\mu = 0)$ は、質量インバランスを有する場合、軽い成分の Fermi 化学ポテンシャル μ_{L} が零となる温度 $T(\mu_{\text{L}} = 0)$ と、重い成分の Fermi 化学ポテンシャル μ_{H} が零となる温度 $T(\mu_{\text{H}} = 0)$ とは異なる。 $T(\mu_{\text{L}} = 0)$ においては、軽い成分は Fermi 縮退を

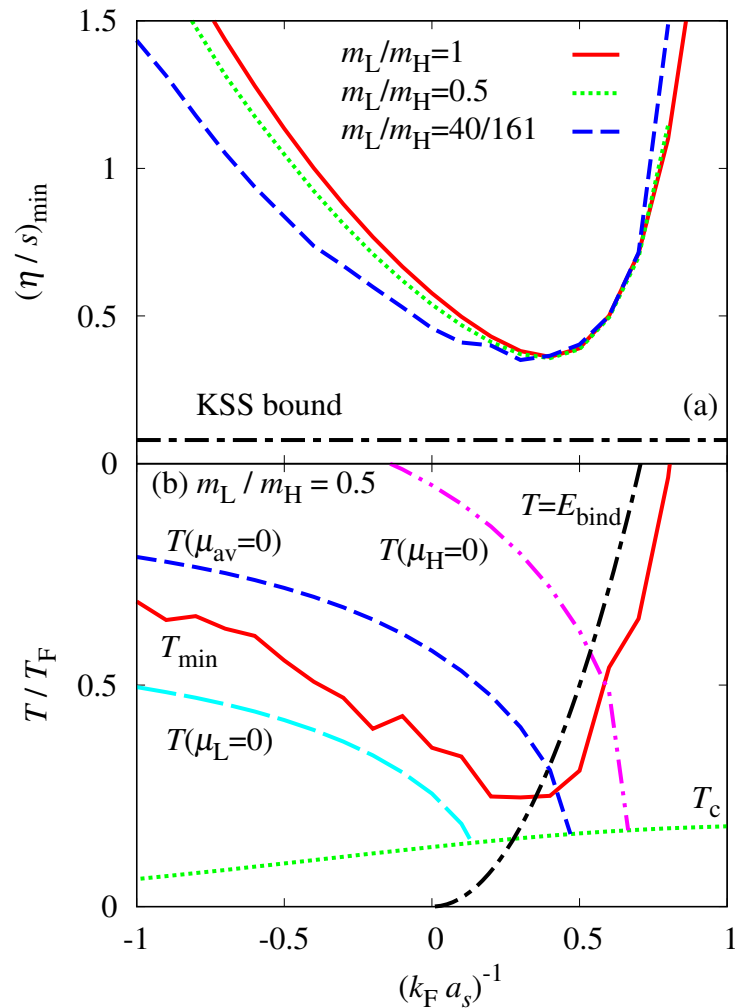


図 4.7 (a) 質量インバランスを有する極低温 Fermi 原子気体の、各相互作用強度 $(k_F a_s)^{-1}$ におけるずり粘性率とエントロピー密度の比 η/s の最小値 $(\eta/s)_{\min}$ 。 (b) 質量比 $m_L/m_H = 0.5$ の場合における、 $(\eta/s)_{\min}$ が得られる温度 T_{\min} 。 $T(\mu_L = 0)$ 、 $T(\mu_H = 0)$ 、 $T(\mu_{\text{av}} = 0)$ はそれぞれ、軽い成分の化学ポテンシャル μ_L 、重い成分の化学ポテンシャル μ_H 、平均化された化学ポテンシャル $\mu_{\text{av}} = (\mu_L + \mu_H)/2$ が零となる温度であり、これらより高温側では対応する化学ポテンシャルが負の値を、低温側では対応する化学ポテンシャルが正の値をとる。 $T = E_{\text{bind}} = 1/(m_r a_s^2)$ は 2 体束縛状態の束縛エネルギーに等しい温度である。

始めるものの重い成分は古典領域にあり、Pauli ブロッキング効果が η/s に顕著に現れるとは考えにくい。一方で、 $T(\mu_H = 0)$ においては、重い成分が Fermi 縮退を始めるのに対し、軽い成分は深く縮退しており、既に Pauli ブロッキング効果が η/s に十分に影響を与えていると考えられる。以上のことから、 $T(\mu_L = 0)$ と $T(\mu_H = 0)$ はそれぞれでは Pauli ブロッキング効果が重要になり始める温度とはみなせないが、各成分が Fermi 縮退を始める温度とはみなせるので、それらの平均を考えた、“平均化された化学ポテンシ

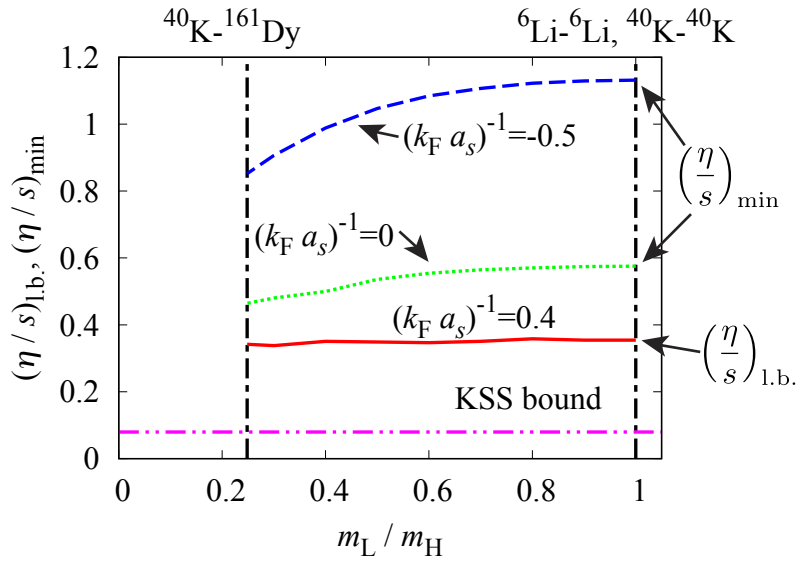


図 4.8 それぞれの質量比 m_L/m_H に対するずり粘性率とエントロピー密度の比 η/s の下限値 $(\eta/s)_{l.b.}$ 。すべての質量比 m_L/m_H で下限値 $(\eta/s)_{l.b.}$ は $(k_F a_s)^{-1} \simeq 0.4$ の T_c 近傍で得られる。比較のため、それぞれの質量比における $(k_F a_s)^{-1} = -0.5$ と $(k_F a_s)^{-1} = 0$ の場合の η/s の最小値 $(\eta/s)_{min}$ も示した。1 点鎖線の縦線は、 ${}^6\text{Li}$ - ${}^6\text{Li}$ および ${}^{40}\text{K}$ - ${}^{161}\text{Dy}$ Fermi 気体に対応する質量比を示す。また、2 点鎖線で示す ‘KSS bound’ は KSS 予想の下限値 $\hbar/4\pi k_B$ を示している。

ル”、

$$\mu_{av} = \frac{\mu_L + \mu_H}{2}, \quad (4.16)$$

が零となる温度 $T(\mu_{av} = 0)$ 以下で、Pauli の排他律が重要になると考えられる。実際、 T_{min} の相互作用依存性は $T(\mu_{av} = 0)$ とよく似ており、また、図 4.2 の質量バランスの場合の $T(\mu = 0)$ にもよく似た振る舞いをする。一方の、2 体束縛状態の形成が重要になり始める温度は、やはり $T = E_{bind} = 1/(m_r a_s^2)$ と与えられる。したがって、質量インバランスを有する場合においても、

$$T(\mu_{av} = 0) \simeq E_{bind}, \quad (4.17)$$

を満たす相互作用において、ずり粘性率とエントロピー密度の下限値 $(\eta/s)_{l.b.}$ が得られる。以上のことから、質量バランス系と同様に、Pauli の排他原理、および、2 体の束縛状態の形成、という 2 つの量子効果が $(\eta/s)_{l.b.}$ を得る上で重要であることが分かる。

4.3.2 η/s の下限値 $(\eta/s)_{l.b.}$ の質量比依存性

図 4.7(a) では η/s の下限値 $(\eta/s)_{l.b.}$ は質量比 $m_L/m_H = 1, 0.5, 40/161$ でほとんど同じである。図 4.8 に、質量比 $40/161 \leq m_L/m_H \leq 1$ に対するずり粘性率とエントロ

ピー密度の比 η/s の下限値 $(\eta/s)_{\text{l.b.}}$ を示すが、 $(\eta/s)_{\text{l.b.}}$ はほとんど質量比に依存していない。これは下限値 $(\eta/s)_{\text{l.b.}}$ のみに見られ、その他の場合、例えば $(k_F a_s)^{-1} = -0.5$ と $(k_F a_s)^{-1} = 0$ の場合の η/s の最小値 $(\eta/s)_{\text{min}}$ を図 4.8 に示したが、それらは質量比に依存する。現在では、数値計算上の問題のため、質量比が ^{40}K - ^{161}Dy Fermi 気体に対応する $m_L/m_H = 40/161$ 以下の結果を得ることはできないが、少なくとも我々の計算結果の範囲内 ($40/161 \leq m_L/m_H \leq 1$) では、 η/s の下限値 $(\eta/s)_{\text{l.b.}}$ は質量インバランスを有する極低温 Fermi 原子気体において、質量比 m_L/m_H に依存せず普遍的に、

$$\left(\frac{\eta}{s}\right)_{\text{l.b.}} \simeq 4.5 \frac{\hbar}{4\pi k_B}, \quad (4.18)$$

の値を取る。また、下限値 $(\eta/s)_{\text{l.b.}}$ を取る相互作用強度も、図 4.7 に示すように、質量インバランスにほとんどよらずに $(k_F a_s)^{-1} \simeq 0.4$ である。

4.3.3 論点

現段階では、式 (4.18) の質量インバランスを有する極低温 Fermi 原子気体の $(\eta/s)_{\text{l.b.}}$ の普遍性を解析的に証明することはできていない。質量インバランスを有する極低温 Fermi 原子気体のハミルトニアン (2.46) から出発して、式 (4.18) を、下限値を得る詳細な条件とともに、解析的に証明することは、今後の課題である。これは、例えば、少なくともハミルトニアン (2.46) の系で、なぜ、どのように、 η/s に下限値が存在するのか、が明らかとなるので、KSS 予想の一層の理解に貢献すると考えられる。

我々の数値計算の結果は、式 (4.18) が幅広い質量比 m_L/m_H に対し成り立つことを示唆する。したがって、 ^6Li - ^6Li および ^{40}K - ^{40}K 極低温 Fermi 原子気体や、 ^{40}K - ^{161}Dy 極低温 Fermi 原子気体を用いて、実験的に式 (4.18) を確認することは興味深い問題である。我々の現在の計算精度では、より質量比の大きい ^6Li - ^{40}K 極低温 Fermi 原子気体 ($m_L/m_H = 6/40 = 0.15$) についてずり粘性率とエントロピー密度の比 η/s を調べることはできないが、式 (4.18) が ^6Li - ^{40}K 極低温 Fermi 原子気体においても成り立っているかを実験的に調べることも、興味深い問題である。これら 4 種類の極低温 Fermi 原子気体は、Feshbach 共鳴による相互作用の調整が可能であるため、 η/s の下限値を取る $(k_F a_s)^{-1} \simeq 0.4$ の相互作用強度において、実験的にずり粘性率 η 、および、エントロピー密度 s を観測可能である。

本論文では扱わなかった、粒子数のインバランスの効果についてコメントする。弱結合領域では、粒子数のインバランスに応じて、多い方の成分の Fermi 温度は高く、少ない方の成分の Fermi 温度は低くなる。よって、質量インバランス系と同様に、各成分の Fermi 温度の違いに因る、バランス系に比べて弱い Pauli ブロッキング効果が期待出来る。一方で、強結合領域は、同粒子数の質量インバランス系と大きく異なる。粒子数のインバ

ランスがあると、強結合極限では、Bose 分子の数は少ない方の Fermi 原子数 (N_{minority} とする) と等しくなる。一方で、多い方の Fermi 原子 (その数を N_{majority} とする) は、 $N_{\text{majority}} - N_{\text{minority}}$ 個、分子を組まない状態で系に存在する。したがって、強結合極限では、 N_{minority} 個の分子と、 $N_{\text{majority}} - N_{\text{minority}}$ 個の 1 成分の Fermi 原子、からなる混合気体へ帰着する。これは、同粒子数の質量インバランス系が、強結合極限では Bose 分子のみの気体へと近づいていくことと、大きく異なる。しかし、1 成分の Fermi 原子は接触型相互作用では相互作用しないので、強結合極限で理想 Bose 分子と理想 Fermi 原子の気体へと近づいていく。よって、粒子数インバランス系の場合でも、強結合極限に近づくにつれ、ずり粘性率 η は増大していくと考えられる。

次に、粒子数インバランスの効果が η/s の下限値にどのように影響するのかを考える。この場合においても、Pauli ブロッキング効果と束縛分子形成が、 η/s の下限値 $(\eta/s)_{\text{l.b.}}$ にとって重要な量子効果であると考えられる。Pauli ブロッキング効果は質量インバランス系の場合と同様に、ずり粘性率を増大させる。一方の束縛分子形成も、分子を形成することで多い方の Fermi 原子は散乱する相手 (少ない方の Fermi 原子) が減っていくことから、Bose 分子および対を組んでいない Fermi 原子ともに長寿命となり、やはりずり粘性率を増大させる。したがって、質量インバランス系の場合と同様に、Pauli ブロッキング効果と束縛分子形成の特徴的溫度が交叉するとき、 η/s の下限値が得られると考えられる。束縛分子形成はユニタリ極限より強結合領域でのみはたらくので、 η/s の下限値はユニタリ極限より少し強結合領域で得られると考えられる。この領域では、対形成揺らぎが強いので、 η/s の下限値の詳細な値、および、得られる場所を得ることは、今後の課題である。質量インバランスによらない η/s の下限値 (4.18) が、粒子数インバランスにおいても得られるかは興味深い問題である。

4.4 4章のまとめ

この章では、ずり粘性率 η とエントロピー密度 s の比 η/s について調べ、KSS 予想と比較した。4.1 節では、質量バランス系の η/s を調べ、 η/s の下限値 $(\eta/s)_{\text{l.b.}}$ として、

$$\left(\frac{\eta}{s}\right)_{\text{l.b.}} \simeq 4.5 \times \frac{\hbar}{4\pi k_{\text{B}}}, \quad (4.19)$$

を得た。また、 η/s の下限値を与える効果を議論し、Pauli の排他律、および、2 体束縛状態の形成、という 2 つの量子効果が重要であることを明らかにした。4.2 節では、質量インバランスを有する場合に議論を進め、質量インバランスの効果が、ずり粘性率 η 、および、エントロピー密度 s に、どのように影響するのかを議論した。成分間の質量比を大きくしていくと、ずり粘性率 η 、および、エントロピー密度 s はともに小さくなることを明らかにした。4.3 節では、質量インバランスを有する場合の η/s について議論した。 η/s

の下限值 $(\eta/s)_{\text{l.b.}}$ は、少なくとも成分間の質量比 $m_{\text{L}}/m_{\text{H}}$ が $40/161 \leq m_{\text{L}}/m_{\text{H}} \leq 1$ の領域では、質量比に依存しないことを明らかにした。また、下限値 $(\eta/s)_{\text{l.b.}}$ を与える相互作用強度も、 $40/161 \leq m_{\text{L}}/m_{\text{H}} \leq 1$ の領域では、質量比によらず $(k_{\text{F}}a_{\text{s}})^{-1} \sim 0.4$ であることを明らかにした。

第 5 章

まとめ

本論文では、極低温 Fermi 原子気体の BCS-BEC クロスオーバー領域の常流動相において、ずり粘性率 η に対する強結合効果を理論的に研究した。強い粒子間引力相互作用がもたらす超流動揺らぎの効果を、自己無撞着 T 行列近似 (SCTMA) の枠組みを用い取り込み、ずり粘性率 η への超流動揺らぎの影響を明らかにした。また、同じ理論的枠組みでエントロピー密度 s を求め、それらの比 η/s の振る舞いを BCS-BEC クロスオーバー領域で明らかにし、Kovtun-Son-Starinets (KSS) 予想との比較を行った。更に、質量インバランスを有する極低温 Fermi 原子気体の場合へ SCTMA を適用、 η/s を求め、KSS 予想への影響を議論した。

ずり粘性率 η が、弱結合 BCS 領域、中間結合領域、強結合 BEC 領域それぞれにおいて、異なる温度依存性を示すことを明らかにした: (1) 弱結合側 ($(k_F a_s)^{-1} \lesssim -0.5$) においては、Fermi 温度より高温 ($T \gg T_F$) から温度を下げるにつれ、ずり粘性率ははじめ低下するが、Fermi 温度より低温のある温度で増大に転じ、さらに超流動相転移温度 T_c 近傍でピークを示し再び減少に転じるという、特徴的な振る舞いをするを明らかにした。そして、これらの振る舞いが、高温から順に、古典気体、縮退した Fermi 気体、対形成揺らぎと関係していることを指摘した。(2) 中間結合領域 ($-0.5 \lesssim (k_F a_s)^{-1} \lesssim 0.7$) では、弱結合領域では T_c 近傍でのみ重要であった対形成揺らぎが成長、その結果、弱結合領域で見られた非単調な振る舞いが見られず、降温とともにずり粘性率 η は減少することを示した。(3) 強結合 BEC 領域 ($(k_F a_s)^{-1} \gtrsim 0.7$) では、 η は再び非単調な温度依存性を示すようになり、高温から温度を下げるにつれ、 η は低下していくが、ある温度で増大に転じることを見出した。この温度依存性において、低温でのずり粘性率 η の増大は、強い引力相互作用に因る Bose 分子の形成に由来することを指摘した。また、近年行われた実験結果との比較を行い、ずり粘性率 η はユニタリ極限より強い相互作用で最小値を取るという、実験結果と整合する結果を得た。

本論文では、更に、エントロピー密度 s を求め、極低温 Fermi 原子気体の BCS-BEC

クロスオーバー領域において、ずり粘性率 η とエントロピー密度 s の比の振る舞いを明らかにし、それを用い、KSS 予想の下限値 $\hbar/(4\pi k_B)$ との比較を行った。計算された η/s の下限値、

$$\left(\frac{\eta}{s}\right)_{\text{l.b.}} \simeq 4.5 \times \frac{\hbar}{4\pi k_B}, \quad (5.1)$$

は相互作用強度 $(k_F a_s)^{-1} \simeq 0.4$ で得られ、現在、実験的に得られている、 ${}^6\text{Li}$ ユニタリ Fermi 原子気体での η/s の最小値 [101]、

$$\left(\frac{\eta}{s}\right)_{\text{min(exp.)}}^{\text{unitarity}} \simeq 6.3 \times \frac{\hbar}{4\pi k_B}, \quad (5.2)$$

より小さい値が得られるものの、KSS 予想と矛盾しない事が分かった。また、 η/s の下限値を得るためには、(1) Pauli の排他律、(2) 2 体束縛状態の形成、という、2 つの量子効果が重要であることを指摘した。さらに、質量インバランスを有する場合も議論し、質量インバランスの効果は、ずり粘性率 η およびエントロピー密度 s を下げる方向にはたらくことを明らかにした。また、少なくとも質量比 $(40/161 \leq m_L/m_H \leq 1)$ の範囲内では、計算された η/s の下限値 $(\eta/s)_{\text{l.b.}}$ は質量比 m_L/m_H にほとんど依らずに、式 (5.1) で与えられることを明らかにした。

本研究で対象とした KSS 予想は、高エネルギー物理学のクォークグルーオンプラズマや、凝縮系物理学の銅酸化物高温超伝導体やグラフェン、液体 He に渡るまで、幅広く議論されており、本研究の成果は、極低温 Fermi 原子分野だけでなく、上述の分野に貢献するものと期待される。

今後の課題として、本研究では、Padé 近似を用いた解析接続の数値計算上の問題により、強結合 BEC 領域の超流動相転移温度 T_c 近傍において、ずり粘性率 η が評価できなかった点がある。この点を克服するには、数値的に解析接続を行わない、実時間形式である Keldysh Green 関数法 [139] が有力であると考えられる。また次の課題として、現在の SCTMA は、強結合 BEC 領域の分子間相互作用の効果が、平均場レベルでしか入っておらず、分子間相互作用に由来する分子の寿命が入っていない点が挙げられる。分子間相互作用による寿命の効果は、強結合 BEC 領域において、平均自由行程、ひいては、ずり粘性率に大きく影響を与えると考えられるので、分子の寿命を正しく理論に取り入れることは興味深い問題である。分子の寿命を取り入れるには、少なくとも分子間相互作用の 2 次摂動レベルで、分子への自己エネルギー補正を取り入れる必要があり、SCTMA より高次の対相関を考慮に入れる必要がある。

最後に、本研究の将来展望について述べる。本論文では常流動相のみ扱ったが、超流動相への拡張は課題として残されている。超流動状態は温度を下げるにつれ超流動秩序の成長によりずり粘性率 η およびエントロピー密度 s が共に低下していくことが期待され、そ

の比 η/s が KSS 予想を満たすかどうかを調べるのは興味深い問題である。また、質量の異なる 2 成分 Fermi 原子を記述する BCS ハミルトニアンから出発して、ずり粘性率 η とエントロピー密度 s の比 η/s が質量比に依らない最小値を示すことを解析的に証明することも、KSS 予想のさらなる理解に貢献すると考えられ、重要な課題である。最後に、本研究で用いた手法を他の輸送係数、スピン拡散係数や、体積粘性率、熱拡散係数などに応用し、輸送現象に対する強結合効果を明らかにしていくことは、極低温 Fermi 原子分野のみならず、高エネルギー物理学のクォークグルーオンプラズマや、原子核物理学の中性子星、凝縮系物理学の銅酸化物高温超伝導体やグラフェンなど、幅広い分野に貢献する重要な将来の課題である。

謝辞

本研究を行うに当たり、指導教員の大橋洋士教授には、学部4年生の卒業研究から研究活動における指導をしていただきました。本研究のテーマの範囲で、かなり大きな裁量を持って研究に取り組ませていただいたと思います。また、私が自分の研究内容に納得するまで、辛抱強く指導していただきました。このような研究生活が体験ができたのは、偏に先生の度量の広さのおかげと思い、頭の下がる思いです。また、本研究を行うに当たり、大橋研究室が所有する数十台にのぼる計算機を利用しましたが、それらがなければ本研究は完遂できなかつたと思います。このような環境を整えてくださったことにも感謝したいと思います。

お忙しい中、本論文の副査を引き受けてくださった、神原陽一教授、藤谷洋平教授、渡邊紳一教授に感謝します。また、本論文の草稿は要領を得ない説明が多々あったと思いますが、注意深くご精読いただき、多くの有益な助言を頂きました。

理論研究室の教員の方々、江藤幹雄教授、齊藤圭司教授、高野宏教授、山内淳准教授、山本直希准教授、古池達彦専任講師、檜垣徹太郎専任講師、古川俊輔専任講師、光武亜代理元専任講師(現明治大学理工学部物理学学科准教授)、杉本高大助教の方々には、普段の学生生活、講義やティーチング・アシスタントなどでお世話になっただけでなく、コロキウムにて有益なご意見を頂きました。

猪谷太輔氏には、研究内容について議論をしていただいたり、学会発表の仕方や書類の書き方など、多くの研究に関する指導をしていただきました。研究が行き詰まった時に様々な気を遣って頂くなど、研究内容以外においても非常にお世話になりました。ここに深く感謝申し上げます。

研究室では、多くの優秀な先輩、後輩に恵まれ、ゼミや日頃の議論などで多くの貴重なアドバイスや刺激を受けました。先輩である、遠藤有希氏、花井亮氏、田島裕之氏、山口辰威氏、Digvijay Kharga 氏、松本杜青氏、Pieter van Wyk 氏、Soumita Mondal 氏、からは、数多くのアドバイスや知恵を教えて頂き、また、後輩である、太田幹氏、武藤悠輔氏、真辺幸喜氏、佐藤龍平氏、上堀太郎氏、河村泰良氏、古谷浩一朗氏、高嶋一輝氏、獨古春輝氏、山田晴心氏からは、様々な気付きや刺激を受けました。纏めてではあります

が、厚く御礼申し上げます。

理論研究室の皆様のおかげで、充実した素晴らしい研究室生活を送ることができたと思います。特に、唐澤直之氏、玉木脩二氏、曾我部紀之氏、若村浩明氏は、多くの時間を共にした切磋琢磨する仲であったと思います。この場を借りて、研究室生活でお世話になったすべての方々に、謝意を示したいと思います。

最後になりますが、しかしこれまでの方々に劣らぬ感謝の意を、家族に、表したいと思います。筆者の長い学生生活を支援してくれ、また、どんな時でも前向きになれるよう勇気付けてくれました。家族の温かい支援がなければ、本研究は完成しなかったと思います。筆者を長く応援してくれた家族に、深い敬意と感謝を、ここに表したいと思います。

付録 A

ずり粘性率の公式の導出

この付録では、ずり粘性率を線形応答理論によって求める方法について説明する。A.1 節では、Kadanoff-Martin の議論 [140] に従い、ずり粘性率を運動量密度相関関数によって表す方法について述べる。A.2 節で、本文で用いた、ずり粘性率の応力テンソル相関関数による公式を、A.1 節の結果より導く。

A.1 運動量密度相関関数によるずり粘性率の公式の導出

ここでは、ずり粘性率のような輸送係数を線形応答理論で求める Kadanoff-Martin の議論 [140] に従い、ずり粘性率の公式を導出する。図 A.1 のように、 $t = -\infty$ で大域的熱平衡状態にあった系に対し、外場を断熱的に印加することで、局所熱平衡状態を作り出す。そして、 $t = 0$ で外場を再び零にすることで、 $t > 0$ で系は大域的熱平衡状態と緩和していく。緩和する様子を流体力学と線形応答理論とで解析し、それらの比較からずり粘性率の公式を得る。なお、一般に局所平衡状態は局所示強変数 $T(\mathbf{r}, t)$ (温度)、 $\mu(\mathbf{r}, t)$ (化学ポテンシャル)、 $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ (流速) を与えることで指定されるが、この節の議論では、簡単のため、局所温度 $T(\mathbf{r}, t)$ と局所化学ポテンシャル $\mu(\mathbf{r}, t)$ は一様と仮定する。十分外場が弱く、線形応答理論が適用できる場合は、局所温度 $T(\mathbf{r}, t)$ と局所化学ポテンシャル $\mu(\mathbf{r}, t)$ の大域的熱平衡状態からのずれはずり粘性率に影響を与えない。

まず、流体力学においてずり粘性率がどのように定義されるのかをまとめる。正常相の 1 成分流体、もしくは、2 成分流体で拡散がなく常に同じ密度を持つ場合、を考える。ずり粘性率 η は応力テンソル $\Pi_{\alpha,\beta}(\alpha, \beta = x, y, z)$ を用いて以下のように定義される [141]:

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha,\beta}(\mathbf{r}, t) = & \delta_{\alpha,\beta} p(\mathbf{r}, t) + \rho v_{\alpha}(\mathbf{r}, t) v_{\beta}(\mathbf{r}, t) \\ & - \eta (\nabla_{\beta} v_{\alpha}(\mathbf{r}, t) + \nabla_{\alpha} v_{\beta}(\mathbf{r}, t)) - \delta_{\alpha,\beta} \left(\zeta - \frac{2}{3} \eta \right) \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

ここで、 $p(\mathbf{r}, t)$ は局所圧力、 ζ は体積粘性率、 \mathbf{v} は流速である。式 (A.1) の第 1 行目は、

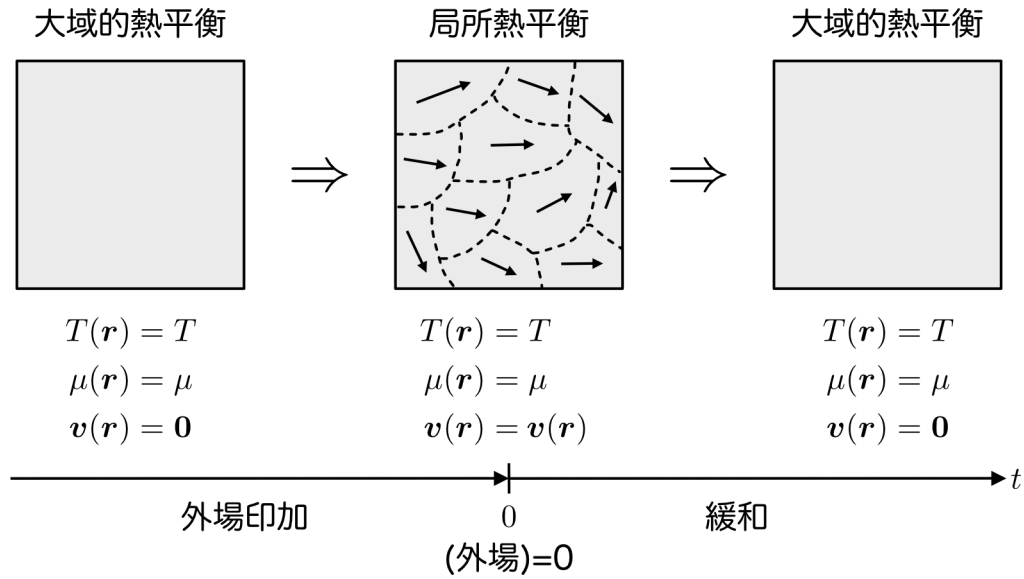


図 A.1 Kadanoff-Martin の議論の概念図。 $t = -\infty$ で大域的熱平衡にあった系に外場を断熱的に印加することにより、 $t = 0$ において局所熱平衡状態を作る。そして $t = 0$ に外場を取り去ることにより、 $t > 0$ で系は大域的熱平衡状態へと緩和していく。一般に局所平衡状態は局所示強変数 $T(\mathbf{r}, t)$ 、 $\mu(\mathbf{r}, t)$ 、 $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ を与えることで指定されるが、この節では、局所温度 $T(\mathbf{r}, t)$ と局所化学ポテンシャル $\mu(\mathbf{r}, t)$ は一様と仮定する。

理想流体力学に現れる対流項であり、散逸に寄与しない。式 (A.1) の第 2 行目は、散逸項を表し、これにより図 A.1 の状況において緩和が生じる。流速 $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ は、流体の単位質量あたりの運動量と定義され、運動量密度 $\mathbf{g}(\mathbf{r}, t)$ と粒子密度 $n(\mathbf{r}, t)$ を用いて、

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}, t) = mn(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{A.2})$$

と表すことができる。また、運動量密度 $\mathbf{g}(\mathbf{r}, t)$ と応力テンソル $\Pi_{\alpha,\beta}(\mathbf{r}, t)$ は次式で与えられる運動量保存則を満たす:

$$\frac{\partial g_{\alpha}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \sum_{\beta=x,y,z} \nabla_{\beta} \Pi_{\alpha,\beta}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (\text{A.3})$$

大域的平衡状態からのずれは小さいとして、流体力学でどのようにずり粘性率を表すことができるかを説明する。大域的平衡状態は図 A.1 の場合 $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0$ であるので、 $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ が小さいと考える。この時、運動量密度 $\mathbf{g}(\mathbf{r}, t)$ は $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ の 1 次までで、

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}, t) = mn\mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{A.4})$$

と与えられる。ここで n は大域的平衡状態における粒子密度である。式 (A.1) と式 (A.4)

を運動量保存則 (A.3) に代入し、流速 \mathbf{v} を消去すると、

$$\frac{\partial g_\alpha}{\partial t} + \nabla_\alpha p - \frac{\eta}{mn} \sum_{\beta=x,y,z} \nabla_\beta^2 g_\alpha - \frac{1}{mn} \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta \right) \nabla_\alpha (\nabla \cdot \mathbf{g}) = 0, \quad (\text{A.5})$$

が得られる。ここで、運動量密度 \mathbf{g} を縦方向 \mathbf{g}_L と横方向 \mathbf{g}_T に分解する:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_L + \mathbf{g}_T, \quad (\text{A.6})$$

縦方向運動量密度 \mathbf{g}_L と横方向運動量密度 \mathbf{g}_T はそれぞれ次の性質を満たす:

$$\nabla \cdot \mathbf{g}_T = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$\nabla \times \mathbf{g}_L = 0. \quad (\text{A.8})$$

横方向の運動量密度 \mathbf{g}_T の方程式は、式 (A.5) の両辺に回転 $\nabla \times$ を作用することにより得られる:

$$\frac{\partial \mathbf{g}_T}{\partial t} - \frac{\eta}{mn} \nabla^2 \mathbf{g}_T = 0. \quad (\text{A.9})$$

これは拡散方程式に他ならない。よって、特定の初期条件の下で横方向の運動量密度 \mathbf{g}_T の解を調べることによりずり粘性率を得ることができる。図 A.1 の $t > 0$ の状況に適用すると、式 (A.7) と同様の定義の横方向の流速 $\mathbf{v}_T(\mathbf{r})$ を用い、初期条件は $\mathbf{g}_T(\mathbf{r}, t=0) = mn\mathbf{v}_T(\mathbf{r})$ と与えられる。式 (A.9) に Fourier 変換を適用することで、横方向の運動量密度は、

$$\mathbf{g}_T(\mathbf{k}, z) = \frac{\mathbf{g}_T(\mathbf{k}, t=0)}{-iz + \frac{\eta}{mn} k^2}, \quad (\text{A.10})$$

となる。ここで、 z は正の虚部を持つ複素数であり、

$$\mathbf{g}_T(\mathbf{k}, z) = \int_0^\infty e^{izt} dt \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \mathbf{g}_T(\mathbf{r}, t), \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbf{g}_T(\mathbf{k}, t=0) = \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \mathbf{g}_T(\mathbf{r}, t=0), \quad (\text{A.12})$$

である。以上のように、横方向の運動量密度 \mathbf{g}_T を調べることで、ずり粘性率 η が解析できる。

次に線形応答理論を用い、図 A.1 の状況において横方向の運動量密度がどう与えられるのかを考える。線形応答理論によると、外場等によりハミルトニアン \hat{H} が $\hat{H} + \hat{H}'$ に変化したとき、 \hat{H}' の一次までで任意の物理量 A は、

$$A(\mathbf{r}, t) = A_{\text{eq}}(\mathbf{r}) - i \int_{-\infty}^t dt' \text{Tr} \hat{\rho}_{\text{eq}} [\hat{A}(\mathbf{r}, t), \hat{H}'(\mathbf{r}', t')], \quad (\text{A.13})$$

で与えられる [120, 121]。ここで \hat{A} は物理量 A に対応する演算子であり、

$$\hat{\rho}_{\text{eq}} = \frac{e^{-[\hat{H}-\mu\hat{N}]/T}}{\text{Tr}e^{-[\hat{H}-\mu\hat{N}]/T}}, \quad (\text{A.14})$$

は外場がないときの密度行列である。式 (A.13) の第 1 項目は、

$$A_{\text{eq}}(\mathbf{r}) = \text{Tr}\hat{\rho}_{\text{eq}}\hat{A}(\mathbf{r}, t). \quad (\text{A.15})$$

まず、式 (A.13) 中の外場ハミルトニアン \hat{H}' を求める。 $t = 0$ において密度行列 $\hat{\rho}$ は図 A.1 の状況の局所熱平衡を表す密度行列、

$$\hat{\rho}_{\text{leq}} = \frac{e^{-[\hat{H}-\mu\hat{N}-\int d\mathbf{r}\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{v}(\mathbf{r})]/T}}{\text{Tr}e^{-[\hat{H}-\mu\hat{N}-\int d\mathbf{r}\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{v}(\mathbf{r})]/T}}, \quad (\text{A.16})$$

になっていると良いので、大域的熱平衡状態のハミルトニアン $\hat{H} - \mu\hat{N}$ からのずれを断熱的に印加することで外場は以下のように与えられる:

$$\hat{H}' = \begin{cases} -e^{\epsilon t} [\int d\mathbf{r}\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{v}(\mathbf{r})] & (t \leq 0), \\ 0 & (t > 0). \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

この外場に対し、 $t > 0$ において線形応答理論を適用して運動量密度 g_α を評価すると、

$$g_\alpha(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\beta=x,y,z} \int_{-\infty}^0 e^{\epsilon t'} dt' \int d\mathbf{r}' \text{Tr} \{ \hat{\rho}_{\text{eq}} [\hat{g}_\alpha(\mathbf{r}, t), \hat{g}_\beta(\mathbf{r}', t')] \} v_\beta(\mathbf{r}'). \quad (\text{A.18})$$

交換子 $\text{Tr} \{ \hat{\rho}_{\text{eq}} [\hat{g}_\alpha(\mathbf{r}, t), \hat{g}_\beta(\mathbf{r}', t')] \}$ ($\alpha, \beta = x, y, z$) に対し、スペクトル関数 $\chi''_{g_\alpha, g_\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ を以下のように導入する:

$$\text{Tr} \{ \hat{\rho}_{\text{eq}} [\hat{g}_\alpha(\mathbf{r}, t), \hat{g}_\beta(\mathbf{r}', t')] \} = \int \frac{d\omega}{\pi} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-i\omega(t-t')} \chi''_{g_\alpha, g_\beta}(\mathbf{k}, \omega). \quad (\text{A.19})$$

運動量密度 $g_\alpha(\mathbf{r}, t)$ は、スペクトル関数 $\chi''_{g_\alpha, g_\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ を用いて次のように与えられる:

$$g_\alpha(\mathbf{r}, t) = \sum_{\beta} \int \frac{d\omega}{\pi} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t} \frac{\chi''_{g_\alpha, g_\beta}(\mathbf{k}, \omega)}{\omega - i\epsilon} v_\beta(\mathbf{k}). \quad (\text{A.20})$$

流体力学の議論の場合と同様に Fourier 変換をすると、

$$g_\alpha(\mathbf{k}, z) = \int_0^\infty dt e^{izt} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} g_\alpha(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\beta} \int \frac{d\omega}{\pi} \frac{\chi''_{g_\alpha, g_\beta}(\mathbf{k}, \omega)}{(z-\omega)(\omega-i\epsilon)} v_\beta(\mathbf{k}). \quad (\text{A.21})$$

横方向の運動量密度を得るために、スペクトル関数 $\chi''_{g_\alpha, g_\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ を縦方向成分 $\chi''_{g, g, L}$ と横方向成分 $\chi''_{g, g, T}$ に分解する:

$$\chi''_{g_\alpha, g_\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \chi''_{g, g, L}(\mathbf{k}, \omega) + \left(\delta_{\alpha, \beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) \chi''_{g, g, T}(\mathbf{k}, \omega). \quad (\text{A.22})$$

横方向の運動量密度 $g_{T,\alpha=x,y,z}$ は、

$$g_{T,\alpha}(\mathbf{k}) = \sum_{\beta=x,y,z} \left(\delta_{\alpha,\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) \chi''_{g,g,T} v_\beta, \quad (\text{A.23})$$

で与えられ、横方向の運動量密度の条件 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{g}_T = 0$ を満たす。横方向の速度場 \mathbf{v}_T を、

$$v_{T,\alpha}(\mathbf{k}) = \sum_{\beta} \left(\delta_{\alpha,\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) v_\beta(\mathbf{k}), \quad (\text{A.24})$$

で定義すると、横方向の運動量密度 g_T は、

$$g_{,\alpha}(\mathbf{k}, z) = i \int \frac{d\omega}{\pi} \frac{\chi''_{g,g,T}(\mathbf{k}, \omega)}{(z - \omega)\omega} v_{T,\alpha}(\mathbf{k}), \quad (\text{A.25})$$

と表すことができる。ここで、 $z \rightarrow \omega + i\delta$ (δ は無限小の正の実数) とすると、

$$\frac{g_{T,\alpha}(\mathbf{k}, \omega)}{v_{T,\alpha}(\mathbf{k})} = i\mathcal{P} \int \frac{d\omega'}{\pi} \frac{\chi''_{g,g,T}(\mathbf{k}, \omega')}{(\omega - \omega')\omega'} + \frac{\chi''_{g,g,T}(\mathbf{k}, \omega)}{\omega}. \quad (\text{A.26})$$

$t = 0$ では局所熱平衡状態であったので、 $t = 0$ での運動量密度は $g_\alpha(\mathbf{k}, t = 0) = mnv_\alpha(\mathbf{k})$ で与えられる。これより、

$$mn \frac{(g_T)_\alpha(\mathbf{k}, \omega)}{(g_T)_\alpha(\mathbf{k}, t = 0)} = i\mathcal{P} \int \frac{d\omega'}{\pi} \frac{\chi''_{g,g,T}(\mathbf{k}, \omega')}{(\omega - \omega')\omega'} + \frac{\chi''_{g,g,T}(\mathbf{k}, \omega)}{\omega}. \quad (\text{A.27})$$

この式と流体力学に基づく横方向の運動量密度の式 (A.10) と比較すると、

$$\frac{mn}{-i\omega + \frac{\eta}{mn}k^2} = i\mathcal{P} \int \frac{d\omega'}{\pi} \frac{\chi''_{g,g,T}(\mathbf{k}, \omega')}{(\omega - \omega')\omega'} + \frac{\chi''_{g,g,T}(\mathbf{k}, \omega)}{\omega}. \quad (\text{A.28})$$

を得る。式 (A.28) は流体力学との比較を用いたため、 \mathbf{k} と ω が小さい領域でのみ成り立つ。式 (A.28) に対し実部を取り、 $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{0}$ の極限を取ってから、 $\omega \rightarrow 0$ の極限を取ることによって次式を得る：

$$\eta = \lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\omega}{k^2} \chi''_{g,g,T}(\mathbf{k}, \omega). \quad (\text{A.29})$$

スペクトル関数 $\chi''_{g,g,T}(\mathbf{k}, \omega)$ の代わりに、遅延相関関数 $\chi_{g,g,T}^R(\mathbf{k}, \omega)$ を用いても粘り率を表すことができる。スペクトル関数 $\chi''_{g,g,T}(\mathbf{k}, \omega)$ と遅延相関関数 $\chi_{g,g,T}^R(\mathbf{k}, \omega)$ には $\chi''_{g,g,T}(\mathbf{k}, \omega) = -\text{Im}\chi_{g,g,T}^R(\mathbf{k}, \omega)$ の関係があることから、式 (A.29) から粘り率の公式として、

$$\eta = - \lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\omega}{k^2} \text{Im} [\chi_{g,g,T}^R(\mathbf{k}, \omega)], \quad (\text{A.30})$$

を得る。ここで、 $\chi_{g,g,T}^R(\mathbf{k}, \omega)$ は運動量密度の遅延相関関数、

$$\chi_{g_\alpha, g_\beta}^R(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = -i\theta(t - t') \text{Tr} \left[\hat{\rho}_{\text{eq}} [\hat{g}_\alpha(\mathbf{r}, t), \hat{g}_\beta(\mathbf{r}', t')] \right], \quad (\text{A.31})$$

の Fourier 変換 $\chi_{g_\alpha, g_\beta}^R(\mathbf{k}, \omega)$ の横方向成分である。

A.2 応力テンソル相関関数によるずり粘性率の公式の導出

ずり粘性率の表式 (A.30) は、遅延相関関数 $\chi_{g,g,T}^R(\mathbf{k}, \omega)$ が \mathbf{k} と ω の 2 つのパラメータを持ち、 $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{0}$ の極限を取った後に $\omega \rightarrow 0$ の極限を取るという作業が必要であるので、数値計算の際に特別な注意を必要とする。ここでは、この問題が運動量保存則を利用することで回避することができることを説明する。

運動量保存則より次の式が成り立つ [80]:

$$\omega^2 \chi_{g_\alpha, g_\gamma}^R(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{\beta\delta} k_\beta k_\delta \chi_{\hat{\Pi}_{\alpha,\beta}, \hat{\Pi}_{\gamma,\delta}}^R(\mathbf{k}, \omega) + \sum_{\beta} k_\beta \langle [\hat{\Pi}_{\alpha,\beta}(\mathbf{k}), \hat{g}_\gamma(-\mathbf{k})] \rangle. \quad (\text{A.32})$$

ここで $\alpha, \beta, \gamma, \delta = x, y, z$ である。

式 (A.32) を証明する: $|a\rangle$ をハミルトニアン $\hat{H} - \mu\hat{N}$ の固有値 E_a の固有状態とする。すると $\chi_{g_\alpha, g_\gamma}^R(\mathbf{k}, \omega)$ は以下のように表す事ができる:

$$\chi_{g_\alpha, g_\gamma}^R(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{Z} \sum_{ab} e^{-E_a/T} \left[\frac{\langle a | \hat{g}_\alpha(\mathbf{k}) | b \rangle \langle b | \hat{g}_\gamma(-\mathbf{k}) | a \rangle}{\omega + i\delta - E_{ba}} - \frac{\langle a | \hat{g}_\gamma(-\mathbf{k}) | b \rangle \langle b | \hat{g}_\alpha(\mathbf{k}) | a \rangle}{\omega + i\delta + E_{ba}} \right]. \quad (\text{A.33})$$

ここで、 $E_{ba} = E_b - E_a$ であり、 $Z = \sum_a e^{-E_a/T}$ は分配関数である。 $\chi_{\hat{\Pi}_{\alpha,\beta}, \hat{\Pi}_{\gamma,\delta}}^R(\mathbf{k}, \omega)$ も式 (A.33) で $\hat{g}_\alpha(\mathbf{k})$ を $\hat{\Pi}_{\alpha,\beta}(\mathbf{k})$ で、 $\hat{g}_\gamma(-\mathbf{k})$ を $\hat{\Pi}_{\gamma,\delta}(-\mathbf{k})$ で置き換えることで与えられる。演算子形式の運動量保存則、

$$\partial_t \hat{g}_\alpha + \sum_{\beta=x,y,z} \nabla_\beta \hat{\Pi}_{\alpha,\beta} = 0, \quad (\text{A.34})$$

および Heisenberg の運動方程式、

$$\partial_t \hat{g}_\alpha = i[\hat{H}, \hat{g}_\alpha], \quad (\text{A.35})$$

より、

$$\sum_{\beta=x,y,z} \nabla_\beta \hat{\Pi}_{\alpha,\beta} = -i[\hat{H}, \hat{g}_\alpha]. \quad (\text{A.36})$$

この式の Fourier 変換を考えることにより、

$$\hat{g}_\alpha(\mathbf{k}) \hat{H} - \hat{H} \hat{g}_\alpha(\mathbf{k}) = \sum_{\beta=x,y,z} k_\beta \hat{\Pi}_{\alpha,\beta}(\mathbf{k}), \quad (\text{A.37})$$

を得る。 $\chi_{\Pi_{\alpha,\beta},\Pi_{\gamma,\delta}}^R(\mathbf{k},\omega)$ に対し、 $\sum_{\delta=x,y,z} k_\delta$ を作用し式 (A.37) を用いると、

$$\sum_{\delta=x,y,z} k_\delta \chi_{\Pi_{\alpha,\beta},\Pi_{\gamma,\delta}}^R(\mathbf{k},\omega) = -\frac{1}{Z} \sum_{ab} e^{-\beta E_a} \left[\frac{\langle a|\hat{\Pi}_{\alpha,\beta}(\mathbf{k})|b\rangle \langle b|\hat{\Pi}_{\gamma,\delta}(-\mathbf{k})|a\rangle (-E_{ba})}{\omega + i\delta - E_{ba}} - \frac{E_{ba} \langle a|\hat{\Pi}_{\gamma,\delta}(-\mathbf{k})|b\rangle \langle b|\hat{\Pi}_{\alpha,\beta}(\mathbf{k})|a\rangle}{\omega + i\delta + E_{ba}} \right]. \quad (\text{A.38})$$

これを整理することで次の結果が得られる:

$$\sum_{\delta=x,y,z} k_\delta \chi_{\Pi_{\alpha,\beta},\Pi_{\gamma,\delta}}^R(\mathbf{k},\omega) = -\langle [\hat{\Pi}_{\alpha,\beta}(\mathbf{k}), \hat{g}_\gamma(-\mathbf{k})] \rangle + \omega \chi_{\Pi_{\alpha,\beta},g_\gamma}^R(\mathbf{k},\omega). \quad (\text{A.39})$$

この式に $\sum_{\gamma=x,y,z} k_\gamma$ を作用し、再び式 (A.37) を用いると、同様の計算により、

$$\begin{aligned} \omega^2 \chi_{g_\alpha,g_\gamma}(\mathbf{q},\omega) &= \sum_{\beta\delta} k_\beta k_\delta \chi_{\Pi_{\alpha,\beta},\Pi_{\gamma,\delta}}(\mathbf{k},\omega) \\ &+ \sum_{\beta} k_\beta \langle [\hat{\Pi}_{\alpha,\beta}(\mathbf{k}), \hat{g}_\gamma(-\mathbf{k})] \rangle + \omega \langle [\hat{g}_\alpha(\mathbf{k}), \hat{g}_\gamma(-\mathbf{k})] \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

尚、 $\langle [\hat{g}_\alpha(\mathbf{k}), \hat{g}_\gamma(-\mathbf{k})] \rangle = 0$ である。したがって、証明しようとしていた式 (A.32) を得る。

式 (A.32) で $q_x = q_z = 0$ かつ $\alpha = \gamma = x$, $\beta = \delta = y$ の場合を考えると、

$$\omega^2 \chi_{g,g,T}^R(\mathbf{k},\omega) = k_y k_y \chi_{\Pi_{x,y},\Pi_{x,y}}^R(\mathbf{k},\omega) + k_y \langle [\hat{\Pi}_{x,y}(\mathbf{k}), \hat{g}_x(-\mathbf{k})] \rangle. \quad (\text{A.41})$$

また、

$$[\hat{\Pi}_{x,y}(\mathbf{k}), \hat{g}_x(-\mathbf{k})] = k_y \sum_{\mathbf{p},\sigma} \frac{p^2}{3m} c_{\mathbf{p},\sigma}^\dagger c_{\mathbf{p},\sigma}, \quad (\text{A.42})$$

なので、ずり粘性率の表式 (A.30) は、

$$\begin{aligned} \eta &= -\lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{\mathbf{k} \rightarrow 0} \text{Im} \frac{\chi_{\Pi_{x,y},\Pi_{x,y}}^R(\mathbf{k},\omega) + \sum_{\mathbf{p},\sigma} \frac{p^2}{3m} \langle c_{\mathbf{p},\sigma}^\dagger c_{\mathbf{p},\sigma} \rangle}{\omega} \\ &= -\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\text{Im} \chi_{\Pi_{x,y},\Pi_{x,y}}^R(\mathbf{k}=\mathbf{0},\omega)}{\omega}, \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

と変形できる。式 (A.43) では相関関数の ω 依存性のみ評価すればよいので、式 (A.30) を用いるより、ずり粘性率の評価が容易であると考えられる。そのため、本研究においても、式 (A.43) を用いずり粘性率を計算する。なお、本文では表記を簡単にするため $\chi_{\Pi_{x,y},\Pi_{x,y}}^R(\mathbf{k}=\mathbf{0},\omega)$ を $\Xi(\omega)$ と表している。

本論文で扱った質量の異なる 2 成分流体の場合のずり粘性率の公式を考える。2 成分流体であっても、式 (A.2) と同様に、流速 \mathbf{v} を流体の単位質量あたりの全運動量 $\mathbf{g}(\mathbf{r},t)$ と定義する [141]:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r},t) = [m_L n_L(\mathbf{r},t) + m_H n_H(\mathbf{r},t)] \mathbf{v}(\mathbf{r},t). \quad (\text{A.44})$$

ここで $n_L(\mathbf{r}, t)$ および $n_H(\mathbf{r}, t)$ はそれぞれ軽い質量 m_L の成分、重い質量 m_H の成分の粒子数密度を表す。A.1 節の Kadanoff-Martin の議論を適用する際に、初期の大域的熱平衡状態では各成分の粒子数が一致していたとする: ($n_L = n_H \equiv n/2$). ここで n は軽い成分と重い成分の粒子数を合わせた全粒子数密度である。この場合の全運動量 $\mathbf{g}(\mathbf{r}, t)$ は流速 \mathbf{v} の 1 次までで、

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}, t) = \frac{m_L + m_H}{2} n \mathbf{v}(\mathbf{r}, t). \quad (\text{A.45})$$

2 成分流体に対しても、応力テンソルの流体力学における表式 (A.1)、および、運動量保存則 (A.3) はそのまま成立する [141]。従って、2 成分流体のずり粘性率の公式を得るには、A.1 節の議論において、原子の質量 m を平均質量 $(m_L + m_H)/2$ に置き換えれば良い事が分かる。以上より、ずり粘性率の公式 (A.43) は、応力テンソル演算子 $\hat{\Pi}$ を質量インバランスを有する場合に置き換えることで得られる。

付録 B

応力テンソルの表式の導出

この付録では、応力テンソルの表式を導出する。質量インバランスを有する場合を扱うが、質量バランス系の表式を得るには単純に m_L 、 m_H 、および、 m_r を m に置き換えれば良い。応力テンソル演算子 $\hat{\Pi}_{\alpha,\beta}$ ($\alpha, \beta = x, y, z$) は運動量密度演算子、

$$\hat{g} = \sum_{\sigma=L,H} \frac{\psi_{\sigma}^{\dagger}(\nabla\psi_{\sigma}) - (\nabla\psi_{\sigma}^{\dagger})\psi_{\sigma}}{2i}, \quad (\text{B.1})$$

と運動量保存則、

$$\partial_t \hat{g}_{\alpha} + \sum_{\beta=x,y,z} \partial_{\beta} \hat{\Pi}_{\alpha,\beta} = 0, \quad (\text{B.2})$$

を満たすように決まる。短距離ポテンシャル $V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ で相互作用する以下のハミルトニアン、

$$H = \sum_{\sigma=L,H} \int d\mathbf{r} \psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}) \left[\frac{-\nabla^2}{2m_{\sigma}} \right] \psi_{\sigma}(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \psi_L^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_H^{\dagger}(\mathbf{r}') V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \psi_H(\mathbf{r}') \psi_L(\mathbf{r}). \quad (\text{B.3})$$

に対する、応力テンソル演算子は、文献 [142] より、

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_{\alpha,\beta}(\mathbf{r}) = & \sum_{\sigma=L,H} \frac{1}{2m_{\sigma}} \left[(\nabla_{\alpha}\psi_{\sigma}^{\dagger})(\nabla_{\beta}\psi_{\sigma}) + (\nabla_{\beta}\psi_{\sigma}^{\dagger})(\nabla_{\alpha}\psi_{\sigma}) - \frac{1}{2}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}(\psi_{\sigma}^{\dagger}\psi_{\sigma}) \right] \\ & - \int d\mathbf{r}_{12} \frac{(\mathbf{r}_{12})_{\alpha}(\mathbf{r}_{12})_{\beta}}{r_{12}^2} \psi_L^{\dagger}\left(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{r}_{12}\right) \psi_H^{\dagger}\left(\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{r}_{12}\right) \\ & \times \left[r_{12} \frac{\partial V(r_{12})}{\partial r_{12}} \right] \psi_H\left(\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{r}_{12}\right) \psi_L\left(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{r}_{12}\right), \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

で与えられる。したがって、BCS ハミルトニアン (2.46) に対し、 $\partial V(r_{12})/\partial r_{12}$ を求めればよい。この時、応力テンソル演算子 $\hat{\Pi}_{\alpha,\beta}$ の期待値と圧力 P に対し、次の関係式に着目

すると便利である:

$$\frac{1}{3} \int d\mathbf{r} \sum_{\alpha=x,y,z} \langle \Pi_{\alpha,\alpha}(\mathbf{r}) \rangle = PV, \quad (\text{B.5})$$

圧力 P をある演算子の期待値で書くことができれば、演算子の形式を比較することにより $\partial V(r_{12})/\partial r_{12}$ を求めることができる。

圧力 P は、Hellmann-Feynman の定理により以下の式で求めることができる:

$$P = - \left\langle \frac{\partial H}{\partial V} \right\rangle. \quad (\text{B.6})$$

ここで、系は 1 辺の長さが L の立方体の箱に閉じ込められており、周期的境界条件が課されていると仮定する。この場合、運動量 \mathbf{p} は、

$$\mathbf{p} = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}, \quad (\text{B.7})$$

($\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ は量子数) と量子化される。運動量 \mathbf{p} が系のサイズ L に依存していることに注意する。また、式 (2.47) におけるカットオフ運動量、

$$p_c = \frac{2\pi}{L} n_c, \quad (\text{B.8})$$

(n_c は大きい量子数) も、系のサイズ L に依存する。系のサイズ L を $L(1 + \epsilon)$ と変化させることで、式 (B.6) より、

$$\begin{aligned} PV &= - \left\langle \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{H(L(1 + \epsilon)) - H(L)}{(1 + \epsilon)^3 - 1} \right\rangle \\ &= \frac{2}{3} \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \varepsilon_{\mathbf{p}, \sigma} \langle c_{\mathbf{p}, \sigma}^\dagger c_{\mathbf{p}, \sigma} \rangle - \left[U - U^2 \frac{m_r p_c}{6\pi^2} \right] \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{q}} \langle c_{\mathbf{p}+\mathbf{q}, L}^\dagger c_{\mathbf{p}'-\mathbf{q}, H}^\dagger c_{\mathbf{p}', H} c_{\mathbf{p}, L} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

式 (B.9) と式 (B.5) を比較することにより、

$$\frac{(\mathbf{r}_{12})_\alpha (\mathbf{r}_{12})_\beta}{r_{12}^2} \left[r_{12} \frac{\partial V(r_{12})}{\partial r_{12}} \right] = \delta_{\alpha, \beta} \left[\frac{2}{3} U - U^2 \frac{m_r}{12\pi a_s} \right] \delta(\mathbf{r}_{12}). \quad (\text{B.10})$$

これを式 (B.3) に代入することにより、応力テンソル演算子の表式、

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha, \beta}(\mathbf{r}) &= \sum_{\sigma=L, H} \frac{1}{2m_\sigma} \left[(\nabla_\alpha \psi_\sigma^\dagger)(\nabla_\beta \psi_\sigma) + (\nabla_\beta \psi_\sigma^\dagger)(\nabla_\alpha \psi_\sigma) - \frac{1}{2} \nabla_\alpha \nabla_\beta (\psi_\sigma^\dagger \psi_\sigma) \right] \\ &\quad - \delta_{\alpha, \beta} \left[\frac{2}{3} U - U^2 \frac{m_r}{12\pi a_s} \right] \psi_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}) \psi_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}) \psi_\downarrow(\mathbf{r}) \psi_\uparrow(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

を得る。

付録 C

Boltzmann 方程式によるずり粘性率

ここでは、Boltzmann 方程式によるずり粘性率 η の計算法と、その極限についてまとめる。2 成分の Fermi 原子気体に対する Boltzmann 方程式は、

$$\frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{r}} = -C[f]. \quad (\text{C.1})$$

ただし、外場ははたらいっていないとした。式 (C.1) において、 $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ は準古典分布関数、また $C[f]$ は衝突積分項で、

$$C[f] = \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}', \mathbf{p}'_1} \frac{d\sigma}{d\Omega} (2\pi) \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}} + \varepsilon_{\mathbf{p}_1} - \varepsilon_{\mathbf{p}'} - \varepsilon_{\mathbf{p}'_1}) \delta_{\mathbf{p}+\mathbf{p}_1, \mathbf{p}'+\mathbf{p}'_1} \\ \times [f f_1 (1-f')(1-f'_1) - (1-f)(1-f_1) f' f'_1], \quad (\text{C.2})$$

と与えられる。式 (C.2) 中の $d\sigma/d\Omega$ は、2 原子間の相互作用に因る微分散乱断面積であり、散乱前に運動量 \mathbf{p} と \mathbf{p}_1 を持っていた 2 粒子状態が、散乱後に運動量 \mathbf{p}' と \mathbf{p}'_1 を持つ 2 粒子状態になる確率を表す。また。表記の簡単化のため、 $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, $f_1 = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, t)$, $f' = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}', t)$, $f'_1 = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}'_1, t)$ と略記している。

ずり粘性率 η を求めるため、流速が $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (u_x(y), 0, 0)$ で与えられる、流れのある定常状態を考える。ただし、流速 $u_x(y)$ およびその勾配 $\partial u_x / \partial y$ は小さいとする。この状況では、ずり粘性率 η は、応力テンソルの xy 成分 $\Pi_{x,y}$ の流速の勾配 $\partial u_x / \partial y$ の比例係数として与えられる:

$$\Pi_{x,y} = -\eta \frac{\partial u_x}{\partial y}. \quad (\text{C.3})$$

一方、応力テンソルの xy 成分 $\Pi_{x,y}$ は準古典分布関数を用い、次のように表される:

$$\Pi_{x,y}(\mathbf{r}, t) = 2 \sum_{\mathbf{p}} \frac{p_x p_y}{m} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t). \quad (\text{C.4})$$

応力テンソルの xy 成分の式 (C.4) を流速の勾配と関係付けるため、準古典分布関数 $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ を、局所熱平衡分布関数 $f_{\text{loc}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ と、それからのずれ $\delta f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ に分ける。この時局所熱平衡分布関数 $f_{\text{loc}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ は、

$$f_{\text{loc}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{e^{(\xi_{\mathbf{p}} - \mathbf{u}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{p})/T} + 1}, \quad (\text{C.5})$$

で与えられる。さらに、 $\delta f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ を次のように表すと便利である:

$$\delta f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = -\frac{1}{T} f_{\text{loc}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) [1 - f_{\text{loc}}(\mathbf{r}, \mathbf{p})] \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{p}). \quad (\text{C.6})$$

式 (C.5) と式 (C.6) を式 (C.4) に代入し、流速 $u_x \rightarrow 0$ の極限を考えることにより、ずり粘性率を、

$$\eta = -2 \sum_{\mathbf{p}} \frac{p_x p_y}{m} \frac{\partial n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{p}})}{\partial \xi_{\mathbf{p}}} \Phi(\mathbf{p}), \quad (\text{C.7})$$

と表す事ができる。ここで流速 $u_x \rightarrow 0$ の極限において $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ は \mathbf{r} 依存性を失うので $\Phi(\mathbf{p})$ とした。また、

$$n_{\text{F}}(x) = \frac{1}{e^{x/T} + 1}, \quad (\text{C.8})$$

は熱平衡 Fermi 分布関数である。

式 (C.6) の $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ を求めるため、Boltzmann 方程式 (C.1)、および、衝突積分 (C.2) に対し準古典分布関数 $f = f_{\text{loc}} + \delta f$ を代入し、 $\partial u_x / \partial y$ について線形化する。線形化された Boltzmann 方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{p_x p_y}{m} f^0 [1 - f^0] &= \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}', \mathbf{p}'_1} \frac{d\sigma}{d\Omega} (2\pi) \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}} + \varepsilon_{\mathbf{p}_1} - \varepsilon_{\mathbf{p}'} - \varepsilon_{\mathbf{p}'_1}) \delta_{\mathbf{p} + \mathbf{p}_1, \mathbf{p}' + \mathbf{p}'_1} \\ &\times f^0 f_1^0 [1 - f^{0'}] [1 - f_1^{0'}] [\Phi(\mathbf{p}) + \Phi(\mathbf{p}_1) - \Phi(\mathbf{p}') - \Phi(\mathbf{p}'_1)]. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

ここで $f^0 = n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{p}})$, $f_1^0 = n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{p}_1})$, $f^{0'} = n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{p}'})$, $f_1^{0'} = n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{p}'_1})$ である。以上のように、 $\Phi(\mathbf{p})$ を線形化された Boltzmann 方程式 (C.9) より求め、式 (C.7) に代入することでずり粘性率 η を求めることができる。

次に、線形化された Boltzmann 方程式 (C.9) において、近似的に $\Phi(\mathbf{p})$ を決める方法について述べる。ここでは、変分法に基づく方法 [74] を取り上げる。線形化された Boltzmann 方程式 (C.9) は、形式的には線形の非斉次積分方程式 $X = H\Phi$ とみなせる。ここで $X = p_x p_y / m$ であり、線形演算子 H は、

$$\begin{aligned} H\Phi &= \frac{1}{f^0 [1 - f^0]} \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}', \mathbf{p}'_1} \frac{d\sigma}{d\Omega} (2\pi) \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}} + \varepsilon_{\mathbf{p}_1} - \varepsilon_{\mathbf{p}'} - \varepsilon_{\mathbf{p}'_1}) \delta_{\mathbf{p} + \mathbf{p}_1, \mathbf{p}' + \mathbf{p}'_1} \\ &\times f^0 f_1^0 [1 - f^{0'}] [1 - f_1^{0'}] [\Phi(\mathbf{p}) + \Phi(\mathbf{p}_1) - \Phi(\mathbf{p}') - \Phi(\mathbf{p}'_1)]. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

である。今、内積 (A, B) を、

$$(A, B) = \sum_{\mathbf{p}} A(\mathbf{p})B(\mathbf{p})n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{p}})[1 - n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{p}})], \quad (\text{C.11})$$

で定義する。この内積に対し、Cauchy-Schwarz の不等式により、任意の関数 $U(\mathbf{p})$ について次の不等式が成り立つ:

$$(U, HU)(\Phi, H\Phi) \geq (U, H\Phi)^2, \quad (\text{C.12})$$

が成り立つ。ただし、等号は $U(\mathbf{p}) = \Phi(\mathbf{p})$ の時に成り立つ。線形化された Boltzmann 方程式 $X = H\Phi$ より、

$$(U, HU)(\Phi, X) \geq (U, X)^2, \quad (\text{C.13})$$

が成り立つ。一方、式 (C.7) は、

$$\eta = \frac{2}{T}(\Phi, X), \quad (\text{C.14})$$

と表すことができるので、任意の関数 $U(\mathbf{p})$ に対し、

$$\eta \geq \frac{2}{T} \frac{(U, X)^2}{(U, HU)}, \quad (\text{C.15})$$

が成り立つ。以上の議論から、様々な関数 $U(\mathbf{p})$ のうち、式 (C.15) の右辺が最大になる関数 $U(\mathbf{p})$ を求めれば、その $U(\mathbf{p})$ が線形化された Boltzmann 方程式の解 $\Phi(\mathbf{p})$ である。対称性より $\Phi(\mathbf{p})$ は $p_x p_y / m$ に比例するので、以下では $U(\mathbf{p}) = p_x p_y / m (= X)$ とおく。ずり粘性率は、

$$\eta = \frac{2}{T} \frac{(X, X)^2}{(X, HX)}, \quad (\text{C.16})$$

で与えられる。式 (C.16) で与えられるずり粘性率は、古典気体に対し、主要な補正項を含めた場合とのずれは、2% 以内であることが分かっている [78]。

3章で扱う ${}^6\text{Li}$ や ${}^{40}\text{K}$ Fermi 原子気体に対し、以上の Boltzmann 方程式によるずり粘性率の解析を適用し、高温極限と弱結合領域の低温極限を議論する。 ${}^6\text{Li}$ や ${}^{40}\text{K}$ Fermi 原子気体においては、Feshbach 共鳴による相互作用がもたらす微分散乱断面積は以下で与えられる [73, 74, 78]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a_s^2}{1 + (ka_s)^2}. \quad (\text{C.17})$$

ここで $k = |\mathbf{p} - \mathbf{p}_1|/2$ (\mathbf{p}, \mathbf{p}_1 は散乱前の 2 粒子の運動量) である。3章の図 3.2 に示す Boltzmann 方程式の結果は、式 (C.17) の微分散乱断面積を線形化された Boltzmann 方

程式 (C.9) に適用したものを、SCTMA の化学ポテンシャル $\mu(T)$ を用いて式 (C.16) により求めたものである。

次に、式 (C.17) の微分散乱断面積を用いた場合のずり粘性率の高温極限、および、低温極限の表式をまとめておく [73, 74]。 $T \gg T_F$ の古典高温極限では、

$$\eta = \frac{5\sqrt{\pi m T}}{8\bar{\sigma}}, \quad (\text{C.18})$$

と与えられ、

$$\bar{\sigma} = \frac{4\pi a_s^2}{3} \int_0^\infty dx x^7 \frac{e^{-x^2}}{1 + x^2 T m a_s^2}. \quad (\text{C.19})$$

式 (C.19) の積分は $T \gg 1/(m a_s^2)$ と $T \ll 1/(m a_s^2)$ の場合には評価することができ [73, 74]、次の表式を得る:

$$\eta = \begin{cases} \frac{15}{32\sqrt{\pi}} (mT)^{\frac{3}{2}} & \left(T \gg \frac{1}{m a_s^2} \right), \\ \frac{5}{32\sqrt{\pi} a_s^2} (mT)^{\frac{1}{2}} & \left(T \ll \frac{1}{m a_s^2} \right). \end{cases} \quad (\text{C.20})$$

弱結合の低温極限 ($T \ll T_F$) では、式 (C.16) は以下のように与えられる [73, 74]:

$$\eta = \frac{3n}{8\pi(k_F a_s)^2} \left(\frac{T_F}{T} \right)^2. \quad (\text{C.21})$$

上述の古典領域と量子領域のずり粘性率の背景物理を簡単に説明する。まず、高温領域のずり粘性率、特に式 (C.20) について述べる。ずり粘性率の評価式 $\eta \sim n l_{\text{mfp}} \bar{p}$ [103] において、平均自由行程 l_{mfp} は粒子数密度 n と散乱断面積 σ を用い、

$$l_{\text{mfp}} \sim 1/(n\sigma), \quad (\text{C.22})$$

と評価される [103]。また、平均運動量 \bar{p} は高温領域においては、

$$\bar{p} \sim \sqrt{mT}, \quad (\text{C.23})$$

と評価される。散乱断面積 σ が、 $T \gg 1/(m a_s^2)$ と $T \ll 1/(m a_s^2)$ で異なる振る舞いをする。 $T \ll 1/(m a_s^2)$ の時、すなわち、熱的 de-Broglie 波長 $\lambda_T = 1/\sqrt{mT}$ が散乱長 $|a_s|$ より十分大きいとき、散乱が起きる領域の面積は a_s^2 程度であるので、散乱断面積 σ は a_s^2 に比例する。この場合、 $\eta \propto T^{1/2}$ となり、式 (C.20) の $T \ll 1/(m a_s^2)$ の場合の温度依存性を説明する。一方、 $T \gg 1/(m a_s^2)$ の場合、つまり、熱的 de-Broglie 波長 λ_T が散乱長 $|a_s|$ より十分小さいとき、散乱が起きる領域の面積は λ_T^2 である。これは散乱するためには粒子の波動関数が重ならなければならないためである。よって、散乱断面積は $\sigma \propto 1/(mT)$ と評価され、ずり粘性率として $\eta \propto T^{3/2}$ を得る。これは式 (C.20) の $T \gg 1/(m a_s^2)$ の場合のずり粘性率の温度依存性を説明する。

低温の Fermi 縮退領域においてもずり粘性率の評価式 $\eta \sim nl_{\text{mfp}}\bar{p}$ を用いて議論することができる。Fermi 縮退が起きているため、平均運動量 \bar{p} は Fermi 波数 k_F 程度である。また、平均自由行程は、

$$l_{\text{mfp}} \sim v_F \tau \propto T^{-2}, \quad (\text{C.24})$$

と評価される。ここで $v_F = k_F/m$ は Fermi 速度であり、 τ は粒子間散乱に由来する準粒子の寿命であり、Pauli の排他律から、

$$\tau \propto T^{-2}, \quad (\text{C.25})$$

となる。これらより、 $\eta(T) \propto T^{-2}$ を得る。

付録 D

Bose 分子に対する有効分子間相互作用および崩壊レートの強結合極限

ここでは、強結合 BEC 極限における、質量バランス系の、多体散乱行列の近似式 (3.10)、有効分子間相互作用の表式 (3.16)、および、崩壊レートの表式 (3.29) を導出する。また、質量インバランスを有する場合の、多体散乱行列の近似式、有効分子間相互作用の式 (4.8)、 s 波散乱長 (4.9)、および、崩壊レート (4.10) についても導出する。

D.1 質量バランス系の場合

強結合 BEC 極限では、Fermi 化学ポテンシャル μ が、

$$\mu \simeq -\frac{E_{\text{bind}}}{2} = -\frac{1}{2ma_s^2}, \quad (\text{D.1})$$

と評価されるので、 $|\mu| \gg T$ を満たす。この場合の、Fermi 原子の分散関係を引数に持つ Fermi 分布関数は、

$$n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{p}}) = \frac{1}{e^{(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu)/T} + 1} \simeq 0, \quad (\text{D.2})$$

と無視できる。

強結合 BEC 極限の多体散乱行列 Γ を得るため、対相関関数 Π を、SCTMA の Green 関数 G を自由粒子の Green 関数 G_0 に置き換え評価する。松原周波数の和を処理すると、

$$\Pi(\mathbf{q}, i\nu_m) \simeq \sum_{\mathbf{p}} \frac{-1 + n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{q}/2+\mathbf{p}}) + n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{q}/2-\mathbf{p}})}{i\nu_m - n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{q}/2+\mathbf{p}}) - n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{q}/2-\mathbf{p}})}. \quad (\text{D.3})$$

式 (D.2) より、Fermi 分布関数は無視できることを用いると、

$$\Pi(\mathbf{q}, i\nu_m) \simeq \sum_{\mathbf{p}} \frac{m}{p^2} - \frac{m\sqrt{m}}{4\pi} \sqrt{-i\nu_m + 2\mu + \frac{q^2}{4m}}, \quad (\text{D.4})$$

を得る。したがって、多体散乱行列 Γ は、式 (2.11) より、

$$\Gamma(\mathbf{q}, i\nu_m) \simeq \frac{1}{\frac{m}{4\pi a_s} - \frac{m\sqrt{m}}{4\pi} \sqrt{-i\nu_m + 2\mu + \frac{q^2}{4m}}} = \frac{4\pi}{m^2 a_s} \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{i\nu_m - \xi_{\mathbf{q}}^{\text{B}}}{E_{\text{bind}}}}}{i\nu_m - \xi_{\mathbf{q}}^{\text{B}}}. \quad (\text{D.5})$$

ここで、 $\mu_{\text{B}} = 2\mu + E_{\text{bind}}$ 、および、 $\xi_{\mathbf{q}}^{\text{B}} = q^2/(4m) - \mu_{\text{B}}$ である。低エネルギー領域、

$$\left| i\nu_m - \frac{q^2}{4m} + \mu_{\text{B}} \right| \ll E_{\text{bind}}, \quad (\text{D.6})$$

を考えることにより、

$$\Gamma(\mathbf{q}, i\nu_m) = \frac{8\pi}{m^2 a_s} \frac{1}{i\nu_m - \frac{q^2}{4m} + \mu_{\text{B}}}, \quad (\text{D.7})$$

と式 (3.10) を得る。

次に、質量バランス系の有効分子間相互作用の表式 (3.16) を導く。図 3.10(b) の 4 つの Fermi 原子で表される部分 ($\equiv A$ とする) を、SCTMA の Green 関数 G を自由粒子の Green 関数 G_0 に置き換えることで評価する。Fermi 分布関数は無視できることに注意して、

$$A = T \sum_{\mathbf{p}, i\omega_n} G_0(\mathbf{p}, i\omega_n)^2 G_0(-\mathbf{p}, -i\omega_n)^2 \simeq \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{4\xi_{\mathbf{p}}^3}, \quad (\text{D.8})$$

を得る。更に運動量積分を処理すると、

$$A = \frac{m^3}{16\pi} \frac{1}{(2m|\mu|)^{3/2}}. \quad (\text{D.9})$$

また、強結合 BEC 極限の超流動相転移温度 T_c 近傍では、化学ポテンシャル μ は式 (D.1) より、 $\mu \simeq -1/(2ma_s^2)$ なので、

$$A = \frac{m^3 a_s^3}{16\pi} = \left(\frac{m^2 a_s}{8\pi} \right)^2 \frac{4\pi a_s}{m}. \quad (\text{D.10})$$

ここで、多体散乱行列 Γ と Bose 分子の Green 関数 B は、

$$\Gamma(\mathbf{q}, i\nu_m) = \frac{8\pi}{m^2 a_s} B(\mathbf{q}, i\nu_m), \quad (\text{D.11})$$

の関係があり、図 3.10 を、Bose 分子の自由度 B のみで表す際には、余分な因子 $8\pi/(m^2 a_s)$ を処理する必要がある。この余分な因子は、Bose 分子の Green 関数が入ったり出てきたりする、4 つの Fermi 原子の部分 A や頂点関数に、余分な因子の半分 $\sqrt{8\pi/(m^2 a_s)}$ を掛けて繰り込んでしまい、それらを Bose 分子に対する有効的な相互作用や頂点関数とみなすことで、処理される [34, 143]。処理された後の 4 つの Fermi 原子の部分は、有効分子間相互作用 U_B を見做すことができ、その大きさは、

$$U_B = \left(\frac{8\pi}{m^2 a_s} \right)^2 A = \frac{4\pi a_s}{m}, \quad (\text{D.12})$$

と与えられる。また、有効分子間相互作用 U_B は、質量 $M = 2m$ の Bose 分子間散乱の散乱長 a_B と、

$$U_B = \frac{4\pi a_B}{M}, \quad (\text{D.13})$$

と関係づけられるので、

$$a_B = 2a_s, \quad (\text{D.14})$$

で与えられ、式 (3.16) を得る。

更に、質量バランス系の分子の崩壊レートの表式 (3.29) を導出する。先ず、強結合 BEC 領域では、

$$E_{\mathbf{p}} \simeq \varepsilon_{\mathbf{p}} + \frac{E_{\text{bind}}}{2}, \quad (\text{D.15})$$

と近似できることを示す。そのために、擬ギャップパラメーター Δ_{pg} の強結合 BEC 極限を評価する。擬ギャップパラメーターの表式 (3.22) に強結合極限の多体散乱行列 Γ の表式 (D.7) を代入することで、

$$\Delta_{\text{pg}}^2 \simeq \frac{8\pi}{m^2 a_s} \left[\sum_{\mathbf{q}} n_B(\xi_{\mathbf{q}}^B) \right]. \quad (\text{D.16})$$

上式の角括弧の中身は、Bose 分子数密度に相当する。強結合 BEC 領域では、ほとんど全ての Fermi 原子が Bose 分子を組んでいるので、Bose 原子数密度は Fermi 原子数密度 n の半分 $n/2$ であると考えられる。したがって、擬ギャップパラメーター Δ_{pg} は、

$$\Delta_{\text{pg}} \simeq \sqrt{\frac{8\pi}{m^2 a_s} \frac{n}{2}}, \quad (\text{D.17})$$

と、評価され、 Δ_{pg} は $E_{\text{bind}} \simeq 2|\mu|$ に比べて非常に小さい。したがって、 $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{p}}^2 + \Delta_{\text{pg}}^2}$ において、 $\xi_{\mathbf{p}} \gg \Delta_{\text{pg}}$ であるから、

$$E_{\mathbf{p}} \sim \xi_{\mathbf{p}} = \varepsilon_{\mathbf{p}} + \frac{E_{\text{bind}}}{2}, \quad (\text{D.18})$$

と近似できる。

式 (D.15) を用い、分子の崩壊レート $\gamma(\mathbf{q}, \omega \geq 0)$ の表式 (3.29) を導出する。式 (3.24) の 2 項目は、式 (D.15) より、

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{q}, \omega \geq 0) &\simeq \pi \frac{\Delta_{\text{pg}}^2}{|\mu|^2} \sum_{\mathbf{p}} e^{-E_{\text{bind}}/(2T)} \exp \left[-\frac{1}{2mT} \left(p^2 + \frac{q^2}{4} \right) \right] \\ &\quad \times \sinh \left(\frac{1}{2mT} pq \cos \theta \right) \delta \left(\omega - \frac{pq}{m} \cos \theta \right). \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

ここで θ は \mathbf{p} と \mathbf{q} のなす角度である。運動量積分のうち、角度積分を処理すると、

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{q}, \omega \geq 0) &\simeq \frac{\Delta_{\text{pg}}^2}{|\mu|^2} \frac{1}{4\pi} \frac{m}{q} e^{-E_{\text{bind}}/(2T)} \exp \left[-\frac{q^2}{8mT} \right] \\ &\quad \times \sinh \left(\frac{\omega}{2T} \right) \int_{m\omega/q}^{\infty} p dp \exp \left[-\frac{p^2}{2mT} \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

さらに、運動量の動径方向の積分を処理すると、分子の崩壊レート $\gamma(\mathbf{q}, \omega \geq 0)$ として以下を得る:

$$\gamma(\mathbf{q}, \omega \geq 0) \simeq \frac{m^2 \Delta_{\text{pg}}^2}{8\pi |\mu|^2} \left(\frac{2T}{q} \right) \sinh \left(\frac{\omega}{2T} \right) e^{-\frac{q^2}{8mT}} e^{-\frac{m}{2T} \left(\frac{\omega}{q} \right)^2} e^{-\frac{E_{\text{bind}}}{2T}}. \quad (\text{D.21})$$

低運動量、低エネルギー極限 ($\mathbf{q} \sim \mathbf{0}$, $\omega \sim 0$) を考える事により、分子の崩壊レート $\gamma(\mathbf{q}, \omega \geq 0)$ の表式 (3.29) を得る。

D.2 質量インバランスを有する場合

質量インバランスを有する場合においては、強結合 BEC 極限では、重い成分と軽い成分の化学ポテンシャルは、

$$\mu_{\text{L}} + \mu_{\text{H}} = -E_{\text{bind}} = -\frac{1}{m_{\text{r}} a_{\text{s}}^2}, \quad (\text{D.22})$$

を満たす。このままではそれぞれの化学ポテンシャルの符号を決めることはできないが、図 2.7 より、強結合領域 ($(k_{\text{F}} a_{\text{s}})^{-1} \gtrsim 1$) では、両方の化学ポテンシャルは負の値を示す。したがって、十分強結合領域 ($(k_{\text{F}} a_{\text{s}})^{-1} \rightarrow \infty$) では、軽い成分、重い成分、両方の化学ポテンシャルは負の絶対値の大きい値を取る。結果として、バランス系の場合と同様に、Fermi 分布関数の寄与を無視することが出来る。

最初に、強結合極限では、多体散乱行列 Γ が質量 $M = m_{\text{L}} + m_{\text{H}}$ の Bose 分子の Green 関数に近似出来ることを説明する。対相関関数 Π を、SCTMA の Green 関数 G_{σ} を自由

粒子の Green 関数 $G_{0,\sigma}$ に置き換えることで評価する。Fermi 分布関数の寄与を無視できるので、

$$\Pi(\mathbf{q}, i\nu_m) \simeq \sum_{\mathbf{p}} \frac{m_r}{p^2} - \frac{m_r \sqrt{m_r}}{4\pi} \sqrt{-i\nu_m + 2\mu + \frac{q^2}{2M}}. \quad (\text{D.23})$$

したがって、多体散乱行列 Γ は、低エネルギー領域を考えることにより、

$$\Gamma(\mathbf{q}, i\nu_m) \simeq \frac{8\pi}{m_r^2 a_s} \frac{1}{i\nu_m - \frac{q^2}{2M} + \mu_B}. \quad (\text{D.24})$$

ここで、 $\mu_B = 2\mu + E_{\text{bind}}$ である。質量バランス系の場合に比べて、分子の運動エネルギー $q^2/(4m)$ が $q^2/[2(m_L + m_H)]$ に、すなわち、分子の質量 $2m$ が $m_L + m_H$ に、また、係数の因子に現れている Fermi 原子の質量 m が、換算質量の 2 倍 m_r に置き換わっている。

有効分子間相互作用の式 (4.8)、および、分子間散乱に関する s 波散乱長 (4.9) の導出について述べる。この場合でも、やはり図 3.10(b) の 4 つの Fermi 原子で表される部分の、質量インバランスを有する場合のもので、分子間相互作用は媒介される。その部分を A と置くと、

$$A = T \sum_{\mathbf{p}, i\omega_n} G_{L,0}(\mathbf{p}, i\omega_n)^2 G_{H,0}(-\mathbf{p}, -i\omega_n)^2. \quad (\text{D.25})$$

Fermi 分布関数を無視できることを利用し、

$$A \simeq \sum_{\mathbf{p}} \frac{2}{(\xi_{\mathbf{p},L} + \xi_{\mathbf{p},H})^3} = \sum_{\mathbf{p}} \frac{2m_r^3}{(p^2 + m_r|\mu_L + \mu_H|)^3} = \frac{m_r^3}{16\pi} \frac{1}{(m_r|\mu_L + \mu_H|)^{3/2}}. \quad (\text{D.26})$$

更に、式 (D.22) を用いることで、

$$A \simeq \frac{m_r^3 a_s^3}{16\pi}, \quad (\text{D.27})$$

とバランス系の対応する式 (D.10) において、Fermi 原子の質量 m を換算質量の 2 倍 m_r に置き換えた式を得る。バランス系と同様の処理をすることで、有効分子間相互作用は、

$$U_B = \frac{4\pi a_s}{m_r}, \quad (\text{D.28})$$

と与えられる。ここでもやはり、バランス系の対応する式 (D.12) において、 m を m_r に置き換えたものが得られる。この有効相互作用は、質量 $M = m_L + m_H$ の Bose 分子間の散乱長 a_B とは、

$$U_B = \frac{4\pi a_B}{M}, \quad (\text{D.29})$$

と関係付けられるので、

$$a_B = \frac{M}{m_r} a_s = \frac{(m_L + m_H)^2}{2m_L m_H} a_s. \quad (\text{D.30})$$

この式は、 $m_L = m_H$ でバランス系の式 (D.14) に帰着するが、質量比 (m_L/m_H) を 1 から小さくしていくにつれ、大きくなることに注意する。

最後に、質量インバランスを有する場合の Bose 分子の崩壊レートの表式 (4.10) の導出を述べる。質量インバランスを有する場合においても、以下の単純な自己エネルギーを用いて分子の寿命を評価する:

$$\Sigma_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n) = -\Delta_{\text{pg}}^2 G_{0,-\sigma}(-\mathbf{p}, -i\omega_n). \quad (\text{D.31})$$

ここで擬ギャップパラメーター Δ_{pg} は式 (4.12) で与えられる。この場合、Green 関数 G は、

$$G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n) = \frac{i\omega_n + \xi_{\mathbf{p},-\sigma}}{(i\omega_n - \xi_{\mathbf{p},\sigma})(i\omega_n + \xi_{\mathbf{p},-\sigma}) - \Delta_{\text{pg}}^2}. \quad (\text{D.32})$$

この Green 関数を部分分数分解すると、

$$G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n) = \frac{E_{\mathbf{p}} + \xi_{\mathbf{p},\text{av}}}{2E_{\mathbf{p}}} \frac{1}{i\omega_n - E_{\mathbf{p},\sigma,+}} + \frac{E_{\mathbf{p}} - \xi_{\mathbf{p},\text{av}}}{2E_{\mathbf{p}}} \frac{1}{i\omega_n - E_{\mathbf{p},\sigma,-}}. \quad (\text{D.33})$$

ここで、

$$E_{\mathbf{p},\sigma,\pm} = \frac{\xi_{\mathbf{p},\sigma} - \xi_{\mathbf{p},-\sigma}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\xi_{\mathbf{p},\sigma} + \xi_{\mathbf{p},-\sigma}}{2}\right)^2 + \Delta_{\text{pg}}^2}, \quad (\text{D.34})$$

$$\xi_{\mathbf{p},\text{av}} = \frac{\xi_{\mathbf{p},\sigma} + \xi_{\mathbf{p},-\sigma}}{2}, \quad (\text{D.35})$$

$$E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{p},\text{av}}^2 + \Delta_{\text{pg}}^2}. \quad (\text{D.36})$$

強結合 BEC 領域では、先述したように、軽い成分、重い成分、両方の化学ポテンシャルが、 $\mu_\sigma \simeq E_{\text{bind}}/2$ と、負で絶対値の大きい値をとる。一方、擬ギャップパラメーターは、質量バランス系と同様の解析により、

$$\Delta_{\text{pg}} \simeq \sqrt{\frac{8\pi}{m_r^2 a_s} \frac{n}{2}}, \quad (\text{D.37})$$

と、化学ポテンシャルに比べて小さい。そのため、質量インバランスを有する場合でも、 $E_{\mathbf{p},\sigma} \simeq \varepsilon_{\mathbf{p},\sigma} + |\mu_\sigma|$ と近似でき、

$$E_{\mathbf{p},\sigma,\pm} \sim \pm \xi_{\mathbf{p},\pm\sigma}, \quad (\text{D.38})$$

を得る。この場合の Green 関数は、

$$G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n) \simeq \frac{1}{i\omega_n - \xi_{\mathbf{p},\sigma}} + \frac{\Delta_{\text{pg}}^2}{4|\mu_{\text{av}}|^2} \frac{1}{i\omega_n + \xi_{\mathbf{p},-\sigma}}. \quad (\text{D.39})$$

ここで、

$$\mu_{\text{av}} = \frac{\mu_{\text{L}} + \mu_{\text{H}}}{2}, \quad (\text{D.40})$$

を用いた。

対相関関数 Π に対し、式 (D.39) を代入、松原周波数の和を処理、解析接続 $i\nu_m \rightarrow \omega + i\delta$ をし虚部をとることで、Bose 分子の崩壊レート $\gamma(\mathbf{q}, \omega \geq 0)$ は、

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{q}, \omega \geq 0) &= -\pi \sum_{\mathbf{p}} [-1 + n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{q}/2+\mathbf{p},\text{L}}) + n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{q}/2-\mathbf{p},\text{H}})] \delta(\omega - \xi_{\mathbf{q}/2+\mathbf{p},\text{L}} - \xi_{\mathbf{q}/2-\mathbf{p},\text{H}}) \\ &\quad - \pi \sum_{\mathbf{p}} \frac{\Delta_{\text{pg}}^2}{4|\mu_{\text{av}}|^2} [n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{q}/2+\mathbf{p},\text{L}}) - n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{q}/2-\mathbf{p},\text{L}})] \delta(\omega - \xi_{\mathbf{q}/2+\mathbf{p},\text{L}} + \xi_{\mathbf{q}/2-\mathbf{p},\text{L}}) \\ &\quad - \pi \sum_{\mathbf{p}} \frac{\Delta_{\text{pg}}^2}{4|\mu_{\text{av}}|^2} [n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{q}/2+\mathbf{p},\text{H}}) - n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{q}/2-\mathbf{p},\text{H}})] \delta(\omega + \xi_{\mathbf{q}/2+\mathbf{p},\text{H}} - \xi_{\mathbf{q}/2-\mathbf{p},\text{H}}). \end{aligned} \quad (\text{D.41})$$

1 項目は、バンド間散乱であり、分子の乖離に相当し、 $\omega \geq |\mu_1 + \mu_2| = 2/m_r a_s$ の励起エネルギーを必要とするので、低エネルギーの分子の寿命には寄与しない。2 項目及び 3 項目は、バンド内散乱であり、バランス系の場合と同様分子の寿命に寄与する。バランス系の場合と同様に計算することで、低運動量低エネルギー領域で、

$$\gamma(\mathbf{q}, \omega \geq 0) \simeq \sum_{\sigma} \frac{m_{\sigma}^2 \Delta_{\text{pg}}^2}{16\pi |\mu_{\text{av}}|^2} e^{\mu_{\sigma}/T} \left(\frac{\omega}{q} \right) e^{-\frac{m_{\sigma}}{2T} \left(\frac{\omega}{q} \right)^2}, \quad (\text{D.42})$$

と質量インバランスを有する場合の Bose 分子の崩壊レートの表式 (4.10) を得る。

参考文献

- [1] P. K. Kovtun, D. T. Son, and A. O. Starinets, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 111601 (2005).
- [2] S. Chu, *Science* **253**, 861 (1991),
- [3] W. Ketterle and N. V. Druten, *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* **37**, 181 (1996).
- [4] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1215 (2008).
- [5] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 885 (2008).
- [6] C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, and E. Tiesinga, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1225 (2010).
- [7] J. K. Chin, D. E. Miller, Y. Liu, C. Stan, W. Setiawan, C. Sanner, K. Xu, and W. Ketterle, *Nature* **443**, 961 (2006).
- [8] M. G. Ries, A. N. Wenz, G. Zürn, L. Bayha, I. Boettcher, D. Kedar, P. A. Murthy, M. Neidig, T. Lompe, and S. Jochim, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 230401 (2015).
- [9] P. A. Murthy, I. Boettcher, L. Bayha, M. Holzmann, D. Kedar, M. Neidig, M. G. Ries, A. N. Wenz, G. Zürn, and S. Jochim, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 010401 (2015).
- [10] J.-P. Brantut, J. Meineke, D. Stadler, S. Krinner, and T. Esslinger, *Science* **337**, 1069 (2012),
- [11] J.-P. Brantut, C. Grenier, J. Meineke, D. Stadler, S. Krinner, C. Kollath, T. Esslinger, and A. Georges, *Science* **342**, 713 (2013),
- [12] K. O. Chong, J.-R. Kim, J. Kim, S. Yoon, S. Kang, and K. An, *Commun. Phys.* **1**, 25 (2018).
- [13] J. Dalibard, F. Gerbier, G. Juzeliūnas, and P. Öhberg, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 1523 (2011).
- [14] P. Wang, Z.-Q. Yu, Z. Fu, J. Miao, L. Huang, S. Chai, H. Zhai, and J. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 095301 (2012).

- [15] E. Wille, F. M. Spiegelhalder, G. Kerner, D. Naik, A. Trenkwalder, G. Hendl, F. Schreck, R. Grimm, T. G. Tiecke, J. T. M. Walraven, S. J. J. M. F. Kokkelmans, E. Tiesinga, and P. S. Julienne, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 053201 (2008).
- [16] M. Taglieber, A.-C. Voigt, T. Aoki, T. W. Hänsch, and K. Dieckmann, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 010401 (2008).
- [17] A. Trenkwalder, C. Kohstall, M. Zaccanti, D. Naik, A. I. Sidorov, F. Schreck, and R. Grimm, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 115304 (2011).
- [18] A.-C. Voigt, M. Taglieber, L. Costa, T. Aoki, W. Wieser, T. W. Hänsch, and K. Dieckmann, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 020405 (2009).
- [19] C. Ravensbergen, V. Corre, E. Soave, M. Kreyer, S. Tzanova, E. Kirilov, and R. Grimm, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 223001 (2018).
- [20] C. Ravensbergen, V. Corre, E. Soave, M. Kreyer, E. Kirilov, and R. Grimm, *Phys. Rev. A* **98**, 063624 (2018).
- [21] C. Ravensbergen, E. Soave, V. Corre, M. Kreyer, B. Huang, E. Kirilov, and R. Grimm, arXiv:1909.03424 [cond-mat.quant-gas].
- [22] S. Inouye, J. Goldwin, M. L. Olsen, C. Ticknor, J. L. Bohn, and D. S. Jin, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 183201 (2004).
- [23] K.-K. Ni, S. Ospelkaus, M. H. G. de Miranda, A. Pe'er, B. Neyenhuis, J. J. Zirbel, S. Kotochigova, P. S. Julienne, D. S. Jin, and J. Ye, *Science* **322**, 231 (2008),
- [24] L. De Marco, G. Valtolina, K. Matsuda, W. G. Tobias, J. P. Covey, and J. Ye, *Science* **363**, 853 (2019).
- [25] J. W. Park, C.-H. Wu, I. Santiago, T. G. Tiecke, S. Will, P. Ahmadi, and M. W. Zwierlein, *Phys. Rev. A* **85**, 051602 (2012).
- [26] C.-H. Wu, J. W. Park, P. Ahmadi, S. Will, and M. W. Zwierlein, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 085301 (2012).
- [27] I. Ferrier-Barbut, M. Delehaye, S. Laurent, A. T. Grier, M. Pierce, B. S. Rem, F. Chevy, and C. Salomon, *Science* **345**, 1035 (2014).
- [28] C. A. Regal, M. Greiner, and D. S. Jin, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 040403 (2004).
- [29] M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, A. J. Kerman, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 120403 (2004).
- [30] D. M. Eagles, *Phys. Rev.* **186**, 456 (1969).
- [31] A. J. Leggett, in *Modern trends in the theory of condensed matter*, edited by A. Pękałski and J. A. Przystawa (1980), p. 13.
- [32] P. Nozières and S. Schmitt-Rink, *J. Low. Temp. Phys.* **59**, 195 (1985).

- [33] C. A. R. Sá de Melo, M. Randeria, and J. R. Engelbrecht, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3202 (1993).
- [34] R. Haussmann, *Z. Phys. B* **91**, 291 (1993).
- [35] R. Haussmann, *Phys. Rev. B* **49**, 12975 (1994).
- [36] F. Pistolesi and G. C. Strinati, *Phys. Rev. B* **49**, 6356 (1994).
- [37] Y. Ohashi and A. Griffin, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 130402 (2002).
- [38] C. Cao, E. Elliott, J. Joseph, H. Wu, J. Petricka, T. Schäfer, and J. E. Thomas, *Science* **331**, 58 (2011),
- [39] E. Elliott, J. A. Joseph, and J. E. Thomas, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 020406 (2014).
- [40] J. A. Joseph, E. Elliott, and J. E. Thomas, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 020401 (2015).
- [41] A. Sommer, M. Ku, G. Roati, and M. W. Zwierlein, *Nature* **472**, 201 (2011).
- [42] A. Sommer, M. Ku, and M. W. Zwierlein, *New J. Phys.* **13**, 055009 (2011).
- [43] P. B. Patel, Z. Yan, B. Mukherjee, R. J. Fletcher, J. Struck, and M. W. Zwierlein, arXiv:1909.02555 [cond-mat.quant-gas].
- [44] P. A. Lee, N. Nagaosa, and X.-G. Wen, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 17 (2006).
- [45] Y. Cao, V. Fatemi, S. Fang, K. Watanabe, T. Taniguchi, E. Kaxiras, and P. Jarillo-Herrero, *Nature* **556**, 43 (2018).
- [46] M. G. Alford, L. Bovard, M. Hanauske, L. Rezzolla, and K. Schwenzer, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 041101 (2018).
- [47] A. Adams, L. D. Carr, T. Schäfer, P. Steinberg, and J. E. Thomas, *New J. Phys.* **14**, 115009 (2012).
- [48] C. J. Pethick and H. Smith, *Bose-einstein condensation in dilute gases* (Cambridge University Press, Cambridge, 2008).
- [49] G. Zürn, T. Lompe, A. N. Wenz, S. Jochim, P. S. Julienne, and J. M. Hutson, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 135301 (2013).
- [50] K. M. O'Hara, S. L. Hemmer, S. R. Granade, M. E. Gehm, J. E. Thomas, V. Venturi, E. Tiesinga, and C. J. Williams, *Phys. Rev. A* **66**, 041401 (2002).
- [51] S. Tsuchiya, R. Watanabe, and Y. Ohashi, *Phys. Rev. A* **80**, 033613 (2009).
- [52] R. Watanabe, S. Tsuchiya, and Y. Ohashi, *Phys. Rev. A* **82**, 043630 (2010).
- [53] E. J. Mueller, *Phys. Rev. A* **83**, 053623 (2011).
- [54] P. Magierski, G. Wlazłowski, and A. Bulgac, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 145304 (2011).

- [55] G. Wlazłowski, P. Magierski, J. E. Drut, A. Bulgac, and K. J. Roche, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 090401 (2013).
- [56] N. Navon, S. Nascimbène, F. Chevy, and C. Salomon, *Science* **328**, 729 (2010),
- [57] S. Nascimbène, N. Navon, K. J. Jiang, F. Chevy, and C. Salomon, *Nature* **463**, 1057 (2010).
- [58] M. Horikoshi, M. Koashi, H. Tajima, Y. Ohashi, and M. Kuwata-Gonokami, *Phys. Rev. X* **7**, 041004 (2017).
- [59] M. J. H. Ku, A. T. Sommer, L. W. Cheuk, and M. W. Zwierlein, *Science* **335**, 563 (2012),
- [60] L. Luo, B. Clancy, J. Joseph, J. Kinast, and J. E. Thomas, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 080402 (2007).
- [61] L. Luo and J. E. Thomas, *J. Low Temp. Phys.* **154**, 1 (2009).
- [62] Y.-R. Lee, T. T. Wang, T. M. Rvachov, J.-H. Choi, W. Ketterle, and M.-S. Heo, *Phys. Rev. A* **87**, 043629 (2013).
- [63] J. Meineke, J.-P. Brantut, D. Stadler, T. Müller, H. Moritz, and T. Esslinger, *Nat. Phys.* **8**, 454 (2012).
- [64] C. Sanner, E. J. Su, A. Keshet, W. Huang, J. Gillen, R. Gommers, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 010402 (2011).
- [65] S. Nascimbène, N. Navon, S. Pilati, F. Chevy, S. Giorgini, A. Georges, and C. Salomon, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 215303 (2011).
- [66] R. Haussmann, W. Rantner, S. Cerrito, and W. Zwerger, *Phys. Rev. A* **75**, 023610 (2007).
- [67] H. Tajima, T. Kashimura, R. Hanai, R. Watanabe, and Y. Ohashi, *Phys. Rev. A* **89**, 033617 (2014).
- [68] H. Tajima, R. Hanai, and Y. Ohashi, *Phys. Rev. A* **93**, 013610 (2016).
- [69] P. van Wyk, H. Tajima, R. Hanai, and Y. Ohashi, *Phys. Rev. A* **93**, 013621 (2016).
- [70] H. Tajima, P. van Wyk, R. Hanai, D. Kagamihara, D. Inotani, M. Horikoshi, and Y. Ohashi, *Phys. Rev. A* **95**, 043625 (2017).
- [71] F. Palestini, P. Pieri, and G. C. Strinati, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 080401 (2012).
- [72] K. M. O'Hara, S. L. Hemmer, M. E. Gehm, S. R. Granade, and J. E. Thomas, *Science* **298**, 2179 (2002).
- [73] G. M. Bruun and H. Smith, *Phys. Rev. A* **72**, 043605 (2005).
- [74] P. Massignan, G. M. Bruun, and H. Smith, *Phys. Rev. A* **71**, 033607 (2005).
- [75] C. Cao, E. Elliott, H. Wu, and J. E. Thomas, *New J. Phys.* **13**, 075007 (2011).

- [76] E. Elliott, J. A. Joseph, and J. E. Thomas, Phys. Rev. Lett. **112**, 040405 (2014).
- [77] M. Punk and W. Zwerger, New J. Phys. **8**, 168 (2006).
- [78] G. M. Bruun and H. Smith, Phys. Rev. A **75**, 043612 (2007).
- [79] G. Rupak and T. Schäfer, Phys. Rev. A **76**, 053607 (2007).
- [80] E. Taylor and M. Randeria, Phys. Rev. A **81**, 053610 (2010).
- [81] T. Enss, R. Haussmann, and W. Zwerger, Ann. Phys. **326**, 770 (2011).
- [82] H. Guo, D. Wulin, C.-C. Chien, and K. Levin, New J. Phys. **13**, 075011 (2011).
- [83] H. Guo, D. Wulin, C.-C. Chien, and K. Levin, Phys. Rev. Lett. **107**, 020403 (2011).
- [84] A. LeClair, New J. Phys. **13**, 055015 (2011).
- [85] L. Salasnich and F. Toigo, J. Low Temp. Phys. **165**, 239 (2011).
- [86] G. M. Bruun, Phys. Rev. A **85**, 013636 (2012).
- [87] T. Enss, C. Küppersbusch, and L. Fritz, Phys. Rev. A **86**, 013617 (2012).
- [88] W. D. Goldberger and Z. U. Khandker, Phys. Rev. A **85**, 013624 (2012).
- [89] G. Wlazłowski, P. Magierski, and J. E. Drut, Phys. Rev. Lett. **109**, 020406 (2012).
- [90] C. Chafin and T. Schäfer, Phys. Rev. A **87**, 023629 (2013).
- [91] P. Romatschke and R. E. Young, Phys. Rev. A **87**, 053606 (2013).
- [92] G. Wlazłowski, P. Magierski, A. Bulgac, and K. J. Roche, Phys. Rev. A **88**, 013639 (2013).
- [93] M. Bluhm and T. Schäfer, Phys. Rev. A **90**, 063615 (2014).
- [94] A. Kryjevski, Phys. Rev. A **89**, 023621 (2014).
- [95] Y. Kikuchi, K. Tsumura, and T. Kunihiro, Phys. Lett. A **380**, 2075 (2016).
- [96] D. Kagamihara and Y. Ohashi, J. Low Temp. Phys. **187**, 692 (2017).
- [97] R. Samanta, R. Sharma, and S. P. Trivedi, Phys. Rev. A **96**, 053601 (2017).
- [98] W. Cai, H. Guo, Y. He, and C.-C. Chien, Sci. Rep. **8**, 3981 (2018).
- [99] G. Wlazłowski, W. Quan, and A. Bulgac, Phys. Rev. A **92**, 063628 (2015).
- [100] D. Kagamihara, D. Inotani, and Y. Ohashi, J. Phys. Soc. Jpn. **88**, 114001 (2019).
- [101] M. Bluhm, J. Hou, and T. Schäfer, Phys. Rev. Lett. **119**, 065302 (2017).
- [102] D. Kagamihara and Y. Ohashi, J. Phys. Soc. Jpn., in press.
- [103] E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, *Physical kinetics* (Pergamon Press, Oxford, 1981).
- [104] T. D. Cohen, Phys. Rev. Lett. **99**, 021602 (2007).

- [105] D. T. Son, Phys. Rev. Lett. **100**, 029101 (2008).
- [106] M. Brigante, H. Liu, R. C. Myers, S. Shenker, and S. Yaida, Phys. Rev. Lett. **100**, 191601 (2008).
- [107] Y. Kats and P. Petrov, J. High Energy Phys. **2009**[1], 044 (2009).
- [108] A. Buchel, R. C. Myers, and A. Sinha, J. High Energy Phys. **2009**[3], 084 (2009).
- [109] A. Rebhan and D. Steineder, Phys. Rev. Lett. **108**, 021601 (2012).
- [110] T. Schäfer and D. Teaney, Rep. Prog. Phys. **72**, 126001 (2009).
- [111] L. E. Reichl, *A modern course in statistical physics* (University of Texas Press, Austin, 1984).
- [112] G. Baym and L. P. Kadanoff, Phys. Rev. **124**, 287 (1961).
- [113] G. Baym, Phys. Rev. **127**, 1391 (1962).
- [114] R. Hanai and Y. Ohashi, Phys. Rev. A **90**, 043622 (2014).
- [115] H. Song, S. A. Bass, and U. Heinz, Phys. Rev. C **83**, 054912 (2011).
- [116] M. Müller, J. Schmalian, and L. Fritz, Phys. Rev. Lett. **103**, 025301 (2009).
- [117] J. D. Rameau, T. J. Reber, H.-B. Yang, S. Akhanjee, G. D. Gu, P. D. Johnson, and S. Campbell, Phys. Rev. B **90**, 134509 (2014).
- [118] N. Pakhira and R. H. McKenzie, Phys. Rev. B **92**, 125103 (2015).
- [119] M. Randeria, in *Bose-Einstein Condensation*, edited by A. Griffin, D. W. Snoke, and S. Stringari (Cambridge University Press, New York, 1995).
- [120] G. Rickayzen, *Green's functions and condensed matter* (Dover, New York, 2013).
- [121] A. Fetter and J. Walecka, *Quantum theory of many-particle systems* (Dover, New York, 2003).
- [122] D. J. Thouless, Ann. Phys. **10**, 553 (1960).
- [123] J. Schrieffer, *Theory of superconductivity* (Westview Press, Colorado, 1999).
- [124] Y. He and K. Levin, Phys. Rev. B **89**, 035106 (2014).
- [125] A. Larkin and A. Varlamov, *Theory of fluctuations in superconductors* (Oxford University Press, New York, 2005).
- [126] H. J. Vidberg and J. W. Serene, J. Low Temp. Phys. **29**, 179 (1977).
- [127] S. Tan, Ann. Phys. **323**, 2952 (2008).
- [128] S. Tan, Ann. Phys. **323**, 2971 (2008).
- [129] S. Tan, Ann. Phys. **323**, 2987 (2008).
- [130] S. A. Morgan, M. D. Lee, and K. Burnett, Phys. Rev. A **65**, 022706 (2002).
- [131] H. Caldas, C. W. Morais, and A. L. Mota, Phys. Rev. D **72**, 045008 (2005).

-
- [132] M. Iskin and C. A. R. Sá de Melo, Phys. Rev. Lett. **97**, 100404 (2006).
- [133] A. A. Abrikosov and I. M. Khalatnikov, Rep. Prog. Phys. **22**, 329 (1959).
- [134] Q. Chen and K. Levin, Phys. Rev. Lett. **102**, 190402 (2009).
- [135] Y. Ohashi and S. Takada, J. Phys. Soc. Jpn. **66**, 2437 (1997),
- [136] D. S. Petrov, C. Salomon, and G. V. Shlyapnikov, Phys. Rev. Lett. **93**, 090404 (2004).
- [137] Y. Ohashi, J. Phys. Soc. Jpn. **74**, 2659 (2005),
- [138] I. V. Brodsky, M. Y. Kagan, A. V. Klaptsov, R. Combescot, and X. Leyronas, Phys. Rev. A **73**, 032724 (2006).
- [139] J. Rammer, *Quantum field theory of non-equilibrium states* (Cambridge University Press, Cambridge, 2007).
- [140] L. P. Kadanoff and P. C. Martin, Ann. Phys. **24**, 419 (1963).
- [141] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid mechanics* (Pergamon Press, Oxford, 1966).
- [142] P. C. Martin and J. Schwinger, Phys. Rev. **115**, 1342 (1959).
- [143] P. Pieri and G. C. Strinati, Phys. Rev. B **61**, 15370 (2000).