On plectic and p-adic Hodge theory

February 2020

Kazuki Yamada

別表５
　⑶

主　　論　　文　　要　　旨　　No.1

報告番号	甲　乙　第　　　　　号	氏　名	山田　一紀

主論文題名：

On plectic and p-adic Hodge theory

（プレクティック及びｐ進ホッジ理論について）

数論幾何学において Hodge 理論とは、異なる手法で定義されるコホモロジーの間の比較同型を通して多様体の代数幾何的情報を復元する理論と言える。本論文ではその二方向の発展に関して得られた結果について述べる。

第１部はプレクティック Hodge 理論に関する結果である。Nekovar-Scholl のプレクティック予想とは「実乗法を持つモチーフには未知の付加構造が存在する」というものである。この予想は未だ定式化されていないが、Hodge 実現がある副代数群の表現を定めることは期待されている。ただしコホモロジー群にそのような付加構造を直接与えることはできず、コホモロジー理論的な由来を持つ構造で特徴付ける必要がある。

本論文ではその解決として混合プレクティック Hodge 構造のなす圏を定義し、上記の副代数群の表現のなす圏との間に自然な圏同値が存在することを示す。またこの圏における拡大群の計算についての結果も述べる。第１部の結果は坂内健一氏・萩原啓氏・小林真一氏・山本修司氏・安田正大氏との共同研究によって得られたものであり、申請者は拡大群の計算などの主要な部分に貢献した。

第２部は、兵頭・加藤理論のリジッド幾何的研究に関する結果である。ｐ進 Hodge 理論の主定理の定式化や証明においては、兵頭・加藤写像と呼ばれるある種のコホモロジーの間の比較写像が重要な役割を果たす。はじめに対数結晶コホモロジーを始域とする構成が兵頭・加藤によって、その後対数リジッドコホモロジーを始域とする別の構成が Grosse-Klonne によって与えられた。しかし後者は技術的な困難から、関手性などの基本的性質も未解決であった。

本論文ではその解決として、まず境界付き対数スキームの対数リジッドコホモロジー理論を整備し、関手性や Frobenius 作用の存在が成り立つような枠組みを与える。さらにそれを用いて Grosse-Klonne の兵頭・加藤写像の関手性や、結晶的構成との整合性を証明する。また系として、強半安定対数スキームに対するリジッドサントミックコホモロジーと Nekovar-Niziol の結晶サントミックコホモロジーの比較同型を与える。なお第２部の結果は Veronika Ertl 氏との共同研究によって得られたものであり、申請者は対数リジッドコホモロジー理論の整備をはじめ主要な部分を担当した。

別表６
（３）

Keio University

Thesis Abstract

No. 1

Registration Number	☑ “KOU” ☐ “OTSU” No. *Office use only	Name	Kazuki Yamada

Thesis Title

On plectic and p-adic Hodge theory

In the context of arithmetic geometry, Hodge theory may be regarded as the study of realization of algebraic information of varieties through comparison between cohomologies which are constructed by different methods. In this thesis we will study developments of Hodge theory in two directions.

Part 1 concerns plectic Hodge theory. The plectic conjecture of Nekovar-Scholl speculates that ``Motives with real multiplication have unknown additional structures’’. While this conjecture is not yet formulated precisely, it is expected that the Hodge realizations define representations of a certain pro-algebraic group. However it would be impossible to define such a structure on cohomology groups directly, hence we need to characterize it in terms of another structure having cohomology theoretical origin.

As a remedy, in this thesis we will define the category of mixed plectic Hodge structures, and prove that it is naturally equivalent to the category of representations of the pro-algebraic group. We will also calculate the extension groups in this category. Results in Part 1 are given by a joint work with Kenichi Bannai, Kei Hagihara, Shinichi Kobayashi, Shuji Yamamoto, and Seidai Yasuda. The applicant contributed to main parts including calculation of extension groups.

Part 2 concerns rigid geometric study of Hyodo-Kato theory. The Hyodo-Kato map between certain cohomologies plays an important role in the formulation and the proofs of the main theorem of p-adic Hodge theory. The Hyodo-Kato map has been constructed by Hyodo and Kato firstly, by using log crystalline cohomology as the domain. After that, Grosse-Klonne gave another construction by using log rigid cohomology as the domain. However, fundamental properties including functoriality of the later construction was not known due to technical difficulties.

As a solution, in this thesis we will first improve log rigid cohomology theory for log schemes with boundary, and give a framework satisfying functoriality and admitting Frobenius actions. Using this, we will prove the functoriality of Grosse-Klonne’s Hyodo-Kato map and the compatibility with the crystalline construction. As a corollary, we will also give an isomorphism between the rigid syntomic cohomology and Nekovar-Niziol’s crystalline syntomic cohomology for strictly semistable log schemes. The results in Part 2 are given by a joint work with Veronika Ertl. The applicant handled main parts including improvement of log rigid cohomology theory.