Iwasawa theory for the 2-components of ideal class groups

July 2019

Mahiro Atsuta

別表５
⑶

主　　論　　文　　要　　旨　　　No.1

報告番号	㊙ 乙 第　　　　号	氏 名	熱田　真大

主 論 文 題 名：

Iwasawa theory for the 2-components of ideal class groups

（イデアル類群の２成分に関する岩澤理論）

（内容の要旨）

代数的に定義されるイデアル類群と解析的に定義されるゼータ関数との間の関係性は，整数論において大変重要な研究対象である。20 世紀後半になると岩澤健吉により、岩澤理論という新しい方法が開発され，イデアル類群とゼータ関数の特殊値の間に、より深い関係性が見出されるようになった。岩澤理論では、素数 p を固定し、代数体の Zp-拡大を考えてイデアル類群の p-Sylow 部分群の射影極限で定義される岩澤加群を考え、中間体のイデアル類群を統一的に調べる。この時、p=2 の場合は大変難しく、例外視されることが多い。本論文では p=2 の岩澤理論を研究する。本論文の主結果は以下の三つである。

本論文では、まず、岩澤加群の有限部分加群について研究する。p が奇素数の時は CM 体上の岩澤加群のマイナス成分は非自明な有限部分加群を持たないことが岩澤によって示されている。しかし p=2 の時、これは成立しない。虚二次体上の岩澤加群が非自明な有限部分加群を持つ場合があることが Ferrero によって示されている。本論文では一般の CM 体上の岩澤加群のマイナス成分の最大有限部分加群の生成元を明らかにし、ある程度の仮定の下でその構造を決定した。この結果は上で述べた Ferrero の結果の一般化になっている。

次に p=2 の岩澤主予想について述べる。岩澤主予想とは、岩澤加群の特性イデアルと p 進 L 関数が一致するという予想であり、岩澤理論において最も重要なもののひとつである。総実代数体上の岩澤主予想は Wiles らによって p が奇素数の場合は完全に証明されている。しかし p=2 の場合、Wiles は岩澤によって予想されている μ-不変量は 0 であろうという予想の下、p 進 L 関数が自明な零点を持たない場合のみ証明している。本論文では上記の μ=0 の仮定のみで、p=2 の岩澤主予想を証明する。この結果により、p=2 で証明できなかった多くのことが、p が奇素数の時と同様に証明できるようになる。

岩澤主予想と降下理論を用いることにより、有限次 CM 体のイデアル類群を調べた。具体的には、総実代数体上の巡回拡大である CM 体のイデアル類群の 2-Sylow 部分群のマイナス商の Fitting イデアルが部分ゼータ関数の特殊値によって定義される Stickelberger イデアルと一致することを証明した。この結果は、Greither が有理数体上の虚 Abel 拡大に対して得ていた結果の一般化になっている。

別表６
（３）

Keio University

Thesis Abstract

No.

Registration Number	☑ "KOU" □ "OTSU" No. *Office use only	Name	Mahiro Atsuta

Thesis Title

Iwasawa theory for the 2-components of ideal class groups

Thesis Summary

In number theory, the study on relationship between ideal class groups defined algebraically and zeta functions defined analytically is a very important subject. In late 20th century, Kenkichi Iwasawa constructed a new method which is now called "Iwasawa theory" by which one finds out deeper relationship between ideal class groups and special values of zeta functions. In Iwasawa theory, we fix a prime number p and consider the Iwasawa modules for Z_p extensions of a number field, which are defined as the projective limits of the p-Sylow subgroups of ideal class groups. Using the Iwasawa module, we can study ideal class groups of the subfields uniformly. When $p=2$, the theory is so difficult that it has usually been regarded as an exception. In this thesis, we study Iwasawa theory for $p=2$. The main 3 results in this thesis are as follows.

Firstly, we study finite submodules of Iwasawa modules. If p is an odd prime, Iwasawa proved that the minus component of the Iwasawa module for a CM field has no non-trivial finite submodule. However, in the case for $p=2$, this is not true. Ferrero proved that the Iwasawa module for an imaginary quadratic field sometimes has non-trivial finite submodules. In this thesis, we determine generators of the maximal finite submodule of the minus quotient of the Iwasawa module for a CM field and compute its structure under certain assumptions. This result is a generalization of Ferrero's result which we mentioned above.

Next we study the Iwasawa main conjecture for $p=2$. The Iwasawa main conjecture claims that the characteristic ideal of the Iwasawa module coincides with the p-adic L-function, and this is one of the most important theorems in Iwasawa theory. If p is an odd prime, Wiles proved the Iwasawa main conjecture over a totally real field completely. But for $p=2$, Wiles proved it assuming the non existence of trivial zeros for the p-adic L-function and Iwasawa's conjecture on the vanishing of the μ-invariant. In this thesis, we prove the Iwasawa main conjecture for $p=2$ only assuming $\mu=0$ which we mentioned above. Consequently, we can prove many theorems for $p=2$ as in the case where p is odd.

Using the Iwasawa main conjecture and the descent theory, we study the ideal class group of a CM field. More precisely, we prove that the Fitting ideal of the minus quotient of the 2-component of the ideal class group of a CM field which is cyclic over a totally real field, coincides with the Stickelberger ideal which is defined by special values of partial zeta functions. This is a generalization of Greither's result for an imaginary abelian field over a rational number field.