伝播モード直交性と多重尺度法を用いたガイド波の理論解析

2017 年度

神　田　昂　亮

学位論文　博士（工学）

伝播モード直交性と多重尺度法を用いたガイド波の理論解析

2017 年度

慶應義塾大学大学院理工学研究科

神　田　昂　亮

目次

図目次

記号表

第 1 章

b	高調波振幅
f_a^{vol}	基本波によって生じる非線形体積力
f_a^{sur}	基本波によって生じる非線形表面力
P_{ab}	基本波，高調波間の運動量流束
x	伝播方向

第 2 章

A_g	群速度振幅
A_j	j-mode の振幅
$\boldsymbol{B}$	1 階微分作用素
$\boldsymbol{b_0}, \boldsymbol{b_1}$	1 階微分作用素を構成する係数行列
c_g	群速度
c_p	位相速度
c_L	縦波速度
c_T	横波速度
$\boldsymbol{F}$	運動方程式における非同次項
f_i	外力ベクトル (アインシュタインの縮約記号表記)
$\boldsymbol{G}$	境界条件における非同次項
$2h$	板厚
k, k_1, k_2	波数
k_{av}	k_1 と k_2 の平均波数
k_f	加振波数
Δk	k_1, k_2 の差
$\boldsymbol{L}$	2 階微分作用素
$\boldsymbol{l}, \boldsymbol{l_0}, \boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_2}$	2 階微分作用素を構成する係数行列
n_i	単位ベクトル (アインシュタインの縮約記号表記)

p	$\sqrt{(\omega/c_L)^2-k^2}$
p_x	固有ベクトルの x 成分
p_z	固有ベクトルの z 成分
q	$\sqrt{(\omega/c_T)^2-k^2}$
t_i	応力ベクトル (アインシュタインの縮約記号表記)
t	時間
U_i	振幅ベクトル (アインシュタインの縮約記号表記)
U_i'	振幅ベクトル (アインシュタインの縮約記号表記)
u_i	変位ベクトル (アインシュタインの縮約記号表記)
u	x 方向の変位 (u_x)
u_j	j-mode の x 方向の変位
v	y 方向の変位 (u_y)
w	z 方向の変位 (u_z)
w_j	j-mode の z 方向の変位
x	伝播方向
y	伝播方向と厚さ方向に垂直な方向
z	厚さ方向
α_n	x 方向の波数と z 方向の波数の比
α_{ab}	積分値
β_{ab}	積分値
δ_{ij}	クロネッカーのデルタ
λ	第一 Lame 定数
μ	第二 Lame 定数
ρ_d	密度
σ_{ij}	応力テンソル (アインシュタインの縮約記号表記)
Φ_i	i 方向の固有関数
Φ_{ji}	j-mode の i 方向の固有関数
ϕ, ϕ_a, ϕ_b	支配方程式を満たす同次解
ψ	支配方程式を満たす非同次解
$\omega, \omega_1, \omega_2$	周波数 (角周波数)
ω_{av}	ω_1 と ω_2 の平均周波数
ω_f	加振周波数
$\Delta\omega$	ω_1 と ω_2 の差

第 3 章

a	実数値振幅
a_0	初期振幅
$\boldsymbol{A}$	一般化固有値問題の行列
$\boldsymbol{B}$	一般化固有値問題の行列
$\boldsymbol{C}$	複素剛性テンソル
C_{1j}、C_{2j}	j-mode の振幅方程式の係数
f_{1j}, f_{2j}	j-mode の運動方程式の永年項の係数
$g_{1j}, g_{2j}, g_{3j}, g_{4j}$	j-mode の境界条件の永年項の係数
g	計量テンソルの行列式
$\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2, \boldsymbol{K}_3, \boldsymbol{M}$	積分形支配方程式の係数
$\boldsymbol{L}_x, \boldsymbol{L}_{yz}$	微分演算子行列
$\boldsymbol{N}$	補間関数
$\boldsymbol{Q}$	$[\boldsymbol{U}\, k\boldsymbol{U}]$
$\boldsymbol{u}$	変位ベクトル
$\delta\boldsymbol{u}$	仮想変位
u_0	u の第一次近似解
u_1	u の第二次近似解
w_0	w の第一次近似解
w_1	w の第二次近似解
X	複素振幅
x_0	ϵ^0 オーダーの伝播距離
x_1	ϵ^1 オーダーの伝播距離
$\delta\boldsymbol{\epsilon}$	仮想ひずみ
ϵ	微小量
$\theta, \theta^{'}$	実数値位相
θ_0	初期位相
κ_L	縦波減衰係数
κ_T	横波減衰係数
λ_i	第一 Lame 定数の虚部
$\hat{\lambda}_i$	λ_i/ϵ
λ_r	第一 Lame 定数の実部
μ_i	第二 Lame 定数の虚部
$\hat{\mu}_i$	μ_i/ϵ
μ_r	第二 Lame 定数の実部
$\boldsymbol{\sigma}$	応力テンソル

第 4 章

A, B, C	2 次の非線形材料定数
a	a-mode の実数値振幅
b	b-mode の実数値振幅
C_{a1}, C_{a2}	非線形ガイド波における a-mode の振幅方程式の係数
C_{b1}, C_{b2}	非線形ガイド波における b-mode の振幅方程式の係数
$C_{NL1}, C_{NL2}, C_{NL3},$ $C_{NL4}, C_{NL5}, C_{NL6}$	$\mathcal{O}(\epsilon^2)$ における非線形応力
D_j	非線形ガイド波における j-mode の振幅方程式の係数
k_a	a-mode の波数
k_b	b-mode の波数
T_{NL}	非線形応力テンソル
T_{NLij}	非線形応力テンソルの ij 成分
$\boldsymbol{v}$	粒子速度ベクトル
X_0	実数振幅の基本波の初期値
X_a	a-mode の複素振幅
X_b	b-mode の複素振幅
γ	a-mode と b-mode の位相差
θ_a	a-mode の実数値位相
θ_b	b-mode の実数値位相
κ	振幅方程式の係数と媒介変数 ξ を用いて算出できる定数
ν	振幅方程式の係数から算出できる定数
ξ	媒介変数
ξ_1, ξ_2, ξ_3	媒介変数 ξ で表した方程式の解
η	振幅方程式の係数と媒介変数 ξ を用いて算出できる定数
ρ	位相整合条件からの離調パラメータ (detuning parameter)
$\hat{\rho}$	ρ/ϵ
ω_a	a-mode の周波数
ω_b	b-mode の周波数

第 5 章

$\boldsymbol{A_m}$	作用素
a_{st}	a-mode の伝播距離に対する定常実数振幅
b_{st}	b-mode の伝播距離に対する定常実数振幅
F	加振力

f	加振振幅
p_a	a-mode の複素振幅の実部
p_{ast}	伝播距離に対する定常な a-mode の複素振幅の実部
p_b	b-mode の複素振幅の実部
p_{bst}	伝播距離に対する定常な b-mode の複素振幅の実部
q_a	a-mode の複素振幅の虚部
q_{ast}	伝播距離に対する定常な a-mode の複素振幅の虚部
q_b	b-mode の複素振幅の虚部
q_{bst}	伝播距離に対する定常な b-mode の複素振幅の虚部
γ_1	a-mode と b-mode の位相差
γ_2	加振と b-mode の位相差
γ_{1st}	伝播距離に対して定常な a-mode と b-mode の位相差
γ_{2st}	伝播距離に対して定常な加振と b-mode の位相差
$\boldsymbol{\Delta}$	$[\Delta p_a \; \Delta q_a \; \Delta p_b \; \Delta q_b]^T$
Δp_a	a-mode の伝播距離に対して定常な振幅の実部の微小摂動
Δp_b	b-mode の伝播距離に対して定常な振幅の実部の微小摂動
Δq_a	a-mode の伝播距離に対して定常な振幅の虚部の微小摂動
Δq_b	b-mode の伝播距離に対して定常な振幅の虚部の微小摂動
σ	加振波数と b-mode の波数の離調パラメータ (detuning parameter)
$\hat{\sigma}$	σ/ϵ

第 1 章

緒論

1.1 超音波探傷法

非破壊検査 (Non-Destructive Testing: NDT) とは，検査対象を破壊することなく，対象の表面および内部の欠陥検出や物性評価を行う技術である．対象の内部検査が可能な手法には，超音波探傷法と放射線探傷法の二種類があり，なかでも超音波探傷法は比較的簡易な装置で検査を実行できる．超音波探傷法には，反射波（や透過波）を用いる手法 [1]，散乱波を用いる手法 [2]，またそれらの周波数成分情報を用いる手法 [3] などがある．いずれの手法も点的な計測となり，発電プラント等の大型構造物に対して実行するには多大の時間と労力を要する．

特に，長大・大型構造物に対する検査時間の短縮，検査の簡易化を実現しうる非破壊検査技術（Structure Health Monitoring: SHM）として，超音波探傷法のなかでもガイド波を用いた手法 (Guided Wave Testing: GWT) に関する研究が盛んに行われている．ガイド波とは，試料内に入力されたバルク波（P 波と S 波）が試料表面で反射およびモード変換を行い，合成波として試料長手方向に低減衰で伝播する超音波の一種である．ガイド波は，通常のバルク波と異なり，境界条件によって伝播形態が定まる弾性波であり，伝播速度が周波数に依存する分散性を有する．また，ある周波数に対し複数のモードが発生しうるため，複雑な伝播挙動を示す [4].

また，探傷精度の向上を目指す超音波探傷法として，非線形超音波を用いた手法に関する研究が盛んに行われている．非線形超音波法には，超音波が入射されても，反射波が発生せず，透過してしまう閉口き裂を透過した波に含まれる非線形成分を受信し，閉口き裂の有無を判別する手法 [5]-[7] や，疲労損傷による非線形材料定数の変化により生じる受信超音波の非線形成分の変化を測定し，疲労き裂を初期段階で発見する手法 [8]-[10] などがある．いずれの手法も劣化やき裂の進展による微小な非線形性の変化を検出する能力が期待されている．他にも近年工業利用が盛んな複合材の剥離の検出にも適用が期待されている [11]-[15].

近年，ガイド波法と非線形超音波法の両長所を有する手法として，累積的高調波と呼ばれる現象を用いた探傷法が注目されている．累積的高調波法とは内部共振的現象を利用し，非線形共振により生じる高調波モードの振幅情報を用いて，閉口き裂のような境界面非線形性の検出 [16], [17] や，非線形材料定数の変化 [18]-[20] を効率的に測定する手法である．一般的な振動系における内部共

振とは，非線形多自由度系において，モード間の固有振動数比が整数に近いときに発生する共振現象である [21]．一方で，累積的高調波は，固有振動数比ではなく，モード間の周波数と波数が同じ整数比を有する場合に発生する共振的な現象であると報告されている [22]．しかし，累積的高調波の発生条件や動力学的解釈は厳密に明らかではなく，発生条件の特定についても盛んに研究が行われている [23]-[28]．

1.1.1 ガイド波に関する研究

ガイド波を用いた非破壊検査は，配管 [29] や鉄道のレール [30] のような長大・大型構造物への適用が期待されている．平板や円柱のような単純な断面構造を有する対象については，伝播モードと分散特性について理論解析的に求めることができる．ガイド波は，固有関数 (変位分布) の形状によって伝播モードが分類されており，円柱ガイド波の縦モード (Longitudinal-mode: L-mode)，曲げモード (Flexural-mode: F-mode)，ねじれモード (Torsional-mode: T-mode) はそれぞれ板波の対称モード (Symmetric-mode: S-mode)，反対称モード (Antisymmetric-mode: A-mode)，せん断モード (Shear Horizontal-mode: SH-mode) に対応する [4]．また，ガイド波が欠陥等に入射され生じる反射波と透過波の強度は，入射波の伝播モードと周波数に依存すると報告されている [31]．この周波数依存性は，欠陥の形状や大きさに依存する共振現象に起因すると報告されている [32]．したがって，ガイド波を用いた非破壊検査では，入力周波数を走査し，欠陥形状，欠陥位置を伝播モードとその伝播速度を用いて特定するため，伝播モードと分散特性の理解が必要不可欠である．

複雑な断面構造を有する対象の伝播モードと分散特性を理論解析的に得ることは難しく，有限要素法 (the Finite Element Method: FEM) や半解析的有限要素法 (the Semi-Analytical Finite Element Method: SAFE)[33] などの数値解析手法を用いて求める．有限要素法を用いたガイド波の数値的解析に関して，伝播モードの精度とメッシュの分割数，時間ステップの関係について明らかにされている [34]．半解析的有限要素法は，試料長手方向（伝播方向）の進行波を仮定することで，有限要素分割を断面方向のみに低次元化して実行し，解析的に弱形式の支配方程式を変形することで，分散方程式を一般化固有値問題に帰着させる手法である．したがって，半解析的有限要素法は，空間の低次元化に加えて，時間発展を解かずに分散特性を解析可能なガイド波の解析に適した計算コストの小さい手法である．半解析的有限要素法では断面方向において有限要素分割を行うので，任意断面形状 [33] や積層構造 [35] の解析が容易であり，接触など非線形境界条件の影響を考慮した解析 [36], [37] も可能である．また一般化固有値問題を解くことで得られる固有ベクトルの直交性を用いることで，群速度分散曲線を位相速度分散曲線と同精度で容易に計算できるというメリットもある [4]．

1.1.2 減衰ガイド波に関する研究

導波体内を伝播するガイド波のエネルギーは導波体内に留まり，放射による散逸の効果がほぼないため，ガイド波は長距離伝播性を持つ [4]．しかし実際には，導波体の持つ粘性によりガイド波は伝播距離に応じて減衰する．この粘性減衰の効果を考慮した解析を行う際には，構造減衰を導入し，Lame 定数や縦波速度，横波速度を複素数に拡張する．構造減衰の効果は一般的な振動系で用いられる粘性減衰とは異なり，周波数に陽に依存せず，歪みに比例する虚定数として定式化される．その結果，求まるガイド波の波数が複素数となり，その虚部が減衰係数に相当する．ガイド波にはある周波数に対して複数の伝播モードが存在しうり，分散性を有するため，減衰係数は伝播モードと周波数に依存する形で導出される [38]-[41]．伝播モードと周波数に依存する減衰係数の導出は，特定の伝播モードのガイド波の伝播可能距離を予測するのに重要な役割を果たす．

一般に平板に伝播するガイド波の一つである Lamb 波の分散特性を表す分散方程式（Rayleigh-Lamb equations）は，ある周波数に対して波数についての 1 元非線形代数方程式として与えられる [4]．対して，減衰の効果を考慮した Lamb 波の分散方程式は，ある周波数に対して波数と減衰係数についての 2 元連立非線形代数方程式となり，求解には Newton 法などの解が数値的初期値に依存する手法が用いられる [38]．したがって，従来の理論解析手法では特定の伝播モードに注目して，周波数に対する減衰係数の変化は容易に求められない．また，数値解析手法として，構造減衰を導入した有限要素法を用いて減衰係数を求める手法 [42],[43] や，構造減衰を導入した半解析的有限要素法を用いて複素数領域で一般化固有値問題を解き，複素固有値から減衰係数曲線を得る手法 [44],[45] が提案されている．半解析的有限要素法を用いて得られる減衰係数は固有ベクトルとの組み合わせとして算出されるため，有限要素法を用いて得られる減衰係数とは異なり，ある減衰係数がどの周波数，どの伝播モードに対応するのかが容易に判別でき，時間発展を解かないため数値減衰の影響を受けない．

1.1.3 累積的高調波に関する研究

累積的高調波は，以下の 3 つの条件を満たすモードの組み合わせが存在するとき，内部共振的現象により伝播距離に応じて振幅が増大する高調波であるとされている [22]．
(1) 位相整合 (Phase matching)
(2) モード間のエネルギー流速が 0 でない
(3) 群速度整合 (Group velocity matching)

de Lima-Hamilton [22] は，the straightforward expansion と呼ばれる一般的な摂動法を用いて，理論解析的に累積的高調波の生じる条件として，(1), (2) の必要性を示し，摂動仮定の範囲内での伝播挙動を明らかにした．Matsuda-Biwa [46] は (1) の条件から周波数のずれと高調波振幅の伝播距離依存性について数値的に解き，高調波振幅は位相整合条件からのずれに依存した周期的変化をすることを明らかにした．また，Matsuda-Biwa [47] や Xiang ら [48] は，(3) の条件を満

たす必要性を示した．さらに，Müller ら [20] や Chillara-Lissenden [49] は，(2) の条件を満たす Lamb 波は基本波 S-mode，高調波 S-mode の組み合わせか，基本波 A-mode，高調波 S-mode の組み合わせであることを固有関数の偶奇性より示した．加えて，Liu ら [50] は 3 次の非線形性まで考慮した解析を行い，(2) の条件を満たす基本波と高調波の組み合わせを固有関数の偶奇性から明らかにした．Deng ら [24],[25] は (1), (2), (3) を満たす条件下で，累積的高調波の発生を実験的に検証した．

Bermes ら [18] や Pruell ら [19] は，累積的高調波を用いて，実験的に非線形材料定数の測定を行った．Soleimanpour-Ng [16] は，剥離による衝突振動の非線形性から生じる累積的高調波を用いて，複合材の剥離の検出を行った．Shan ら [17] は，検査対象の持つ非線形成分ではなく，探触子と接触媒質が持つ 2 次の非線形成分から高調波が発生しうることを示した．Hasanian-Lissenden [51] は，探触子を含む装置由来の非線形成分と，試料由来の材料や幾何学的な非線形成分を分離するため，非線形共振現象の一つである結合共振的な現象を利用した非線形ガイド波の累積性に注目し，その有効性を示した．Jingpin ら [52] も結合共振的現象を利用し，非線形連成の原因となる微小き裂の検出法を提案した．また，Packo ら [53] は試料の持つ微小な非線形項が分散特性に及ぼす影響を摂動法の一種である a Lindstedt-Poincare approach を用いて理論解析的に明らかにした．

1.2 研究目的

本節では，まず，先行研究における累積的高調波と呼ばれる非線形ガイド波の解析における問題点と非破壊検査に応用する際に生じる問題点を指摘する．次にその問題点を解決するために用いる手法の前提知識となる諸研究を紹介し，解決手法について述べる．最後に本研究の目的をまとめる．

1.2.1 累積的高調波に関する問題点

(1) 内部共振的現象により発生し，伝播距離に依存した高調波の振幅変化の情報を用いて，欠陥検出や非線形材料定数の変化の測定等を行う際には，微小な非線形性による非線形共振現象なので，同程度の影響を持つ微小な減衰の効果は無視できない．累積的高調波と呼ばれる非線形ガイド波は自由振動的内部共振現象であるため，減衰の効果により非線形ガイド波の伝播距離は有限であると考えられる．しかし，減衰の効果を考慮した非線形ガイド波の解析例がなく，解析を行う必要がある．

(2) 先行研究における累積的高調波の理論解析には，摂動法を適用するために伝播距離と高調波モードの振幅が微小であるという仮定がされている．しかし，ガイド波の特徴である長距離伝播性を生かし，非破壊検査に応用するためには，長い伝播領域での解析が必要である．さらに，十分に大きな高調波振幅の伝播距離依存性も明らかにし，適用範囲を拡張する必要がある．

(3) 先行研究における累積的高調波の理論解析は高調波振幅の伝播距離依存性のみに注目しており，基本波の伝播距離依存性については考慮されていない．しかし，高調波モードの振幅が伝播距

離に応じて増大するのは，基本波からエネルギーが供給されるためであると考えられ，基本波モードと高調波モードの非線形連成問題として解析を行う必要がある．

(4) 非線形ガイド波により生じる有限の過渡的な高調波の振幅情報からでは，欠陥検出や非線形材料定数の変化の測定が困難である可能性がある．さらに，累積的高調波を用いた手法で注目する 2 次高調波の振幅情報には，内部共振的現象だけでなく，探触子を含む装置由来の非線形成分が含まれること [7], [51] が知られている．したがって，試料由来の材料の非線形成分や幾何学的非線形成分を，探触子を含む装置由来の高調波成分から分離する必要がある．

1.2.2 累積的高調波の伝播距離依存性と永年項による摂動法の破綻

先行研究において，摂動法を用いた結果，高調波モードの振幅 b の伝播距離依存性は以下のように見積もられた [22].

$$b(x) = \frac{f_a^{vol} + f_a^{sur}}{4P_{ab}} x \tag{1.2.1}$$

ここで，f_a^{vol} は非線形力に起因して生じる体積力，f_a^{sur} は非線形力に起因して生じる表面力，P_{ab} は運動量流束を表す．$f_a^{vol} + f_a^{sur}$ は非線形項の合力を表し，P_{ab} は基本波モード (a-mode) と高調波モード (b-mode) 間における運動量の移行し易さを表す．ここで，Eq (1.2.1) は永年項と呼ばれ，伝播距離 x と共に発散する解である．したがって，従来の解析手法で得られた高調波モードの振幅は，長い伝播領域で，伝播距離に比例した永年項が生じたことにより，摂動展開が破綻する．したがって，従来の解析手法では短い伝播領域での解析に留まっている．

1.2.3 多重尺度法を用いた非線形振動に関する研究

一般に内部共振とは，非線形多自由度振動系において，モード間の固有振動数比が約整数になるときに発生する非線形共振現象である．他にも高調波，分数調波共振 [21]，結合共振 [54]，係数励振 [55]，オートパラメトリック励振 [56] のような非線形共振現象も知られている．これらのような非線形共振現象は，微小な非線形の効果が長い時間をかけて動力学的効果を及ぼすこと [21] が知られており，理論解析手法の一つして，時間方向に複数の尺度を用意し，解析を行う多重尺度法 [57], [58] がある．多重尺度法は，特異摂動法の一種であり，弱非線形系の動力学に数理的な知見を与える解析手法 [59] である．

本研究で解析対象とする非線形ガイド波は，微小な非線形の効果が，長い伝播距離をかけて振幅に影響を与えると考えられる．そこで，非線形振動系と同様に多重尺度法を用いて，伝播方向に複数の尺度を用意し，非線形ガイド波の動力学を長い伝播距離尺度の振幅変化を表す振幅方程式を導出することで明らかにする．

非線形ガイド波における非線形共振現象は，時間領域ではなく，空間領域で生じる．そのため，本論文では，「～的」と表記している．具体例として，内部共振的現象によって生じる非線形ガイド波を内部共振的ガイド波と記す．

1.2.4 目的と解決方法

ガイド波の理論解析に多重尺度法を適用する際，伝播特性が境界条件で定まるガイド波の特徴と，ある周波数に対して複数の伝播モードが発生しうるガイド波の特徴が問題となる．本研究では，まず，ガイド波の支配方程式である弾性体の運動方程式と境界条件を用いて伝播モードの直交性を導出する．さらに，支配方程式の自己随伴性を示し，可解条件を導出する．

次に，1.2.1 節で述べた問題点 (1)-(4) を解決する方法を記す．

(1) の問題を解決するために，減衰の効果を導入する．構造減衰を導入したガイド波の支配方程式に多重尺度法 [59] を適用し，減衰ガイド波の分散曲線と減衰係数曲線を導出する．さらに，本手法による解析の妥当性を半解析的有限要素法 [43] を用いて検証する．次に，材料の非線形性と幾何学的非線形性の効果を導入し，減衰の効果を含めた内部共振的ガイド波の振幅が，伝播距離に対して有限の過渡的な変化をすることを示す．さらに，非線形材料定数の変化と内部共振的現象によって生じる高調波の振幅変化の相関を明らかにする．

(2) の問題は，微小な高調波振幅と微小な伝播距離の仮定から生じており，この仮定は摂動法の破綻を防ぐための仮定である．したがって，特異摂動法の一種である多重尺度法 [59] を適用することで解決される．

(3) の問題は多重尺度法を適用すると，基本波モード，高調波モードの永年項を生じさせる項として，非線形連成の効果が表れ，解決できる．

(4) の問題を解決するために，伝播距離に対して定常な振幅が生じる非線形共振現象を応用する方法を提案する．具体的には，強制振動的非線形共振現象が生じるモデルを提案し，解析を行い，伝播距離に対して定常な非線形共振現象による振幅が生じることを示す．これは，減衰力，加振力，非線形力が釣り合うような非線形現象により生じる振幅を測定することを意味する．さらに，試料由来の材料の非線形成分や幾何学的非線形成分を，探触子を含む装置由来の高調波成分から分離し易い分調波モードを励振させる非線形現象として，本研究では，オートパラメトリック励振現象の応用を提案する．

オートパラメトリック励振 [60] とは，(i)2 自由度以上で連成した系であり，(ii) 準自明解を有し，(iii) 励振領域で準自明解が不安定になる (iv) 主系が副系を励振する機械システムの励振現象である．つまり，分調波の自明解を非線形共振現象により不安定化させ，伝播距離に対して定常な分数調波の非自明解を励起させるモデルである．

1.3 構成

以下に本論文の構成を記す．

第 1 章では，本研究の背景と目的を示した．

第 2 章では，ガイド波の理論解析に多重尺度法を適用する際に用いる重要な性質である伝播モードの直交性と自己随伴性を示した．

第 3 章では，減衰の効果を考慮したガイド波について，伝播モードの直交性と多重尺度法を適用し，分散曲線と減衰係数曲線を導出した．また，半解析的有限要素法を用いて導出した分散曲線と減衰係数曲線と比較し，本手法の妥当性を示した．

第 4 章では，累積的高調波と呼ばれる内部共振的ガイド波について，伝播モードの直交性と多重尺度法を適用し，複数モード間の非線形連成に基づくエネルギー授受を考慮した，伝播距離に対する基本波と高調波の振幅変化を明らかにした．さらに，減衰の効果による内部共振的ガイド波の伝播形態の変化について解析を行い，基本波モード，高調波モード共に伝播距離は有限であることを示した．加えて，非線形材料定数の変化と高調波の振幅変化の相関を明らかにした．従来の累積的高調波を用いた非線形材料定数の測定手法の問題点を指摘し，改善手法を提案した．また，提案した内部共振的ガイド波を用いた非線形材料定数の変化の測定における問題点を指摘した．

第 5 章では，第 4 章で示した従来手法，提案手法の問題点を解決し，非線形材料定数の変化の測定を非線形ガイド波を用いて容易に行うため，非線形共振現象による伝播距離に対して定常な振幅応答を得る手法を提案した．具体的には，オートパラメトリック励振的ガイド波を発生させるモデルを考え，非線形共振現象によって生じる伝播距離に対して定常な分調波モードの振幅を，伝播モードの直交性と多重尺度法用いて理論解析的に示し，安定な分調波の定常振幅解の存在を示した．さらに，提案手法を用いた非破壊検査法の精度を理論解析的に検証した．

第 6 章では，各章で得られた内容を総括し，本研究の成果を要約した．

第 2 章

ガイド波の伝播モードの直交性

一般に等方弾性体内を伝播する波動の支配方程式は，アインシュタインの縮約記号を用いて，以下のように表せる．

$$-\rho_d u_{i,tt} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} + \rho_d f_i = 0 \tag{2.0.1}$$

ここで，λ, μ は Lame 定数，ρ_d は密度，u_i は変位ベクトル，f_i は外力ベクトルである．Eq. (2.0.1) は Navier の式と呼ばれる等方弾性体の運動方程式である．本章では，ガイド波の一種である Lamb 波について，伝播モードの直交性を示す．解析に用いる平板のモデル図を Fig. 2.1 に示す．Lamb 波は y 方向に変位を持たず，一様な現象が生じると仮定し，Eq. (2.0.1) に $u_y = 0$，$\partial/\partial y = 0$ を代入する．伝播方向は x，厚さ方向は z とし，$u_x = u$，$u_z = w$ とする．また，ガイド波の伝播モードの分散特性は境界条件によって決定される．一般的に解析では以下に示す応力フリーの境界条件が採用される．

$$t_i|_{z=\pm h} = \sigma_{ji} n_j|_{z=\pm h} = 0 \tag{2.0.2}$$

ここで，t_i は応力ベクトル，$z = \pm h$ は平板の境界座標，σ_{ji} は応力テンソル，n_j は j 方向の単位ベクトルを示す．

Figure 2.1　Schematic of two-dimensional model.

2.1 支配方程式

Lamb 波の支配方程式と境界条件は，

$$-\rho_d \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (\lambda + \mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0 \tag{2.1.1}$$

$$-\rho_d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (\lambda + \mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) = 0 \tag{2.1.2}$$

$$\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]|_{z=h} = 0 \tag{2.1.3}$$

$$\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]|_{z=-h} = 0 \tag{2.1.4}$$

$$\left[\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right]|_{z=h} = 0 \tag{2.1.5}$$

$$\left[\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right]|_{z=-h} = 0 \tag{2.1.6}$$

となる．ここで，Eqs. (2.1.1)-(2.1.6) は代表長さ h，代表速度 $c_T = \sqrt{\mu/\rho_d}$ を用いて無次元化された微分方程式とみなす．本論文では代表長さと代表速度として，全章を通して同様の代表尺度を用いる．

ガイド波とは，試料長手方向に伝播する進行波であり，解析においては，以下に示す変位を満たす波動に対応する．

$$u = U_x^{'} \Phi_x(z) \exp\{i(kx - \omega t)\} + c.c. \tag{2.1.7}$$

$$w = U_z^{'} \Phi_z(z) \exp\{i(kx - \omega t)\} + c.c. \tag{2.1.8}$$

ここで，k は波数，ω は角周波数，$U_i^{'}$ は振幅ベクトル，$\Phi_i(z)$ $(i = x, z)$ は固有関数を表し，c.c. は複素共役を意味する．

2.2 位相速度分散曲線

本節では位相速度の導出を行う．まず，Eqs. (2.1.7), (2.1.8) における固有関数を以下のように仮定する．

$$\Phi_x(z) = \exp(ik\alpha z) \tag{2.2.1}$$

$$\Phi_z(z) = \exp(ik\alpha z) \tag{2.2.2}$$

Eqs. (2.2.1), (2.2.2) を Eqs. (2.1.7), (2.1.8) に代入し，整理すると以下の式が導出される．

$$u = U_x^{'} \exp\{ik(x + \alpha z - c_p t)\} + c.c. \tag{2.2.3}$$

$$w = U_z^{'} \exp\{ik(x + \alpha z - c_p t)\} + c.c. \tag{2.2.4}$$

ここで，α は x 方向と z 方向の波数の比であり，$c_p \equiv \omega/k$ は位相速度を表す．Eqs. (2.2.3), (2.2.4) を Eqs. (2.1.1), (2.1.2) に代入し以下の関係式を得る．

$$k^2 \begin{bmatrix} \rho c^2 - (\lambda + 2\mu) - \mu\alpha^2 & -(\lambda + \mu)\alpha \\ -(\lambda + \mu)\alpha & \rho c^2 - (\lambda + 2\mu)\alpha^2 - \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x^{'} \\ U_z^{'} \end{bmatrix} = 0 \tag{2.2.5}$$

Eq. (2.2.5) が非自明な $U_i^{'}$ を有する α_n とそれに対応する零空間 (核空間) $[p_x \quad p_z]$ を用いて，Eqs. (2.2.3), (2.2.4) は以下のように書き直せる．

$$\begin{aligned} u &= \sum_n p_{xn} \exp\{ik(x + \alpha_n z - \frac{\omega}{k} t)\} + c.c. \\ &= = U_x \Phi_x(z) \exp\{i(kx - \omega t)\} + c.c. \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

$$\begin{aligned} w &= \sum_n p_{zn} \exp\{ik(x + \alpha_n z - \frac{\omega}{k} t)\} + c.c. \\ &= = U_z \Phi_z(z) \exp\{i(kx - \omega t)\} + c.c. \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Eqs. (2.2.3), (2.2.4) を境界条件 (Eqs. (2.1.3)-(2.1.6)) に代入し，非自明な U_i を有する角周波数 ω と波数 k の条件とそれに対応する零空間を求める．この非自明解を有する ω と k の条件式を分散方程式と呼び，この方程式を満たす ω，k，零空間が Lamb 波として伝播する角周波数，波数，固有関数に対応する．位相速度 c_p は角周波数に依存し，Lamb 波は分散性を有しうることが分かる．この ω-c_p をプロットした図を位相速度分散曲線と呼ぶ．特に，Fig. 2.1 に示すような平板に伝播する Lamb 波の分散方程式はそれぞれ以下の分散方程式を満たす A-mode(反対称モード) と S-mode(対称モード) に分離できる [4].

$$\frac{\tan(qh)}{\tan(ph)} + \frac{(q^2 - k^2)^2}{4k^2 pq} = 0 \tag{2.2.8}$$

$$\frac{\tan(qh)}{\tan(ph)} + \frac{4k^2 pq}{(q^2 - k^2)^2} = 0 \tag{2.2.9}$$

ここで，$p = \sqrt{(\omega/c_L)^2 - k^2}$, $q = \sqrt{(\omega/c_T)^2 - k^2}$ である．c_L は縦波速度，c_T は横波速度であり，以下のように算出できる [63].

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_d}} \tag{2.2.10}$$

$$c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_d}} \tag{2.2.11}$$

Eqs. (2.2.8), (2.2.9) はある ω に対して，k についての非線形代数方程式である．Eqs. (2.2.8), (2.2.9) を満たす ω，k より得られた位相速度分散曲線を Figs. 2.2, 2.3 に示す．ここで，ある周波数において，速度が遅い順にそれぞれ S_0, S_1, $\cdots$，A_0, A_1, $\cdots$ と番号を付け，各モードを呼称する．Fig. 2.4 に例として，S_0-mode, S_1-mode, A_0-mode, A_1-mode の固有関数を示す．この固有関数は変位分布に相当し，$\Phi_x = U_x$，$\Phi_z = U_z$ に対応する．また，本研究では，一般的な金属材料の中で比較的ヤング率の小さいアルミニウムを解析対象とする．計算に用いた物性値と板厚を Table 2.1 に示す．

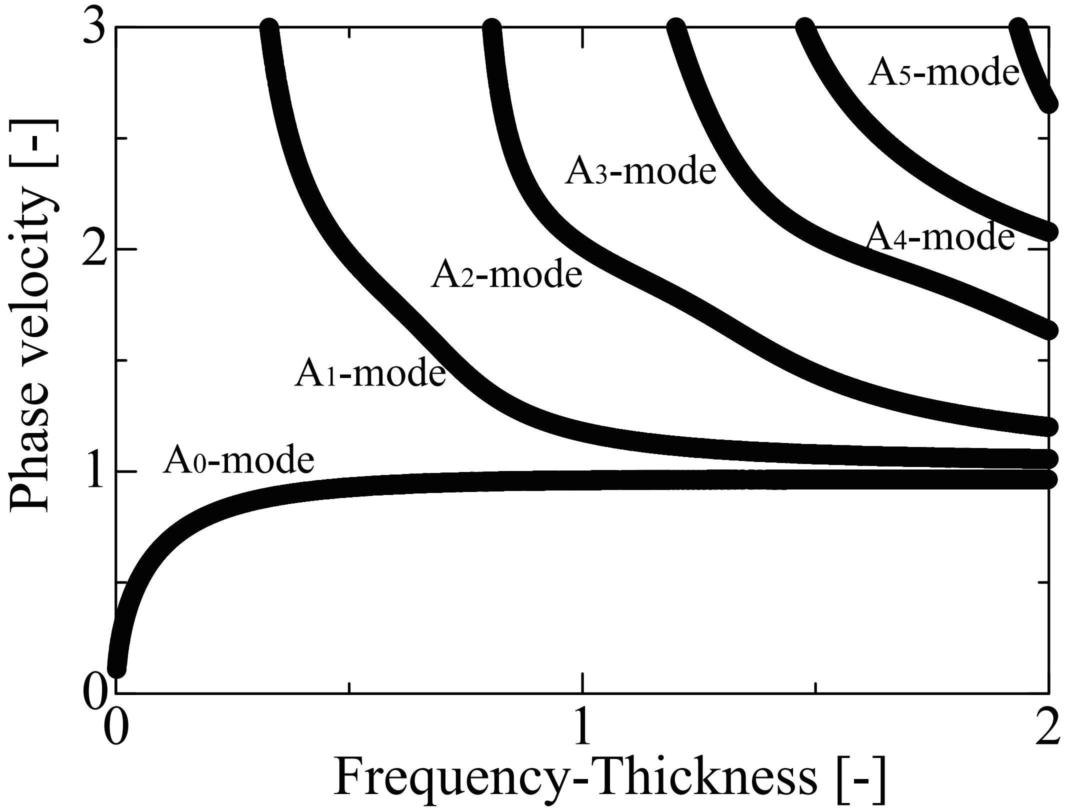

Figure 2.2　Phase velocity dispersion curves of A-mode.

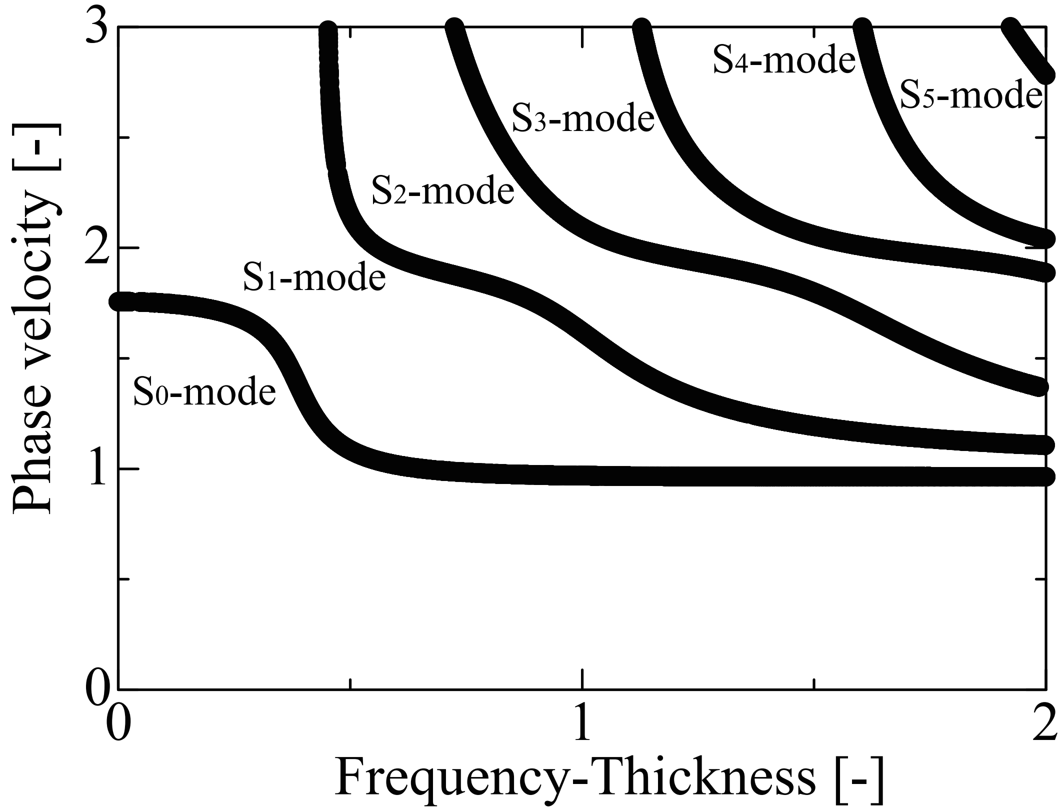

Figure 2.3 Phase velocity dispersion curves of S-mode.

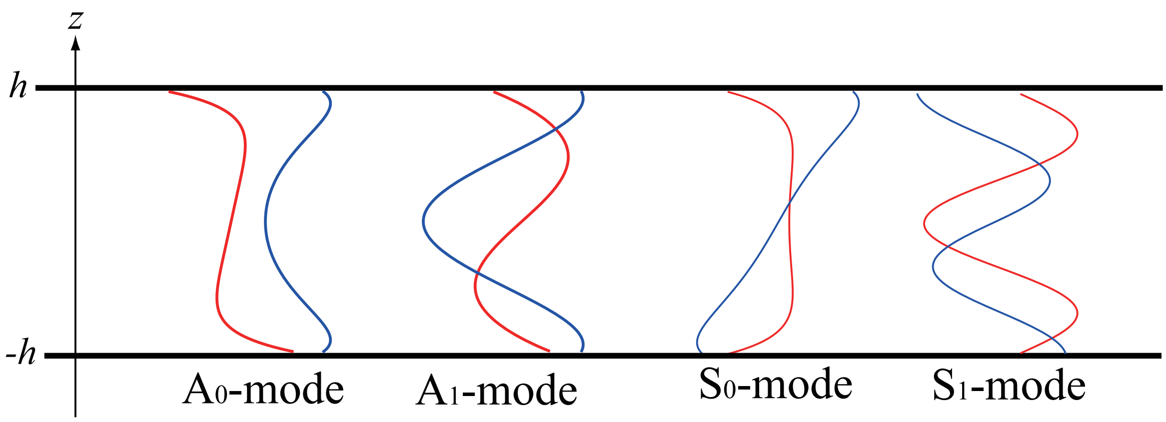

Figure 2.4 Eigenfunctions of S_0-mode, S_1-mode, A_0-mode and A_1-mode. Red lines show Φ_x with respect to each mode. Blue lines show Φ_z with respect to each mode.

Table 2.1 Parameters used for calculation of dispersion curves and eigenfunctions.

ρ_d [kg/m^3]	c_L [km/s]	c_T [km/s]	$2h$ [mm]	λ [GPa]	μ [GPa]
2700	6.3	3.1	1.0	40	27

2.3 群速度分散曲線

周波数に幅を持って励起されたガイド波はうなりを発生し，波動のエネルギーはうなりの速度で伝播する．このうなりの速度を群速度 (エネルギー速度) と呼び，以下のように算出される．

簡単のため，等振幅 A_g で，わずかに異なる二つの周波数 ω_1, ω_2 と波数 k_1, k_2 を有する進行波の重ね合わせを考える．

$$u(x,t) = A_g \cos(k_1 x - \omega_1 t) + A_g \cos(k_2 x - \omega_2 t) \tag{2.3.1}$$

Eq. (2.3.1) を三角関数の和積の公式を用いて変形すると以下のようになる．

$$u(x,t) = 2A_g \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos(k_{av}x - \omega_{av}t) \tag{2.3.2}$$

ここで，$k_{av} = (k_1 + k_2)/2$，$\Delta k = k_2 - k_1$ であり，同様に $\omega_{av} = (\omega_1 + \omega_2)/2$，$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ ある．Eq. (2.3.2) は平均波数 k_{av} と平均周波数 ω_{av} を持った進行波 $\cos(k_{av}x - \omega_{av}t)$ の振幅が，

$$2A_g \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right) \tag{2.3.3}$$

で変調していると解釈できる．この振幅変調を変形して，

$$2A_g \cos\left\{\frac{\Delta k}{2}\left(x - \frac{\Delta\omega}{\Delta k}t\right)\right\} \tag{2.3.4}$$

とすれば，この振幅変調は速度

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta k} \tag{2.3.5}$$

で伝播する．二つの異なる波の有する周波数と波数が非常に近い場合

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} \tag{2.3.6}$$

となり，ガイド波の群速度は Eq. (2.3.6) と表せる．Figs. 2.5, 2.6 に A-mode，S-mode の群速度分散曲線を示す．

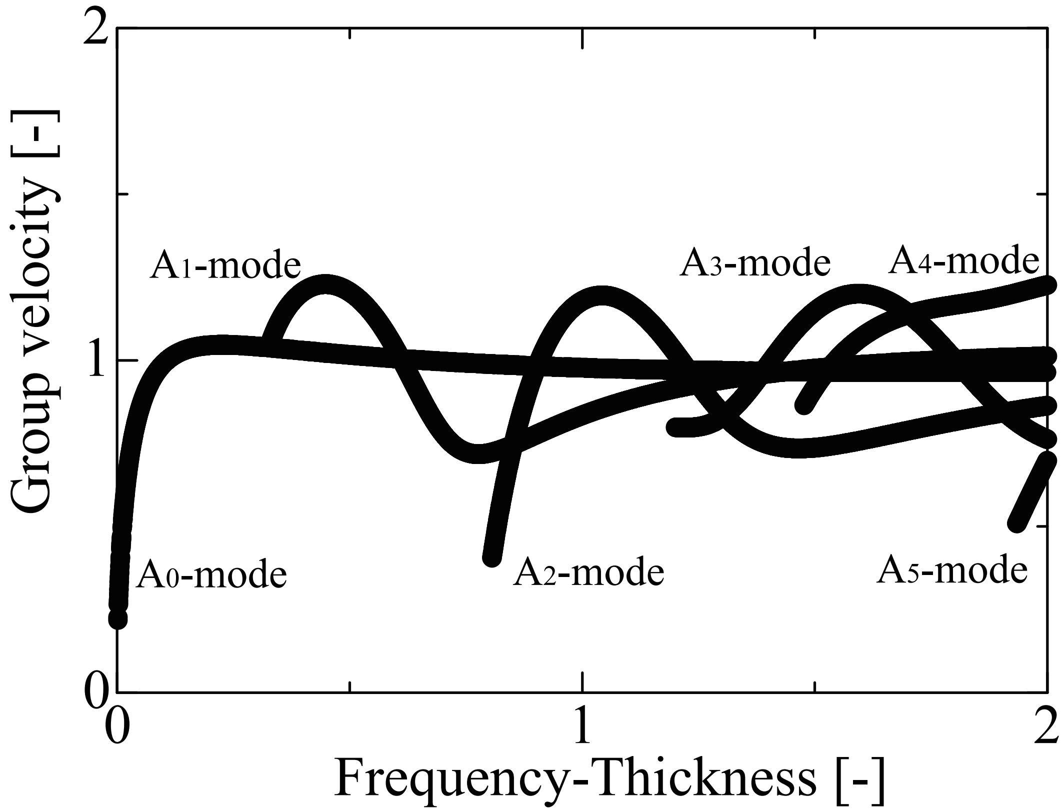

Figure 2.5 Group velocity dispersion curves of A-mode.

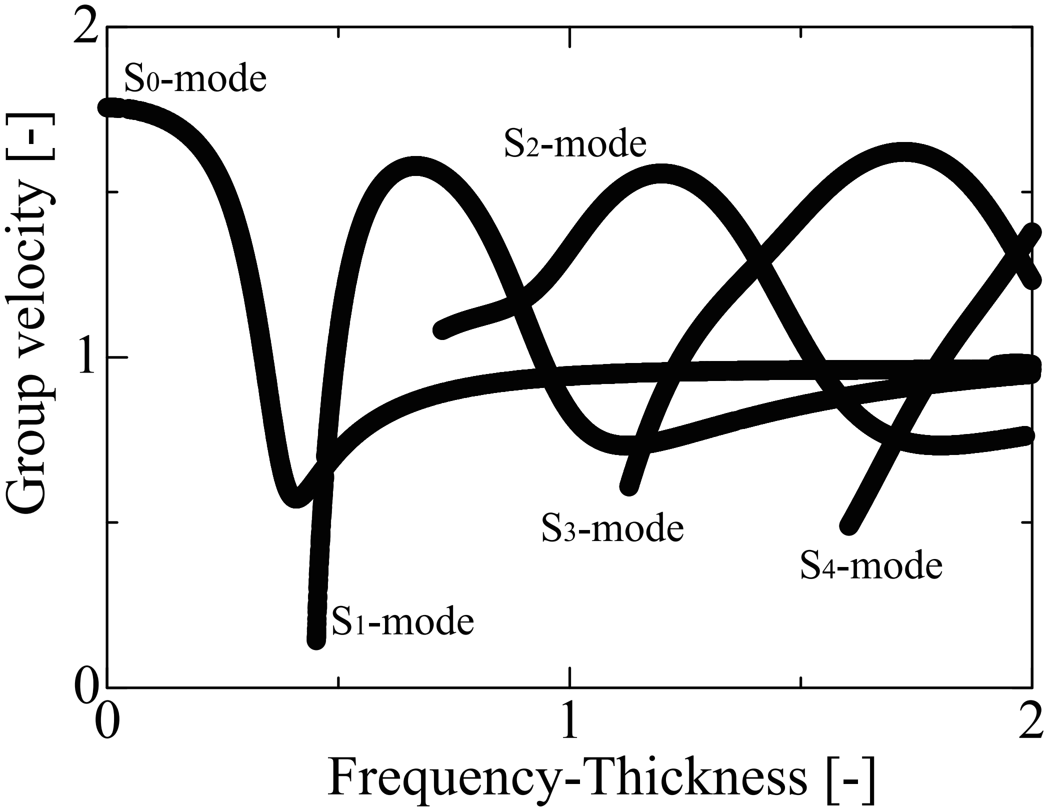

Figure 2.6 Group velocity dispersion curves of S-mode.

2.4 伝播モードの直交性

Figs. 2.2, 2.3 より，ある周波数 ω に対して複数の伝播モードが励起される周波数帯が存在することが確認できる．本節では，同じ周波数 ω で励起される任意の 2 つの伝播モード，a-mode と b-mode，の直交性を考える．j-mode $(j = a, b)$ の変位は，波数 k_j と固有関数 $\Phi_{jx}(z)$，$\Phi_{jz}(z)$，振幅 A_j を用いて以下のように表せる．

$$u_j = A_j \Phi_{jx} \exp\{i(k_j x - \omega t)\} + c.c. \tag{2.4.1}$$

$$w_j = A_j \Phi_{jz} \exp\{i(k_j x - \omega t)\} + c.c. \tag{2.4.2}$$

ここで，a-mode と b-mode は，Eqs. (2.1.1)-(2.1.6) を満たす非自明解であり，A_a, A_b は非零である．まず，a-mode における Eq. (2.1.1) に $\Phi_{bx}(z)$ を掛け，a-mode における Eq. (2.1.2) に $\Phi_{bz}(z)$ を掛け，辺々引き，$z = -h$ から $z = h$ まで積分し，部分積分を行い，整理すると

$$\begin{aligned}
&A_a \int_{-h}^{h} \left\{ \rho_d \omega^2 \Phi_{ax} \Phi_{bx} + (\lambda + \mu) \left(-k_a^2 \Phi_{ax} \Phi_{bx} - i k_a \Phi_{ax} \frac{d\Phi_{bz}}{dz} \right) \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \mu \left(-k_a^2 \Phi_{ax} \Phi_{bx} + \Phi_{ax} \frac{d^2 \Phi_{bx}}{dz^2} \right) \right\} dz \\
&- A_a \int_{-h}^{h} \left\{ \rho_d \omega^2 \Phi_{az} \Phi_{bz} + (\lambda + \mu) \left(-i k_a \Phi_{az} \frac{d\Phi_{bx}}{dz} + \Phi_{az} \frac{d^2 \Phi_{bz}}{dz^2} \right) \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \mu \left(-k_a^2 \Phi_{az} \Phi_{bz} + \Phi_{az} \frac{d^2 \Phi_{bz}}{dz^2} \right) \right\} dz \\
=& A_a \left\{ -i k_a (\lambda + \mu) [\Phi_{az} \Phi_{bx} - \Phi_{ax} \Phi_{bz}]_{-h}^{h} - \mu \left[\frac{d\Phi_{ax}}{dz} \Phi_{bx} - \frac{d\Phi_{bx}}{dz} \Phi_{ax} \right]_{-h}^{h} \right. \\
&\qquad\qquad \left. + (\lambda + 2\mu) \left[\frac{d\Phi_{az}}{dz} \Phi_{bz} - \frac{d\Phi_{bz}}{dz} \Phi_{az} \right]_{-h}^{h} \right\}
\end{aligned} \tag{2.4.3}$$

となる．同様に，a-mode と b-mode を入れ替えて得られた式に A_a/A_b を掛け，Eq. (2.4.3) から引き，整理すると

$$\begin{aligned}
&(k_b - k_a) \left\{ \int_{-h}^{h} (\lambda + 2\mu)(k_b + k_a) \Phi_{ax} \Phi_{bx} + i(\lambda + \mu) \left(\Phi_{az} \frac{d\Phi_{bx}}{dz} - \Phi_{ax} \frac{d\Phi_{bz}}{dz} \right) \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \mu (k_a + k_b) \Phi_{az} \Phi_{bz} dz \right\} = \\
&- i k_a (\lambda + \mu) [\Phi_{az} \Phi_{bx} - \Phi_{ax} \Phi_{bz}]_{-h}^{h} - \mu \left[\frac{d\Phi_{ax}}{dz} \Phi_{bx} - \frac{d\Phi_{bx}}{dz} \Phi_{ax} \right]_{-h}^{h} \\
&\qquad + (\lambda + 2\mu) \left[\frac{d\Phi_{az}}{dz} \Phi_{bz} - \frac{d\Phi_{bz}}{dz} \Phi_{az} \right]_{-h}^{h}
\end{aligned} \tag{2.4.4}$$

となる．Eq. (2.4.4) の右辺を境界条件 Eqs. (2.1.3)-(2.1.6) を用いて整理すると以下の式を得る．

$$
\begin{aligned}
(k_b - k_a)\Bigg[\int_{-h}^{h}\Bigg\{&(\lambda+2\mu)(k_b+k_a)\Phi_{ax}\Phi_{bx} + i(\lambda+\mu)\left(\Phi_{az}\frac{d\Phi_{bx}}{dz} - \Phi_{ax}\frac{d\Phi_{bz}}{dz}\right) \\
&- \mu(k_a+k_b)\Phi_{az}\Phi_{bz}\Bigg\}dz + \left[i\mu\Phi_{ax}\Phi_{bz} - i\lambda\Phi_{az}\Phi_{bx}\right]_{-h}^{h}\Bigg] = 0
\end{aligned} \tag{2.4.5}
$$

Eq. (2.4.5) より以下の関係式が導出される．

$$
\begin{aligned}
\int_{-h}^{h}\Bigg\{&(\lambda+2\mu)(k_b+k_a)\Phi_{ax}\Phi_{bx} + i(\lambda+\mu)\left(\Phi_{az}\frac{d\Phi_{bx}}{dz} - \Phi_{ax}\frac{d\Phi_{bz}}{dz}\right) \\
&- \mu(k_a+k_b)\Phi_{az}\Phi_{bz}\Bigg\}dz + \left[i\mu\Phi_{ax}\Phi_{bz} - i\lambda\Phi_{az}\Phi_{bx}\right]_{-h}^{h} = \alpha_{ab}\delta_{ab}
\end{aligned} \tag{2.4.6}
$$

ここで，δ_{ab} はクロネッカーのデルタと呼ばれ以下の値を取る．

$$\delta_{ab} = 0 \text{ if } a \neq b \tag{2.4.7}$$

$$\delta_{ab} = 1 \text{ if } a = b \tag{2.4.8}$$

また，a-mode における Eq. (2.1.1) に $k_b\Phi_{bx}(z)$ を掛け，a-mode における Eq. (2.1.2) に $k_b\Phi_{bz}(z)$ を掛け，辺々引き，$z=-h$ から $z=h$ まで積分し，部分積分を行い，整理すると

$$
\begin{aligned}
&A_a\int_{-h}^{h}\Bigg\{k_b\rho_d\omega^2\Phi_{ax}\Phi_{bx} + (\lambda+\mu)\left(-k_a^2k_b\Phi_{ax}\Phi_{bx} - ik_ak_b\Phi_{az}\frac{d\Phi_{bx}}{dz}\right) \\
&\qquad +\mu\left(-k_a^2k_b\Phi_{ax}\Phi_{bx} + k_b\Phi_{ax}\frac{d^2\Phi_{bx}}{dz^2}\right)\Bigg\}dz \\
&- A_a\int_{-h}^{h}\Bigg\{k_b\rho_d\omega^2\Phi_{az}\Phi_{bz} + (\lambda+\mu)\left(-ik_ak_b\Phi_{ax}\frac{d\Phi_{bz}}{dz} + k_b\Phi_{az}\frac{d^2\Phi_{bz}}{dz^2}\right) \\
&\qquad +\mu\left(-k_a^2k_b\Phi_{az}\Phi_{bz} + k_b\frac{d^2\Phi_{bx}}{dz^2}\Phi_{az}\right)\Bigg\}dz \\
=&A_a\Bigg\{-ik_ak_b(\lambda+\mu)\left[\Phi_{az}\Phi_{bx} - \Phi_{ax}\Phi_{bz}\right]_{-h}^{h} - \mu k_b\left[\frac{d\Phi_{ax}}{dz}\Phi_{bx} - \frac{d\Phi_{bx}}{dz}\Phi_{ax}\right]_{-h}^{h} \\
&\qquad +k_b(\lambda+2\mu)\left[\frac{d\Phi_{az}}{dz}\Phi_{bz} - \frac{d\Phi_{bz}}{dz}\Phi_{az}\right]_{-h}^{h}\Bigg\}
\end{aligned} \tag{2.4.9}
$$

となる．同様に，a-mode と b-mode を入れ替えて得られた式に A_a/A_b を掛け，Eq. (2.4.9) から引き，整理すると

$$\begin{aligned}
&(k_b - k_a)\left[\int_{-h}^{h}\left\{\rho_d\omega^2\Phi_{ax}\Phi_{bx} + (\lambda+2\mu)k_ak_b\Phi_{ax}\Phi_{bx} + \mu\frac{d^2\Phi_{bx}}{dz^2}\Phi_{ax}\right\}dz\right.\\
&\qquad\left.-\int_{-h}^{h}\left\{\rho_d\omega^2\Phi_{az}\Phi_{bz} + (\lambda+2\mu)\frac{d^2\Phi_{bz}}{dz^2}\Phi_{az} + \mu k_ak_b\Phi_{az}\Phi_{bz}\right\}dz\right]\\
&= -ik_ak_b(\lambda+\mu)[\Phi_{az}\Phi_{bx} - \Phi_{ax}\Phi_{bz}]_{-h}^{h} - \mu k_b\left[\frac{d\Phi_{ax}}{dz}\Phi_{bx} - \frac{d\Phi_{bx}}{dz}\Phi_{ax}\right]_{-h}^{h}\\
&\qquad + k_b(\lambda+2\mu)\left[\frac{d\Phi_{az}}{dz}\Phi_{bz} - \frac{d\Phi_{bz}}{dz}\Phi_{az}\right]_{-h}^{h}
\end{aligned}\tag{2.4.10}$$

となる．Eq. (2.4.10) 右辺を境界条件 Eqs. (2.1.3)-(2.1.6) を用いて整理すると以下の式を得る

$$\begin{aligned}
&(k_b - k_a)\left[\int_{-h}^{h}\left\{\rho_d\omega^2\Phi_{ax}\Phi_{bx} + (\lambda+2\mu)k_ak_b\Phi_{ax}\Phi_{bx} + \mu\frac{d^2\Phi_{bx}}{dz^2}\Phi_{ax}\right\}dz\right.\\
&\qquad-\int_{-h}^{h}\left\{\rho_d\omega^2\Phi_{az}\Phi_{bz} + (\lambda+2\mu)\frac{d^2\Phi_{bz}}{dz^2}\Phi_{az} + \mu k_ak_b\Phi_{az}\Phi_{bz}\right\}dz\\
&\qquad\qquad\left.+ [i\mu k_b\Phi_{ax}\Phi_{bz} - i\lambda k_b\Phi_{az}\Phi_{bx}]_{-h}^{h}\right] = 0
\end{aligned}\tag{2.4.11}$$

Eq. (2.4.11) より以下の関係式が導出される．

$$\begin{aligned}
&\int_{-h}^{h}\left\{\rho_d\omega^2\Phi_{ax}\Phi_{bx} + (\lambda+2\mu)k_ak_b\Phi_{ax}\Phi_{bx} + \mu\frac{d^2\Phi_{bx}}{dz^2}\Phi_{ax}\right\}dz\\
&-\int_{-h}^{h}\left\{\rho_d\omega^2\Phi_{az}\Phi_{bz} + (\lambda+2\mu)\frac{d^2\Phi_{bz}}{dz^2}\Phi_{az} + \mu k_ak_b\Phi_{az}\Phi_{bz}\right\}dz\\
&\qquad+ [i\mu k_b\Phi_{ax}\Phi_{bz} - i\lambda k_b\Phi_{az}\Phi_{bx}]_{-h}^{h} = \beta_{ab}\delta_{ab}
\end{aligned}\tag{2.4.12}$$

Eqs. (2.4.6), (2.4.12) と Eqs. (2.1.1), (2.1.2) より

$$(-k_b\alpha_{ab} + \beta_{ab})\delta_{ab} = 0 \tag{2.4.13}$$

である．Eqs. (2.4.6), (2.4.12), (2.4.13) より波数領域での伝播モードの直交性が示された．

2.5 随伴作用素

本節では，Eqs. (2.1.1)-(2.1.6) を微分作用素を用いて表し，その微分作用素の自己随伴性を示す [61], [62]．2.4 節と同様に，同じ周波数 ω で励起される任意の 2 つの伝播モード，a-mode と b-mode，について解析を行う．Eqs. (2.1.1), (2.1.2) を行列表記で書き直し，進行波を仮定し，x

方向の演算を行うと以下の関係式を得る.

$$\left(\begin{bmatrix} \rho_d\omega^2 & 0 \\ 0 & \rho_d\omega^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(\lambda+2\mu)k^2 & 0 \\ 0 & -\mu k^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & i(\lambda+\mu)k \\ i(\lambda+\mu)k & 0 \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial z} + \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda+2\mu \end{bmatrix}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{U} = \boldsymbol{0} \tag{2.5.1}$$

Eq. (2.5.1) を係数行列 $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{l_0}$, $\boldsymbol{l_1}$, $\boldsymbol{l_2}$ と固有関数 ϕ を用いて書き直すと以下のようになる.

$$\left(\boldsymbol{l} + k^2\boldsymbol{l_0} + k\boldsymbol{l_1}\frac{\partial}{\partial z} + \boldsymbol{l_2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{0} \tag{2.5.2}$$

ここで，係数行列はそれぞれ以下のようになる.

$$\boldsymbol{l} = \begin{bmatrix} \rho_d\omega^2 & 0 \\ 0 & \rho_d\omega^2 \end{bmatrix} \tag{2.5.3}$$

$$\boldsymbol{l_0} = \begin{bmatrix} -(\lambda+2\mu) & 0 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix} \tag{2.5.4}$$

$$\boldsymbol{l_1} = \begin{bmatrix} 0 & i(\lambda+\mu) \\ i(\lambda+\mu) & 0 \end{bmatrix} \tag{2.5.5}$$

$$\boldsymbol{l_2} = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda+2\mu \end{bmatrix} \tag{2.5.6}$$

同様に，Eqs. (2.1.3)-(2.1.6) を行列表記で書き直すと以下の関係式を得る.

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & i\lambda k \\ i\mu k & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda+2\mu \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{U} = \boldsymbol{0} \quad at \;\; z = \pm h \tag{2.5.7}$$

Eq. (2.5.7) を係数行列 $\boldsymbol{b_0}$, $\boldsymbol{b_1}$ と固有関数 ϕ を用いて書き直すと以下のようになる.

$$\left(k\boldsymbol{b_0} + \boldsymbol{b_1}\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{0} \quad at \;\; z = \pm h \tag{2.5.8}$$

ここで，係数行列はそれぞれ以下のようになる.

$$\boldsymbol{b_0} = \begin{bmatrix} 0 & i\mu \\ i\lambda & 0 \end{bmatrix} \tag{2.5.9}$$

$$\boldsymbol{b_1} = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda+2\mu \end{bmatrix} \tag{2.5.10}$$

2 階微分作用素 $\boldsymbol{L}$ と 1 階微分作用素 $\boldsymbol{B}$ をそれぞれ以下のように定義する.

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{l}(z) + k^2\boldsymbol{l_0}(z) + k\boldsymbol{l_1}(z)\frac{\partial}{\partial z} + \boldsymbol{l_2}(z)\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2.5.11}$$

$$\boldsymbol{B} = k\boldsymbol{b_0}(z) + \boldsymbol{b_1}(z)\frac{\partial}{\partial z} \tag{2.5.12}$$

$\boldsymbol{L}$ が自己随伴作用素となる条件を以下に示す．まず，a-mode と b-mode は非自明解であるので，Eqs. (2.5.11), (2.5.12) を同時に満たす同次解として固有関数 ϕ_a, ϕ_b は以下の関係式を満たす．

$$\boldsymbol{L}(\phi_a) = \boldsymbol{l}\phi_a + k_a^2\boldsymbol{l_0}\phi_a + k_a\boldsymbol{l_1}\frac{\partial\phi_a}{\partial z} + \boldsymbol{l_2}\frac{\partial^2\phi_a}{\partial z^2} = 0 \tag{2.5.13}$$

$$\boldsymbol{B}(\phi_a) = k_a\boldsymbol{b_0}\phi_a + \boldsymbol{b_1}\frac{\partial\phi_a}{\partial z} = 0 \quad at \ \ z = \pm h \tag{2.5.14}$$

$$\boldsymbol{L}(\phi_b) = \boldsymbol{l}\phi_b + k_b^2\boldsymbol{l_0}\phi_b + k_b\boldsymbol{l_1}\frac{\partial\phi_b}{\partial z} + \boldsymbol{l_2}\frac{\partial^2\phi_b}{\partial z^2} = 0 \tag{2.5.15}$$

$$\boldsymbol{B}(\phi_b) = k_b\boldsymbol{b_0}\phi_b + \boldsymbol{b_1}\frac{\partial\phi_b}{\partial z} = 0 \quad at \ \ z = \pm h \tag{2.5.16}$$

ここで，$\boldsymbol{L}(\phi_a)$ と ϕ_b の内積を行い，部分積分を適用し，整理する．

$$\begin{aligned}
< \phi_b, \boldsymbol{L}(\phi_a) > &= \int_{-h}^{h} \phi_b^H \boldsymbol{L}(\phi_a) dz \\
&= \int_{-h}^{h} \left[\phi_b^H\boldsymbol{l}\phi_a + k_a^2\phi_b^H\boldsymbol{l_0}\phi_a + k_a\phi_b^H\boldsymbol{l_1}\frac{\partial\phi_a}{\partial z} + \phi_b^H\boldsymbol{l_2}\frac{\partial^2\phi_a}{\partial z^2}\right] \\
&= \int_{-h}^{h} \left[\phi_b^H\left(\boldsymbol{l} + k_a^2\boldsymbol{l_0} - k_a\frac{\partial\boldsymbol{l_1}}{\partial z} + \frac{\partial^2\boldsymbol{l_2}}{\partial z^2}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial\phi_b^H}{\partial z}\left(-k_a\boldsymbol{l_1} + 2\frac{\partial\boldsymbol{l_2}}{\partial z}\right) + \frac{\partial^2\phi_b^H}{\partial z^2}\boldsymbol{l_2}\right]\phi_a dz \\
&\quad + \left[\phi_b^H\left(k_a\boldsymbol{l_1} - \boldsymbol{l_2}\boldsymbol{b_1^{-1}}\boldsymbol{b_0} - \frac{\partial\boldsymbol{l_2}}{\partial z}\right)\phi_a + \frac{\partial\phi_b^H}{\partial z}(-\boldsymbol{l_2})\phi_a\right]_{-h}^{h} = 0
\end{aligned} \tag{2.5.17}$$

ここで，$\bigcirc^H$ はエルミート転置を表す．Eq. (2.5.17) が自己随伴となる条件 ($< \phi_b, \boldsymbol{L}(\phi_a) > = < \boldsymbol{L^*}(\phi_b), \phi_a >$ を満たす条件) は以下のようになる．

$$k_a = k_b \tag{2.5.18}$$

$$\left[\boldsymbol{l} + k_a^2\boldsymbol{l_0} - k_a\frac{\partial\boldsymbol{l_1}}{\partial z} + \frac{\partial^2\boldsymbol{l_2}}{\partial z^2}\right]^H = \boldsymbol{l} + k_b^2\boldsymbol{l_0} \tag{2.5.19}$$

$$\left[-k_a\boldsymbol{l_1} + 2\frac{\partial\boldsymbol{l_2}}{\partial z}\right]^H = k_b\boldsymbol{l_1} \tag{2.5.20}$$

$$\boldsymbol{l_2}^H = \boldsymbol{l_2} \tag{2.5.21}$$

$$\left[k_a\boldsymbol{l_1} - k_a\boldsymbol{l_2}\boldsymbol{b_1^{-1}}\boldsymbol{b_0} - \frac{\partial\boldsymbol{l_2}}{\partial z}\right]^H = \pm k_b\boldsymbol{b_0} \tag{2.5.22}$$

$$-\boldsymbol{l_2}^H = \pm\boldsymbol{b_1} \tag{2.5.23}$$

ここで，係数行列 $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{l_0}$, $\boldsymbol{l_1}$, $\boldsymbol{l_2}$, $\boldsymbol{b_0}$, $\boldsymbol{b_1}$ は定数なので，Eqs. (2.5.18)-(2.5.23) の必要十分条件は $k_a = k_b$ である．したがって，$k_a = k_b$ のときに境界条件 Eqs. (2.5.14), (2.5.16) より，以下の自

己随伴関係がある．

$$< \phi_b, \boldsymbol{L}(\phi_a) >=< \boldsymbol{L}^*(\phi_b), \phi_a > +\phi_b^H \boldsymbol{B}(\phi_a)|_{-h}^{h} =< \boldsymbol{L}^*(\phi_b), \phi_a > \tag{2.5.24}$$

$$< \boldsymbol{L}^*(\phi_b), \phi_a >=< \phi_b, \boldsymbol{L}(\phi_a) > + [\boldsymbol{B}(\phi_b)]^H \phi_a|_{-h}^{h} =< \phi_b, \boldsymbol{L}(\phi_a) > \tag{2.5.25}$$

Eqs. (2.5.24), (2.5.25) より，$k_a = k_b$ の条件下において，ϕ_a, ϕ_b は以下の関係式を満たす．

$$[\boldsymbol{B}(\phi_b)]^H \phi_a|_{-h}^{h} = -\phi_b^H \boldsymbol{B}(\phi_a)|_{-h}^{h} \tag{2.5.26}$$

Eq. (2.5.26) は以下のように書き直せる．

$$< \boldsymbol{L}^*(\phi_b), \phi_a >=< \phi_b, \boldsymbol{L}(\phi_a) > -\phi_b^H \boldsymbol{B}(\phi_a)|_{-h}^{h} \tag{2.5.27}$$

2.6　可解条件

以下に示す非同次微分方程式が解を持つ条件を示す．

$$\boldsymbol{L}(\psi) = \boldsymbol{F} \exp\{i(k_f x - \omega_f t)\} \tag{2.6.1}$$

$$\boldsymbol{B}(\psi) = \boldsymbol{G} \exp\{i(k_f x - \omega_f t)\} \quad at \;\; z = \pm h \tag{2.6.2}$$

$k_f = k_a, \omega_f = \omega_a$ を満たすとき，Eq. (2.5.27) より，$\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}$ は以下の関係式を満たす．

$$< \boldsymbol{L}^*(\phi_a), \psi >=< \phi_a, \boldsymbol{F} > -\phi_a^H \boldsymbol{G}|_{-h}^{h} = 0 \tag{2.6.3}$$

Eq. (2.6.3) を可解条件と呼ぶ．

2.7　結論

本章では，ガイド波の基本的な性質を説明し，具体的に以下の成果を得た．

(1) Lamb 波において，伝播モードの波数領域における直交性を解析的に示した．

(2) 支配方程式を微分作用素を用いて表し，その微分作用素の自己随伴性を用いて，非同次微分方程式の可解条件を導出した．

第 3 章

減衰ガイド波

本章では，減衰の効果を考慮したガイド波について，分散曲線と減衰係数曲線を導出する．解析モデルは 2 章と同様な Fig.2.1 を用いる．

3.1 支配方程式と多重尺度法

減衰の効果を考慮するため構造減衰を導入する．構造減衰は，振動系における一般的な粘性減衰とは異なり，減衰力は周波数に陽に依存せず，歪みに比例する減衰力を作用させる．したがって，剛性に相当する弾性係数を複素数とし，虚部に起因する効果が減衰の効果として振る舞う．本章では，Eqs. (2.1.1)-(2.1.6) における Lame 定数を複素数に拡張する．また，本章における計算に用いる各種物性値を Table 3.1 に示す．複素 Lame 定数は $c_L, c_T, \kappa_L, \kappa_T$ を用いて以下のように算出できる．

Table 3.1 Parameters used for calculation of attenuating guided waves.

ρ_d [kg/m^3]	c_L [km/s]	c_T [km/s]	κ_L [Np/λ]	κ_T [Np/λ]	$2h$ [mm]	ϵ [-]
2700	6.3	3.1	0.00025	0.00025	1.0	0.0010

$$\lambda_r = \mathrm{Re}\left[\rho_d c_L \left(1 + i\frac{\kappa_L}{2\pi}\right)^{-2} - 2\rho_d c_T \left(1 + i\frac{\kappa_T}{2\pi}\right)^{-2}\right] \tag{3.1.1}$$

$$\lambda_i = \mathrm{Im}\left[\rho_d c_L \left(1 + i\frac{\kappa_L}{2\pi}\right)^{-2} - 2\rho_d c_T \left(1 + i\frac{\kappa_T}{2\pi}\right)^{-2}\right] \tag{3.1.2}$$

$$\mu_r = \mathrm{Re}\left[\rho_d c_T \left(1 + i\frac{\kappa_T}{2\pi}\right)^{-2}\right] \tag{3.1.3}$$

$$\mu_i = \mathrm{Im}\left[\rho_d c_T \left(1 + i\frac{\kappa_T}{2\pi}\right)^{-2}\right] \tag{3.1.4}$$

Eqs. (3.1.1)-(3.1.4) に Table 3.1 の値を代入し得られる複素 Lame 定数を Table 3.2 に示す． 複

Table 3.2 Parameters used for calculation of attenuating guided waves.

λ_r [GPa]	μ_r [GPa]	λ_i [MPa]	μ_i [MPa]
40	27	-3.2	-4.0

素 Lame 定数を用いた支配方程式と境界条件は以下のようになる．

$$\begin{aligned} &-\rho_d \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \{\lambda_r + \mu_r + i(\lambda_i + \mu_i)\}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right) \\ &\qquad + (\mu_r + i\mu_i)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0 \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

$$\begin{aligned} &-\rho_d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \{\lambda_r + \mu_r + i(\lambda_i + \mu_i)\}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \\ &\qquad + (\mu_r + i\mu_i)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) = 0 \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

$$\left[(\mu_r + i\mu_i)\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]|_{z=h} = 0 \tag{3.1.7}$$

$$\left[(\mu_r + i\mu_i)\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]|_{z=-h} = 0 \tag{3.1.8}$$

$$\left[(\lambda_r + i\lambda_i)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2(\mu_r + i\mu_i)\frac{\partial w}{\partial z}\right]|_{z=h} = 0 \tag{3.1.9}$$

$$\left[(\lambda_r + i\lambda_i)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2(\mu_r + i\mu_i)\frac{\partial w}{\partial z}\right]|_{z=-h} = 0 \tag{3.1.10}$$

Eqs. (3.1.5)-(3.1.10) は 2 章と同様の代表尺度 (代表長さ h，代表速度 $c_T = \sqrt{\mu/\rho_d}$) を用いて無次元化された微分方程式とみなす．ここで，Eqs. (3.1.5)-(3.1.10) に多重尺度法を適用する．微小量 ϵ ($\epsilon \ll 1$) を用いて，$\lambda_i = \epsilon\hat{\lambda}_i$，$\mu_i = \epsilon\hat{\mu}_i$ と複素 Lame 定数の虚部の大きさを見積もる．さらに，伝播距離に対して，$x_0 = x$，$x_1 = \epsilon x$ と 2 つの尺度を用意する．x_0 は短い伝播距離の尺度，x_1 は長い伝播距離の尺度を表す．伝播距離に対して複数の尺度を用意するのは，ガイド波にとって，減衰の効果は長い距離伝播することで現れる効果であるためである．また，変位 u，w をそれぞれ以下のように漸近展開する．

$$u = \epsilon u_0 + \epsilon^2 u_1 + \cdots \tag{3.1.11}$$

$$w = \epsilon w_0 + \epsilon^2 w_1 + \cdots \tag{3.1.12}$$

Eqs. (3.1.11), (3.1.12) は，代表長さ h(板厚) の大きさに対して，ガイド波の変位が微小であることを示す．ここで，伝播方向 x に対する偏微分演算子は以下のようになる．

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \epsilon\frac{\partial}{\partial x_1} = D_{x0} + \epsilon D_{x1} \tag{3.1.13}$$

同様に，他の偏微分演算子を $\partial/\partial k = D_k$ と表すとする．Eqs. (3.1.11)-(3.1.13) を Eqs. (3.1.5)-(3.1.10) に代入し，ϵ のべき乗ごとに分類した支配方程式と境界条件を以下に示す．

$\mathcal{O}(\epsilon^1)$

$$-\rho_d D_t^2 u_0 + (\lambda_r + \mu_r)(D_{x0}^2 u_0 + D_{x0} D_z w_0) + \mu_r(D_{x0}^2 u_0 + D_z^2 u_0) = 0 \tag{3.1.14}$$

$$-\rho_d D_t^2 w_0 + (\lambda_r + \mu_r)(D_z D_{x0} u_0 + D_z^2 w_0) + \mu_r(D_{x0}^2 w_0 + D_z^2 w_0) = 0 \tag{3.1.15}$$

$$[\mu_r(D_z u_0 + D_{x0} w_0)]\,|_{z=h} = 0 \tag{3.1.16}$$

$$[\mu_r(D_z u_0 + D_{x0} w_0)]\,|_{z=-h} = 0 \tag{3.1.17}$$

$$[\lambda_r(D_{x0} u_0 + D_z w_0) + 2\mu_r D_z w_0]\,|_{z=h} = 0 \tag{3.1.18}$$

$$[\lambda_r(D_{x0} u_0 + D_z w_0) + 2\mu_r D_z w_0]\,|_{z=-h} = 0 \tag{3.1.19}$$

$\mathcal{O}(\epsilon^2)$

$$\begin{aligned} & -\rho_d D_t^2 u_1 + (\lambda_r + \mu_r)(D_{x0}^2 u_1 + D_{x0} D_z w_1) + \mu_r(D_{x0}^2 u_1 + D_z^2 u_1) \\ = \quad & -(\lambda_r + \mu_r)(2D_{x0} D_{x1} u_0 + D_z D_{x1} w_0) - 2\mu_r D_{x0} D_{x1} u_0 \\ & -i(\hat{\lambda}_i + \hat{\mu}_i)(D_{x0}^2 u_0 + D_z D_{x0} w_0) - i\hat{\mu}_i(D_{x0}^2 u_0 + D_z^2 u_0) \end{aligned} \tag{3.1.20}$$

$$\begin{aligned} & -\rho_d D_t^2 w_1 + (\lambda_r + \mu_r)(D_z D_{x0} u_1 + D_z^2 w_1) + \mu_r(D_{x0}^2 w_1 + D_z^2 w_1) \\ = \quad & -(\lambda_r + \mu_r) D_z D_{x1} u_0 - 2\mu_r D_{x0} D_{x1} w_0 \\ & -i(\hat{\lambda}_i + \hat{\mu}_i)(D_z D_{x0} u_0 + D_z^2 w_0) - i\hat{\mu}_i(D_{x0}^2 w_0 + D_z^2 w_0) \end{aligned} \tag{3.1.21}$$

$$[\mu_r(D_z u_1 + D_{x0} w_1)]|_{z=h} = [-\mu_r D_{x1} w_0 - i\hat{\mu}_i(D_z u_0 + D_{x0} w_1)]\,|_{z=h} \tag{3.1.22}$$

$$[\mu_r(D_z u_1 + D_{x0} w_1)]|_{z=-h} = [-\mu_r D_{x1} w_0 - i\hat{\mu}_i(D_z u_0 + D_{x0} w_1)]\,|_{z=-h} \tag{3.1.23}$$

$$\begin{aligned} & [\lambda_r(D_{x0} u_1 + D_z w_1) + 2\mu_r D_z w_1]\,|_{z=h} \\ & = \left[-\lambda_r D_{x1} u_0 - i\hat{\lambda}_i(D_{x0} u_0 + D_z w_0) - 2i\hat{\mu}_i D_z w_0\right]|_{z=h} \end{aligned} \tag{3.1.24}$$

$$\begin{aligned} & [\lambda_r(D_{x0} u_1 + D_z w_1) + 2\mu_r D_z w_1]\,|_{z=-h} \\ & = \left[-\lambda_r D_{x1} u_0 - i\hat{\lambda}_i(D_{x0} u_0 + D_z w_0) - 2i\hat{\mu}_i D_z w_0\right]|_{z=-h} \end{aligned} \tag{3.1.25}$$

Eqs. (3.1.14)-(3.1.19) の解である u_0, w_0 は，x_0, x_1, z, t の従属変数である．変数分離を実行すると，u_0, w_0 は

$$u_0 = \sum_j U_j(x_1)\Phi_{jx}(z) \exp\{i(k_j x_0 - \omega t)\} + c.c. \tag{3.1.26}$$

$$w_0 = \sum_j W_j(x_1)\Phi_{jz}(z) \exp\{i(k_j x_0 - \omega t)\} + c.c. \tag{3.1.27}$$

と表せ，振幅が長い伝播距離で変化する進行波である．ここで，k_j, ω, Φ_{jx}, Φ_{jz} は Eqs. (3.1.14)-(3.1.19) を満たす非自明解を持ちうる j-mode の波数，周波数とそれに対応する各方向の固有関数である．

3.2 可解条件と振幅方程式

Eqs. (3.1.26), (3.1.27) を Eqs. (3.1.20)-(3.1.25) に代入し整理すると，右辺はそれぞれ見かけの加振項として捉えられ，Eqs. (3.1.20)-(3.1.25) は非同次微分方程式とみなせる．j-mode の永年項を生じさせる項は $\exp\{i(k_j x - \omega_j t)\}$ を含む項に相当し，Eq. (3.1.20) について以下に示す．

$$\begin{aligned} f_{1j}(z) =& -2ik_j(\lambda_r + 2\mu_r)\frac{dU_j(x_1)}{dx_1}\Phi_{jx}(z) - (\lambda_r + \mu_r)\frac{dW_j(x_1)}{dx_1}\frac{d\Phi_{jz}(z)}{dz} \\ &+ik_j^2(\hat{\lambda}_i + 2\hat{\mu}_i)U_j(x_1)\Phi_{jx}(z) + k_j(\hat{\lambda}_i + \hat{\mu}_i)W_j(x_1)\frac{d\Phi_{jz}(z)}{dz} \\ &-i\hat{\mu}_i U_j(x_1)\frac{d^2\Phi_{jx}(z)}{dz^2} \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

同様に，Eqs. (3.1.21)-(3.1.25) における j-mode の永年項を生じさせる項はそれぞれ以下のようになる．

$$\begin{aligned} f_{2j}(z) =& -(\lambda_r + \mu_r)\frac{dU_j(x_1)}{dx_1}\frac{d\Phi_{jx}(z)}{dz} - 2ik_j\mu_r\frac{dW_j(x_1)}{dx_1}\Phi_{jz}(z) \\ &+k_j(\hat{\lambda}_i + \hat{\mu}_i)U_j\frac{d\Phi_{jx}(z)}{dz} - i(\hat{\lambda}_i + 2\hat{\mu}_i)W_j\frac{d^2\Phi_{jz}(z)}{dz^2} + ik_j^2\hat{\mu}_i W_j\Phi_{jz}(z) \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

$$g_{1j}(h) = -\mu_r\frac{dW_j(x_1)}{dx_1}\Phi_{jz}(h) - i\hat{\mu}_i\{U_j(x_1)\frac{d\Phi_{jx}(h)}{dz} + ik_jW_j(x_1)\Phi_{jz}(h)\} \tag{3.2.3}$$

$$g_{2j}(h) = -\mu_r\frac{dW_j(x_1)}{dx_1}\Phi_{jz}(-h) - i\hat{\mu}_i\{U_j(x_1)\frac{d\Phi_{jx}(-h)}{dz} + ik_jW_j(x_1)\Phi_{jz}(-h)\} \tag{3.2.4}$$

$$\begin{aligned} g_{3j}(h) =& -\lambda_r\frac{dU_j(x_1)}{dx_1}\Phi_{jx}(h) + k_j\hat{\lambda}_i U_j(x_1)\Phi_{jx}(h) \\ &-i(\lambda_i + 2\mu_i)W_j(x_1)\frac{d\Phi_{jz}(h)}{dz} \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

$$
\begin{aligned}
g_{4j}(h) =& -\lambda_r \frac{dU_j(x_1)}{dx_1}\Phi_{jx}(-h) + k_j\hat{\lambda}_i U_j(x_1)\Phi_{jx}(-h) \\
& -i(\lambda_i + 2\mu_i)W_j(x_1)\frac{d\Phi_{jz}(-h)}{dz}
\end{aligned} \tag{3.2.6}
$$

Eqs. (3.1.20)-(3.1.25) において，j-mode の永年項生じさせる項となるのは，Eqs. (3.2.1)-(3.2.6) のみであり，波数の異なる伝播モードの効果は永年項を生じさせる効果として現れない．したがって，Eq. (2.6.3) を用いて，j-mode の可解条件は以下のように表せる．

$$
\begin{aligned}
&\Phi_{jx}(h)g_{1j}(h) - \Phi_{jx}(-h)g_{2j}(-h) - \Phi_{jz}(h)g_{3j}(h) + \Phi_{jz}(-h)g_{4j}(-h) \\
&\qquad = \int_{-h}^{h}\Phi_{jx}(z)f_{1j}(z)dz - \int_{-h}^{h}\Phi_{jz}(z)f_{2j}(z)dz.
\end{aligned} \tag{3.2.7}
$$

Eqs. (3.2.1)-(3.2.6) を Eq. (3.2.7) に代入することで，x_1 に関する微分方程式である j-mode の振幅方程式を得る．ここで，固有関数 Φ_{jx}, Φ_{jz} は複素数関数を用いて表されているので，以下のように実数関数に変数変換する．以降，j-mode を表す下付き文字 j を省略し，式変形を行う．The partial wave technique [4] を用いて，変位は以下のように複素振幅 X を用いて表せられる．

$$
U(x_1)\Phi_x(z) = X(x_1)\phi_x(z)\exp\{i\theta'\} + c.c. \tag{3.2.8}
$$

$$
W(x_1)\Phi_z(z) = X(x_1)\phi_z(z)\exp(i\theta' + i\frac{\pi}{2}) + c.c. \tag{3.2.9}
$$

Eqs. (3.2.8), (3.2.9) で示すように変位 u, w は位相差が $\pi/2$ である．さらに，Eqs. (3.2.8), (3.2.9) を用いて，以下のような複素振幅方程式を得る．

$$
C_1\frac{dX}{dx_1} = C_2 X \tag{3.2.10}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
C_1 =& \mu_r\phi_x(h)\phi_z(h) - \mu_r\phi_x(-h)\phi_z(-h) - \lambda_r\phi_x(h)\phi_z(h) + \lambda_r\phi_x(-h)\phi_z(-h) \\
& -2(\lambda_r + 2\mu_r)k\int_{-h}^{h}\phi_x^2 dz - (\lambda_r + \mu_r)\int_{-h}^{h}\phi_x\frac{d\phi_z}{dz}dz \\
& +(\lambda_r + \mu_r)\int_{-h}^{h}\frac{d\phi_x}{dz}\phi_z dz - 2\mu_r k\int_{-h}^{h}\phi_z^2 dz
\end{aligned} \tag{3.2.11}
$$

$$
\begin{aligned}
C_2 =& -\hat{\mu}_i\phi_x(h)\frac{d\phi_x(h)}{dz} + \hat{\mu}_i k\phi_x(h)\phi_z(h) + \hat{\mu}_i\phi_x(-h)\frac{d\phi_x(-h)}{dz} \\
& -\hat{\mu}_i k\phi_x(-h)\phi_z(-h) - \hat{\lambda}_i k\phi_x(h)\phi_z(h) - (\hat{\lambda}_i + 2\hat{\mu}_i)\phi_z(h)\frac{d\phi_z(h)}{dz} \\
& +\hat{\lambda}_i k\phi_x(-h)\phi_z(-h) + (\hat{\lambda}_i + 2\hat{\mu}_i)\phi_z(-h)\frac{d\phi_z(-h)}{dz} \\
& -(\hat{\lambda}_i + 2\hat{\mu}_i)k^2\int_{-h}^{h}\phi_x^2 dz - (\hat{\lambda}_i + \hat{\mu}_i)k\int_{-h}^{h}\phi_x\frac{d\phi_z}{dz}dz + \hat{\mu}_i\int_{-h}^{h}\phi_x\frac{d^2\phi_x}{dz^2} \\
& +(\hat{\lambda}_i + \hat{\mu}_i)k\int_{-h}^{h}\frac{d\phi_x}{dz}\phi_z dz + (\hat{\lambda}_i + 2\hat{\mu}_i)\int_{-h}^{h}\frac{d^2\phi_z}{dz^2}\phi_z dz - \hat{\mu}_i k^2\int_{-h}^{h}\phi_z^2 dz
\end{aligned} \tag{3.2.12}
$$

である．Eqs. (3.2.11), (3.2.12) より，C_1 は複素 Lame 定数の実部，C_2 は複素 Lame 定数の虚部に依存することが分かる．さらに，複素振幅を以下のように実数振幅表記する．

$$X(x_1) = \frac{1}{2}ax_1) \exp\{i\theta(x_1)\} \tag{3.2.13}$$

Eq.. (3.2.10) の振幅方程式は，

$$\frac{d}{dx_1}\left[\frac{1}{2}a(x_1)\exp\{i\theta(x_1)\}\right] = \frac{C_2}{2C_1}a(x_1)\exp\{i\theta(x_1)\} \tag{3.2.14}$$

と書き直せ，以下のように分離できる．

$$\frac{da(x_1)}{dx_1} = \frac{C_2}{C_1}a(x_1) \tag{3.2.15}$$

$$a(x_1)\frac{d\theta(x_1)}{dx_1} = 0 \tag{3.2.16}$$

Eqs. (3.2.15), (3.2.16) を解くと

$$a(x_1) = a_0 \exp\left(\epsilon\frac{C_2}{C_1}x\right) \tag{3.2.17}$$

$$\theta(x_1) = \theta_0(= const) \tag{3.2.18}$$

$$u = \epsilon u_0 + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \sum_j \frac{\epsilon}{2}a_j(x_1)\exp\theta_j(x_1) + c.c. + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{3.2.19}$$

となる．ここで，一般に C_2/C_1 は負である．j-mode の $a_0, \phi_x, \phi_z, C_1, C_2$ を $a_{0j}, \phi_{jx}, \phi_{jz}, C_{1j}, C_{2j}$ と表記する．ここで，Eqs. (3.2.17)-(3.2.19) を用いて，u, w は

$$\begin{aligned} u &= \epsilon\sum_j a_{0j}\cos\theta_{0j}\exp\left(\epsilon\frac{C_{2j}}{C_{1j}}x\right)\phi_{jx}(z)\exp\{i(k_jx-\omega_jt)\} + c.c. + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \epsilon\sum_j a_{0j}\cos\theta_{0j}\phi_{jx}(z)\exp\left\{i\left(k_j - i\epsilon\frac{C_{2j}}{C_{1j}}\right)x - \omega_jt)\right\} + c.c. + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

$$\begin{aligned} w &= \epsilon\sum_j -a_{0j}\sin\theta_{0j}\exp\left(\epsilon\frac{C_{2j}}{C_{1j}}x\right)\phi_{jz}(z)\exp\{i(k_jx-\omega_jt)\} + c.c. + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \epsilon\sum_j -a_{0j}\sin\theta_{0j}\phi_{jz}(z)\exp\left\{i\left(k_j - i\epsilon\frac{C_{2j}}{C_{1j}})x - \omega_jt\right)\right\} + c.c. + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \tag{3.2.21}$$

と表せ，減衰ガイド波が理論解析的に導出でき，減衰係数は $-\epsilon C_{2j}/C_{1j}$ で表せる．ここで，Eqs. (3.2.15), (3.2.16) はばね質量ダンパ系の振幅方程式と力学的に相似 [59] であり，C_{1j} は j-mode の伝播距離に対する振幅の変化し難さを表し，C_{2j} は減衰力の大きさを表す係数である．

3.3 分散曲線と減衰係数曲線

Eqs. (3.2.20), (3.2.21) より，位相速度は，Eqs. (3.1.15)-(3.1.19) の非自明解を有する条件から求まり，Figs. 3.1, 3.2 に示す，位相速度分散曲線で表記される．Figs. 3.1, 3.2 は，Figs. 2.2, 2.3 が示す減衰の効果を無視した位相速度分散曲線とほぼ一致する．これは κ_L, κ_T により λ_r, μ_r がほぼ変化しないことを意味する．

Eqs. (3.2.11), (3.2.12) より，本章で注目する減衰係数は伝播モードと周波数に依存することが分かる．Figs. 3.3, 3.4 に A-mode と S-mode の伝播モードと入力周波数に対応する減衰係数曲線を示す．減衰係数は入力周波数と伝播モードに対して単調に変化せず，減衰係数曲線導出の重要性が分かる．

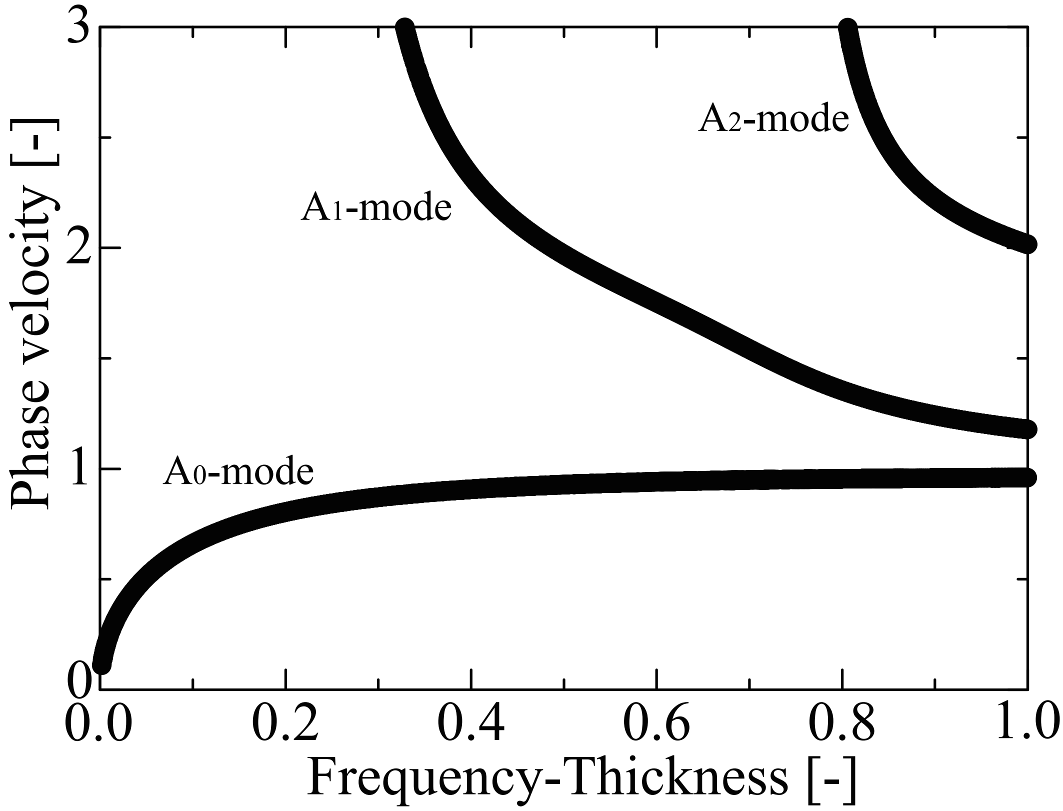

Figure 3.1　Phase velocity dispersion curves of A-mode obtained by mode orthogonality and MMS.

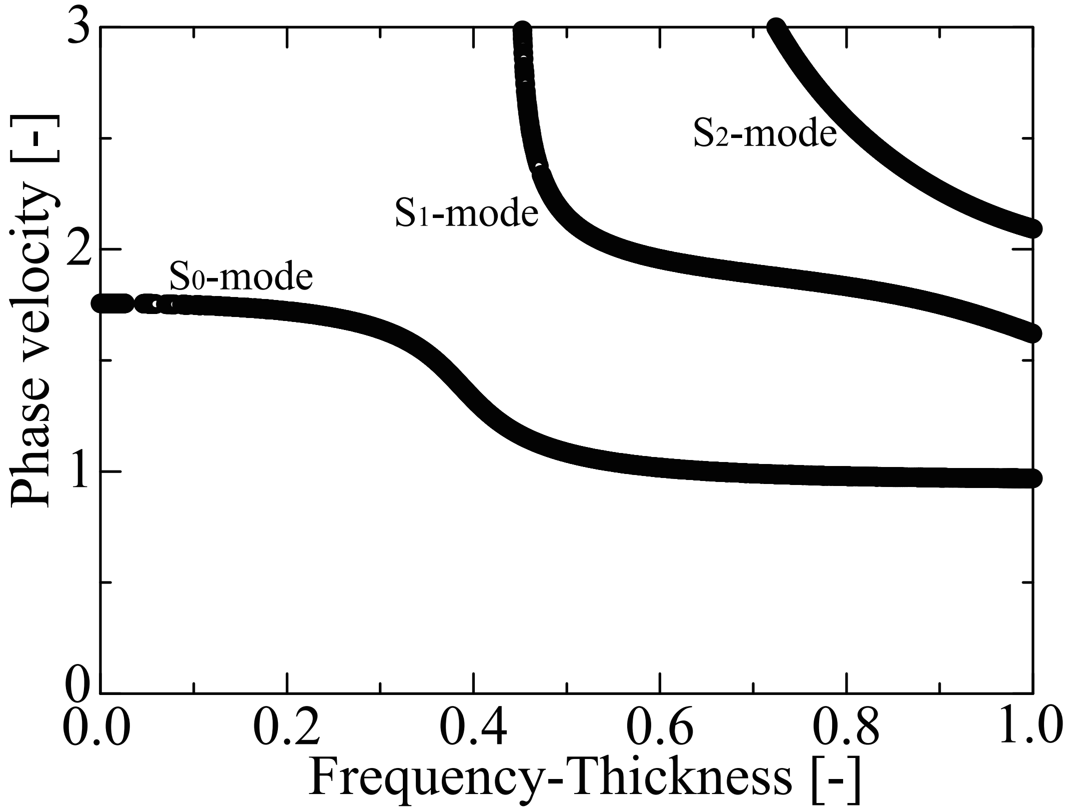

Figure 3.2 Phase velocity dispersion curves of S-mode obtained by mode orthogonality and MMS.

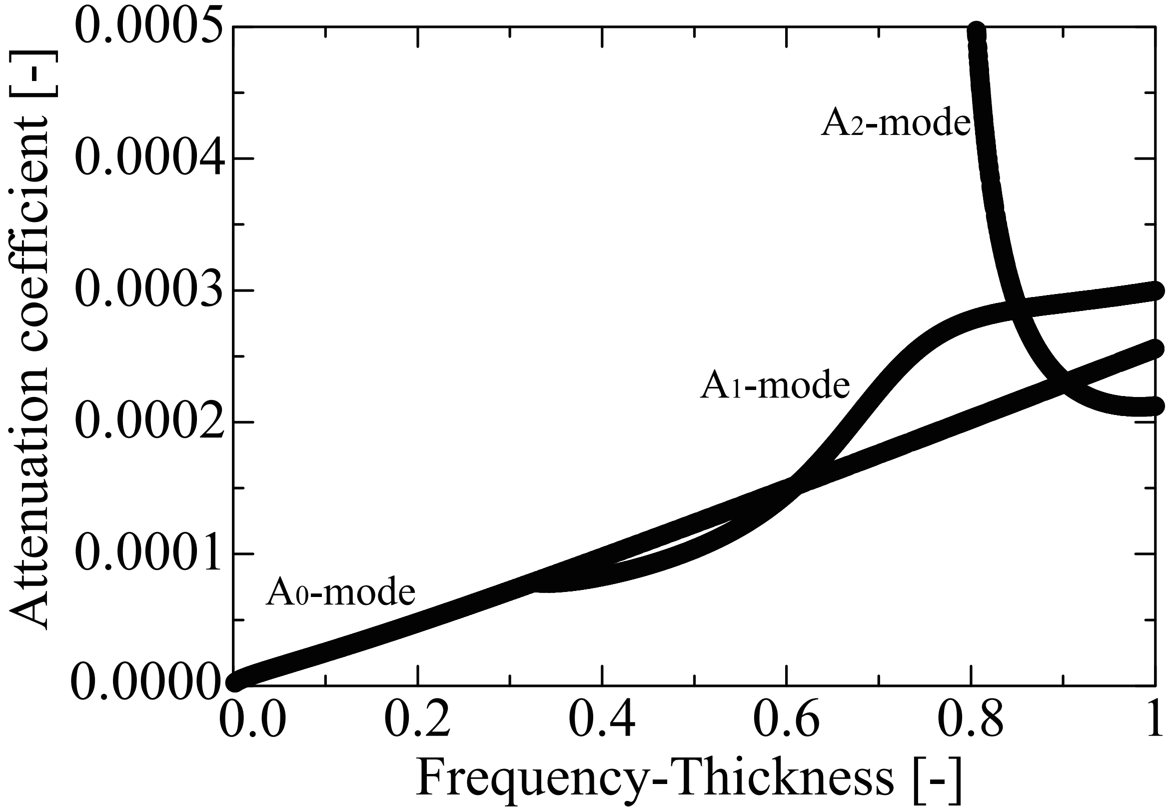

Figure 3.3 Attenuation coefficients of A-mode obtained by mode orthogonality and MMS.

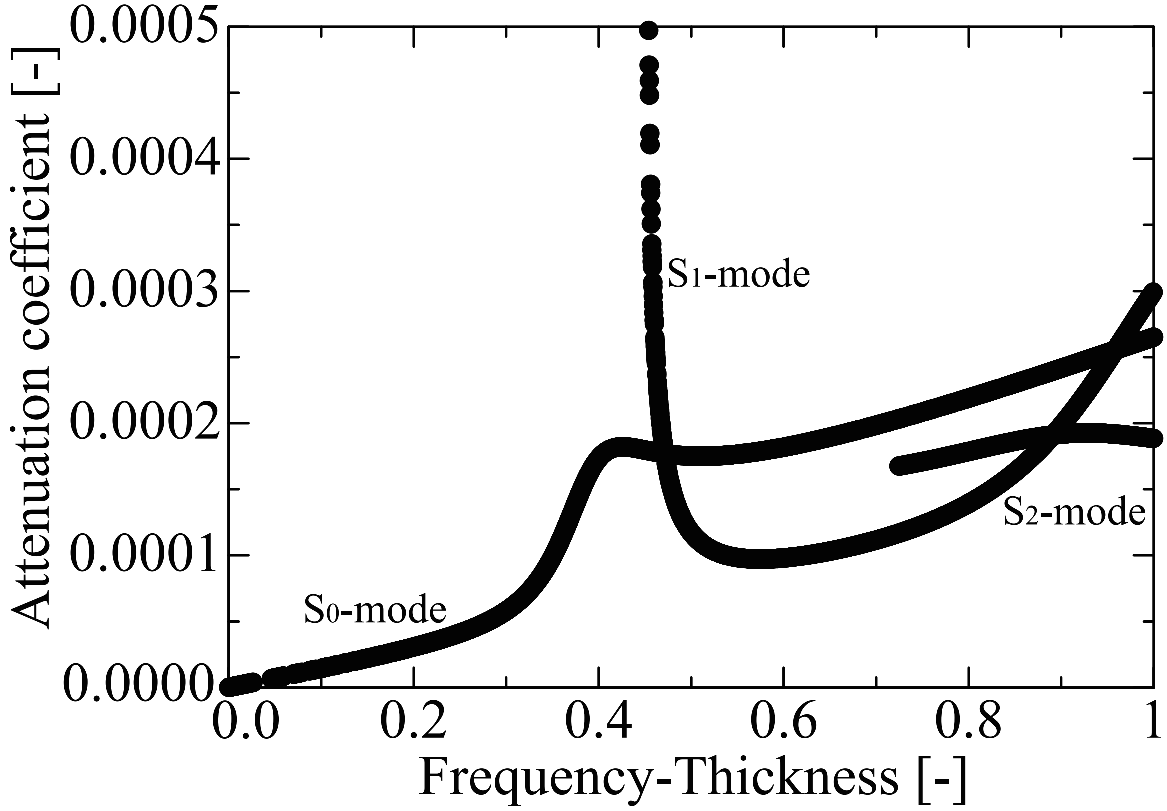

Figure 3.4 Atteuiation coefficients of S-mode obtained by mode orthogonality and MMS.

3.4 半解析的有限要素法による検証

本節では，伝播モードの直交性と多重尺度法を用いて導出した分散曲線，減衰係数曲線 (Figs. 3.1-3.4) を，半解析的有限要素法を用いて導出する分散曲線，減衰係数曲線と比較し，本手法の妥当性を検証する．

3.4.1 半解析的有限要素法の定式化

まず，半解析的有限要素法の定式化を行う．仮想仕事の原理を用いて支配方程式 Eqs. (3.1.5)-(3.1.6) を書き直すと以下のようになる．

$$\int_\Gamma \delta \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{t} d\Gamma = \int_V \delta \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}} (\rho_d \ddot{\mathbf{u}}) dV + \int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{\sigma} dV \tag{3.4.1}$$

$\boldsymbol{\sigma}$ は応力テンソル，$\boldsymbol{C}$ は複素剛性テンソル，$\boldsymbol{\epsilon}$ はひずみテンソルであり，$\boldsymbol{C}$ は成分に複素 Lame 定数を有する．ここで，長手方向の進行波（調和振動）を仮定し，時間 t と長手方向 x について変数分離する．ここで，有限要素分割を断面方向 (z 方向) に適用する．離散化された変位ベクトルは補間関数 $\boldsymbol{N}(z)$，各節点における変位ベクトル $\boldsymbol{U}$ を用いて，以下のように書ける．

$$\boldsymbol{u} \simeq \boldsymbol{N}(z) \boldsymbol{U} \exp\{i(kx - \omega t)\} \tag{3.4.2}$$

Eq. (3.4.1) に Eq. (3.4.2) を代入し，Eqs. (3.1.7)-(3.1.10) を考慮し，自由境界条件における支配方程式を簡略化して書き直すと，

$$[\boldsymbol{K}_1 - \omega^2 \boldsymbol{M} + ik(\boldsymbol{K}_2 - \boldsymbol{K}_2^T) + k^2 \boldsymbol{K}_3] \boldsymbol{U} = 0 \tag{3.4.3}$$

となる．ここで，

$$\boldsymbol{K}_1 = \sum \int_S \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{L}_{yz}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{L}_{yz} \boldsymbol{N} \sqrt{g} dS \tag{3.4.4}$$

$$\boldsymbol{K}_2 = \sum \int_S (\boldsymbol{N}^T \boldsymbol{L}_{yz}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{L}_x \boldsymbol{N} - \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{L}_x^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{L}_{yz} \boldsymbol{N}) \sqrt{g} dS \tag{3.4.5}$$

$$\boldsymbol{K}_3 = \sum \int_S \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{L}_x^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{L}_x \boldsymbol{N} \sqrt{g} dS \tag{3.4.6}$$

$$\boldsymbol{M} = \sum \int_S \rho_d \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{N} \sqrt{g} dS \tag{3.4.7}$$

であり，$\boldsymbol{L}_x, \boldsymbol{L}_{yz}$ は微分演算子を行列表記したもの，g は計量テンソルの行列式，ρ_d は密度である．ここで，$\boldsymbol{L}_x, \boldsymbol{L}_{yz}$ は以下に示す成分を持つ．

$$\boldsymbol{L}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \tag{3.4.8}$$

$$\boldsymbol{L}_{yz} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \tag{3.4.9}$$

ここで，Eq. (3.4.3) は ω に対する k の 2 次の固有値問題である．ここで，2 次の固有値問題は 1 次の一般化固有値問題に変形することができ [64]，

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{K}_1 - \omega^2 \boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{K}_1 - \omega^2 \boldsymbol{M} & i(\boldsymbol{K}_2 - \boldsymbol{K}_2^T) \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_1 - \omega^2 \boldsymbol{M} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{K}_3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{U} \\ k\boldsymbol{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.4.10}$$

となる．Eq. (3.4.10) は以下のように書き直せる．

$$(\boldsymbol{A} - k\boldsymbol{B})\boldsymbol{Q} = 0 \tag{3.4.11}$$

ここで，

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{K}_1 - \omega^2 \boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{K}_1 - \omega^2 \boldsymbol{M} & i\boldsymbol{K}_2 \end{bmatrix} \tag{3.4.12}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_1 - \omega^2 \boldsymbol{M} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{K}_3 \end{bmatrix} \tag{3.4.13}$$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U} \\ k\boldsymbol{U} \end{bmatrix} \tag{3.4.14}$$

である．したがって，半解析的有限要素法では，分散方程式を一般化固有値問題に帰着できる．

3.4.2 半解析的有限要素法による分散曲線と減衰係数曲線

Eq. (3.4.11) の一般化固有値問題を解くことで，ある ω に対する固有値 k と固有ベクトル $\boldsymbol{Q}$ を求めることができる．複素 Lame 定数を用いると，Eq. (3.4.3) の K_1, K_2, K_3 は複素数となり，固有値 $k(= k_r + ik_i)$ も複素数領域で求まる [43]．したがって，ω を走査することで，半解析的有限要素法を用いて位相速度分散曲線と減衰係数曲線は導出できる．得られた位相速度分散曲線と減衰係数曲線を，伝播モードの直交性と多重尺度法を用いて導出した位相速度分散曲線と減衰係数曲線に重ねた図を Figs. 3.5, 3.6 に示す．本節では，理論解析と同様な Tab. 3.1 に示す材料定数を用いて数値解析を行う．ここで，断面方向に 50 分割し，2 次の補間関数を用いる．

Figs. 3.5, 3.6 より，多重尺度法を用いて導出した位相速度分散曲線と減衰係数曲線は，従来の数値解析的な手法である半解析的有限要素法による結果と良好に一致し，本手法は妥当であることが示された．

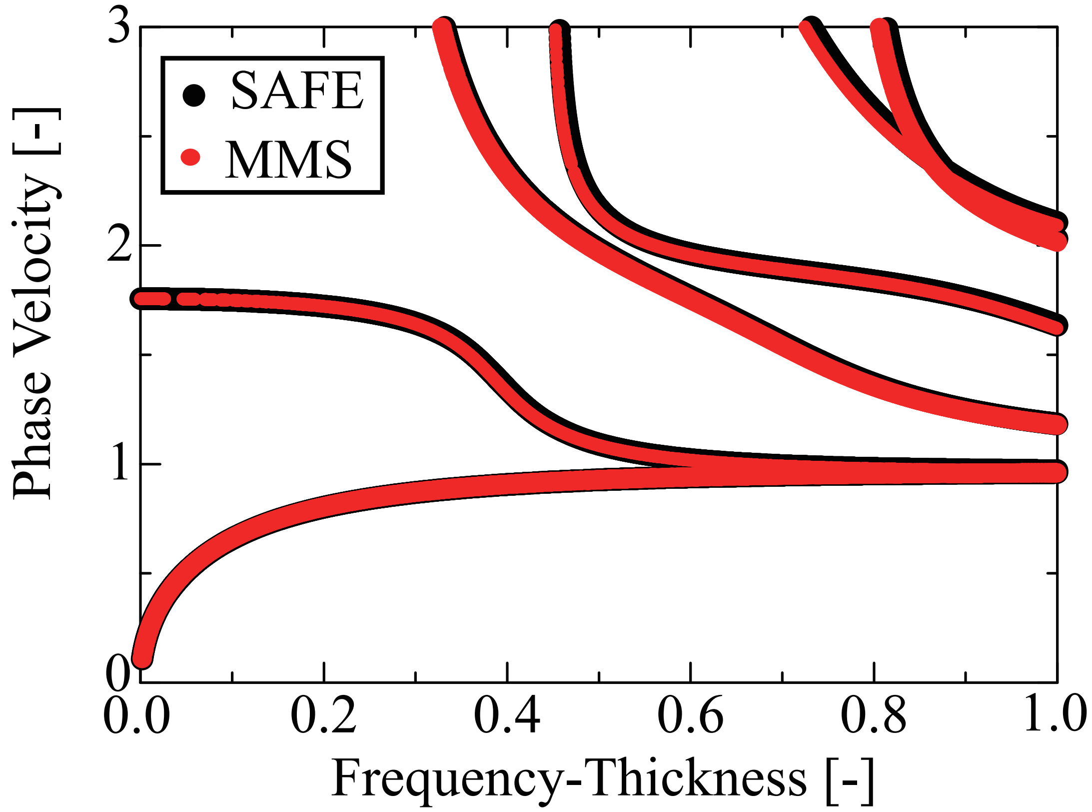

Figure 3.5　Comparison of phase velocities obtained by two different methods. The black dots indicate results obtained by mode orthogonality and MMS. The red dots indicate results obtained by SAFE.

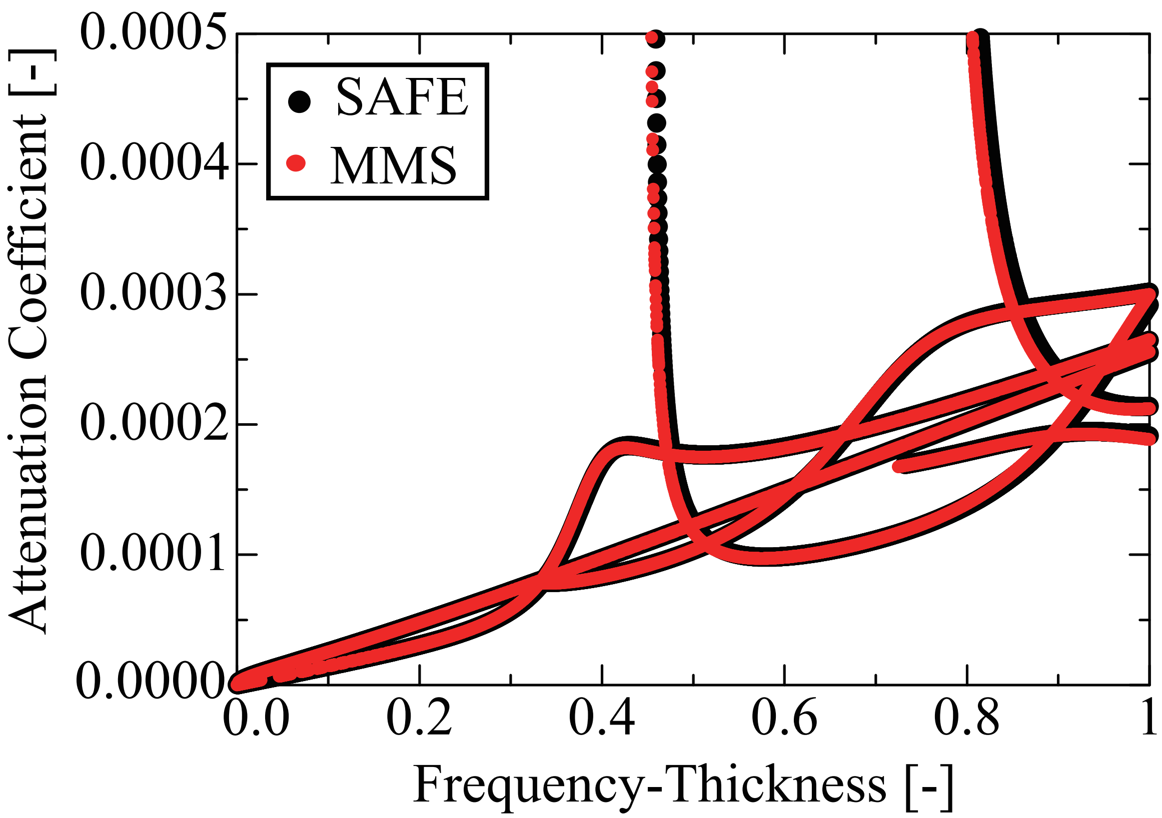

Figure 3.6 Comparison of attenuation coefficients obtained by two different methods. The black dots indicate results obtained by mode orthogonality and MMS. The red dots indicate results obtained by SAFE.

3.5 従来手法と提案手法の比較

本節では減衰係数曲線の導出における従来の理論解析手法，数値解析手法と提案手法の相違点について述べる．いずれの手法においても，Lame 定数等の材料定数を複素数に拡張することで減衰の効果を考慮し，算出される複素数領域における波数の虚部を減衰係数とする．

減衰の効果を無視した一般的な分散方程式は，ある実数の周波数に対する実数の波数を未知数とした 1 元非線形代数方程式として得られる．これに対し，従来の理論解析手法では，ある実数の周波数に対する複素数の波数を未知数とした 2 元連立非線形代数方程式として分散方程式が導出される．したがって，Newton 法などの解が数値的初期値に依存する数値的解法が用いられ，近似解の精度はこの数値的解法で決定される．

本節では，従来の数値解析手法として半解析的有限要素法について述べる．半解析的有限要素法では，長手方向への進行波を仮定し，断面方向を有限要素分割することで，支配方程式が一般化固有値問題に帰着され，固有値の虚部が波数の虚部，すなわち減衰係数に相当する．したがって，半解析的有限要素法の近似解の精度は，断面方向の有限要素分割に大きく依存する．

従来手法に対し提案手法は，複数の伝播距離の尺度を導入し，変位を漸近展開し，$\mathcal{O}(\epsilon^1)$ で第 1 次近似解を導出し，$\mathcal{O}(\epsilon^2), \cdots$ で表される第 2 次以降の近似解が修正項として導出されるものである．ここで，$\mathcal{O}(\epsilon^2), \cdots$ の微分方程式が解を持つ条件から，複数の伝播距離の尺度で観測できる変化を考慮した近似解を得る．したがって，提案手法で得られる近似解の精度は，導入する複数の尺度の大きさの比に依存する．本研究では，複素数に拡張された材料定数の虚部は実部に対して小さな値であり，長い伝播距離の尺度での現象を支配していると考えるため，複素数に拡張された材料定数の実部と虚部の比率が近似解の精度を決定するとも言える．

従来の理論解析手法，半解析的有限要素法，提案手法の相違点をまとめた図を Fig. 3.7 に示す．

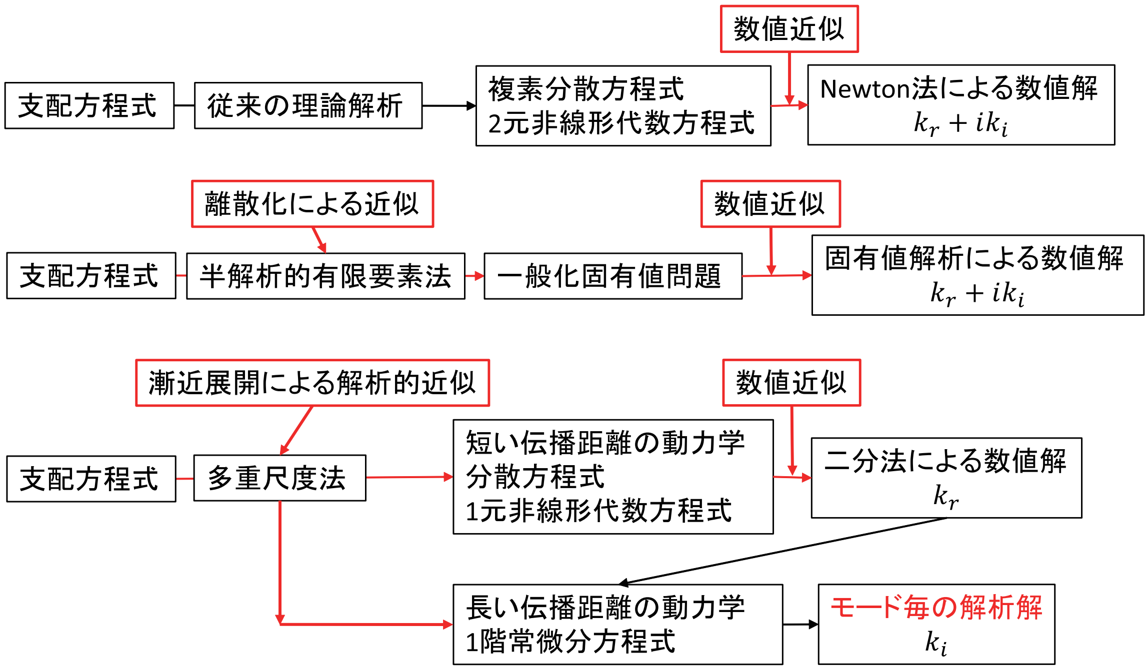

Figure 3.7 Comparison between conventional methods and the proposed method to calculate attenuation coefficients.

3.6 結論

本章では，減衰の効果を複素 Lame 定数を用いて表し，減衰ガイド波の位相速度分散曲線と減衰係数曲線を伝播モードの直交性と多重尺度法を用いて求め，以下の結論を得た．

(1) $\mathcal{O}(\epsilon^1)$ の支配方程式と境界条件から分散特性とそれに対応する固有関数が求まり，修正項として働く $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ の支配方程式と境界条件の可解条件から減衰係数の情報を有する振幅方程式が求められることを示した．

(2) 伝播モード毎に求まる減衰係数曲線を分散特性と固有関数を用いて導出し，提案手法は数値的初期値依存性がなく，特定の伝播モードに注目した減衰係数曲線が算出可能な汎用性の高い理論解析的な手法であることを示した．

(3) 半解析的有限要素法を用いて導出した位相速度分散曲線と減衰係数曲線と，提案手法を用いて導出した位相速度分散曲線と減衰係数曲線は良好に一致し，提案手法の妥当性が示された．

第 4 章

内部共振現象に起因して発生するガイド波

本章では，減衰の効果に加えて，幾何学的非線形力，材料の非線形力の効果を考慮した累積的高調波と呼ばれる内部共振的現象によって生じるガイド波について，伝播モードの直交性と多重尺度法を用いて解析する．解析モデルは Fig. 2.1 に示された同様のモデルを解析対象とする．本章では，解析対象は超弾性体であるものと仮定し，Landau-Lifshitz model を用いて非線形効果を導入する [4].

4.1 支配方程式と多重尺度法

幾何学的非線形の応力テンソル成分と材料の非線形の応力テンソル成分をまとめて $\boldsymbol{T}_{NL}$ と表記し，2 次の非線形性まで考慮した支配方程式と境界条件を以下に示す．$\boldsymbol{T}_{NL}$ の具体的な成分と導出方法は付録 B に示す．本章における計算に用いる各種物性値を Tab. 4.1 に示す．

Table 4.1 Parameters used for calculation of internally resonant guided waves.

ρ_d [kg/m^3]	c_L [km/s]	c_T [km/s]	κ_L [Np/λ]	κ_T [Np/λ]
2700	6.3	3.1	0.00025	0.00025
A [GPa]	B [GPa]	C [GPa]	$2h$ [mm]	ϵ [-]
-350	-158	-100	1.0	0.001

$$
\begin{aligned}
&-\rho_d \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \{\lambda_r + \mu_r + i(\lambda_i + \mu_i)\}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right) + (\mu_r + i\mu_i)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\
&+\frac{\partial T_{NLxx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{NLxz}}{\partial z} = 0 \qquad (4.1.1)
\end{aligned}
$$

$$-\rho_d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \{\lambda_r + \mu_r + i(\lambda_i + \mu_i)\} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + (\mu_r + i\mu_i) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$
$$+ \frac{\partial T_{NLzx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{NLzz}}{\partial z} = 0 \tag{4.1.2}$$

$$\left[(\mu_r + i\mu_i) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + T_{NLzx} \right] |_{z=h} = 0 \tag{4.1.3}$$

$$\left[(\mu_r + i\mu_i) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + T_{NLzx} \right] |_{z=-h} = 0 \tag{4.1.4}$$

$$\left[(\lambda_r + i\lambda_i) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2(\mu_r + i\mu_i) \frac{\partial w}{\partial z} + T_{NLzz} \right] |_{z=h} = 0 \tag{4.1.5}$$

$$\left[(\lambda_r + i\lambda_i) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2(\mu_r + i\mu_i) \frac{\partial w}{\partial z} + T_{NLzz} \right] |_{z=-h} = 0 \tag{4.1.6}$$

ここで，3.1 節と同様な複数の伝播距離の尺度を用意し，変位の漸近展開を行い，多重尺度法を適用する．その結果，$\mathcal{O}(\epsilon^1)$ は Eqs. (3.1.14)-(3.1.19) と同形になり，$\mathcal{O}(\epsilon^2)$ は以下のようになる．ここで，C_{NL1}-C_{NL6} は $\boldsymbol{T}_{NL}$ から求まる変位とひずみの 2 時の非線形関数である．

$\mathcal{O}(\epsilon^2)$

$$\begin{aligned} & -\rho_d D_t^2 u_1 + (\lambda_r + \mu_r)(D_{x0}^2 u_1 + D_{x0} D_z w_1) + \mu_r (D_{x0}^2 u_1 + D_z^2 u_1) \\ = & \quad -(\lambda_r + \mu_r)(2D_{x0} D_{x1} u_0 + D_z D_{x1} w_0) - 2\mu_r D_{x0} D_{x1} u_0 \\ & -i(\hat{\lambda_i} + \hat{\mu_i})(D_{x0}^2 u_0 + D_z D_{x0} w_0) - i\hat{\mu_i}(D_{x0}^2 u_0 + D_z^2 u_0) - C_{NL1} - C_{NL2} \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

$$\begin{aligned} & -\rho_d D_t^2 w_1 + (\lambda_r + \mu_r)(D_z D_{x0} u_1 + D_z^2 w_1) + \mu_r (D_{x0}^2 w_1 + D_z^2 w_1) \\ = & \quad -(\lambda_r + \mu_r) D_z D_{x1} u_0 - 2\mu_r D_{x0} D_{x1} w_0 \\ & -i(\hat{\lambda_i} + \hat{\mu_i})(D_z D_{x0} u_0 + D_z^2 w_0) - i\hat{\mu_i}(D_{x0}^2 w_0 + D_z^2 w_0) - C_{NL3} - C_{NL4} \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

$$[\mu_r (D_z u_1 + D_{x0} w_1)] |_{z=h} = [-\mu_r D_{x1} w_0 - i\hat{\mu_i}(D_z u_0 + D_{x0} w_0) - C_{NL5}] |_{z=h} \tag{4.1.9}$$

$$[\mu_r (D_z u_1 + D_{x0} w_1)] |_{z=-h} = [-\mu_r D_{x1} w_0 - i\hat{\mu_i}(D_z u_0 + D_{x0} w_0) - C_{NL5}] |_{z=-h} \tag{4.1.10}$$

$$\begin{aligned} & [\lambda_r (D_{x0} u_1 + D_z w_1) + 2\mu_r D_z w_1] |_{z=h} = \\ & \left[-\lambda_r D_{x1} u_0 - i\hat{\lambda_i}(D_{x0} u_0 + D_z w_0) - 2i\hat{\mu_i} D_z w_0 - C_{NL6} \right] |_{z=h} \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

$$\begin{aligned} & [\lambda_r (D_{x0} u_1 + D_z w_1) + 2\mu_r D_z w_1] |_{z=-h} = \\ & \left[-\lambda_r D_{x1} u_0 - i\hat{\lambda_i}(D_{x0} u_0 + D_z w_0) - 2i\hat{\mu_i} D_z w_0 - C_{NL6} \right] |_{z=-h} \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

4.2 累積的高調波発生条件

累積的高調波が発生するとき，a-mode(基本波モード) に対して，以下の 3 つの条件を満たす b-mode(高調波モード) が存在する必要があると報告されている [22].

(1) 位相整合 (Phase matching)

(2) エネルギー流束が 0 でない

(3) 群速度整合 (Group velocity matching)

(1) の位相整合条件は，a-mode と b-mode の周波数と波数が以下の 2 式を満たすことを意味する．これは内部共振的現象が生じる条件である．

$$\omega_b = 2\omega_a \tag{4.2.1}$$

$$k_b = 2k_a \tag{4.2.2}$$

(2) の条件は，以下に定義される運動量流束 P_{ba} が $P_{ba} \neq 0$ を満たし，非線形力 $f_a^{vol} + f_a^{sur} \neq 0$ を満たすことを意味する [65].

$$P_{aa} = -\frac{1}{4}\int_{\Omega}\left\{\left(\frac{\boldsymbol{v}_a^*}{2}\frac{\boldsymbol{\sigma}_b}{2} + \frac{\boldsymbol{v}_b}{2}\frac{\boldsymbol{\sigma}_a^*}{2}\right)\cdot \boldsymbol{n_x}\right\}d\Omega \tag{4.2.3}$$

ここで，$\boldsymbol{v}_j$ は j-mode の粒子速度ベクトル ($\boldsymbol{v} = \partial \boldsymbol{u}/\partial t$) を表し，$\boldsymbol{\sigma}_j$ は j-mode の応力テンソルを表し，$\boldsymbol{n_x}$ は伝播方向の単位ベクトル，A^* は A の複素共役を表す．$P_{ba} \neq 0$ は，断面 Ω を貫くエネルギーが，a-mode から b-mode にエネルギーが移行しうることを示し，$f_a^{vol} + f_a^{sur} \neq 0$ は a-mode の振幅に起因する非線形力が b-mode を励起させる力として作用することを示す．

(3) の条件は，a-mode，b-mode の群速度が一致し，a-mode，b-mode 間でのエネルギー授受を行いながら共に伝播する条件である [47], [48].

4.3 位相整合条件

本章では，伝播モードの直交性と多重尺度法を適用する際に，4.2 節における (1) の位相整合条件からの微小なずれを波数領域で考え，以下に示す関係を位相整合条件とする．

$$\omega_b = 2\omega_a \tag{4.3.1}$$

$$k_b = 2k_a + \rho = 2k_a + \epsilon\hat{\rho} \tag{4.3.2}$$

ここで，ρ は離調パラメータ (detuning parameter) と呼ばれ，Eqs. (4.2.1), (4.2.2) を満たす位相整合条件からの微小なずれを表す．ここで，$\rho \ll 1$，$\epsilon \ll 1$ である．

本章で注目する (1) 位相整合条件を満たす a-mode と b-mode を Fig. 4.1 の分散曲線上に示す．また，この a-mode と b-mode は (3) 群速度整合条件も満たしている．ここで，Fig. 4.1 で示された $0 < \omega < 4\pi$ の周波数帯において，2 次の非線形性により内部共振現象が発生する (1)-(3) の条件

全てを満たす組み合わせは a-mode と b-mode の組み合わせのみである．Fig. 4.1 に示す a-mode と b-mode の波数，周波数，位相速度，群速度の値を Table 4.2 に示す．

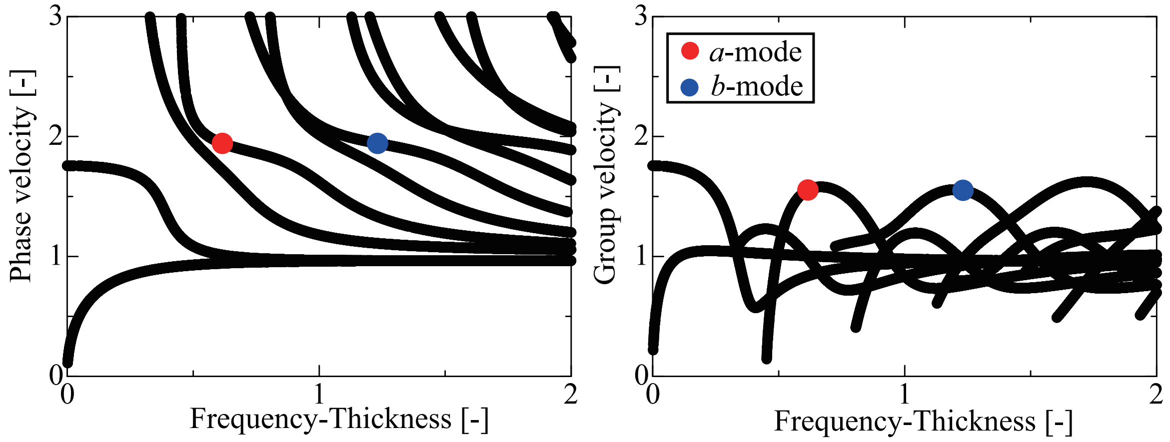

Figure 4.1　Dispersion curves of phase velocity and group velocity with phase matching points indicated by red and blue dots.

Table 4.2　Wavenumbers and frequencies of the phase matching points.

k_a [-]	ω_a [-]	k_b [-]	ω_b [-]	c_p [-]	c_g [-]
2.0	0.62	4.0	1.2	1.9	1.6

4.4　可解条件と振幅方程式

本章では，Eqs. (3.1.26), (3.1.27) で示される $\mathcal{O}(\epsilon^1)$ の解の中で，a-mode と b-mode のみが発生し，エネルギーは a-mode と b-mode 間のみに存在すると仮定する．Eqs. (4.1.7)-(4.1.12) に $\mathcal{O}(\epsilon^1)$ における a-mode と b-mode の解を代入し，u_1, w_1 の非同次微分方程式を得る．Eq. (2.6.3) を用いて，得られた非同次微分方程式の可解条件より，a-mode，b-mode の複素振幅方程式は以下のように導出される．

$$iC_{a1}\frac{dX_a}{dx_1} = iD_aX_a + iC_{a2}\bar{X}_aX_b\exp\left(i\hat{\rho}x_1\right) \tag{4.4.1}$$

$$iC_{b1}\frac{dX_b}{dx_1} = iD_bX_b + iC_{b2}X_a^2\exp\left(-i\hat{\rho}x_1\right) \tag{4.4.2}$$

X_a は a-mode の複素振幅，X_b は b-mode の複素振幅，C_{a1}, C_{a2}, D_a, C_{b1}, C_{b2}, D_b は材料定数と a-mode と b-mode の周波数，波数，固有関数で算出できる定数であり，具体的な式は付録 C に示す．C_{j1} $(j = a, b)$ は 3 章における C_{1j} と一致し，D_j は C_{2j} に一致する．したがって，C_{j1} は，伝播距離に対する振幅変化のし難さを表し，D_j は減衰の効果を表す．C_{j2} は振幅方程式の非線形

項の係数であり，非線形連成の大きさを表す．3.2 節と同様に，Eqs. (4.4.1), (4.4.2) を実数関数表記に書き換えると以下のようになる．

$$\frac{da}{dx_1} = \frac{D_a}{C_{a1}}a + \frac{C_{a2}}{2C_{a1}}ab\cos\gamma \tag{4.4.3}$$

$$a\frac{d\theta_a}{dx_1} = -\frac{C_{a2}}{2C_{a1}}ab\sin\gamma, \tag{4.4.4}$$

$$\frac{db}{dx_1} = \frac{D_b}{C_{b1}}b + \frac{C_{b2}}{2C_{b1}}a^2\cos\gamma \tag{4.4.5}$$

$$b\frac{d\theta_b}{dx_1} = \frac{C_{b2}}{2C_{b1}}a^2\sin\gamma, \tag{4.4.6}$$

このとき，

$$X_a = \frac{1}{2}ae^{-i\theta_a} \tag{4.4.7}$$

$$X_b = \frac{1}{2}be^{-i\theta_b} \tag{4.4.8}$$

$$\gamma = 2\theta_a - \theta_b + \hat{\rho}x_1 \tag{4.4.9}$$

であり，γ は a-mode と b-mode の位相差に相当する．Eqs. (4.4.4), (4.4.6) より θ_a, θ_b を取り除いた以下の関係式を得る．

$$b\frac{d\gamma}{dx_1} = -\frac{C_{a2}}{C_{a1}}b^2\sin\gamma - \frac{C_{b2}}{2C_{b1}}a^2\sin\gamma + \hat{\rho}b \tag{4.4.10}$$

以降，解くべき振幅方程式は Eqs. (4.4.3), (4.4.5), (4.4.10) で示される振幅 a，b と位相差 γ の x_1 に関する微分方程式である．Eqs. (4.4.3), (4.4.5), (4.4.10) は 2 自由度非線形系の内部共振の自由振動を表す振幅方程式と力学的に相似であり，内部共振的ガイド波は自由振動的内部共振現象とみなせる．

4.5 内部共振的ガイド波の発生条件

本節では，伝播モード直交性と多重尺度法を用いた解析により得た内部共振的ガイド波の発生条件に関わる物理的解釈を述べる．

(1) 位相整合条件

Eqs. (4.3.1), (4.3.2) に示される位相整合条件は，非線形連成の効果が特定のモードの永年項を生む項として生じる条件に相当する．具体的には，付録 B で示すように C_{NL1}-C_{NL6} の一部が $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ において，a-mode や b-mode の永年項を生じさせる項として働く．これは非線形連成効果により，特定のモードが励起することを示している．

(2) エネルギー流束が 0 でない

エネルギー流束は非線形連成によるモード間のエネルギー授受の大きさを表す．本章におけるエネルギー授受の効率は，$C_{j1}, C_{j2}(j=a,b)$ で決定される．先行研究と比較すると，P_{ba} は C_{b1} に対応し，$f_a^{vol}+f_a^{sur}$ は $C_{b2}X_a^2$ に対応する [22]．先行研究では，$\mathcal{O}(\epsilon^2)$ において，f_a^{vol}, f_a^{sur} を加振項とみなし，b-mode の特異解を算出した．本研究では，伝播モードの直交性を用いて $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ が可解である条件から $\mathcal{O}(\epsilon^1)$ の解の長い伝播距離に対する依存性を導出する．その結果，a-mode と b-mode の連成問題として，振幅方程式が得られる．

(3) 群速度整合

2.2 節で示したように，ガイド波は群速度で伝播する．よって，群速度整合を満たさないと，a-mode と b-mode が異なる速度で伝播し，(1), (2) の条件を満たしていても，継続的にエネルギーの授受を行うことができなくなる．したがって，群速度整合は継続的に非線形連成の効果によるエネルギー授受が生じる条件に相当する．

4.6 振幅の伝播距離依存性

4.6.1 減衰無 ($D_a = 0,\ D_b = 0$)

減衰の効果を無視することは，Eqs. (3.1.1)-(3.1.4) に $\kappa_L = \kappa_T = 0$ を代入した Lamb 定数を用いることに相当し，Eqs. (4.4.3), (4.4.5), (4.4.10) は $D_a = D_b = 0$ を満たす方程式となる．したがって，Eqs. (4.4.3), (4.4.5), (4.4.10) は，以下のように書き直せる．

$$\frac{da}{dx_1} = \frac{C_{a2}}{2C_{a1}} ab\cos\gamma, \tag{4.6.1}$$

$$\frac{db}{dx_1} = \frac{C_{b2}}{2C_{b1}} a^2\cos\gamma, \tag{4.6.2}$$

$$b\frac{d\gamma}{dx_1} = -\frac{C_{a2}}{C_{a1}} b^2\sin\gamma - \frac{C_{b2}}{2C_{b1}} a^2\sin\gamma + \hat{\rho} b \tag{4.6.3}$$

Eqs. (4.6.1)-(4.6.3) は a-mode と b-mode のみが伝播する条件下では，解析的に解くことができる [21]．Fig. 4.1 で示す a-mode, b-mode の 2 モードのみが発生していると仮定すると，以下の関係を満たす．

$$a^2 + \nu b^2 = E, \tag{4.6.4}$$

ここで，$\nu = -C_{a2}C_{b1}/C_{a1}C_{b2}$ であり，E は積分定数である．Eq. (4.6.4) は Eq. (4.6.1) に a を掛け，Eq. (4.6.2) に νb を掛け，積分をすることで導出できる．解の特徴は，$\hat{\rho} = 0$, $\hat{\rho} \neq 0$ の条件で異なり，Eqs. (4.6.1)-(4.6.3) はそれぞれ以下のように解ける [21]．詳しい導出は付録 D で示す．

$\hat{\rho} = 0$ のとき，

$$a = \sqrt{E}\mathrm{sech}\{\kappa(x - X_0)\} \tag{4.6.5}$$

$$b = \sqrt{\frac{E}{\nu}} \tanh\left\{\kappa(x - X_0)\right\} \tag{4.6.6}$$

$\hat{\rho} \neq 0$ のとき，

$$a = \sqrt{E\{\xi_3 - (\xi_3 - \xi_2)\mathrm{sn}^2[\kappa(x - X_0); \eta]\}} \tag{4.6.7}$$

$$b = \sqrt{\frac{E}{\nu}\{1 - \xi_3 + (\xi_3 - \xi_2)\mathrm{sn}^2[\kappa(x - X_0); \eta]\}} \tag{4.6.8}$$

ここで，$\xi_i (i = 1, 2, 3)$ は Eqs. (4.6.1)-(4.6.3) に変数変換を適用し得られる媒介変数 ξ を用いた方程式の解に相当し，κ, η は媒介変数 ξ_i と振幅方程式の係数により求まる定数であり，X_0 は伝播距離 $x = 0$ での振幅の初期値に対応する．Eqs. (4.6.5)-(4.6.8) に示すように，$\hat{\rho} = 0$ においては a-mode, b-mode の振幅の伝播距離依存性は双曲関数を用いて表せ，$\hat{\rho} \neq 0$ においては a-mode, b-mode の振幅の伝播距離依存性はヤコビの楕円関数を用いて表すことができる．Eqs. (4.6.5)-(4.6.8) を用いて，それぞれの $\hat{\rho}$ における a-mode, b-mode の振幅の伝播距離依存性を有次元で Figs. 4.2-4.4 に示す．

Figs. 4.2-4.4 より，$\hat{\rho} = 0$ では，a-mode から b-mode へエネルギーが一方的に移動するが，$\hat{\rho} \neq 0$ では，エネルギーは a-mode と b-mode の間を周期的に移動し合う．また，$\hat{\rho}$ が大きくなるにつれ，エネルギー変換効率は下がり，エネルギーの移動周期は短くなる．これは $\hat{\rho}$ によって，ξ_i が変化することに起因する．詳しくは付録 D に示す．実際には，$\hat{\rho} = 0$ を満たす入力を選択的に行うことは困難であり，$\hat{\rho} \neq 0$ となる [21]．したがって，減衰を無視した内部共振的ガイド波において，伝播エネルギーは a-mode と b-mode の間を周期的に移動する．また，$\hat{\rho}$ に関わらず高調波 (b-mode) の振幅は伝播距離に対して線形に変化しない．

4.6.2　減衰有 ($D_a \neq 0$, $D_b \neq 0$)

減衰の効果を考慮した内部共振的ガイド波の振幅の伝播距離依存性は，Eqs. (4.4.3), (4.4.5), (4.4.10) を x_1 に関して解くことで分かる．Eqs. (4.4.3), (4.4.5), (4.4.10) は非線形微分方程式であり，理論解析的に解くことが困難であるため，4 次のルンゲクッタ法を用いて数値的に解く．Figs. 4.2-4.7 との比較のため，4.6.1 節で用いた $\hat{\rho}$ と同様の値を用いて求めた a-mode と b-mode の振幅の伝播距離依存性を Figs. 4.8-4.12 に示す．

Figs. 4.8-4.12 より，a-mode と b-mode の振幅は共に，十分な伝播距離で減衰していくことが分かる．また，Figs. 4.2-4.8，Figs. 4.4-4.10 を比較し，減衰の効果が高調波 (b-mode) の取りうる最大振幅を小さく抑えていることが分かる．また，高調波 (b-mode) の振幅が伝播距離に関して，最初の極大値に増大していく変化は減衰の効果に関わらず，線形ではない．Fig. 4.13 に $\hat{\rho}$ の値に対する高調波振幅の極大値の変化を表すグラフを示す．また，Fig. 4.14 に $\hat{\rho}$ の値に対する高調波振幅の極大値を取る伝播距離の変化を表すグラフを示す．したがって，Figs. 4.13, 4.14 より，$\hat{\rho}$ の値によって高調波振幅の極大値とその極大値を取る伝播距離は複雑に変化することが分かる．

Eqs. (4.4.3), (4.4.5), (4.4.10) より，$d/dx_1 = 0$ を満たす定常振幅解は自明な $a_{st} = b_{st} = 0$ の

みであり，a-mode, b-mode の振幅はいずれ 0 に収束する．

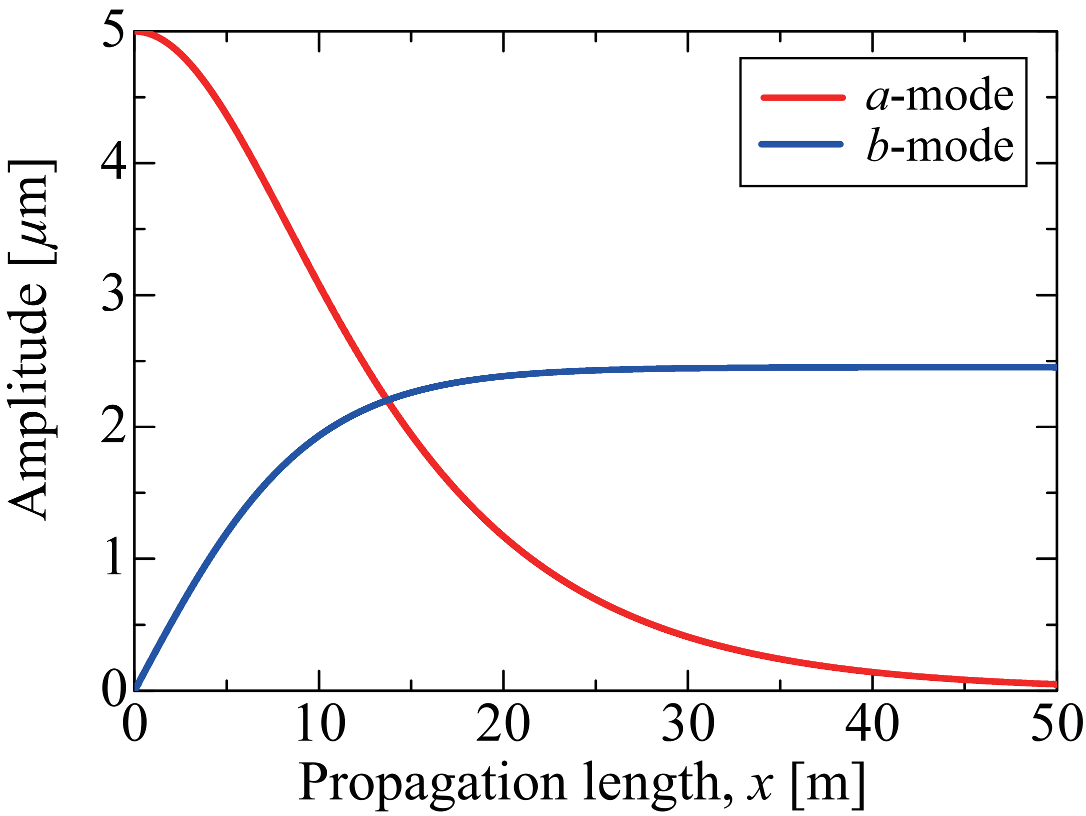

Figure 4.2　Modal amplitudes depending on propagation length with absence of damping under $\rho = 0$.

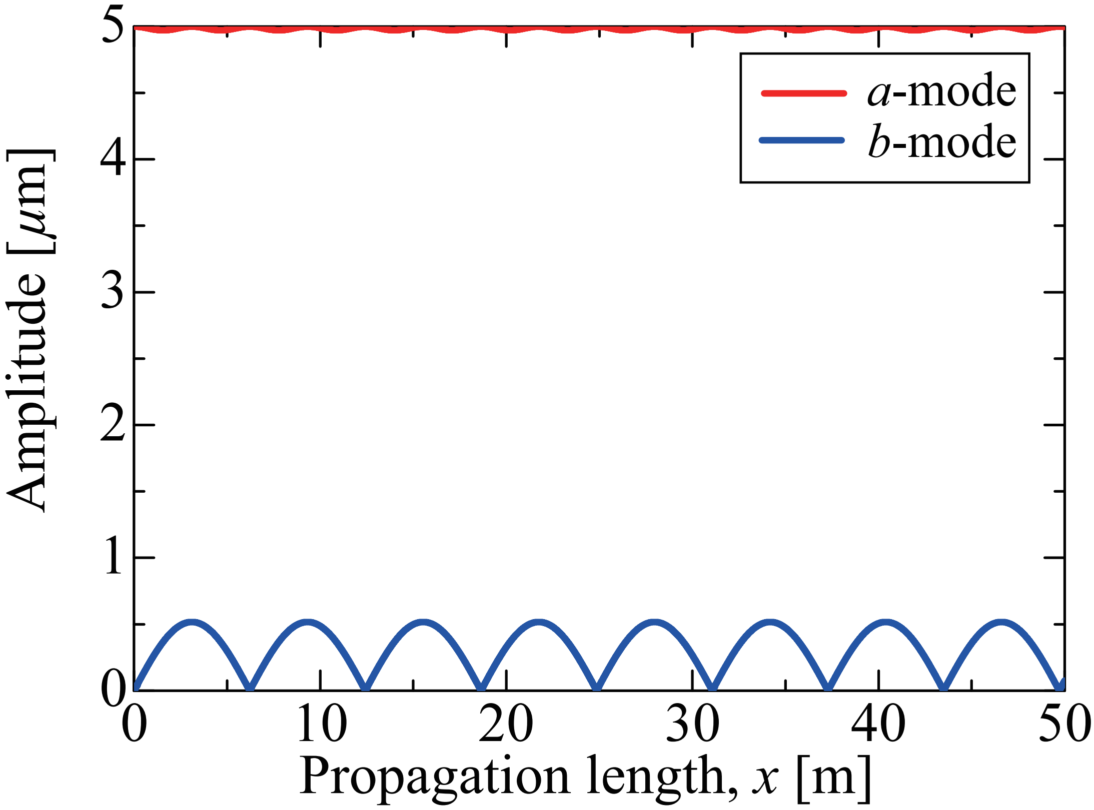

Figure 4.3 Modal amplitudes depending on propagation length with absence of damping under $\rho = 10^{-3}$.

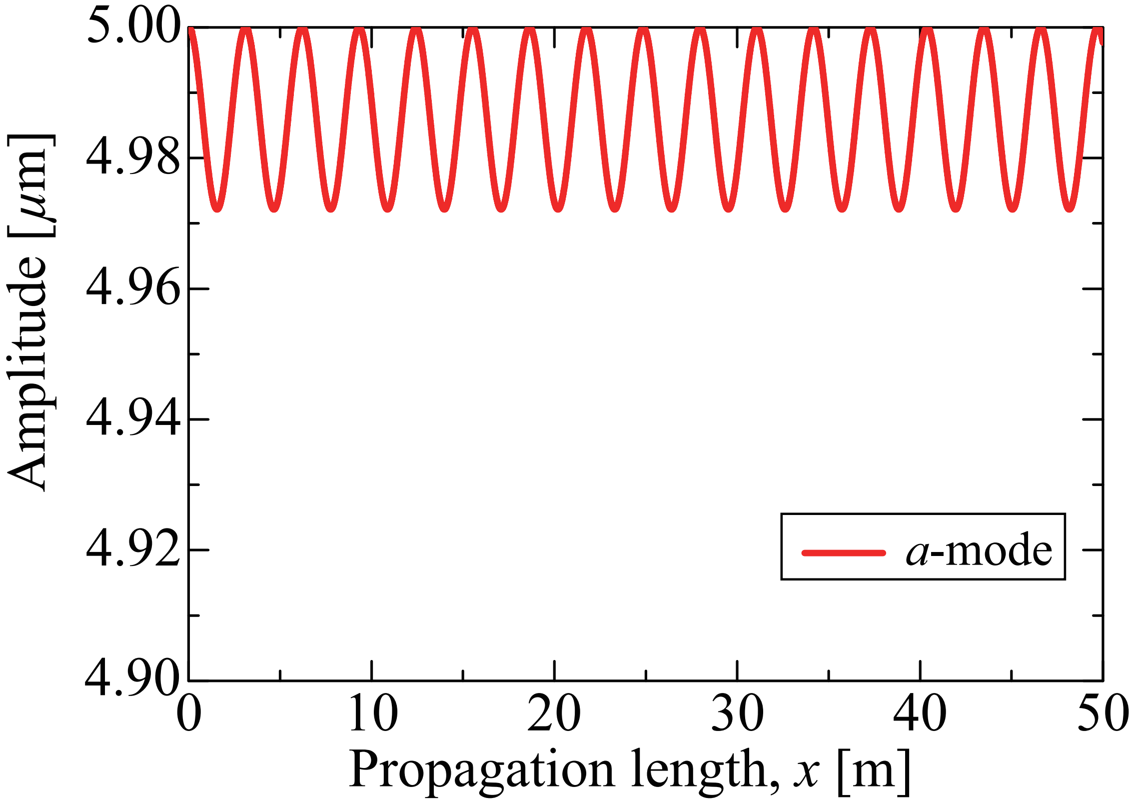

Figure 4.4 A zoomed modal amplitude of a-mode depending on propagation length with absence of damping under $\rho = 10^{-3}$.

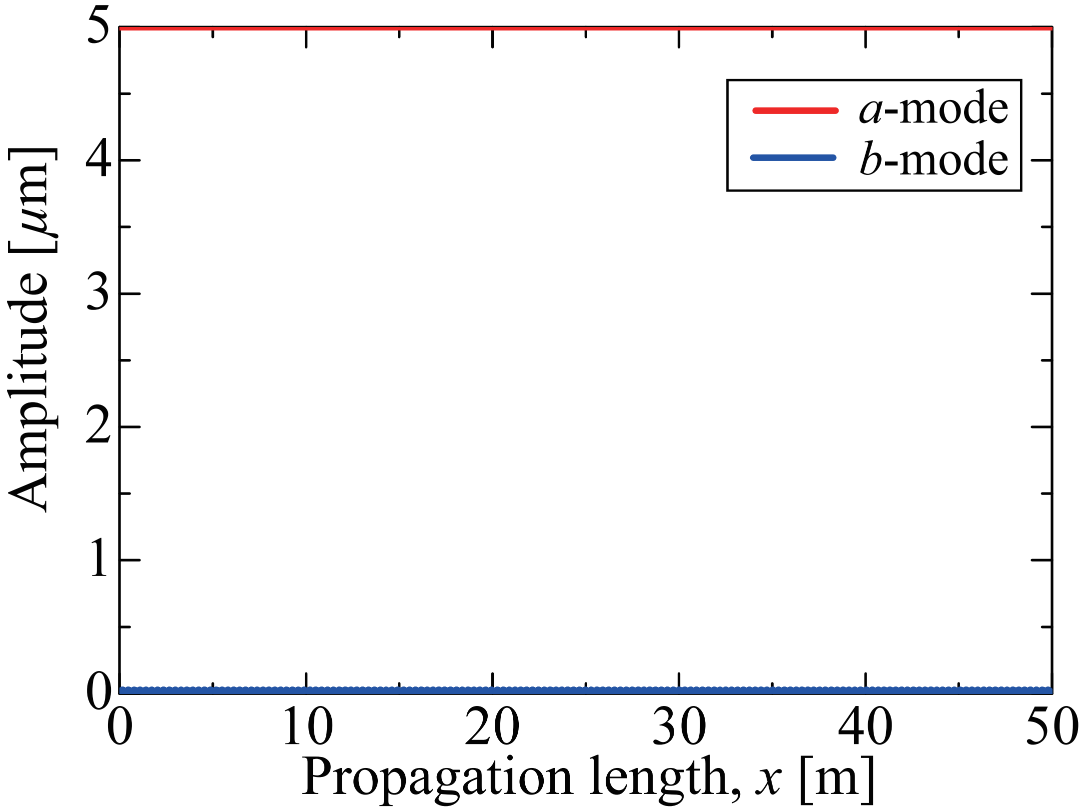

Figure 4.5 Modal amplitudes depending on propagation length with absence of damping under $\rho = 10^{-2}$.

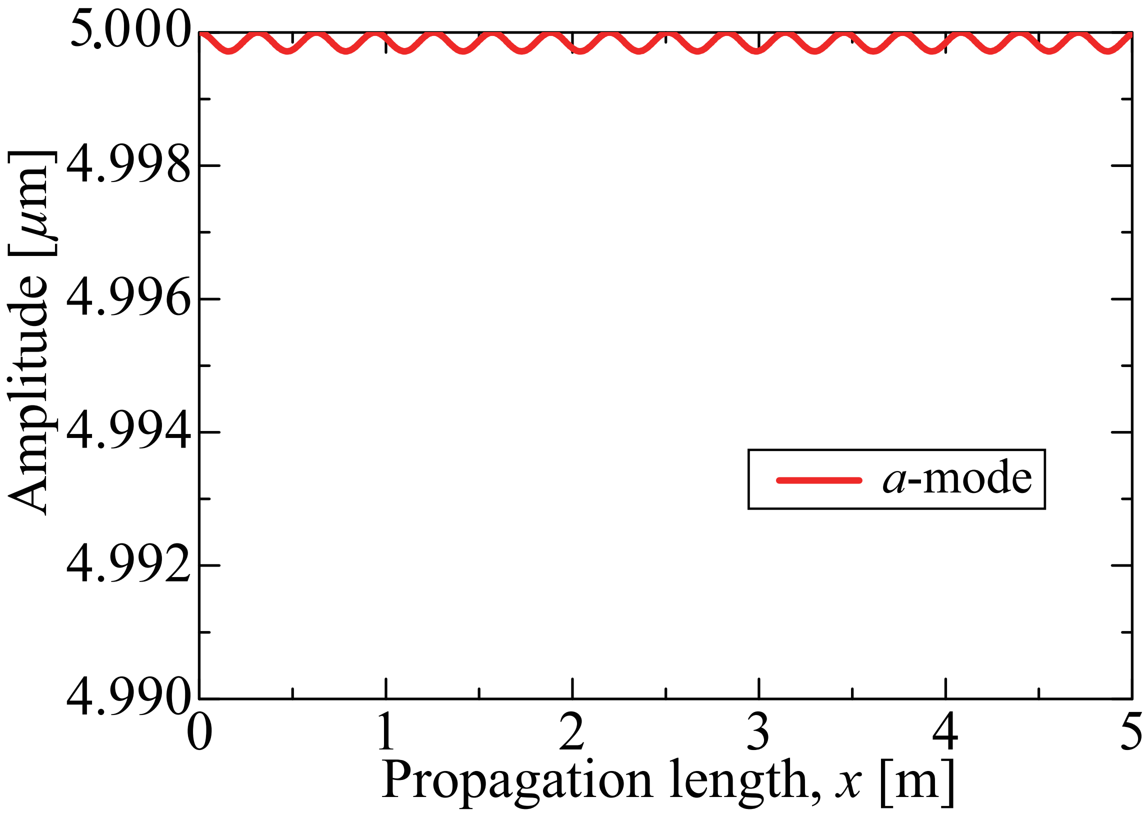

Figure 4.6　A zoomed modal amplitude of a-mode depending on propagation length with absence of damping under $\rho = 10^{-2}$.

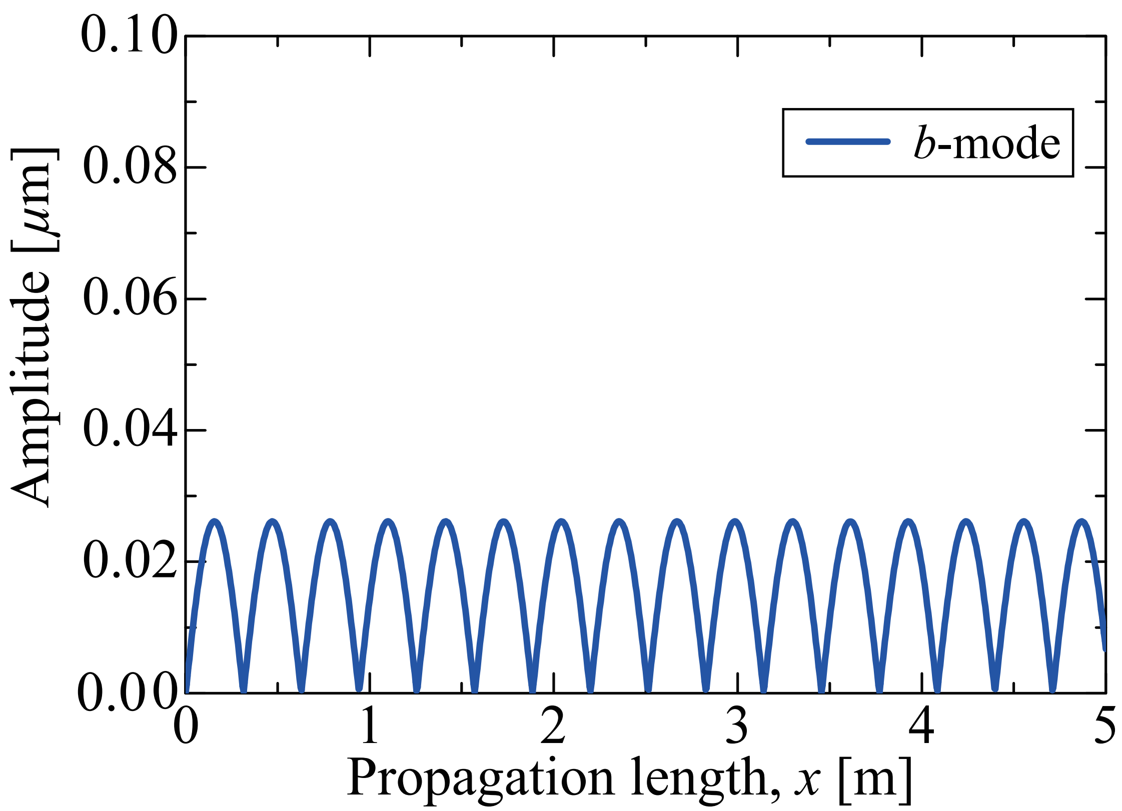

Figure 4.7　A zoomed modal amplitude of b-mode depending on propagation length with absence of damping under $\rho = 10^{-2}$.

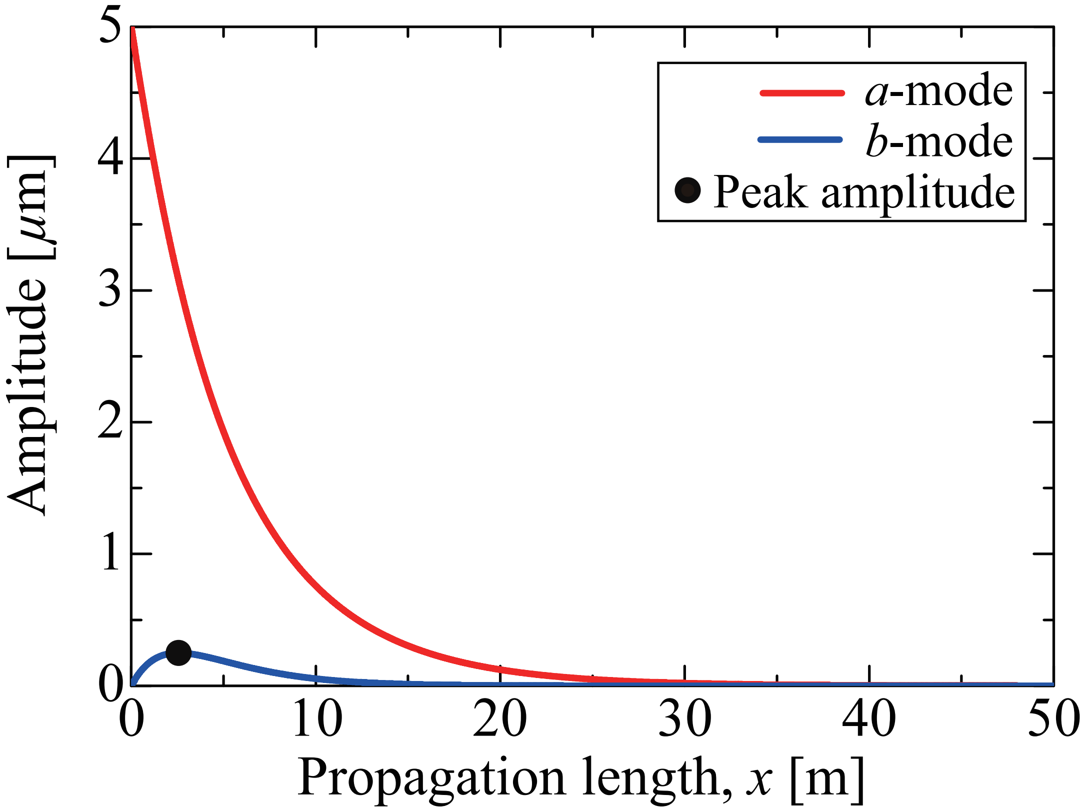

Figure 4.8 Modal amplitudes depending on propagation length with presence of damping under $\rho = 0$.

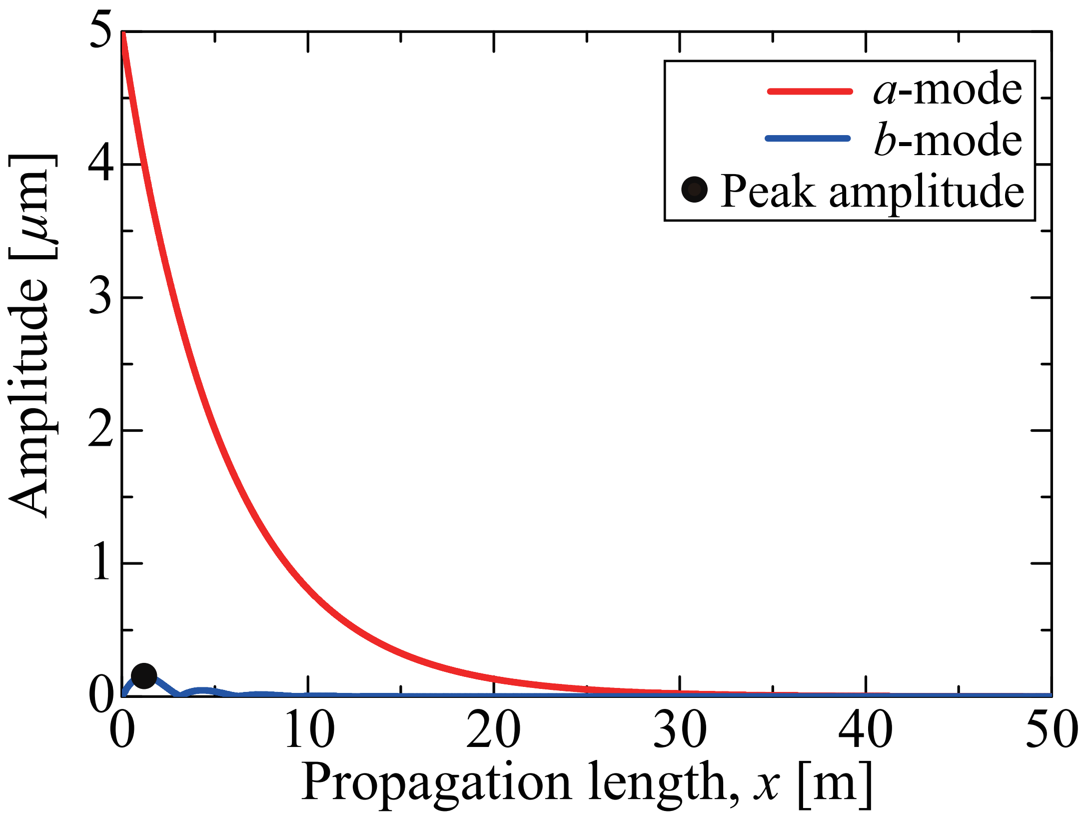

Figure 4.9 Modal amplitudes depending on propagation length with presence of damping under $\rho = 10^{-3}$.

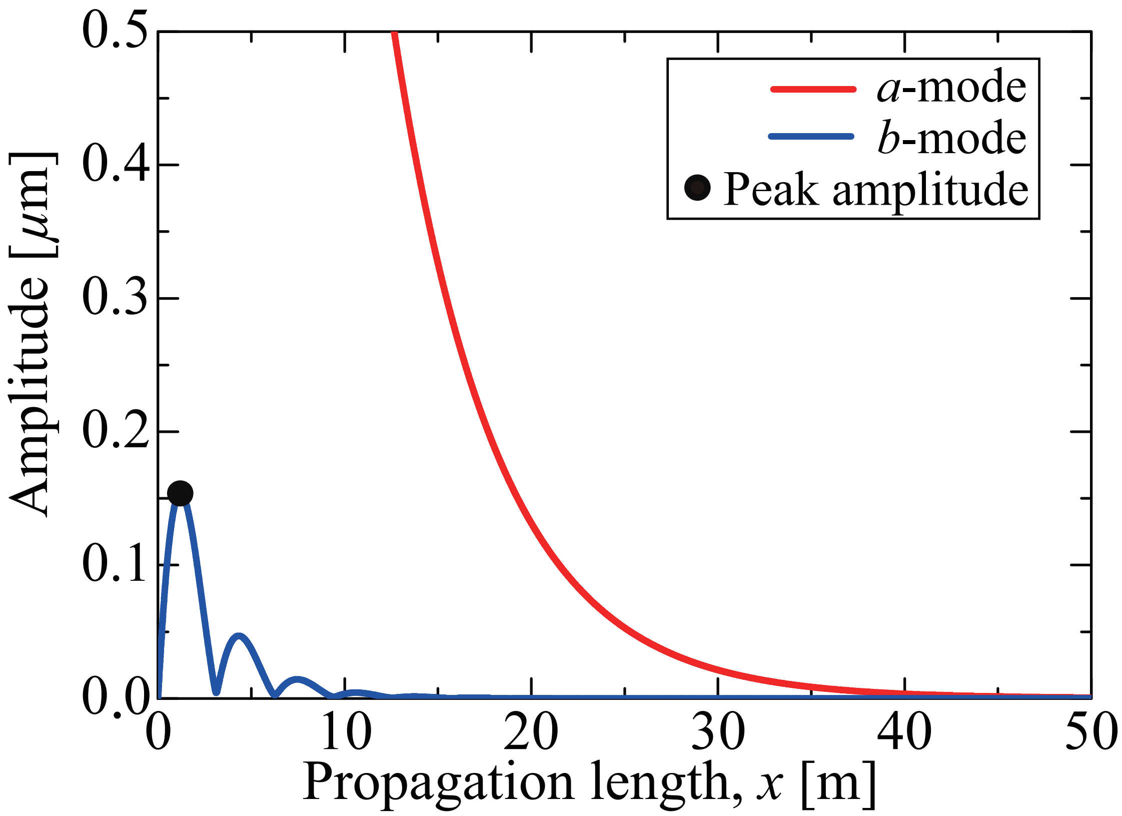

Figure 4.10　Zoomed modal amplitudes depending on propagation length with presence of damping under $\rho = 10^{-3}$.

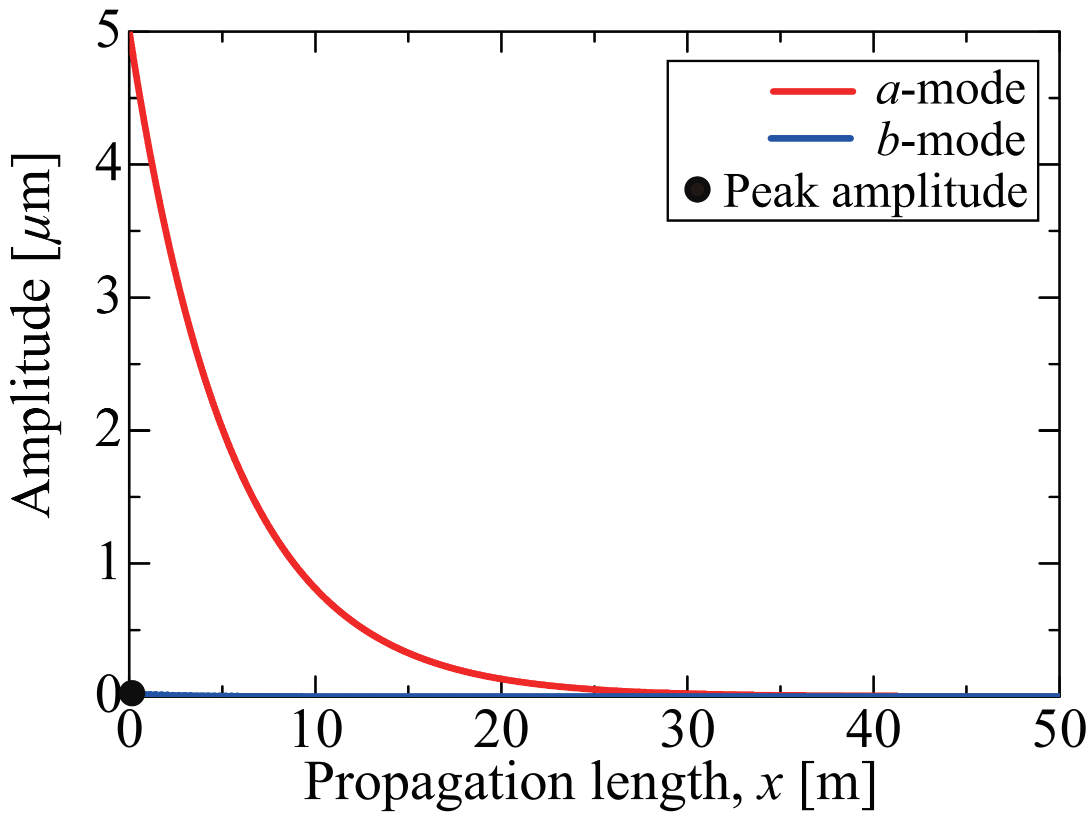

Figure 4.11 Modal amplitudes depending on propagation length with presence of damping under $\rho = 10^{-2}$.

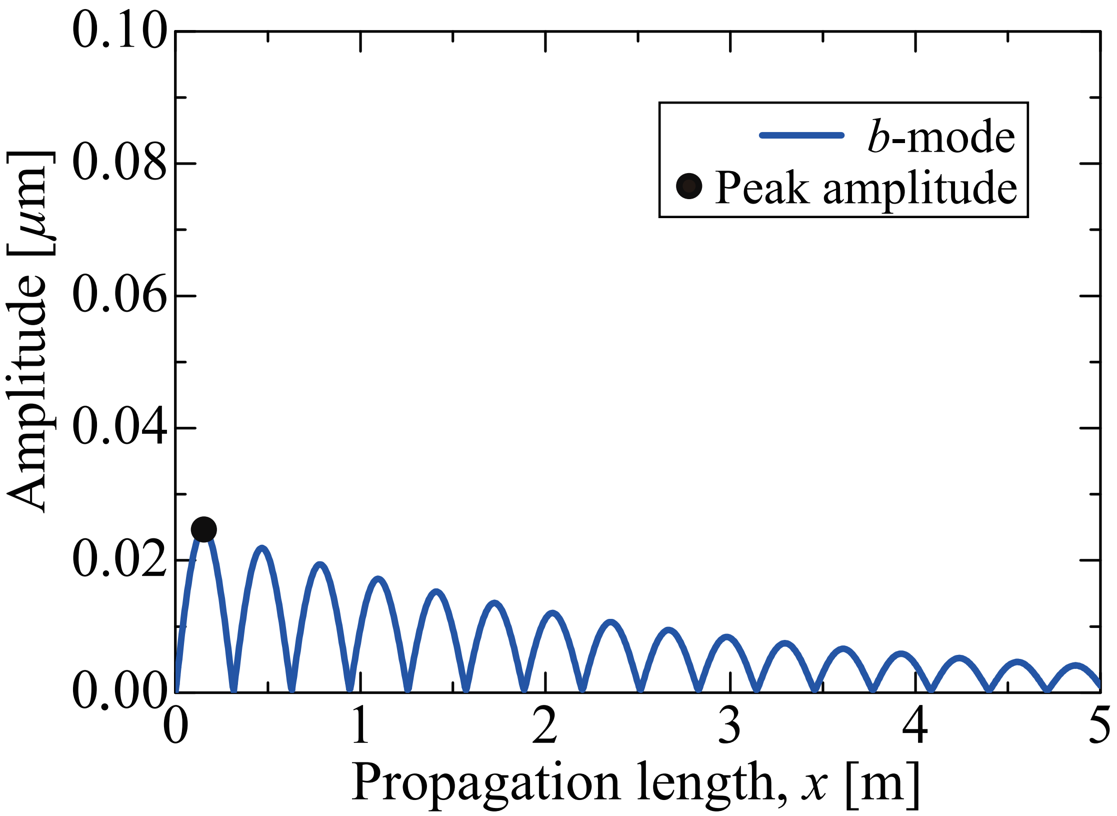

Figure 4.12 A zoomed modal amplitude of b-mode depending on propagation length with presence of damping under $\rho = 10^{-2}$.

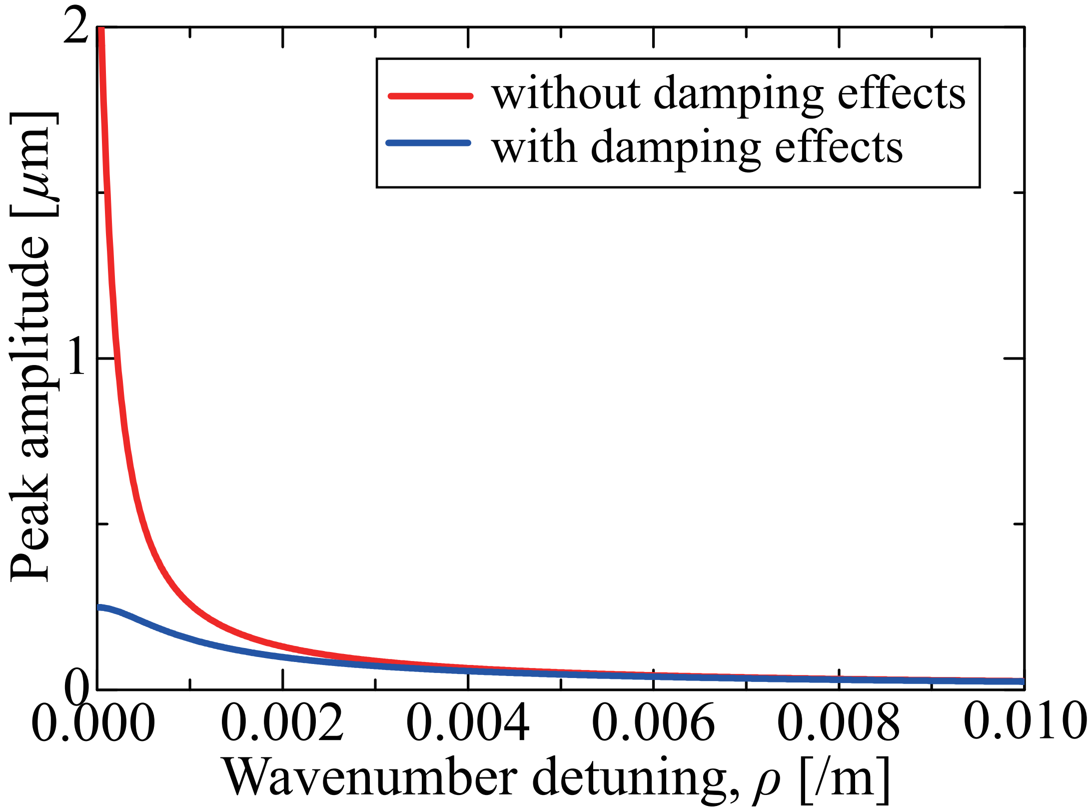

Figure 4.13 Peak amplitudes of b-mode depending on ρ [/m].

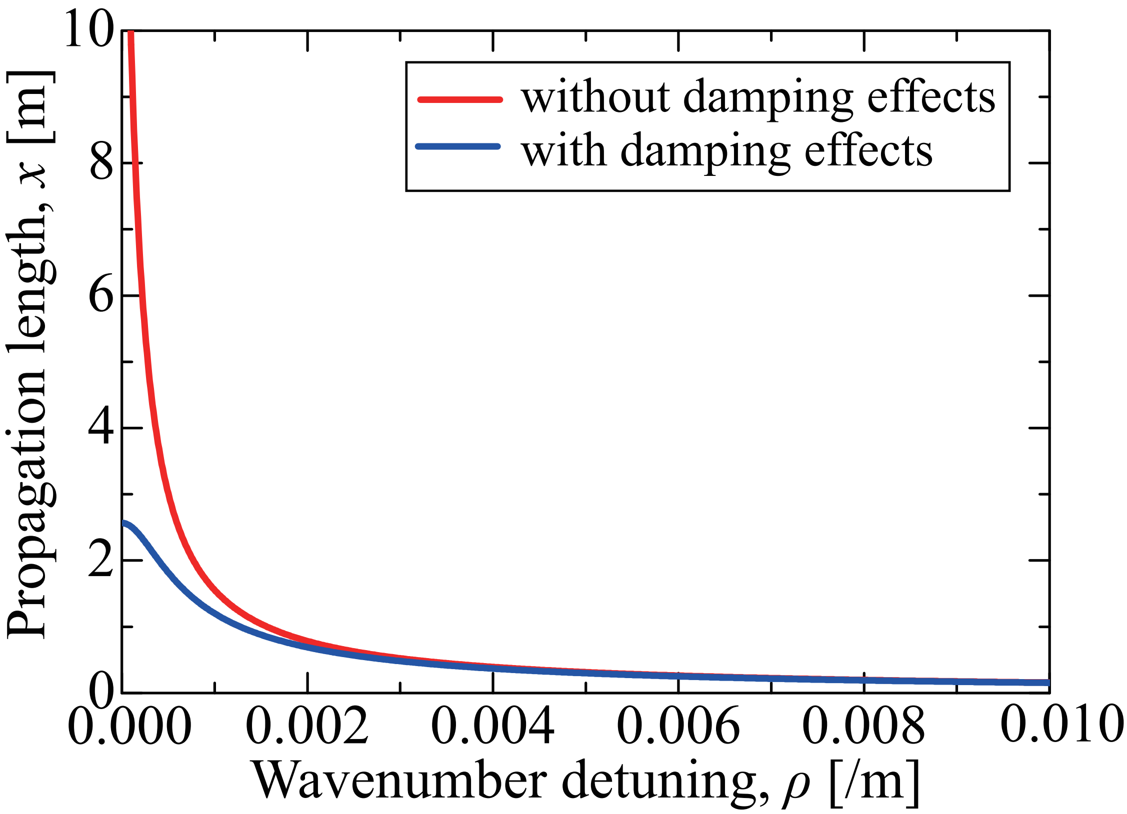

Figure 4.14　Propagation length for the amplitudes of b-mode reaches the peak depending on ρ [/m].

4.6.3 従来の非線形材料定数の測定方法

従来の摂動法を用いた累積的高調波 (内部共振的ガイド波) の解析では，高調波の振幅は伝播距離に対して線形に増大すると結論付けられた．しかし，多重尺度法を用いた解析の結果，高調波の振幅は伝播距離に対して線形に増大しないことを示した．

1.1 章に示したように，非線形超音波を非破壊検査へ応用する際に，疲労損傷の初期段階を非線形材料定数の変化から捉える手法がある．累積的高調波を用いた非破壊検査では，非線形材料定数の変化を伝播距離に対する高調波振幅の変化率を測定することで見積もる手法が提案されている [18], [19]．本節では，伝播モードの直交性と多重尺度法を用いて得られた高調波の伝播距離依存性を高調波発生点付近で線形近似し，従来の非線形材料定数の変化の測定精度を予測する．したがって，非線形材料定数の変化に対して，高調波発生点付近での伝播距離に対する高調波振幅の変化率の変化を確認する．さらに，いくつかの離調パラメータに対する高調波発生点付近での伝播距離に対する高調波振幅の変化率の変化を確認する．また，減衰の効果による変化も確認する．

Eqs. (4.4.3), (4.4.5), (4.4.10) をいくつかの条件で 4 次のルンゲクッタ法を用いて解いて得られた伝播距離に対する a-mode(基本波モード) と b-mode(高調波モード) の振幅の変化を Figs. 4.15-4.18 に示す．Figs. 4.15, 4.16 には非線形材料定数の変化に対する振幅の伝播距離依存性を各離調パラメータ毎に示す．Figs. 4.15, 4.16 より，非線形材料定数の変化に対して，高調波発生点付近での伝播距離に対する高調波振幅の変化率の変化は有意であることがわかる．さらに，Fig. 4.17 に減衰の効果を無視した振幅の伝播距離依存性，Fig. 4.18 に減衰の効果を考慮した振幅の伝播距離依存性を各離調パラメータ毎に示す．Figs. 4.17, 4.18 より，減衰の効果と $\hat{\rho}$ の変化の効果は，高調波発生点付近での伝播距離に対する高調波振幅の変化率に大きな影響を与えないことがわかる．しかし，Figs. 4.15-4.18 より，高調波発生点付近での伝播距離に対する高調波振幅の変化率と，伝播モードの直交性と多重尺度法を用いて算出した高調波振幅の伝播距離依存性が等しいとみなせる伝播距離は非常に短いことが分かる．高調波発生点付近での伝播距離に対する高調波振幅の変化率を，高調波振幅の伝播距離に対する変化から精度よく測定するためには，高調波発生点の近傍で測定する必要があり，長距離伝播性を有するガイド波の利点を損なうと考えられる．したがって，非線形材料定数の変化に敏感な情報を用いて検査を行う新たな手法の考案が必要である．

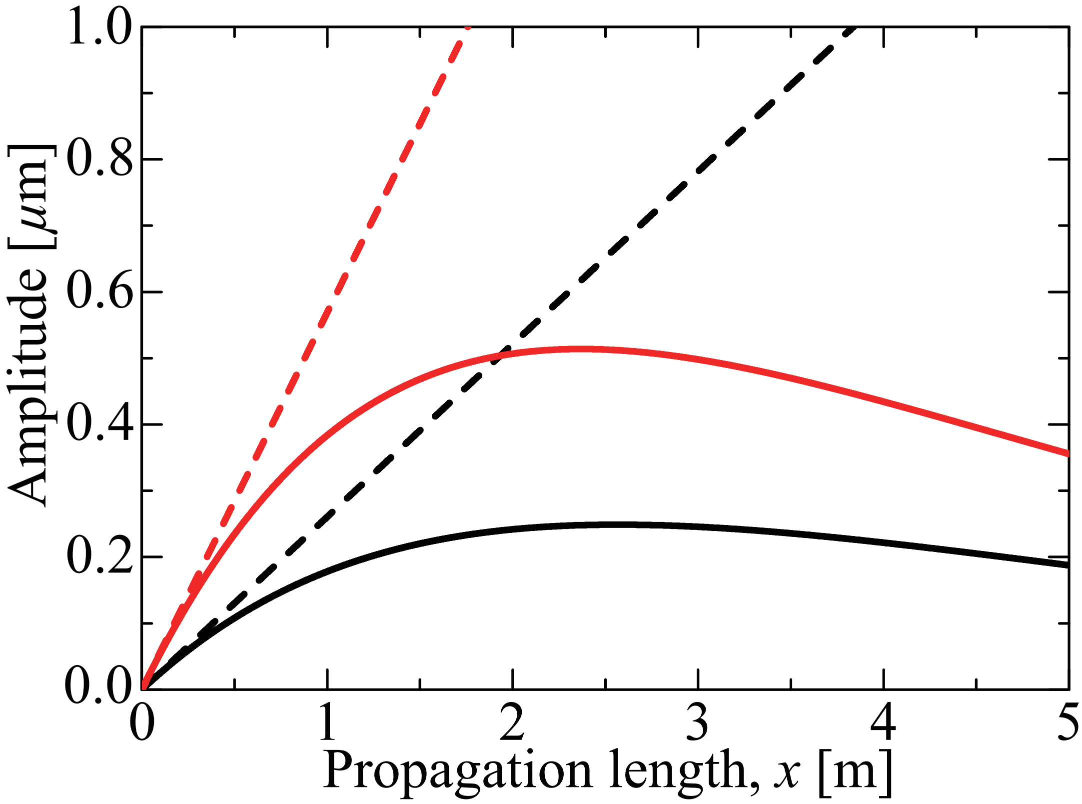

Figure 4.15 Amplitudes of higher modes depending on propagation length and change of material nonlinearities under $\rho = 0$. The black dash line indicates the amplitude gradient of the higher mode at the originating point for material nonlinearities A=-350 [GPa], B=-158 [GPa], C=-100 [GPa]. The red dash line indicates that for A=-700 [GPa], B=-316[GPa], C=-200 [GPa]. The black and red solid lines indicate the amplitudes of the higher mode depending on propagation length obtained by mode orthogonality and MMS, corresponding to respectful nonlinearities.

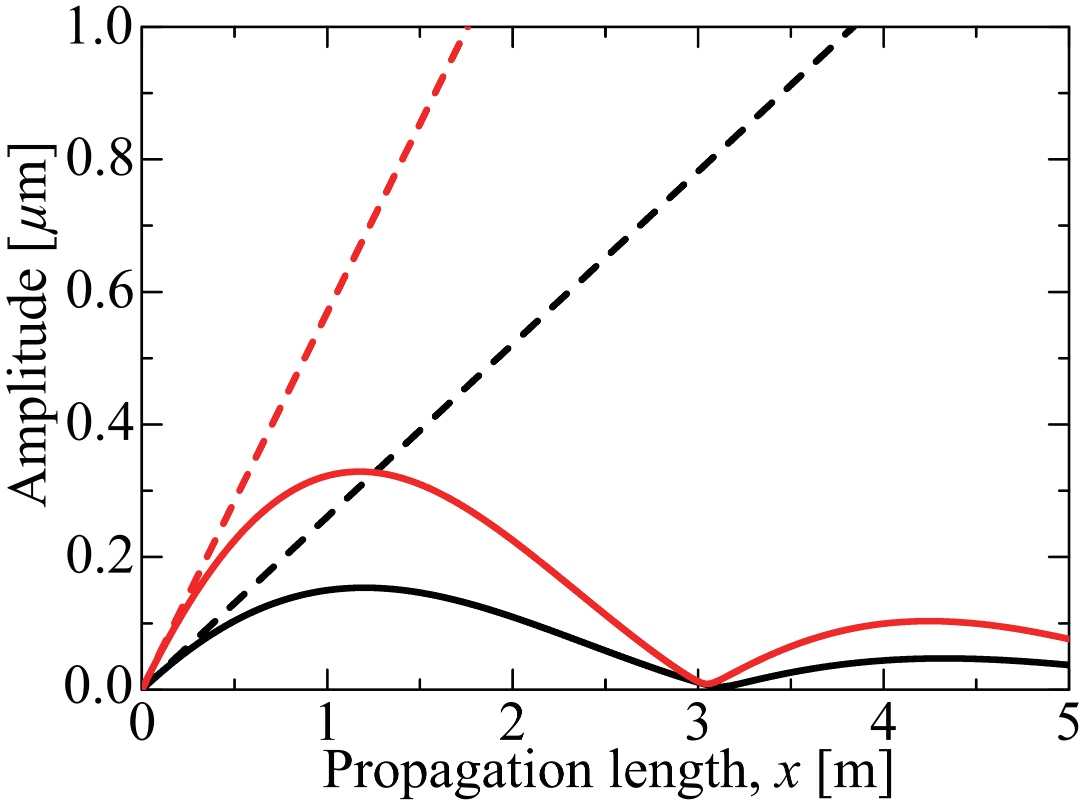

Figure 4.16 Amplitudes of higher modes depending on propagation length and change of material nonlinearities under $\rho = 10^{-3}$. The black dash line indicates the amplitude gradient of the higher mode at the originating point for material nonlinearities A=-350 [GPa], B=-158 [GPa], C=-100 [GPa]. The red dash line indicates that for A=-700 [GPa], B=-316[GPa], C=-200 [GPa]. The black and red solid lines indicate the amplitudes of the higher mode depending on propagation length obtained by mode orthogonality and MMS, corresponding to respectful nonlinearities.

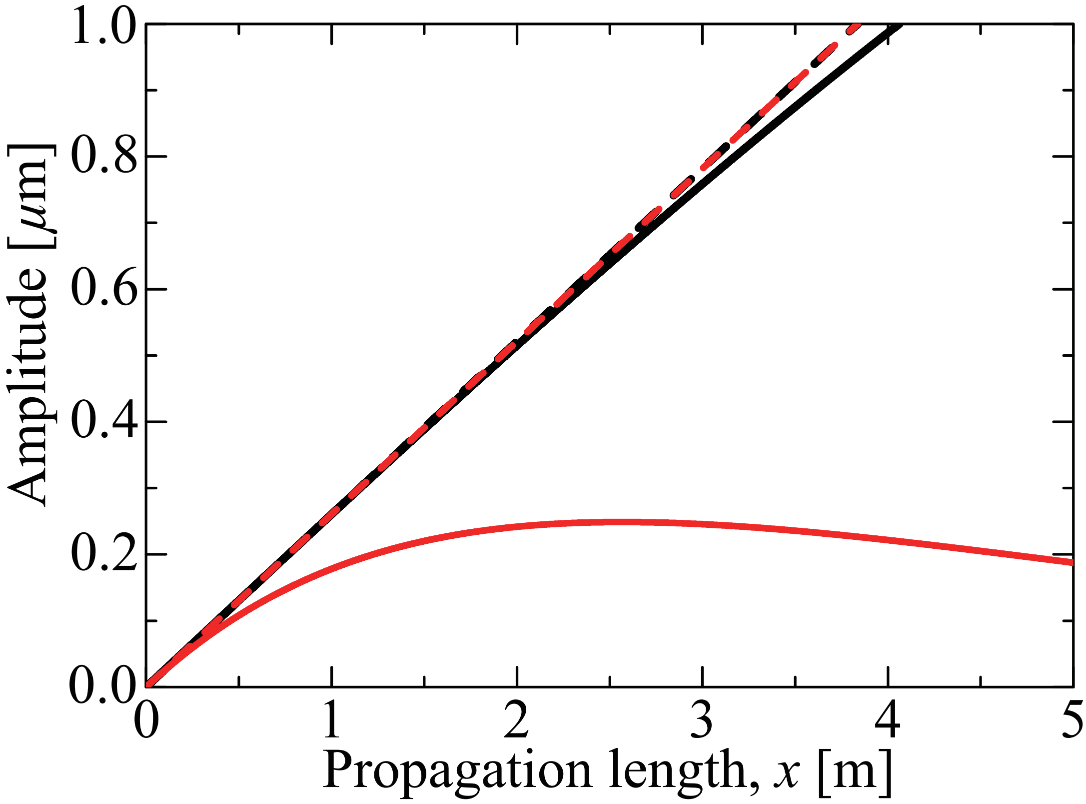

Figure 4.17 Amplitudes of higher modes depending on propagation length and damping effects under $\rho = 0$. The black dash line indicates the amplitude gradient of the higher mode at the originating point without damping effects. The red dash line indicates that with damping effects. The black and red solid lines indicate the amplitudes of the higher mode depending on propagation length obtained by mode orthogonality and MMS, corresponding to respectful damping effects.

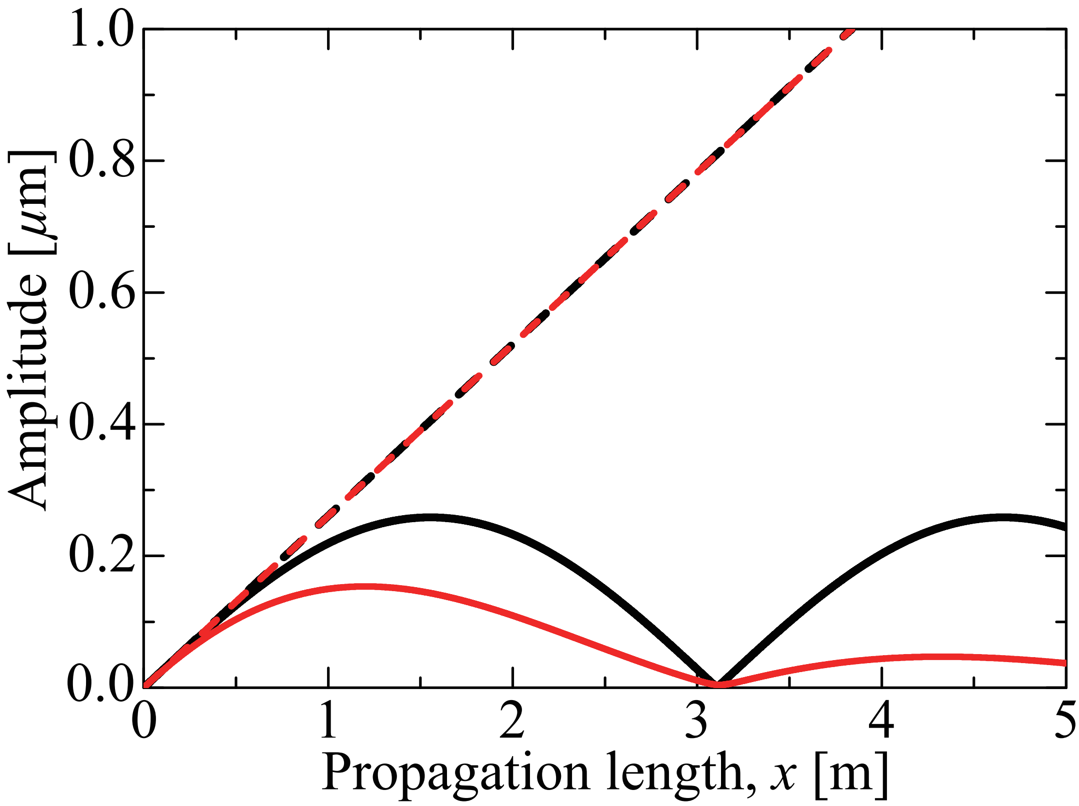

Figure 4.18 Amplitudes of higher modes depending on propagation length and damping effects under $\rho = 10^{-3}$. The black dash line indicates the amplitude gradient of the higher mode at the originating point without damping effects. The red dash line indicates that with damping effects. The black and red solid lines indicate the amplitudes of the higher mode depending on propagation length obtained by mode orthogonality and MMS, corresponding to respectful damping effects.

4.7 非線形材料定数の変化に対する最大高調波振幅の変化

Figs. 4.15-4.18 より，伝播距離に対する最大高調波振幅の変化が非線形材料定数の変化に対して敏感である．したがって，本節では，内部共振的ガイド波を非破壊検査へ応用する際に，非線形材料定数の変化を非線形共振現象により生じる伝播距離に対する高調波の最大振幅の変化として捉える手法を提案する．非線形材料が変化したとき，高調波振幅の伝播距離依存性の変化を，4 次のルンゲクッタ法で Eqs. (4.4.3), (4.4.5), (4.4.10) を解くことで明らかにし，非線形材料定数の変化に伴う伝播距離に対する高調波の最大振幅の変化を見積もる．

Figs. 4.19, 4.20 に非線形材料定数比に対する高調波の最大振幅を，各離調パラメータ毎に示す．この高調波の最大振幅とは，Figs. 4.8-4.12 に示す黒丸に対応する．ここで，初期条件は無次元で $a(0) = 10, b(0) = 0$，有次元で $a(0)$=5 μm, $b(0)$=0 μm とした．Figs. 4.19, 4.20 より，非線形材料定数の変化に対し，高調波の最大振幅の変化は線形ではないことが分かる．非線形連成の効果は幾何学的非線形性と材料の非線形性により生じるが，非線形材料定数の変化は材料の非線形性の変化のみである点が要因として挙げられる．また，Figs. 4.19, 4.20 は各非線形材料定数に対する高調波振幅の最大値をプロットしているが，Figs. 4.13, 4.14 に示すように，最大振幅値を取る伝播距離は各条件により異なる．したがって，伝播距離に対して高調波の最大振幅を測定するためには，伝播方向に対して複数の探触子を要する．

本節における提案手法は，定性的に非線形材料定数の変化を捉えることが従来手法よりも容易であるが，Fig. 4.21 に示す概念図のように，伝播方向に複数の探触子を要し，探触子数が十分でないと，高調波の最大振幅を見誤り，誤差原因となり得る．

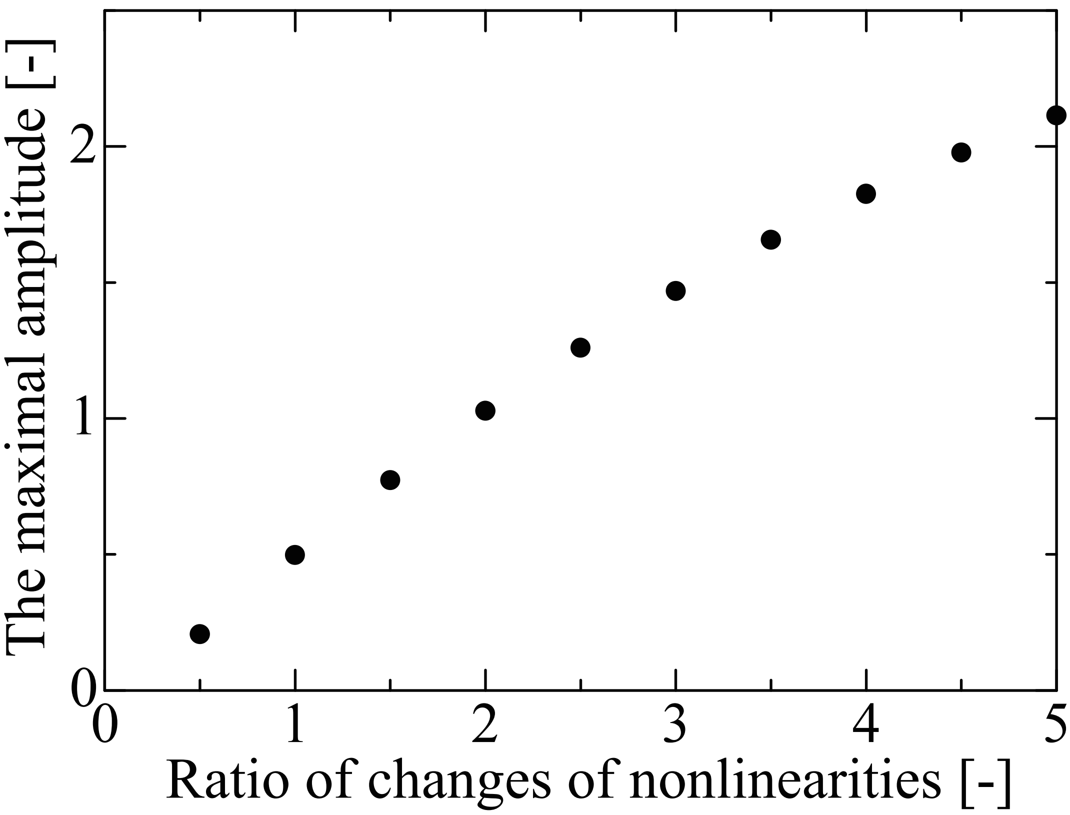

Figure 4.19 The maximal amplitudes of the higher modes under $\rho = 0$ depending on changes of nonlinearities.

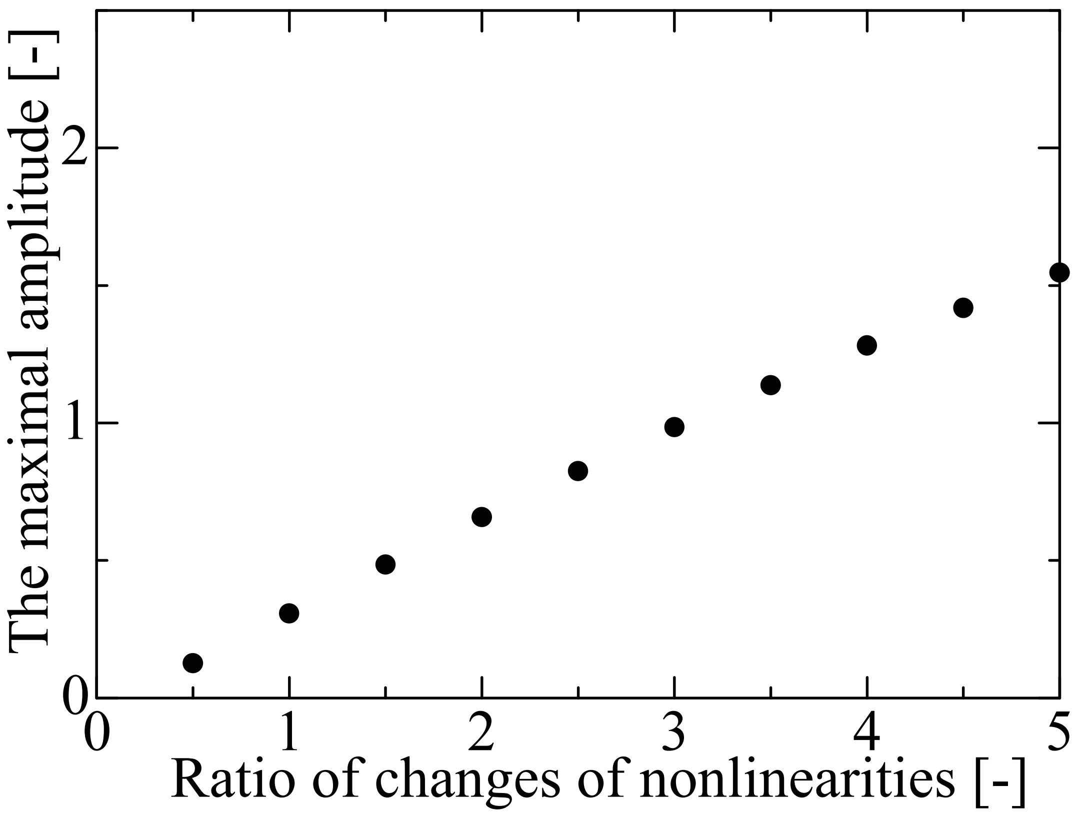

Figure 4.20 The maximal amplitudes of the higher modes with $\rho = 10^{-3}$ depending on changes of nonlinearities.

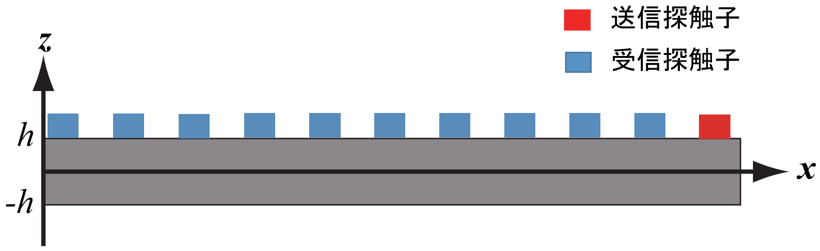

Figure 4.21　Schematic of the nondestructive testing system used by internally resonant guided waves.

4.8 結論

本章では，伝播モードの直交性と多重尺度法を用いて，伝播方向に複数の尺度を用意し，長い伝播領域における内部共振的ガイド波の解析を可能にした．本解析手法によって，内部共振的ガイド波の伝播特性は，従来の摂動法を用いて導出された累積的高調波の伝播特性とは定性的に異なる現象であることを明らかにした．具体的な結論を以下に記す．

(1) 内部共振的ガイド波の発生条件を先行研究における累積的高調波の発生条件と比較し，本章で用いた解析手法により得られる振幅方程式から分かる物理的解釈を与え，内部共振的ガイド波の伝播特性は自由振動的内部共振現象と力学的に相似であることを明らかにした．

(2) 減衰の効果を無視し，完全な位相整合条件を満たす場合 ($\rho = 0$)，a-mode(基本波モード) から b-mode(高調波モード) へエネルギーが一方的に移動し，a-mode と b-mode の振幅は伝播距離に関して双曲関数を用いて表せられる．

(3) 減衰の効果を無視し，完全な位相整合条件から微小なずれがある場合 ($\rho \neq 0$), a-mode と b-mode の間をエネルギーが周期的に移動し合い，a-mode と b-mode の振幅は伝播距離に関してヤコビの楕円関数を用いて表せられる．

(4) (2) で示すような状態を満たす入力は困難であり，現実的には (3) で示すような状態を取る．

(5) 位相整合条件からの離調パラメータの増大に伴い，エネルギー変換効率は減少し，エネルギーが両モード間を移動する周期は短くなる．

(6) 減衰の効果により，a-mode と b-mode の振幅は共に有限の伝播距離で減衰し，0 に収束する．

(7) 従来の内部共振的ガイド波を用いた非線形材料定数の測定方法の問題点を指摘し，比較的有効な非線形材料定数の測定方法を提案した．

第 5 章

オートパラメトリック励振現象に起因して発生するガイド波

本章では，内部共振的ガイド波を用いた非線形材料定数の測定法の問題点を解決するモデルの提案とその解析を行う．内部共振的ガイド波を非破壊検査に応用する際に次の問題がある．
(1) 探触子を含む装置が入力周波数の整数倍の非線形周波数成分を与え，内部共振的ガイド波の高調波成分と装置に由来する入力非線形成分の分離が難しく，測定誤差が生じる．
また，4 章で明らかにした内部共振的ガイド波を用いて，非線形材料定数を測定する際に以下の問題がある．
(2) 減衰の効果により，基本波，高調波はともに伝播距離に制約があり，複雑な伝播距離依存性を有するため，高調波の振幅情報から非線形材料定数の変化の定量的な測定が難しい．
(3) 非線形材料定数の変化を高調波発生点付近での伝播距離に対する高調波振幅の変化率を用いて測定する手法は，高調波発生点付近に複数の探触子を要し，ガイド波の長距離伝播性を生かせない探傷法である．
(4) 4 章で提案した高調波の最大振幅情報を利用する手法も測定精度が探触子間距離に依存する．

問題点 (1) は，高調波ではなく，分調波に注目することで解決できる．分調波とは入力周波数の整数分の 1 の周波数成分で励起される振動（波動）であり，共振的な現象でのみ発生しうる．また，問題点 (2)-(4) を解決するために，伝播距離に対して定常振幅が生じるモデルを提案する．定常振幅は，自由振動的内部共振的現象ではなく，強制振動的内部共振的現象で発生しうる．したがって，本章では，強制振動的内部共振的ガイド波が発生するモデルを考案する．本章で注目する分調波を非線形共振現象によって励振させる現象は，オートパラメトリック励振的であるので，以下オートパラメトリック励振的ガイド波と呼ぶ [60]．

2 自由度非線形系においてオートパラメトリック励振現象が生じる振幅方程式と力学的に相似な非線形ガイド波の振幅方程式が得られるモデルとして，具体的には，加振力，減衰力，非線形力がつり合うような振幅方程式に加振の効果が生じるモデルを考案する．そのためには，永年項を生む項に加振の効果が生じる必要があるので，加振は波数，周波数を要する．さらに，非線形共振現象で分調波を発生させるため，加振の波数，周波数は 4 章における b-mode を励振させるように設定

し，以下 b-mode を基本波モード，a-mode を分調波モードと呼ぶ．

5.1 支配方程式と多重尺度法

本章におけるモデルを Fig. 5.1 に示す．本章で計算に用いる物性値は Table 4.1 に示す 4 章と同様な物性値を用いる．

支配方程式を以下に示す．

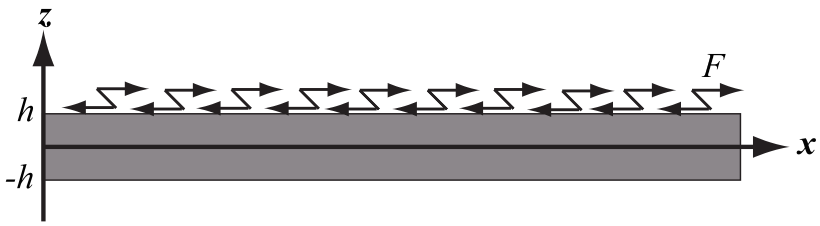

Figure 5.1 Proposed analytical model for autoparametrical resonant guided waves.

$$-\rho_d \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \{\lambda_r + \mu_r + i(\lambda_i + \mu_i)\} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + (\mu_r + i\mu_i) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$
$$+ \frac{\partial T_{NL11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{NL12}}{\partial z} = 0 \tag{5.1.1}$$

$$-\rho_d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \{\lambda_r + \mu_r + i(\lambda_i + \mu_i)\} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + (\mu_r + i\mu_i) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$
$$+ \frac{\partial T_{NL21}}{\partial x} + \frac{\partial T_{NL22}}{\partial z} = 0 \tag{5.1.2}$$

$$\left[(\mu_r + i\mu_i) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + T_{NL21} \right] |_{z=h} = -F|_{z=h} \tag{5.1.3}$$

$$\left[(\mu_r + i\mu_i) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + T_{NL21} \right] |_{z=-h} = 0 \tag{5.1.4}$$

$$\left[(\lambda_r + i\lambda_i) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2(\mu_r + i\mu_i) \frac{\partial w}{\partial z} + T_{NL22} \right] |_{z=h} = 0 \tag{5.1.5}$$

$$\left[(\lambda_r + i\lambda_i) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2(\mu_r + i\mu_i) \frac{\partial w}{\partial z} + T_{NL22} \right] |_{z=-h} = 0 \tag{5.1.6}$$

Eqs. (5.1.1), (5.1.2), (5.1.4)-(5.1.6) は節 4.1 の Eqs. (4.1.1), (4.1.2), (4.1.4)-(4.1.6) と一致し，Eq. (5.1.3) は Eq. (4.1.3) に加振の効果が付与されている．ここで，Fig. 5.1 に示す加振力は複素数領域で $F = \epsilon^2 f \exp\{i(k_f x - \omega_f t)\}$ とする．また，ϵ^2 は振幅方程式に加振の効果が生じるように大きさを設定することに対応する．f は加振振幅，k_f は加振波数，ω_f は加振周波数である．

Eqs. (5.1.1)-(5.1.6) は Fig. 5.1 に示すように平板の境界上部のみを加振しているモデルである．

3.1 節，4.1 節と同様に伝播距離に複数の尺度を用意し，変位の漸近展開を行い，多重尺度法を適用する．4 章と同様に，$\mathcal{O}(\epsilon^1)$ は Eqs. (3.1.14)-(3.1.19) と同形になる．$\mathcal{O}(\epsilon^2)$ は Eqs. (4.1.7)-(4.1.12) の Eq. (4.1.9) に加振の効果 $f\exp\{i(k_f x-\omega_f t)\}$ が付与された形となり，以下に示すようになる．

$\mathcal{O}(\epsilon^2)$

$$\begin{aligned}&-\rho_d D_t^2 u_1+(\lambda_r+\mu_r)(D_{x0}^2 u_1+D_{x0}D_z w_1)+\mu_r(D_{x0}^2 u_1+D_z^2 u_1)\\ =\;&-(\lambda_r+\mu_r)(2D_{x0}D_{x1}u_0+D_z D_{x1}w_0)-2\mu_r D_{x0}D_{x1}u_0\\ &-i(\hat{\lambda}_i+\hat{\mu}_i)(D_{x0}^2 u_0+D_z D_{x0}w_0)-i\hat{\mu}_i(D_{x0}^2 u_0+D_z^2 u_0)-C_{NL1}-C_{NL2}\end{aligned} \tag{5.1.7}$$

$$\begin{aligned}&-\rho_d D_t^2 w_1+(\lambda_r+\mu_r)(D_z D_{x0}u_1+D_z^2 w_1)+\mu_r(D_{x0}^2 w_1+D_z^2 w_1)\\ =\;&-(\lambda_r+\mu_r)D_z D_{x1}u_0-2\mu_r D_{x0}D_{x1}w_0\\ &-i(\hat{\lambda}_i+\hat{\mu}_i)(D_z D_{x0}u_0+D_z^2 w_0)-i\hat{\mu}_i(D_{x0}^2 w_0+D_z^2 w_0)-C_{NL3}-C_{NL4}\end{aligned} \tag{5.1.8}$$

$$\begin{aligned}\left[\mu_r(D_z u_1+D_{x0}w_1)\right]|_{z=h}=&\left[-\mu_r D_{x1}w_0-i\hat{\mu}_i(D_z u_0+D_{x0}w_0)-C_{NL5}\right.\\ &\left.-f\exp\{i(k_f x-\omega_f t)\}\right]|_{z=h}\end{aligned} \tag{5.1.9}$$

$$\left[\mu_r(D_z u_1+D_{x0}w_1)\right]|_{z=-h}=\left[-\mu_r D_{x1}w_0-i\hat{\mu}_i(D_z u_0+D_{x0}w_0)-C_{NL5}\right]|_{z=-h} \tag{5.1.10}$$

$$\begin{aligned}&\left[\lambda_r(D_{x0}u_1+D_z w_1)+2\mu_r D_z w_1\right]|_{z=h}=\\ &\left[-\lambda_r D_{x1}u_0-i\hat{\lambda}_i(D_{x0}u_0+D_z w_0)-2i\hat{\mu}_i D_z w_0-C_{NL6}\right]|_{z=h}\end{aligned} \tag{5.1.11}$$

$$\begin{aligned}&\left[\lambda_r(D_{x0}u_1+D_z w_1)+2\mu_r D_z w_1\right]|_{z=-h}=\\ &\left[-\lambda_r D_{x1}u_0-i\hat{\lambda}_i(D_{x0}u_0+D_z w_0)-2i\hat{\mu}_i D_z w_0-C_{NL6}\right]|_{z=-h}\end{aligned} \tag{5.1.12}$$

5.2 位相整合条件

非線形共振現象により分調波を発生させるため，オートパラメトリック励振的ガイド波の加振波数，加振周波数は b-mode を励振させるように設定する．ここで，a-mode，b-mode は 4.3 節の Fig. 4.1 で示した 2 モードであり，(1) 位相速度と (3) 群速度がほぼ一致し，(2) 非線形連成が生じる組み合わせである．本章では，以下に示すように 4.3 節の位相整合条件に加えて，加振波数と加振周波数が b-mode を励起させるために以下の関係を満たすとする．ここで，σ は ρ と同様に離調パラメータと呼ばれ，b-mode と加振波数の微小なずれを表し，$\sigma \ll 1$，$\epsilon \ll 1$ である．

$$\omega_b=2\omega_a \tag{5.2.1}$$

$$\omega_f=\omega_b \tag{5.2.2}$$

$$k_b = 2k_a + \rho = 2k_a + \epsilon\hat{\rho} \tag{5.2.3}$$

$$k_f = k_b + \sigma = k_b + \epsilon\hat{\sigma} \tag{5.2.4}$$

5.3 可解条件と振幅方程式

4.4 節と同様に，$\mathcal{O}(\epsilon^1)$ の解として，a-mode と b-mode のみが発生しているとし，Eqs. (5.1.7)-(5.1.12) に代入し，可解条件から複素振幅方程式を導出すると，Eq. (4.4.2) に加振の効果 $f\exp\{i(k_f x - \omega_f t)\}$ を付与した形になり，以下のように表せる．

$$iC_{a1}\frac{dX_a}{dx_1} = iD_a X_a + iC_{a2}\bar{X}_a X_b \exp(i\hat{\rho}x_1) \tag{5.3.1}$$

$$iC_{b1}\frac{dX_b}{dx_1} = iD_b X_b + iC_{b2}X_a^2 \exp(-i\hat{\rho}x_1) + i\phi_{bx}(h) f \exp(i\hat{\sigma}x_1) \tag{5.3.2}$$

3.2 節, 4.4 節と同様に Eqs. (5.3.1), (5.3.2) を実数関数表記に書き換えると以下のようになる．

$$\frac{da}{dx_1} = \frac{D_a}{C_{a1}}a + \frac{C_{a2}}{2C_{a1}}ab\cos\gamma_1 \tag{5.3.3}$$

$$a\frac{d\theta_a}{dx_1} = \frac{C_{a2}}{2C_{a1}}ab\sin\gamma_1 \tag{5.3.4}$$

$$\frac{db}{dx_1} = \frac{D_b}{C_{b1}} - \frac{2\phi_{bx}(h)}{C_{b1}}f\cos\gamma_2 + \frac{C_{b2}}{2C_{b1}}a^2\cos\gamma_1 \tag{5.3.5}$$

$$b\frac{d\theta_b}{dx_1} = \frac{2\phi_{bx}(h)}{C_{b1}}f\sin\gamma_2 - \frac{C_{b2}}{2C_{b1}}a^2\sin\gamma_1 \tag{5.3.6}$$

ここで，

$$\gamma_1 = 2\theta_a - \theta_b + \hat{\rho}x_1 \tag{5.3.7}$$

$$\gamma_2 = \theta_b + \hat{\sigma}x_1 \tag{5.3.8}$$

であり，Eqs. (5.3.4), (5.3.6) を用いて，θ_a, θ_b を取り除くと，以下の振幅方程式を得る．

$$\frac{da}{dx_1} = \frac{D_a}{C_{a1}}a + \frac{C_{a2}}{2C_{a1}}ab\cos\gamma_1 \tag{5.3.9}$$

$$\frac{db}{dx_1} = \frac{D_b}{C_{b1}}b + \frac{C_{b2}}{2C_{b1}}a^2\cos\gamma_1 + \frac{2\phi_{bx}(h)}{C_{b1}}f\cos\gamma_2 \tag{5.3.10}$$

$$b\frac{d\gamma_2}{dx_1} = \hat{\sigma}b - \frac{C_{b2}}{2C_{b1}}a^2\sin\gamma_1 + \frac{2\phi_{bx}(h)}{C_{b1}}f\sin\gamma_2 \tag{5.3.11}$$

$$a\frac{d}{dx_1}\left(\frac{\gamma_2+\gamma_1}{2}\right)=\frac{\hat{\sigma}+\hat{\rho}}{2}a+\frac{C_{a2}}{2C_{a1}}ab\sin\gamma_1 \tag{5.3.12}$$

ここで，γ_1 は a-mode と b-mode の位相差，γ_2 は b-mode と加振の位相差を表す．Eqs. (5.3.9)-(5.3.12) は 2 自由度非線形系の強制振動的内部共振現象を表す振幅方程式と力学的に相似な振幅方程式であり，オートパラメトリック励振現象が生じうる方程式である．

5.4 定常振幅解析

本節では，伝播距離に対して，非線形共振現象による有限な定常振幅の存在を示す．伝播距離に対する定常振幅 a_{st}, b_{st} は Eqs. (5.3.9)-(5.3.12) において，$d/dx_1=0$ を満たす解に対応し，以下の連立代数方程式を満たす．

$$\frac{D_a}{C_{a1}}a_{st}+\frac{C_{a2}}{2C_{a1}}a_{st}b_{st}\cos\gamma_{1st}=0 \tag{5.4.1}$$

$$\frac{D_b}{C_{b1}}b_{st}+\frac{C_{b2}}{2C_{b1}}a_{st}^2\cos\gamma_{1st}+\frac{2\phi_{bx}(h)}{C_{b1}}f\cos\gamma_{2st}=0 \tag{5.4.2}$$

$$\hat{\sigma}b_{st}-\frac{C_{b2}}{2C_{b1}}a_{st}^2\sin\gamma_{1st}+\frac{2\phi_{bx}(h)}{C_{b1}}f\sin\gamma_{2st}=0 \tag{5.4.3}$$

$$\frac{\hat{\sigma}+\hat{\rho}}{2}a_{st}+\frac{C_{a2}}{2C_{a1}}a_{st}b_{st}\sin\gamma_{1st}=0 \tag{5.4.4}$$

Eqs. (5.4.1)-(5.4.4) は明らかに $a_{st}=0$ を満たす解が存在し，$b_{st}=0$ を満たす解は存在しない．これは加振を Eqs. (5.2.2), (5.2.4) に示すように b-mode のみを励振させるように設定しているためである．よって，Eqs. (5.4.1)-(5.4.4) を解くと，$a_{st}=0$ を満たす準自明解

$$a_{st}=0 \tag{5.4.5}$$

$$b_{st}=\frac{2\phi_{bx}(h)}{C_{b1}}\sqrt{\frac{1}{(\frac{D_b}{C_{b1}})^2+\hat{\sigma}^2}} \tag{5.4.6}$$

と，$a_{st}\neq 0$ を満たす非自明解

$$\begin{aligned}a_{st}=&\frac{2}{C_{a2}C_{b2}}\Biggl(2C_{b1}D_aD_b+C_{a1}C_{b1}\hat{\rho}\hat{\sigma}+C_{a1}C_{b1}\hat{\sigma}^2\\&\pm\Biggl[C_{b1}^2\left\{-2D_aD_b+C_{a1}\hat{\sigma}(\hat{\rho}+\hat{\sigma})\right\}^2\\&\pm C_{a2}\left\{C_{a1}(D_b^2+C_{b1}^2\hat{\sigma}^2)\sqrt{\frac{4D_a^2}{C_{a1}^2}+(\hat{\rho}+\hat{\sigma})^2}+4C_{a2}f^2\phi_{bx}^2(h)\right\}\Biggr]^{\frac{1}{2}}\Biggr)\end{aligned} \tag{5.4.7}$$

$$b_{st} = \pm \frac{2C_{a1}}{C_{a2}} \sqrt{\left(\frac{D_a}{C_{a1}}\right)^2 + \frac{(\hat{\sigma} + \hat{\rho})^2}{4}} \tag{5.4.8}$$

が得られる．Eqs. (5.4.5)-(5.4.8) で示した a_{st}, b_{st} は振幅であるので正の実数値を取る．したがって，a_{st} が非自明解を持つためには，Eqs. (5.4.7) における a_{st} が正の実数となる加振振幅 f，離調パラメータ $\hat{\sigma}$，$\hat{\rho}$ である必要がある．また，Eqs. (5.4.5)-(5.4.8) で示した a_{st}, b_{st} の大きさは f，$\hat{\sigma}$，$\hat{\rho}$ に依存し，

(1) 準自明解のみを持つ場合

(2) 準自明解に加え，非自明解を 1 つだけ持つ場合

(3) 準自明解に加え，非自明解を複数持つ場合

があり，解の個数は変化する．ここで，Eqs. (5.2.3), (5.3.7) に示すように，$\hat{\rho}$ は 4 章で示した内部共振的ガイド波のエネルギー変換効率を支配するパラメータである．本章ではオートパラメトリック励振的現象に注目するので，最もエネルギー変換効率の良い $\hat{\rho} = 0$ とし解析を行う．加振振幅 f と加振と b-mode のずれを表す離調パラメータ $\hat{\sigma}$ に対応する定常振幅を Eqs. (5.4.5)-(5.4.8) を用いて導出し，有次元で Figs. 5.2, 5.3 に示す．ここで，Figs. 5.2, 5.3 において，実線は非自明解，破線は準自明解を表す．また，Fig. 5.2 は無次元離調パラメータを $\hat{\rho} = 0$ とし，有次元加振振幅 f に対する解の値を示す．また，Fig. 5.3 には無次元振幅を $f = 30$ とし，有次元離調パラメータ ρ に対する解の値を示す．Fig. 5.2 より，準自明解の基本波 (b-mode) 振幅は加振振幅に伴い線形に増加するのに対し，非自明解の基本波振幅は加振振幅に関わらず一定である．これは非線形連成によって，準自明解における基本波を励振させる加振のエネルギーが分調波モード (a-mode) を励振させるエネルギーとして振る舞っているためである．また，Fig. 5.3 より，離調パラメータが十分小さい値でのみ，本系は非自明解を有しうることがわかる．さらに，Fig. 5.4 に非自明解を取り得る離調パラメータと加振振幅の条件を $\hat{\sigma} - f$ 平面に示す．Fig. 5.4 より，非自明解は十分に小さな離調パラメータと十分に大きな加振振幅が与えられた際に生じうる解である．したがって，オートパラメトリック励振的ガイド波は，加振波数が基本波 (b-mode) の波数に十分近く，加振振幅が十分大きい場合にのみ発生する非線形共振に起因した分調波 (a-mode) 励振現象である．

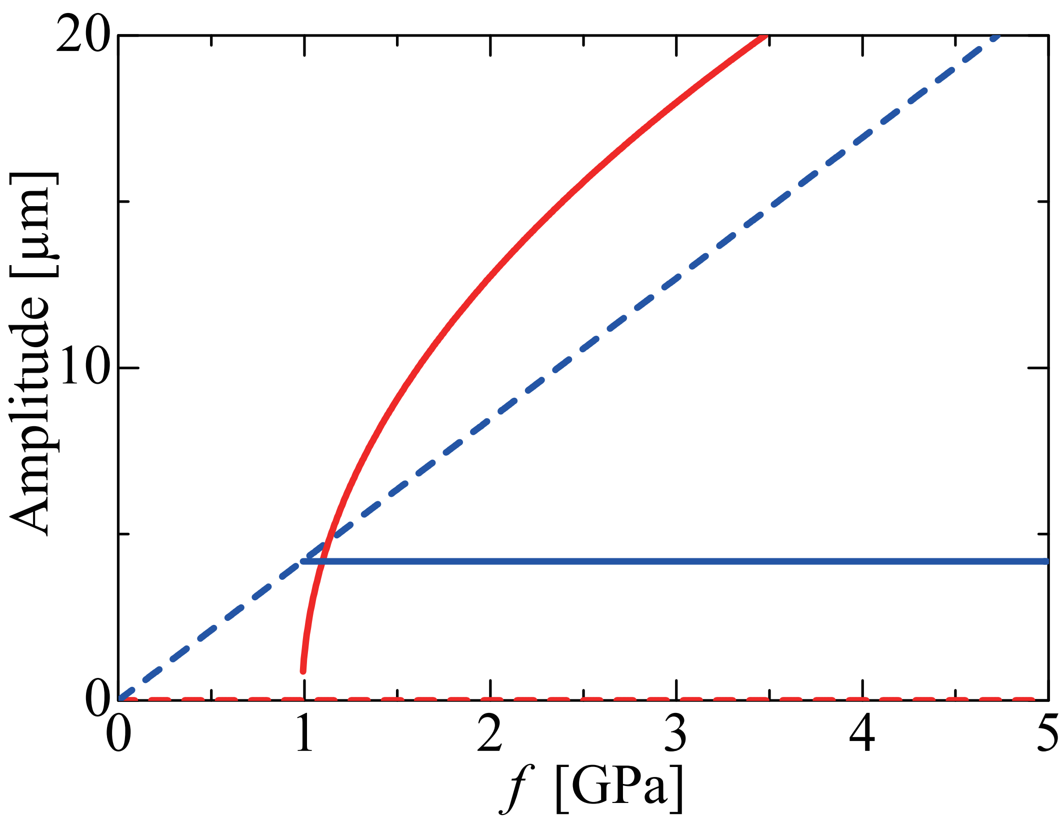

Figure 5.2 Semitrivial solutions and nontrivial solutions depending on excitation amplitude f [GPa] under $\sigma = 0$. The red dash line indicates the semitrivial solutions of the lower mode. The red solid line indicates the nontrivial solutions of the lower mode. The blue dash line indicates the semitrivial solutions of the higher mode. The blue solid line indicates the nontrivial solutions of the higher mode.

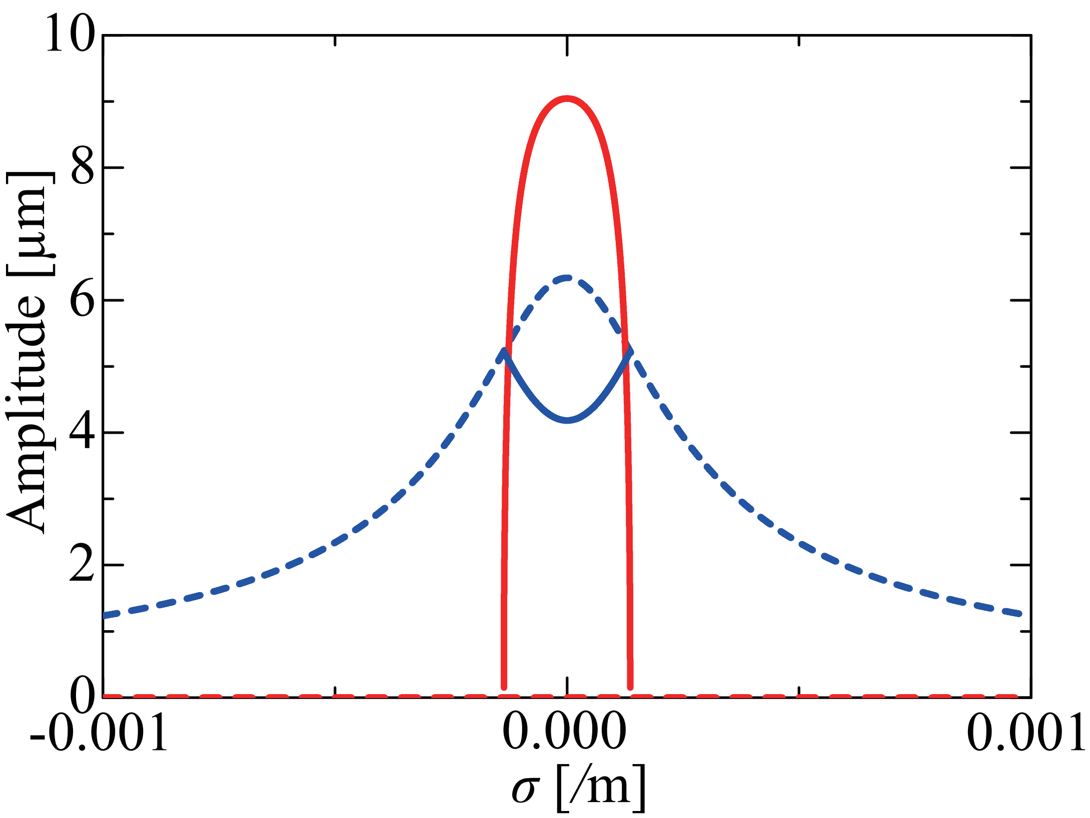

Figure 5.3 Semitrivial solutions and nontrivial solutions depending on wavenumber detuning between excitation and b-mode $\hat{\sigma}$ $[/m]$ under $f = 30$. The red dash line indicates the semitrivial solutions of the lower mode. The red solid line indicates the nontrivial solutions of the lower mode. The blue dash line indicates the semitrivial solutions of the higher mode. The blue solid line indicates the nontrivial solutions of the higher mode.

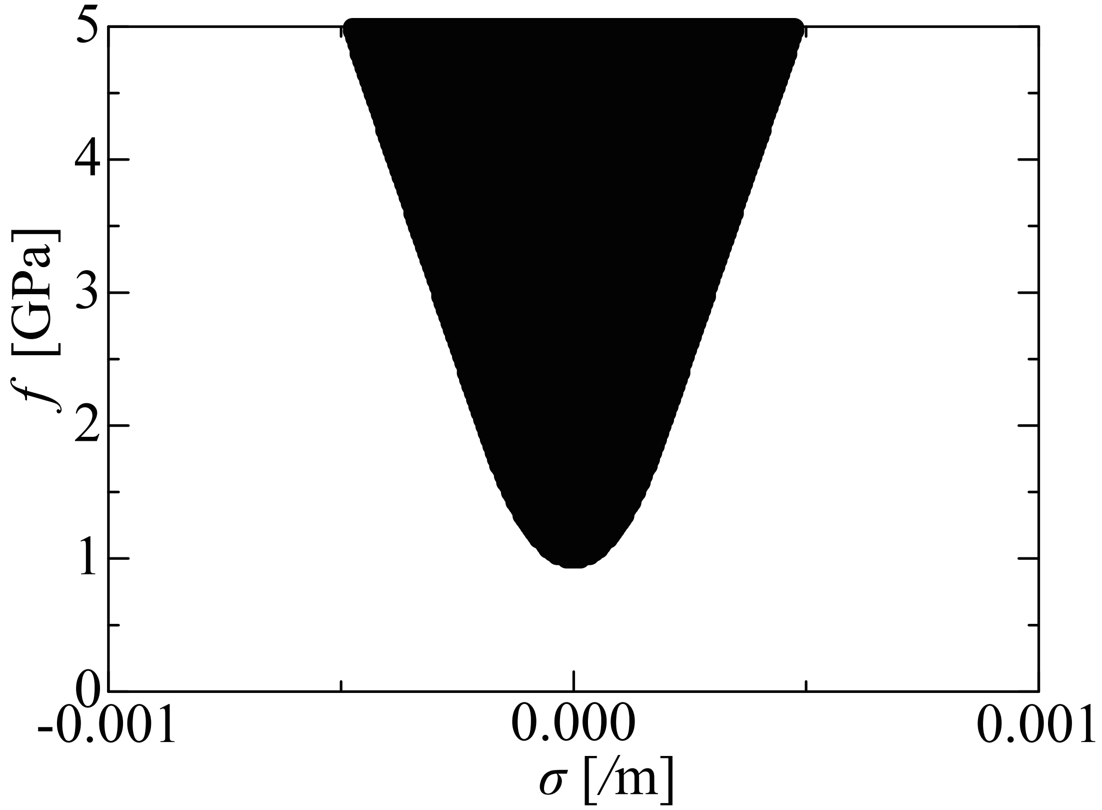

Figure 5.4 Existence region of only one nontrivial solution in $\hat{\sigma} - f$ plane.

5.5 安定性解析

定常振幅解が複数存在しうる条件下においては，どの定常振幅解を取るのかを判断する必要がある．本節では，理論解析的，数値解析的に定常振幅解の安定性を調べる．安定とは，ある定常振幅解に摂動が加わった際に，その定常振幅解に摂動が収束することをいう．

5.5.1 理論解析的手法

理論解析的な安定性解析においては，複素振幅 X_a, X_b を以下のようにデカルト表記する．

$$X_a = \frac{1}{2}(p_a + iq_a)\exp\left(i\frac{\hat{\sigma}-\hat{\rho}}{2}x_1\right) \tag{5.5.1}$$

$$X_b = \frac{1}{2}(p_b + iq_b)\exp\left(i\hat{\sigma}x_1\right) \tag{5.5.2}$$

Eqs. (5.5.1), (5.5.2) を複素振幅方程式 Eqs. (5.3.1), (5.3.2) に代入し，以下の振幅方程式を得る．

$$\frac{dp_a}{dx_1} = \frac{\hat{\sigma}-\hat{\rho}}{2}q_a + \frac{D_a}{C_{a1}}p_a + \frac{C_{a2}}{2C_{a1}}(p_a p_b + q_a q_b) \tag{5.5.3}$$

$$\frac{dq_a}{dx_1} = -\frac{\hat{\sigma}-\hat{\rho}}{2}p_a + \frac{D_a}{C_{a1}}q_a + \frac{C_{a2}}{2C_{a1}}(p_a q_b - q_a p_b) \tag{5.5.4}$$

$$\frac{dp_b}{dx_1} = \hat{\sigma}q_b + \frac{D_b}{C_{b1}}p_b + \frac{C_{b2}}{2C_{b1}}(p_a^2 - q_a^2) + \frac{2\phi_{bx}(h)}{C_{b1}}f \tag{5.5.5}$$

$$\frac{dq_b}{dx_1} = -\hat{\sigma}p_b + \frac{D_b}{C_{b1}}q_b + \frac{C_{b2}}{C_{b1}}p_a q_a \tag{5.5.6}$$

定常振幅 $p_{ast}, q_{ast}, p_{bst}, q_{bst}$ は，Eqs. (5.5.3)-(5.5.6) において，$d/dx_1 = 0$ を満たし，以下の連立代数方程式を満たす．

$$\frac{\hat{\sigma}-\hat{\rho}}{2}q_{ast} + \frac{D_a}{C_{a1}}p_{ast} + \frac{C_{a2}}{2C_{a1}}(p_{ast}p_{bst} + q_{ast}q_{bst}) = 0 \tag{5.5.7}$$

$$-\frac{\hat{\sigma}-\hat{\rho}}{2}p_{ast} + \frac{D_a}{C_{a1}}q_{ast} + \frac{C_{a2}}{2C_{a1}}(p_{ast}q_{bst} - q_{ast}p_{bst}) = 0 \tag{5.5.8}$$

$$\hat{\sigma}q_{bst} + \frac{D_b}{C_{b1}}p_{bst} + \frac{C_{b2}}{2C_{b1}}(p_{ast}^2 - q_{ast}^2) + \frac{2\phi_{bx}(h)}{C_{b1}}f = 0 \tag{5.5.9}$$

$$\hat{\sigma}p_{bst} + \frac{D_b}{C_{b1}}q_{bst} + \frac{C_{b2}}{C_{b1}}p_{ast}q_{ast} = 0 \tag{5.5.10}$$

ここで，Eqs. (5.5.7)-(5.5.10) における $p_{ast}, q_{ast}, p_{bst}, q_{bst}$ は Eqs. (5.4.5)-(5.4.8) における a_{st}, b_{st} に相当し，以下の関係がある．

$$a_{st} = \sqrt{p_{ast}^2 + q_{ast}^2} \tag{5.5.11}$$

$$b_{st} = \sqrt{p_{bst}^2 + q_{bst}^2} \tag{5.5.12}$$

Eqs. (5.5.3)-(5.5.6) の p_a, q_a, p_b, q_b に以下のような定常振幅からの微小摂動を代入する．

$$p_a = p_{ast} + \Delta p_a \tag{5.5.13}$$

$$q_a = q_{ast} + \Delta q_a \tag{5.5.14}$$

$$p_b = p_{bst} + \Delta p_b \tag{5.5.15}$$

$$q_b = q_{bst} + \Delta q_b \tag{5.5.16}$$

$p_{ast}, q_{ast}, p_{bst}, q_{bst}$ は定数なので，微小摂動 $\Delta p_a, \Delta q_a, \Delta p_b, \Delta q_b$ の伝播距離に対する発展方程式が導出できる．微小摂動が伝播距離に対して 0 に収束するとき安定な定常振幅，発散するとき不安定な定常振幅と定義する．定常振幅からの微小摂動の伝播距離に対する発展方程式は，$\Delta p_a, \Delta q_a, \Delta p_b, \Delta q_b$ が微小であるので，高次の項を無視し，以下のような線形微分方程式とみなせる．

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta p_a}{dx_1} \simeq& \left(\frac{D_a}{C_{a1}} + \frac{C_{a2}}{2C_{a1}}p_{bst}\right)\Delta p_a + \left(\frac{\hat{\sigma}-\hat{\rho}}{2} + \frac{C_{a2}}{2C_{a1}}q_{bst}\right)\Delta q_a \\ &+ \frac{C_{a2}}{2C_{a1}}p_{ast}\Delta p_b + \frac{C_{a2}}{2C_{a1}}q_{ast}\Delta q_b\end{aligned} \tag{5.5.17}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta q_a}{dx_1} \simeq& \left(-\frac{\hat{\sigma}-\hat{\rho}}{2} + \frac{C_{a2}}{2C_{a1}}q_{bst}\right)\Delta p_a + \left(\frac{D_a}{C_{a1}} - \frac{C_{a2}}{2C_{a1}}p_{bst}\right)\Delta q_a \\ &- \frac{C_{a2}}{2C_{a1}}q_{ast}\Delta p_b + \frac{C_{a2}}{2C_{a1}}p_{ast}\Delta q_b\end{aligned} \tag{5.5.18}$$

$$\frac{d\Delta p_b}{dx_1} \simeq \frac{C_{b3}}{C_{b1}}p_{ast}\Delta p_a - \frac{C_{b3}}{C_{b1}}q_{ast}\Delta q_a + \frac{D_b}{C_{b1}}\Delta p_b + \hat{\sigma}\Delta q_b \tag{5.5.19}$$

$$\frac{d\Delta q_b}{dx_1} \simeq \frac{C_{b3}}{C_{b1}}q_{ast}\Delta p_a + \frac{C_{b3}}{C_{b1}}p_{ast}\Delta q_a - \hat{\sigma}\Delta p_b + \frac{D_b}{C_{b1}}\Delta q_b \tag{5.5.20}$$

Eqs. (5.5.17)-(5.5.20) を行列表記すると，

$$\frac{d}{dx_1}\boldsymbol{\Delta} \simeq \begin{bmatrix} \dfrac{D_a}{C_{a1}} + \dfrac{C_{a2}}{2C_{a1}}p_{bst} & \dfrac{\hat{\sigma}-\hat{\rho}}{2} + \dfrac{C_{a2}}{2C_{a1}}q_{bst} & \dfrac{C_{a2}}{2C_{a1}}p_{ast} & \dfrac{C_{a2}}{2C_{a1}}q_{ast} \\ -\dfrac{\hat{\sigma}-\hat{\rho}}{2} + \dfrac{C_{a2}}{2C_{a1}}q_{bst} & \dfrac{D_a}{C_{a1}} - \dfrac{C_{a2}}{2C_{a1}}p_{bst} & -\dfrac{C_{a2}}{2C_{a1}}q_{ast} & \dfrac{C_{a2}}{2C_{a1}}p_{ast} \\ \dfrac{C_{b3}}{C_{b1}}p_{ast} & -\dfrac{C_{b3}}{C_{b1}}q_{ast} & \dfrac{D_b}{C_{b1}} & \hat{\sigma} \\ \dfrac{C_{b3}}{C_{b1}}q_{ast} & \frac{C_{b3}}{C_{b1}}p_{ast} & -\hat{\sigma} & \dfrac{D_b}{C_{b1}} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{A_m}\boldsymbol{\Delta} \tag{5.5.21}$$

となり，$\boldsymbol{\Delta} = [\Delta p_a \quad \Delta q_a \quad \Delta p_b \quad \Delta q_b]^T$ である．Eq. (5.5.21) は状態方程式と呼ばれ，行列 $\boldsymbol{A_m}$ は作用素と呼ばれる．Eqs. (5.5.7)-(5.5.10) を満たす $p_{ast}, q_{ast}, p_{bst}, q_{bst}$ の値を代入し，作用素 $\boldsymbol{A_m}$ の固有値の符号から安定性判別を行う．ラウスの安定判別法を適用すると，作用素 $\boldsymbol{A_m}$ の固有値の実部の符号が全て負のとき，安定であり，1 つでも実部正の固有値が存在するとき，不安定である．Figs. 5.5, 5.6 に理論解析的安定性判別により得られた安定な定常振幅解を示す．Figs. 5.5, 5.6 と理論解析により得られた準自明解，非自明解を示す Figs. 5.2, 5.3 を比較すると定常振幅解は，準自明解のみが存在する領域では準自明解が安定であり，準自明解と非自明解の両者が存在する領域では，準自明解が不安定となり，非自明解が安定になることが確認できる．よって，本現象は 1.2.4 節で示したオートパラメトリック励振的現象とみなせる．したがって，Fig. 5.4 に示す非自明解が存在する f と $\hat{\sigma}$ の条件を満たす領域において，安定に a-mode は励起させる．

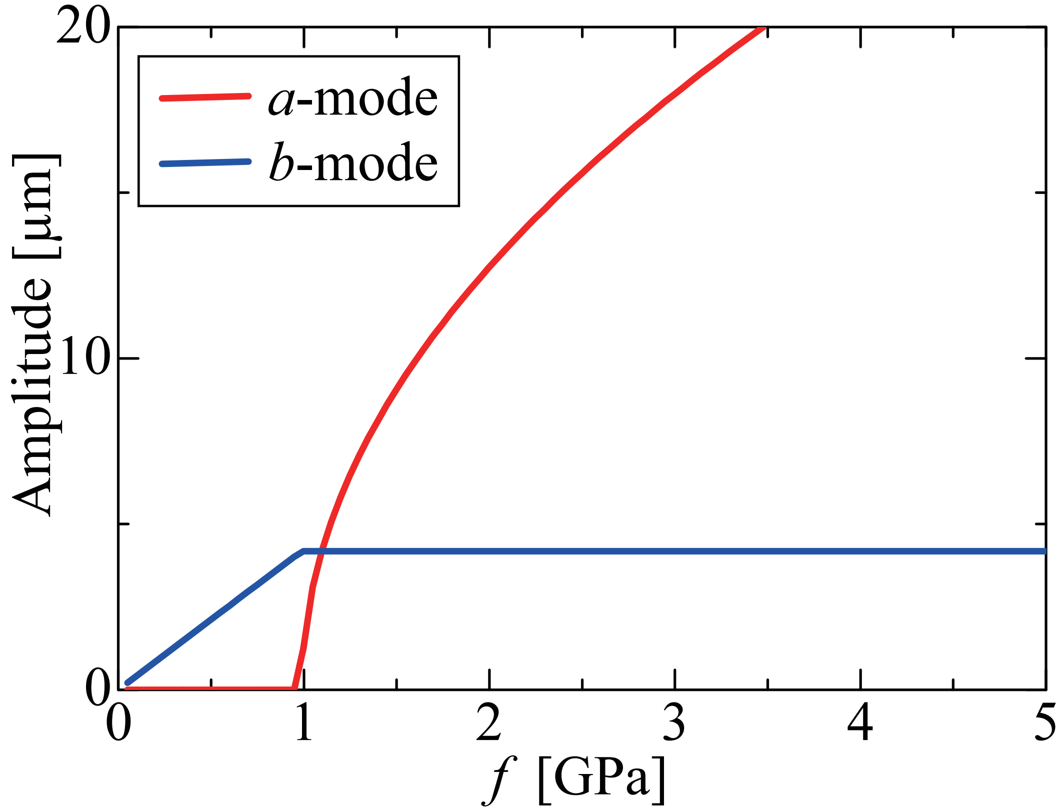

Figure 5.5 Stable steady amplitudes depending on excitation amplitude f [GPa] under $\hat{\sigma} = 0$ obtained by the analytical method.

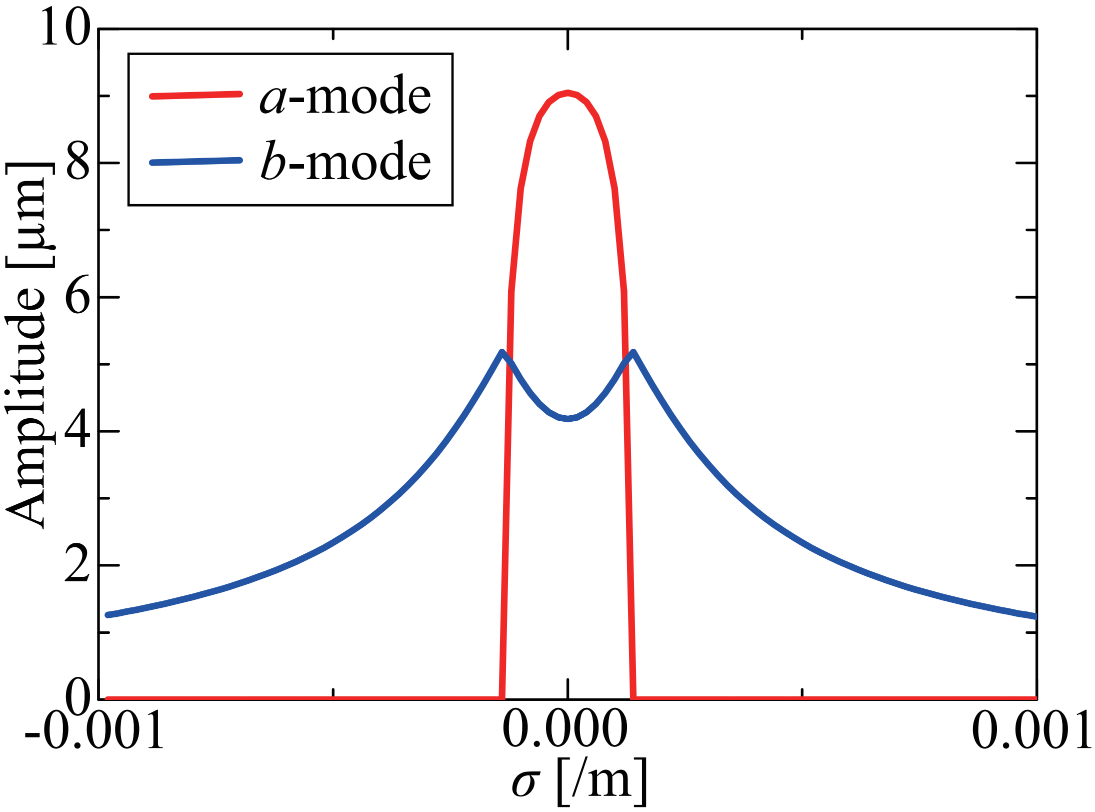

Figure 5.6 Stable steady amplitudes depending on wavenumber detuning $\hat{\sigma}$ [/m] under $f = 30$ obtained by the analytical method.

5.5.2 数値解析的手法

5.5.1 節では，定常振幅解まわりの微小摂動 $\mathbf{\Delta}$ を考え，微小摂動$\mathbf{\Delta}$ の伝播距離に対する発展方程式から，定常振幅解の安定性を議論した．

本節では，Eqs. (5.5.3)-(5.5.6) を 4 次のルンゲクッタ法を用いて伝播距離に対して数値的に解き，加振振幅 f と離調パラメータ $\hat{\sigma}$ に対して，定常な振幅とみなせる収束した振幅値を安定な定常振幅解とし，そのときの a_{st}, b_{st} をプロットする．

まず，Figs. 5.7, 5.8 に 4 次のルンゲクッタ法で解いた伝播距離に対する a-mode(分調波モード) と b-mode(基本波モード) の振幅変化の例を示す．ここで，Fig. 5.7 の初期条件は，有次元で $a(0)$=0 μm, $b(0)$=5 μm，f=0.5 GPa であり，Fig. 5.8 の初期条件は，有次元で $a(0)$=0 μm, $b(0)$=5 μm，f=1.5 GPa である．Figs. 5.7, 5.8 より，加振振幅の変化により伝播距離に対する a-mode と b-mode の定常振幅が定性的に大きく変化することが分かる．

また，Figs. 5.9, 5.10 に数値的に得られた安定な定常振幅値を示す．Figs. 5.9, 5.10 を理論解析的手法で得られた準自明解，非自明解を示す Figs. 5.2, 5.3 と比較し，準自明解のみが存在する領域では準自明解が安定な振幅解であり，非自明解が存在する領域では，準自明解が不安定となり，非自明解が安定な定常振幅解となることが確認できる．これは理論解析に安定性解析を行った結果 Figs. 5.5, 5.6 と一致する．したがって，5.5.1 節で得た結果は妥当である．

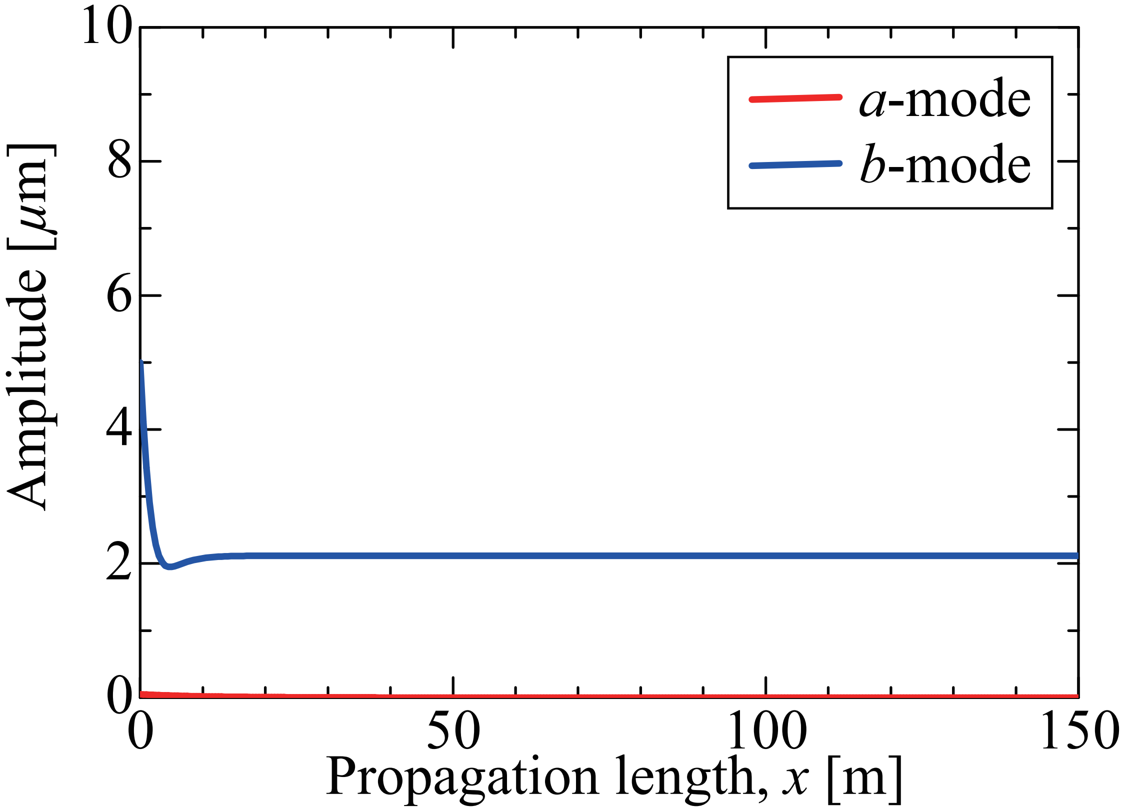

Figure 5.7 Transient amplitudes depending on propagation length under f=0.5 GPa obtained by the numerical method.

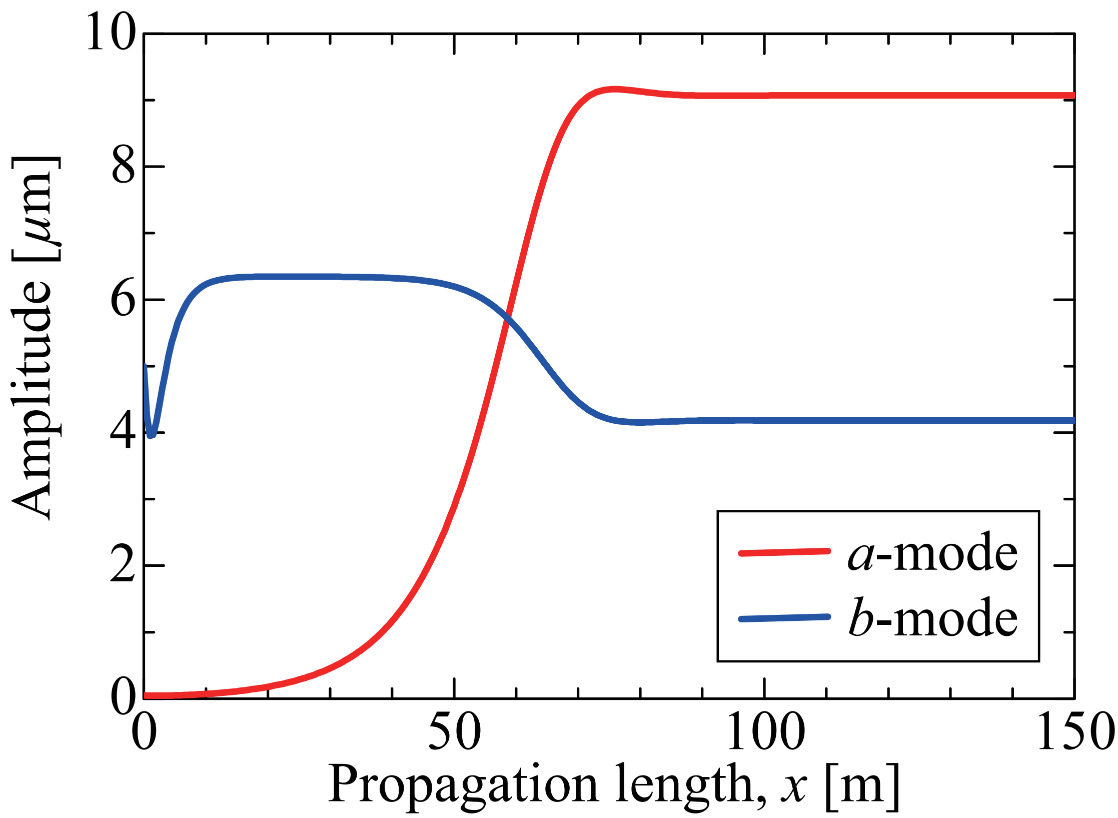

Figure 5.8 Transient amplitudes depending on propagation length under f=1.5 GPa obtained by the numerical method.

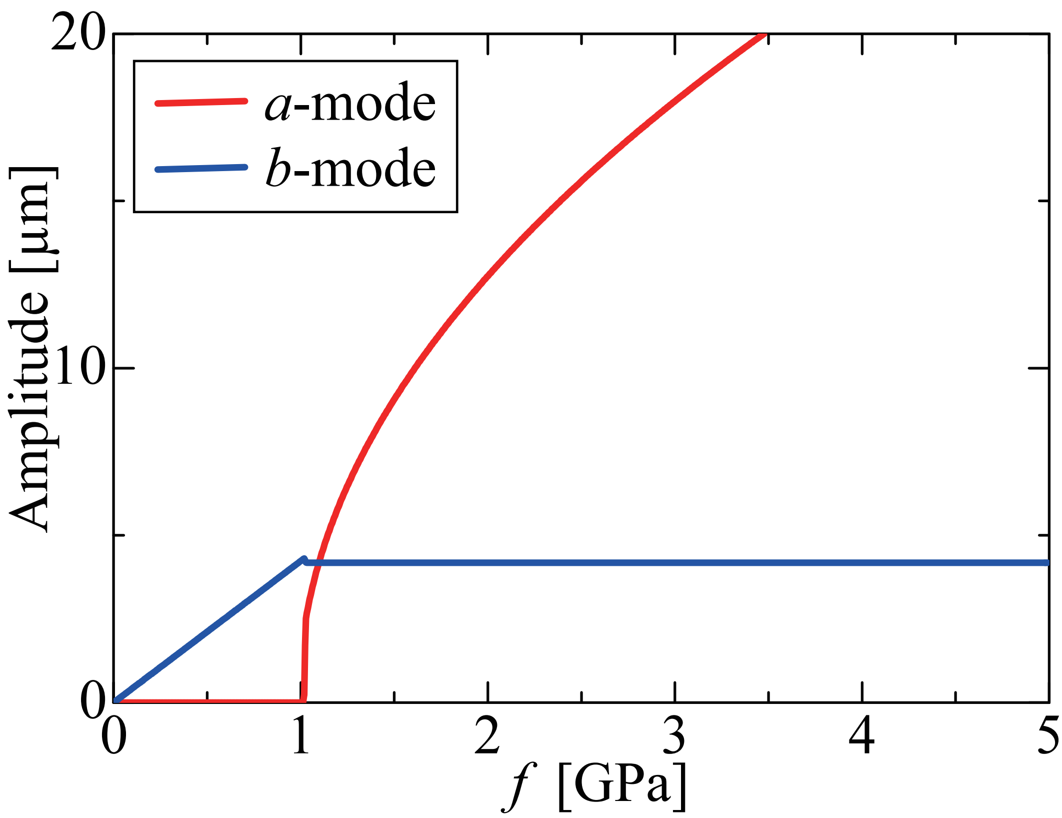

Figure 5.9　Stable steady amplitudes depending on excitation amplitude f [GPa] under $\hat{\sigma} = 0$ obtained by the numerical method.

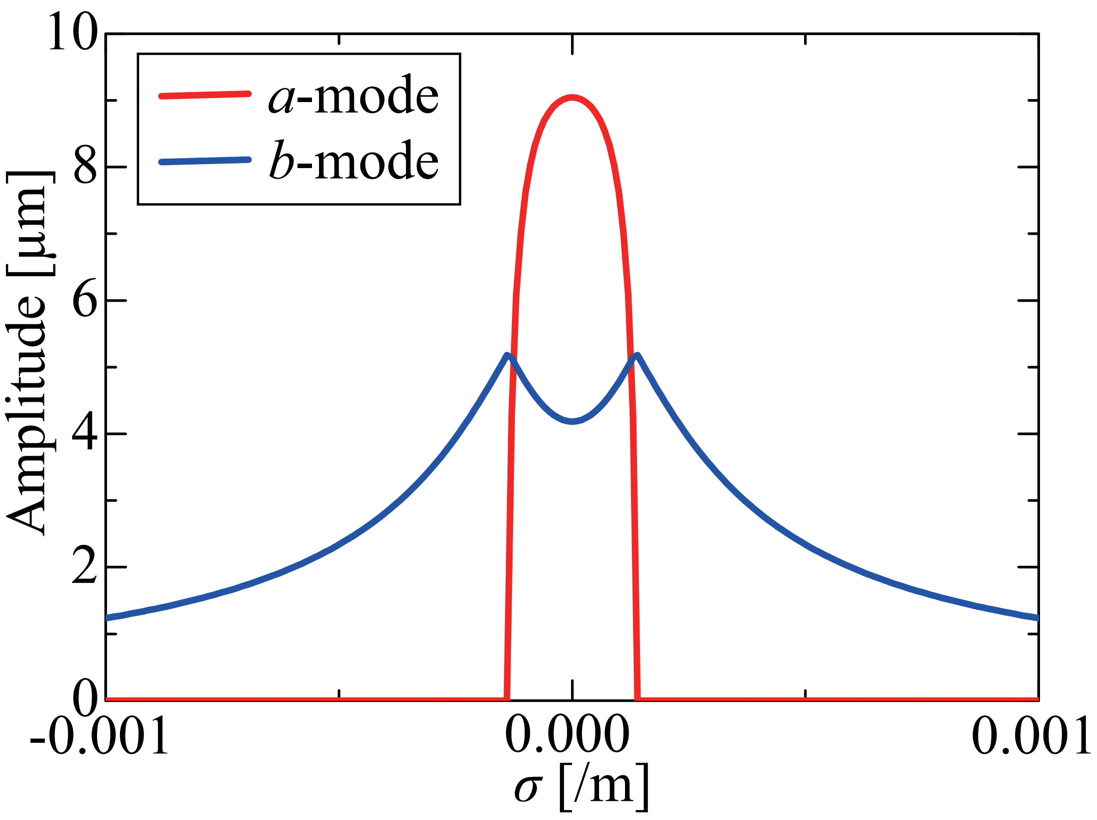

Figure 5.10 Stable steady amplitudes depending on wavenumber detuning $\hat{\sigma}$ [-] under $f = 30$ obtained by the numerical method.

5.6 非線形材料定数の変化に対する定常振幅の変化

本節では，非線形材料定数の変化に対応する定常振幅解を Eqs. (5.4.5)-(5.4.8) を用いて理論解析的に求める．具体的には，Tab. 4.1 に示す非線形材料定数 (A, B, C) を 2 倍，3 倍とし，それぞれの非線形材料定数における加振振幅 f に対する定常振幅を Figs. 5.11, 5.12 に示す．

Figs. 5.2, 5.11, 5.12 より，ある加振振幅 f に対する分調波モード (a-mode) の定常振幅は非線形材料定数の変化に対して単調な変化をしておらず，非破壊検査に用いる有意な情報でないと考えられる．しかし，加振振幅 f に対する定常振幅解のグラフ Fig. 5.2 と Figs. 5.11, 5.12 より，非自明解が生じる閾値 f が非線形材料定数が大きくなるほど，単調に小さくなることが確認でき，非破壊検査において有意な情報の可能性がある．そこで，非線形材料定数の変化に対する非自明解が生じる閾値 f を Fig. 5.13 に示す．

4.7 節の Figs. 4.19, 4.20 で示した高調波の振幅の最大値の変化より Fig. 5.13 で測定する加振振幅 f の閾値の変化は緩やかであるが，伝播距離に対して定常な振幅を測定するため，伝播距離に対して走査する必要がない．また，非線形材料定数の微小変化を測定するため，Fig. 5.13 における 100% 付近での微小な閾値の変化に注目することになり，感度は比較的良いと考えられる．さらに，定常振幅に落ち着くのに十分な伝播距離でない領域での測定においても，分調波の周波数成分の有無から，閾値 f の測定は可能である．分調波は非線形共振現象のみより生じるため，定常振幅に至らない伝播距離であっても有意な情報として用いることが可能である．非破壊検査を実施する際に，加振波数 (離調パラメータ) を調節するのは困難であるが，加振振幅 f を走査させるのは比較的容易である．したがって，加振振幅 f を走査し，分調波の発生する閾値を測定し，非線形材料定数を見積もる手法は有効であると考えられる．

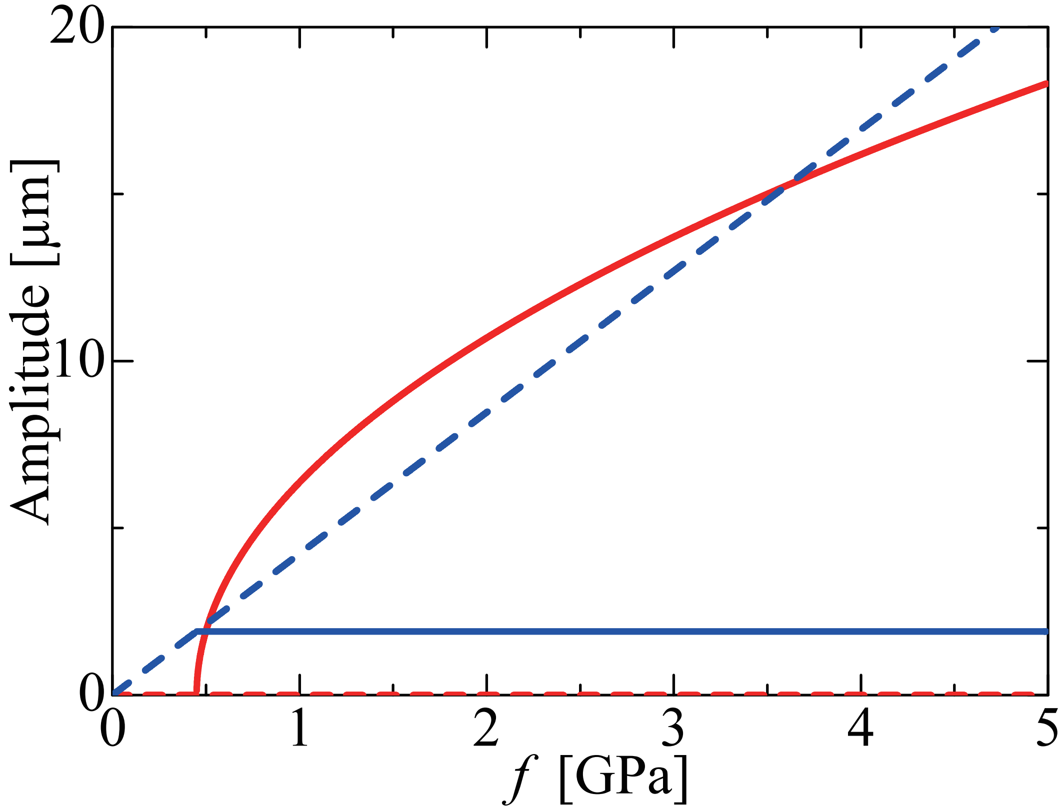

Figure 5.11 Semitrivial solutions and nontrivial solutions depending on excitation amplitude f [GPa] under $\sigma = 0$ and doubled nonlinearities A=-700 [GPa], B=-316[GPa], C=-200 [GPa]. The red dash line indicates the semitrivial solutions of the lower mode. The red solid line indicates the nontrivial solutions of the lower mode. The blue dash line indicates the semitrivial solutions of the higher mode. The blue solid line indicates the nontrivial solutions of the higher mode.

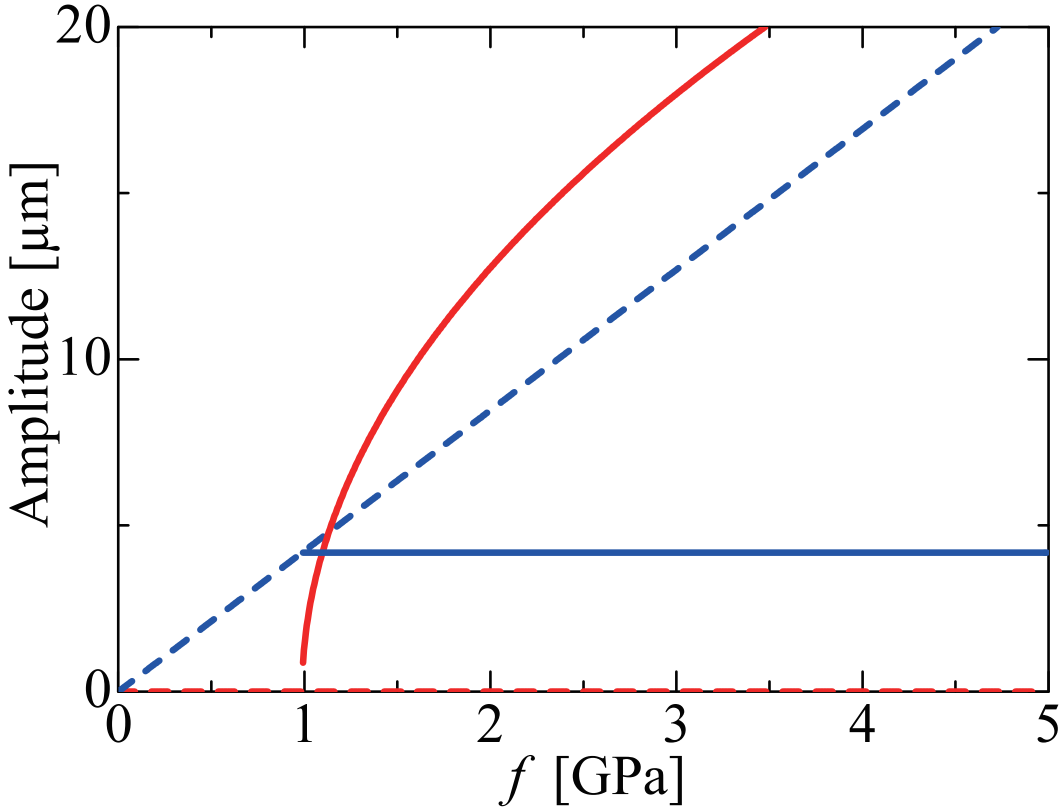

Figure 5.12 Semitrivial solutions and nontrivial solutions depending on excitation amplitude f [GPa] under $\sigma = 0$ and trebled nonlinearities A=-1050 [GPa], B=-474 [GPa], C=-300 [GPa]. The red dash line indicates the semitrivial solutions of the lower mode. The red solid line indicates the nontrivial solutions of the lower mode. The blue dash line indicates the semitrivial solutions of the higher mode. The blue solid line indicates the nontrivial solutions of the higher mode.

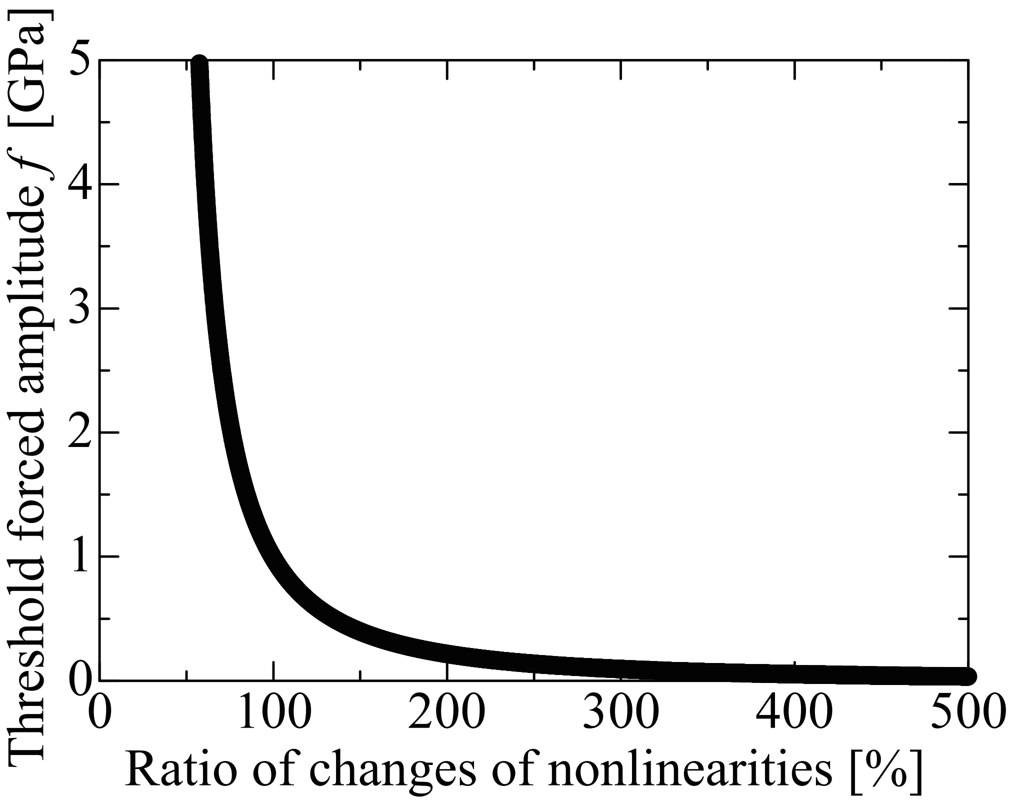

Figure 5.13　Threshold excitation amplitude f [GPa] of generated nontrivial solutions under $\sigma = 0$.

5.7 結論

本章では，十分な伝播距離に対し定常振幅が生じるオートパラメトリック励振的ガイド波を発生させるモデルを考案した．伝播モードの直交性と多重尺度法を用いて，オートパラメトリック励振的ガイド波の解析を行い，以下の結論を得た．

(1) 平板の境界上部のみを長手方向に波動的な加振を与えることでオートパラメトリック励振的現象が発生することを示した．

(2) 伝播モードの直交性と多重尺度法を用いて，非線形連成によるオートパラメトリック励振的ガイド波の定常振幅が安定に発生することを確認した．

(3) オートパラメトリック励振的ガイド波の定常振幅の大きさは，加振波数，加振振幅に依存し，オートパラメトリック励振現象による非自明解の発生領域は加振波数，加振振幅に閾値が存在することを明らかにした．

(4) 発生した定常振幅解の安定性を理論解析的，数値解析的に明らかにし，非自明解が生じうる加振波数，加振振幅の領域では，オートパラメトリック励振的現象により，非自明解が安定的に発生し，加振波数，加振周波数とは異なる加振の 2 分の 1 倍の波数，周波数を有し，伝播距離に対して定常振幅を有する波動の発生に至るを示した．

(5) 非自明解が生じる加振振幅の閾値を用いて非線形材料定数の変化を測定する手法を提案した．

以上より，本章で提案したオートパラメトリック励振的ガイド波は、非線形材料定数の測定において，4 章の内部共振的ガイド波の問題点を解消した改善手法であると言える．

第 6 章

結言

累積的高調波を含む非線形ガイド波を用いて，ガイド波の特徴である長距離伝播性を生かした非破壊検査を行うには，長い伝播領域での動力学を理解する必要がある．本研究では，長い伝播領域における減衰の効果を考慮した非線形ガイド波の動力学的伝播挙動を明らかにした．さらに，非線形ガイド波を非破壊検査に用いる際に生じる問題点を指摘し，その解決策を提案した．

具体的には，伝播モードの直交性を用いて伝播モード間の非線形連成の効果を示し，多重尺度法を用いて長い伝播領域における減衰の効果と非線形連成の効果を含めた伝播挙動を非線形動力学的に明らかにした．以下に得られた結果を要約する．

6.1　結果の要約

第 2 章では，ガイド波の分散特性と波数領域での伝播モード直交性を解析的に示した．伝播モードの直交性は運動方程式と境界条件を用いて導出され，伝播モードごとのガイド波の動力学特性を明らかにするものである．また，支配方程式を線形微分作用素を用いて表し，微分作用素の自己随伴性を示した．この自己随伴性を用いて，非同次微分方程式であるガイド波の強制振動的問題における可解条件を導出した．

第 3 章では，長い伝播領域におけるガイド波の減衰の効果を明らかにした．具体的には，構造減衰を導入し，多重尺度法を用いて粘性減衰の効果による振幅の伝播距離依存性を示し，伝播モードの直交性を用いて，各伝播モードの減衰係数を導出した．その結果，減衰係数は伝播モードと周波数に依存することを示した．本手法は従来法と異なり，特定の伝播モードの減衰係数を理論解析的に容易に算出できる利点を有する．

さらに，半解析的有限要素法を用いて，伝播モードの直交性と多重尺度法を用いた手法の妥当性を示した．

第 4 章では，累積的高調波と呼ばれる内部共振的ガイド波の長い伝播領域における伝播挙動の動力学を明らかにした．具体的には，伝播モードの直交性と多重尺度法を用いて，基本波モード，高

調波モードの振幅の伝播距離依存性を振幅方程式として導出した．得られた振幅方程式から減衰の効果と非線形連成の効果を表す項を動力学的に示し，それぞれの項の効果を振幅方程式を解くことで明らかにした．

さらに，非線形材料定数を測定する従来の手法を理論解析的に検証し，問題点を指摘し，改善方法を提案した．具体的には，伝播距離に対して線形に成長するとされていた内部共振現象による高調波振幅は，伝播距離に対して，離調パラメータに依存した複雑な変化をしうること示した．したがって，高調波振幅の変化率ではなく，高調波振幅の伝播距離に対する最大値を用いた非破壊検査手法を提案した．また，内部共振的ガイド波を用いた非破壊検査では，伝播方向に複数の探触子を設置する必要があることを示した．しかし，提案手法の測定精度は設置する探触子間距離に大きく依存する．

第 5 章では，第 4 章で示した内部共振的ガイド波を用いた非破壊検査手法の問題点を抜本的に解決するためにオートパラメトリック励振現象の応用を提案した．具体的には，伝播方向に波動的な加振を与え，伝播距離に対して定常な振幅を有する分調波モードの励振情報から非線形材料定数の測定を行う手法を提案した．本手法は，伝播距離に対して定常な振幅情報を用いることでガイド波の長距離伝播性を生かし，分調波を用いることで高調波利用とは異なり，装置由来の高調波成分との分離を可能にした．

まず，ガイド波において，オートパラメトリック励振的現象が生じる領域の存在を伝播モード直交性と多重尺度法を用いて示し，分調波が励振される条件として，加振と基本波の波数のずれおよび加振振幅に閾値があることを示した．

さらに，オートパラメトリック励振的ガイド波が生じる加振振幅の閾値を用いる非破壊検査手法が，第 4 章で示した問題点を解決することを示した．

6.2 総括

非線形ガイド波を用いた非破壊検査手法は高効率な検査かつ高精度な検査を両立できるとして注目されており，動力学的な伝播挙動の解明が不可欠である．本研究では，ガイド波の伝播モードの直交性を解析的に示し，各伝播モードに注目した動力学の解析を可能した．さらに，ガイド波の特徴である長距離伝播性を生かした領域での検査を視野に入れ，長い伝播領域での動力学を明らかにするために多重尺度法の適用を提案した．

本研究により，累積的高調波と呼ばれる内部共振的ガイド波の動力学的な伝播挙動が明らかになり，非線形ガイド波の非破壊検査応用に大きく寄与しうる成果を得た．さらに，オートパラメトリック励振的ガイド波の励振領域の存在を示し，より良い非線形ガイド波の非破壊検査手法を提案した．

提案手法は，長い伝播領域で適用可能であり，設置探触子間距離に測定精度は大きく依存せず，装置由来の高調波成分を容易に分離可能な手法である．

6.3 展望

6.3.1 検査対象

本研究では，金属材料の中で比較的大振幅の入力が容易なアルミニウムを解析対象としたが，無次元方程式上で減衰の効果を表す項と非線形項の大きさが同程度であり，減衰の効果を無視した弾性体の運動方程式における線形項と比較し微小である材料であれば，同様の解析が可能である．また，第 2 章で示した伝播モードの直交性は境界条件を介して直交する随伴関数を求めることで適用可能となる．そのため，以下に示すような対象にも拡張可能であると考えられる．
・Lamb 波ではないガイド波 (SH 波，円柱ガイド波等)
・(非線形境界条件を含む) 応力フリーではない境界条件
・異方性を有する材料
・積層構造を有する材料

6.3.2 ガイド波法

従来のガイド波法では，特定の伝播モードを励起させるために，その伝播モードが発生しうる周波数帯で，その固有関数に近い加振力分布を有する入力を行う試行錯誤的な手法が取られている．第 2 章で示した伝播モードの直交性を用いれば，以下に示す検査・評価を行う際の解析が可能になったと考えられる．
・特定の初期条件により発生する各伝播モードの振幅の理論解析
・特定の伝播モードを発生させるための，適切な加振周波数，加振方向の解析
・欠陥による境界条件の変化や材料定数の変化によって生じる透過波，反射波のモード変換を考慮した理論解析

6.3.3 非線形ガイド波法

本研究では，2 次の非線形性まで考慮した非線形ガイド波について解析を行ったが，先行研究では，3 次の非線形性による内部共振的現象により生じる累積的な 3 次高調波のみについて，固有関数の偶奇性を用いて解析が報告されている [49], [50]．しかし，3 次の非線形性は 2 次高調波の振幅方程式にも影響を及ぼす．例として，基本波モード (a-mode) と 2 次の高調波モード (b-mode) において，$X_a\bar{X}_aX_b$ を含む項は b-mode の永年項を生じさせる項として振る舞う．したがって，より高次の非線形性が強く作用する系においては，高次の非線形性を考慮した非線形ガイド波の解析を行う必要があると考えられる．

また，第 5 章に示した通り，非線形ガイド波法を用いて，伝播距離に対して定常な振幅情報を非

破壊検査・評価に利用する場合，伝播方向に複数の探触子を要する．そこで，複数の探触子を用いることで，より高効率・高精度な検査手法が存在しうる．

6.3.4 装置構築における留意点

第 4 章に示した通り，従来の理論解析から予測される内部共振的ガイド波を用いた非線形材料の測定法は，非常に短い伝播領域でしか定量的な検査を実行することはできない．

また，伝播モードの直交性と多重尺度法を用いた理論解析により得られた結果から，第 4 章で提案した内部共振的ガイド波を用いた非線形材料の測定法においても測定精度は設置する探触子間距離に大きく依存する．

したがって，第 5 章で提案したオートパラメトリック励振的ガイド波を用いた非線形材料の測定法は有効であると考えられる．しかし，第 5 章に示した通り，分調波モードが励起されるには加振振幅，加振波数の閾値が存在する．つまり，伝播方向に設置する複数の探触子が励起する波動の波数を，基本波の波数に非常に近く設定した上で，加振振幅を十分大きく与える必要がある．

第 5 章で示したオートパラメトリック励振的ガイド波は，大域的な非線形材料定数の変化に対して適切に用いることが可能である一方で，局所的な変化を捉えることは難しい．しかし，定常状態となった非線形ガイド波が，局所的な非線形材料定数の変化が生じた部位を通過する場合，定常振幅が変化し，その変化を捉えることができれば局所的な変化を測定できる可能性はある．

謝辞

本論文は筆者が減衰ガイド波や非線形ガイド波の理論解析に関して，慶應義塾大学院理工学研究科総合デザイン工学専攻後期博士課程在学中に杉浦壽彦教授の御指導の下で行ったものです．杉浦壽彦教授には研究に留まらないご指導を長きにわたりお教えいただきました．心より感謝を申し上げます．

また，本研究を遂行するに当たり多くの方々に御助力を頂きました．

本論文を作成するにあたり，有益なご討論とご助言を頂きました，東京工業大学環境・社会理工学院土木・環境工学系廣瀬壮一教授，筑波大学大学院システム情報工学研究科知能機能システム専攻藪野浩司教授，慶應義塾大学院総合デザイン工学専攻マルチディシプリナリ・デザイン科学専修澤田達男教授に深く感謝申し上げます．

同研究室非破壊検査班の小野寺信吾氏，喜多村健司氏には多くの助力を頂きました．また，同研究室 OB の杉田直広氏，佐々木暢彦氏とは日頃から活発に議論をさせて頂きました．杉浦研究室の皆様のおかげで，非常に有意義な研究生活を送ることができました．

この場で皆様へ感謝の意と御礼を申し上げたく謝辞に代えさせて頂きます．

2018 年　2 月　　日

参考文献

[1] Lowe, M. J. S., Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, Vol. 42, No. 4 (1995), pp. 525-542.

[2] Baskaran, G., Balasubramaniam, K. and Rao, C. L., Shear-wave time of flight diffraction (S-TOFD) technique, NDT & E International, Vol. 39, No. 6 (2006), pp. 458-467.

[3] Kato, Y., Tanaka, H. and Sugiura, T., Detection of low-frequency components in ultrasonic waves transmitted through contact solids, Ultrasonics Symposium (IUS), 2015 IEEE International (2015), pp. 1-4.

[4] Rose, J. L., Ultrasonic guided waves in solid media (2014), Cambridge University Press, pp. 76-106, 135-154, 378-401.

[5] Solodov, I. Y., Ultrasonics of non-linear contacts: propagation, reflection and NDE-applications, Ultrasonics, Vol. 36, No. 1-5 (1998), pp. 383-390.

[6] Solodov, I. Y., Krohn, N. and Busse, G., CAN: an example of nonclassical acoustic nonlinearity in solids, Ultrasonics, Vol. 40, No. 1 (2002), pp. 621-625.

[7] Ohara, Y., Mihara, T., Sasaki, R., Ogata, T., Yamamoto, S., Kishimoto, Y. and Yamanaka, K.,Imaging of closed cracks using nonlinear response of elastic waves at subharmonic frequency, Applied Physics Letters, Vol. 90, No. 1, 011902 (2007), (3 pages) .

[8] Kim, J-Y., Jacobs, L. J., Qu, J. and Littles, J. W., Experimental characterization of fatigue damage in a nickel-base superalloy using nonlinear ultrasonic waves, The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 120, No. 3 (2006), pp. 1266-1273.

[9] Herrmann, J., Kim, J-Y., Jacobs, L. J., Qu, J., Littles, J. W. and Savage, M. F., Assessment of material damage in a nickel-base superalloy using nonlinear Rayleigh surface waves, Journal of Applied Physics, Vol. 199, No. 12, 124913 (2006), (8 pages).

[10] Bender, F. A., Kim, J-Y., Jacobs, L. J., Qu, J., Littles, J. W. and Savage, M. F., The generation of second harmonic waves in an isotropic solid with quadratic nonlinearity under the presence of a stress-free boundary, Wave Motion, Vol. 50, No. 2 (2013), pp. 146-161.

[11] Biwa, S., Nakajima, S. and Ohno, N., On the acoustic nonlinearity of solid-solid contact with pressure-dependent interface stiffness, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers Journal of Applied Mechanics, Vol. 71, No. 4 (2004), pp. 508-515.

[12] Plagianakos, T. S. and Saravanos, D. A., Higher-order layerwise laminate theory for the prediction of interlaminar shear stresses in thick composite and sandwich composite plates, Composite Structures, Vol. 87, No. 1 (2009), pp. 23-35.

[13] Ishii, Y. and Biwa, S., Ultrasonic evaluation of interlayer interfacial stiffness of multilayered structures, Journal of Applied Physics, Vol. 111, No. 8, 084907 (2012), (9 pages).

[14] Ishii, Y. and Biwa, S., Evaluation of interlayer interfacial stiffness and layer wave velocity of multilayered structures by ultrasonic spectroscopy, The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 136, No. 1 (2014), pp. 183-191.

[15] Biwa, S. and Ishii, Y., Second-harmonic generation in an infinite layered structure with nonlinear spring-type interfaces, Wave Motion, Vol. 63 (2016), pp. 55-67.

[16] Soleimanpour, R. and Ng, C-T., Locating delaminations in laminated composite beams using nonlinear guided waves, Engineering Structures, Vol. 131 (2017), pp. 207-219.

[17] Shan, S., Cheng, L. and Li, P., Adhesive nonlinearity in Lamb-wave-based structural health monitoring systems, Smart Materials and Structures, Vol. 26, No. 2, 025019 (2016), (17 pages).

[18] Bermes, C., Kim, J-Y., Qu, J. and Jacobs, L. J., Nonlinear Lamb waves for the detection of material nonlinearity, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 22, No. 3 (2008), pp. 638-646.

[19] Pruell, C., Kim, J-Y., Qu, J. and Jacobs, L. J., Evaluation of fatigue damage using nonlinear guided waves, Smart Materials and Structures, Vol. 18, No. 3, 035003 (2009), (7 pages).

[20] Müller, M. F., Kim, J-Y., Qu, J. and Jacobs, L. J., Characteristics of second harmonic generation of Lamb waves in nonlinear elastic plates, The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 127, No. 4 (2010), pp. 2141-2152.

[21] Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., Nonlinear oscillations (2008), John Wiley & Sons, pp. 26-30, 379-387, 402-417.

[22] de Lima, W. J. N. and Hamilton, M. F., Finite-amplitude waves in isotropic elastic plates, Journal of Sound and Vibration, Vol. 265, No. 4 (2003), pp. 819-839.

[23] Deng, M., Analysis of second-harmonic generation of Lamb modes using a modal analysis approach, Journal of Applied Physics, Vol. 94, No. 6 (2003), pp. 4152-4159.

[24] Deng, M., Wang, P. and Lv, X., Experimental verification of cumulative growth effect of second harmonics of Lamb wave propagation in an elastic plate, Applied Physics Letters, Vol. 86, No. 12, 124104 (2005), (3 pages).

[25] Deng, M., Wang, P. and Lv, X., Experimental observation of cumulative second-harmonic

generation of Lamb-wave propagation in an elastic plate, Journal of Physics D: Applied Physics, Vol. 38, No. 2 (2005), pp. 344-353.

[26] Srivastava, A. and di Scalea, F. L., On the existence of antisymmetric or symmetric Lamb waves at nonlinear higher harmonics, Journal of Sound and Vibration, Vol. 323, No. 3 (2009), pp. 932-943.

[27] Deng, M., Xiang, Y. and Liu, L., Time-domain analysis and experimental examination of cumulative second-harmonic generation by primary Lamb wave propagation, Journal of Applied Physics, Vol. 109, No. 11, 113525 (2011), (12 pages).

[28] Liu, Y., Chillara, V. K. and Lissenden, C. J., On selection of primary modes for generation of strong internally resonant second harmonics in plate, Journal of Sound and Vibration, Vol. 332, No. 19 (2013), pp. 4517-4528.

[29] Li, J. and Rose, J. L., Excitation and propagation of non-axisymmetric guided waves in a hollow cylinder, The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 109, No. 2 (2001), pp. 457-464.

[30] Hayashi, T., Kawashima, K. and Rose, J. L., Calculation for guided waves in pipes and rails, Key Engineering Materials, Vol. 270 (2004), pp. 410-415.

[31] Nishino, H., An investigation of reflection coefficients of the T (0, 1) mode guided waves at axisymmetric defects and inverse problem analyses for estimations of defect shapes, Materials Transactions, Vol. 56, No. 1 (2015), pp. 120-128.

[32] Mori, N. and Biwa, S., Resonance of an imperfect joint of plates by the lowest-order symmetric Lamb mode, The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 137, No. 6 (2015), pp. 3139-3148.

[33] Hayashi, T., Song, W-J. and Rose, J. L., Guided wave dispersion curves for a bar with an arbitrary cross-section, a rod and rail example, Ultrasonics, Vol. 41, No. 3 (2003), pp. 175-183.

[34] Wan, X., Xu, G., Zhang, Q., Peter, W. T. and Tan, H., A quantitative method for evaluating numerical simulation accuracy of time-transient Lamb wave propagation with its applications to selecting appropriate element size and time step, Ultrasonics, Vol. 64 (2016), pp. 25-42.

[35] Barouni, A. K. and Saravanos, D. A., A quantitative method for evaluating numerical simulation accuracy of time-transient Lamb wave propagation with its applications to selecting appropriate element size and time step, Ultrasonics, Vol. 51 (2016), pp. 118-141.

[36] Li, C., Han, Q., Liu, Y., Liu, X. and Wu, B., Investigation of wave propagation in double cylindrical rods considering the effect of prestress, Journal of Sound and Vibration, Vol. 353 (2015), pp. 164-180.

[37] Treyssede, F., Dispersion curve veering of longitudinal guided waves propagating inside prestressed seven-wire strands, Journal of Sound and Vibration, Vol. 367 (2016), pp.

56-68.

[38] Chan, C. W. and Cawley, P., Lamb waves in highly attenuative plastic plates, The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 194, No. 2 (1998), pp. 874-881.

[39] Bernard, A., Lowe, M. J. S. and Deschamps, M., Guided waves energy velocity in absorbing and non-absorbing plates, The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 110, No. 1 (2001), pp. 186-196.

[40] Simonetti, F. and Cawley, P., A guided wave technique for the characterization of highly attenuative viscoelastic materials, The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 114, No. 1 (2003), pp. 158-165.

[41] Simonetti, F. and Lowe, M. J. S., On the meaning of Lamb mode nonpropagating branches, The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 118, No. 1 (2005), pp. 186-192.

[42] Hosten, B. and Castaings, M., FE modeling of Lamb mode diffraction by defects in anisotropic viscoelastic plates, NDT & E International, Vol. 39, No. 3 (2006), pp. 195-204.

[43] Ramadas, C., Balasubramaniam, K., Hood, A., Joshi, M. and Krishnamurthy, C.V., Modelling of attenuation of Lamb waves using Rayleigh damping: Numerical and experimental studies, Composite Structures, Vol. 93, No. 8 (2011), pp. 2020-2025.

[44] Bartoli, I., Marzani, A., di Scalea, F. L. and Viola, E., Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section, Journal of Sound and Vibration, Vol. 295, No. 3 (2006), pp. 685-707.

[45] Marzani, A., Time-transient response for ultrasonic guided waves propagating in damped cylinders, International Journal of Solids and Structures, Vol. 45, No. 25 (2008), pp. 6347-6368.

[46] Matsuda, N. and Biwa, S., Frequency dependence of second-harmonic generation in Lamb waves, Journal of Nondestructive Evaluation, Vol. 33, No. 3 (2014), pp. 169-177.

[47] Matsuda, N. and Biwa, S., Phase and group velocity matching for cumulative harmonic generation in Lamb waves, Journal of Applied Physics, Vol. 109 No. 9, 094903 (2011), (11 pages).

[48] Xiang, Y., Zhu, W., Deng, M., Xuan, F-Z. and Liu, C-J., Generation of cumulative second-harmonic ultrasonic guided waves with group velocity mismatching: Numerical analysis and experimental validation, Europhysics Letters, Vol. 116 No. 3, 34001 (2016), (6 pages).

[49] Chillara, K. V. and Lissenden, C. J., Interaction of guided wave modes in isotropic weakly nonlinear elastic plates: higher harmonic generation, Journal of Applied Physics, Vol. 111 No. 12, 124909 (2012), (7 pages).

[50] Liu, Y., Chillara, V. K., Lissenden, C. J. and Rose, J. L., Third harmonic shear horizontal

and Rayleigh Lamb waves in weakly nonlinear plates, Journal of Applied Physics, Vol. 114 No. 11, 114908 (2013), (10 pages).

[51] Hasanian, M. and Lissenden, C. J., Second order harmonic guided wave mutual interactions in plate: Vector analysis, numerical simulation, and experimental results, Journal of Applied Physics, Vol. 122, No. 8, 084901 (2017), (13 pages).

[52] Jingpin, J., Xiangji, M, Cunfu, H. and Bin, W., Nonlinear Lamb wave-mixing technique for micro-crack detection in plates, NDT & E International, Vol. 85 (2017), pp. 63-71.

[53] Packo, P., Uhl, T., Staszewski, W. J. and Leamy, M. J., Amplitude-dependent Lamb wave dispersion in nonlinear plates, The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 140, No. 2 (2016), pp. 1319-1331.

[54] Dwivedy, S. K. and Kar, R. C., Simultaneous combination, principal parametric and internal resonances in a slender beam with a lumped mass: three-mode interactions, Journal of Sound and Vibration, Vol. 242, No. 1 (2001), pp. 27-46

[55] Yabuno, H., Hasegawa, M. and Ohkuma, M., Bifurcation control for a parametrically excited cantilever beam by linear feedback, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 226, No. 8 (2012), pp. 1987-1999.

[56] Taguchi, D., Sakaguchi, R. and Sugiura, T., Vibration Reduction of a High-T_{c} Superconducting Magnetic Levitation System With an Autoparametric Vibration Absorber, IEEE Transactions on Applied Superconductivity, Vol. 21, No. 3 (2011), pp. 1538-1542.

[57] Sugita, N. and Sugiura, T., Nonlinear normal modes and localization in two bubble oscillators, Ultrasonics, Vol. 74 (2017), pp. 174-185.

[58] Shibata, A., Ohishi, S. and Yabuno, H., Passive method for controlling the nonlinear characteristics in a parametrically excited hinged-hinged beam by the addition of a linear spring, Journal of Sound and Vibration, Vol. 350 (2015), pp. 111-122.

[59] 藪野浩司, 工学のための非線形解析入門システムのダイナミクスを正しく理解するために (2004), サイエンス社, pp. 56-78, 91-106.

[60] Tondl, A., Autoparametric resonance in mechanical systems (2000), Cambridge University Press, pp. 1-4.

[61] 犬井鉄郎, 偏微分方程式とその応用 (1957), コロナ社, pp. 96-124.

[62] Nayfeh, A. H., Introduction to perturbation techniques (1993), John Wiley & Sons, pp. 388-431.

[63] Chillara, V. K. and Lissenden, C. J., Review of nonlinear ultrasonic guided wave nondestructive evaluation: theory, numerics, and experiments, Optical Engineering, Vol. 55, No. 1, 011002 (2016), (14 pages).

[64] Tisseur, F. and Meerbergen, K., The quadratic eigenvalue problem, SIAM Review, Vol. 43, No. 2 (2001), pp. 235-286.

[65] Auld, B. A., Acoustic fields and waves in solids (1973), John Wiley & Sons, pp. 151-162.
[66] Dym, C. L., 材料力学と変分法 (1977), ブレイン図書出版株式会社, pp. 16-20.

著者論文目録

1．定期刊行誌掲載論文

(1) 神田昂亮, 岡崎広大, 杉浦壽彦，電磁超音波探触子を用いたワイヤロープの探傷（ガイド波の伝搬実験及び磁場解析），日本 AEM 学会誌，Vol. 23，No. 1，pp. 125-130，(2015).

(2) Kanda, K. and Sugiura, T.，“Analysis of guided waves with a nonlinear boundary condition caused by internal resonance using the method of multiple scales”, Wave Motion, Vol. 77, pp. 28-39, (2018).

2．定期刊行誌掲載論文（その他の論文）

なし

3．国際会議論文（査読付きの full-length papers）

なし

4．その他の国際会議発表

(1), Kanda, K. and Sugiura, T., ”Influence of Curvature of Wire-ropes on Guided Wave Propagation”，41th annual review of progress in Quantitative Nondestructive Evaluation, (Boise, USA, 2014).

(2), Kanda, K. and Sugiura, T., ”Guided Waves Propagating a Helical Structures”，42th annual review of progress in Quantitative Nondestructive Evaluation, (Minneapolis, USA, 2015).

(3), Kanda, K., Hiramoto, T., Aoki, F. and Sugiura, T., ”Propagation of Guided Waves in Contacting Two Rods”, The 17th International Symposium on Applied Electromagnetics and Mechanics, (Hyogo, Japan, 2015).

(4), Kanda, K. and Sugiura, T., ”Curvature-dependence of Cut-off Frequencies of Guided Waves Propagating through Curved Structures Obtained by a Semi-Analytical Finite Element Method”, 43th annual review of progress in Quantitative Nondestructive Evaluation, (Atlanta, USA, 2016).

(5), Kanda, K. and Sugiura, T., ”Effects of curvatures and torsions on dispersion property of

guided waves propagating in a helical structure obtained by a semi-analytical finite element method", The Symposium on UltraSonic Electronics, (Busan, Korea, 2016).
(6) Kanda, K. and Sugiura, T.,"Nonlinear effects of cumulative guided waves with a nonlinear boundary condition caused by internal resonance obtained by the method of multiple scales", 44th Annual Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation, (Utah, USA, 2017).

5．国内学会発表

(1), 神田昂亮, 岡崎広大, 杉浦壽彦, " 電磁超音波探触子を用いたワイヤロープの探傷（ガイド波の伝搬実験及び磁場解析）", 第 26 回「電磁力関連のダイナミクス」シンポジウム, (日本 AEM 学会, 岩手, 2014).
(2), 神田昂亮, 岡崎広大, 杉浦壽彦, "ガイド波によるワイヤロープの超音波探傷-電磁超音波探触子による送受信-", 日本非破壊検査協会平成 26 年度春季講演大会, (日本非破壊検査協会，東京，2014).
(3), 神田昂亮, 杉浦壽彦, "曲がった円柱構造物を伝播するガイド波の群速度", 第 22 回超音波による非破壊評価シンポジウム, (日本非破壊検査協会，東京，2015).
(4), 神田昂亮, 平本達也, 青木史子, 杉浦壽彦, "電磁超音波探触子を用いたガイド波の伝播形態（接触による影響の実験的考察）", 第 27 回「電磁力関連のダイナミクス」シンポジウム, (日本 AEM 学会, 長崎, 2014).
(5), 神田昂亮, 杉浦壽彦, "らせん構造におけるガイド波の分散特性-解析と実験による検討- ", 第 36 回超音波エレクトロニクスの基礎と応用に関するシンポジウム, (日本応用物理学会，茨城，2016).
(6), 神田昂亮, 杉浦壽彦, "内部共振による累積的非線形ガイド波の多重尺度法を用いた理論解析", 第 24 回超音波による非破壊評価シンポジウム, (日本非破壊検査協会，東京，2017).
(7), 神田昂亮, 杉浦 壽彦, "多重尺度法を用いた非線形境界条件による係数励振的非線形ガイド波の理論解析", Dynamics and Design Conference 2017, (日本機械学会，愛知，2017).
(8), 神田昂亮, 杉浦 壽彦, "オートパラメトリック励振的非線形ガイド波の安定性", 日本非破壊検査協会平成 29 年度秋季講演大会, (日本非破壊検査協会，福岡，2017).

6．その他

(1) 受賞　平成 27 年度　日本非破壊検査協会　学術奨励賞.

付録 A

周波数領域における離調パラメータを考慮した内部共振的ガイド波

第 4 章では，波数領域のみで，位相整合条件から微小なずれを考慮した内部共振的ガイド波について理論解析を行った．本節では，周波数領域での位相整合条件から微小なずれを考慮した内部共振的ガイド波について理論解析を行う．

A.1　支配方程式と多重尺度法

支配方程式は Eqs. (4.1.1)-(4.1.6) と同様とし，複数の時間の尺度を用意し，多重尺度法を適用する．ここで，伝播距離の尺度は x とし，時間の尺度は $t_0 = t$，$t_1 = \epsilon t$ であり，$\epsilon \ll 1$ である．その結果，各 ϵ べき乗ごとの運動方程式はそれぞれ以下のようになる．

$\mathcal{O}(\epsilon^1)$

$$-\rho_d D_{t0}^2 u_0 + (\lambda_r + \mu_r)(D_x^2 u_0 + D_x D_z w_0) + \mu_r(D_x^2 u_0 + D_z^2 u_0) = 0 \tag{A.1}$$

$$-\rho_d D_{t0}^2 w_0 + (\lambda_r + \mu_r)(D_z D_x u_0 + D_z^2 w_0) + \mu_r(D_x^2 w_0 + D_z^2 w_0) = 0 \tag{A.2}$$

$$[\mu_r(D_z u_0 + D_x w_0)]\,|_{z=h} = 0 \tag{A.3}$$

$$[\mu_r(D_z u_0 + D_x w_0)]\,|_{z=-h} = 0 \tag{A.4}$$

$$[\lambda_r(D_x u_0 + D_z w_0) + 2\mu_r D_z w_0]\,|_{z=h} = 0 \tag{A.5}$$

$$[\lambda_r(D_x u_0 + D_z w_0) + 2\mu_r D_z w_0]\,|_{z=-h} = 0 \tag{A.6}$$

$\mathcal{O}(\epsilon^2)$

$$\begin{aligned} & -\rho_d D_t^2 u_1 + (\lambda_r + \mu_r)(D_{x0}^2 u_1 + D_{x0} D_z w_1) + \mu_r(D_{x0}^2 u_1 + D_z^2 u_1) \\ = & \qquad 2\rho_d D_{t0} D_{t1} u_0 - C_{NL1} - C_{NL2} \end{aligned} \tag{A.7}$$

$$
\begin{aligned}
& -\rho_d D_t^2 w_1 + (\lambda_r + \mu_r)(D_z D_{x0} u_1 + D_z^2 w_1) + \mu_r (D_{x0}^2 w_1 + D_z^2 w_1) \\
= & \quad 2\rho_d D_{t0} D_{t1} w_0 - C_{NL3} - C_{NL4}
\end{aligned}
\tag{A.8}
$$

$$
\left[\mu_r (D_z u_1 + D_{x0} w_1)\right]|_{z=h} = \left[-i\hat{\mu}_i (D_z u_0 + D_x w_0) - C_{NL5}\right]|_{z=h} \tag{A.9}
$$

$$
\left[\mu_r (D_z u_1 + D_{x0} w_1)\right]|_{z=-h} = \left[-i\hat{\mu}_i (D_z u_0 + D_x w_0) - C_{NL5}\right]|_{z=-h} \tag{A.10}
$$

$$
\begin{aligned}
& \left[\lambda_r (D_{x0} u_1 + D_z w_1) + 2\mu_r D_z w_1\right]|_{z=h} = \\
& \left[-i\hat{\lambda}_i (D_x u_0 + D_z w_0) - 2i\hat{\mu}_i D_z w_0 - C_{NL6}\right]|_{z=h}
\end{aligned}
\tag{A.11}
$$

$$
\begin{aligned}
& \left[\lambda_r (D_{x0} u_1 + D_z w_1) + 2\mu_r D_z w_1\right]|_{z=-h} = \\
& \left[-i\hat{\lambda}_i (D_x u_0 + D_z w_0) - 2i\hat{\mu}_i D_z w_0 - C_{NL6}\right]|_{z=-h}
\end{aligned}
\tag{A.12}
$$

ここで，C_{NL1}-C_{NL6} は，付録 B に示す $\boldsymbol{T}_{NL}$ から求まる変位の関数である．

A.2　位相整合条件

本章では，位相整合条件から微小なずれを，周波数領域で考え，以下に示す関係を位相整合条件とする．

$$
\omega_b = 2\omega_a + \tau = 2\omega_a + \epsilon\hat{\tau} \tag{A.1}
$$

$$
k_b = 2k_a \tag{A.2}
$$

ここで，τ は ρ と同様に離調パラメータ (detuning parameter) と呼ばれ，Eqs. (4.2.1), (4.2.2) を満たす位相整合条件からの微小なずれを表す．ここで，$\tau \ll 1$，$\epsilon \ll 1$ である．

本章で注目する位相整合条件を満たす 2 モードは，第 4 章と同様に，Fig. 4.1 の分散曲線上に示す a-mode と b-mode とする．したがって，内部共振現象が発生しうる 2 モードについて解析を行う．

A.3　可解条件と振幅方程式

Eqs. (A.1)-(A.6) で示される $\mathcal{O}(\epsilon^1)$ の解は以下のようになる．

$$
u_0 = \sum_j U_j(t_1)\Phi_{jx}(z) \exp\left\{i(k_j x - \omega t_0)\right\} + c.c. \tag{A.1}
$$

$$
w_0 = \sum_j W_j(t_1)\Phi_{jz}(z) \exp\left\{i(k_j x - \omega t_0)\right\} + c.c. \tag{A.2}
$$

第 4 章では，振幅は長い伝播距離，x_1 に依存すると仮定したが，本章では，ゆっくりとした時間，t_1 に依存すると仮定する．さらに，第 4 章と同様に，Eqs. (A.1), (A.2) の中で，a-mode と

b-mode のみが発生し，エネルギーは a-mode と b-mode 間のみに存在すると仮定する．$\mathcal{O}(\epsilon^2)$ の支配方程式に $\mathcal{O}(\epsilon^1)$ における a-mode と b-mode の解を代入し，u_1, w_1 の非同次微分方程式を得る．Eq. (2.6.3) を用いて，得られた非同次微分方程式の可解条件より，a-mode，b-mode の複素振幅方程式は以下のように導出される．

$$iM_a\frac{dX_a}{dt_1} = iD_aX_a + iC_{a2}\bar{X}_aX_b\exp\left(-i\hat{\tau}t_1\right) \tag{A.3}$$

$$iM_b\frac{dX_b}{dt_1} = iD_bX_b + iC_{b2}X_a^2\exp\left(i\hat{\tau}t_1\right) \tag{A.4}$$

X_a は a-mode の複素振幅，X_b は b-mode の複素振幅であり，C_{a2}, D_a, C_{b2}, D_b は付録 C に示す．ここで，M_a, M_b は以下に示す値を取る．

$$M_a = -2\rho_d\omega_a\int_{-h}^{h}(\phi_{ax}^2 - \phi_{az}^2)dz \tag{A.5}$$

$$M_b = -2\rho_d\omega_b\int_{-h}^{h}(\phi_{bx}^2 - \phi_{bz}^2)dz \tag{A.6}$$

ここで，Eqs. (A.3), (A.4) は非自律系なので，X_a，X_b を以下の変数変換し，自律系に書き直す．

$$X_a = Y_a \tag{A.7}$$

$$X_b = Y_b\exp\left(i\hat{\tau}t_1\right) \tag{A.8}$$

Eqs. (A.7), (A.8) を Eqs. (A.3), (A.4) に代入し，整理すると以下の複素振幅方程式を得る．

$$M_a\frac{dY_a}{dt_1} = D_aY_a + C_{a2}\bar{Y}_aY_b \tag{A.9}$$

$$M_b\frac{dY_b}{dt_1} = (D_b - iM_b\hat{\tau})Y_b + C_{b2}Y_a^2 \tag{A.10}$$

Eqs. (A.9), (A.10) は連立非線形偏微分方程式なので，4 次のルンゲクッタ法を用いて数値解析を行う．また，本章における計算に用いる各種物性値を Tab. 4.1 を用いる．

A.4　振幅の離調パラメータ依存性

本章では，Eqs. (A.9), (A.10) を t_1 に関して数値的に解く．具体的には，複素振幅 Y_a，Y_b を以下のようにデカルト表記し，Eqs. (A.9), (A.10) を以下のように実数振幅方程式に書き直す．

$$Y_a = \frac{1}{2}(y_{ar} + iy_{ai}) \tag{A.1}$$

$$Y_b = \frac{1}{2}(y_{br} + iy_{bi}) \tag{A.2}$$

$$M_a \frac{dy_{ar}}{dt_1} = D_a y_{ar} + \frac{C_{a2}}{2}(y_{ar}y_{br} + y_{ai}y_{bi}) \tag{A.3}$$

$$M_a \frac{dy_{ai}}{dt_1} = D_a y_{ai} + \frac{C_{a2}}{2}(-y_{ai}y_{br} + y_{ar}y_{bi}) \tag{A.4}$$

$$M_b \frac{dy_{br}}{dt_1} = D_b y_{br} + (M_b\hat{\tau} - C_{b1}\hat{\rho})y_{bi} + \frac{C_{b2}}{2}(y_{ar}^2 - y_{ai}^2) \tag{A.5}$$

$$M_b \frac{dy_{bi}}{dt_1} = D_b y_{bi} + (-M_b\hat{\tau} + C_{b1}\hat{\rho})y_{br} + C_{b2}y_{ar}y_{ai} \tag{A.6}$$

第 4 章と同様に，減衰の効果を無視した場合と考慮した場合について，$\tau = 0$ と $\tau = 10^{-3}$ の離調パラメータにおける基本波振幅と高調波振幅の伝播時間依存性をそれぞれ，Figs. A.1-A.4 に示す．ここで，初期条件は無次元で $a(0) = 10, b(0) = 0$，有次元で $a(0)$=5 μm, $b(0)$=0 μm とした．Figs. A.1-A.4 は，Figs. 4.2-4.10 と定性的に同様な傾向を示す．周波数領域のずれを考慮した内部共振的ガイド波では，M_a，M_b が伝播時間に対する振幅変化のし難さを表す．Eqs. (A.9), (A.10) と Eqs. (4.4.1), (4.4.2) は動力学的に相似な振幅方程式であり，定量的な相違点は M_a，M_b と C_{a1}，C_{b1} に依るものである．

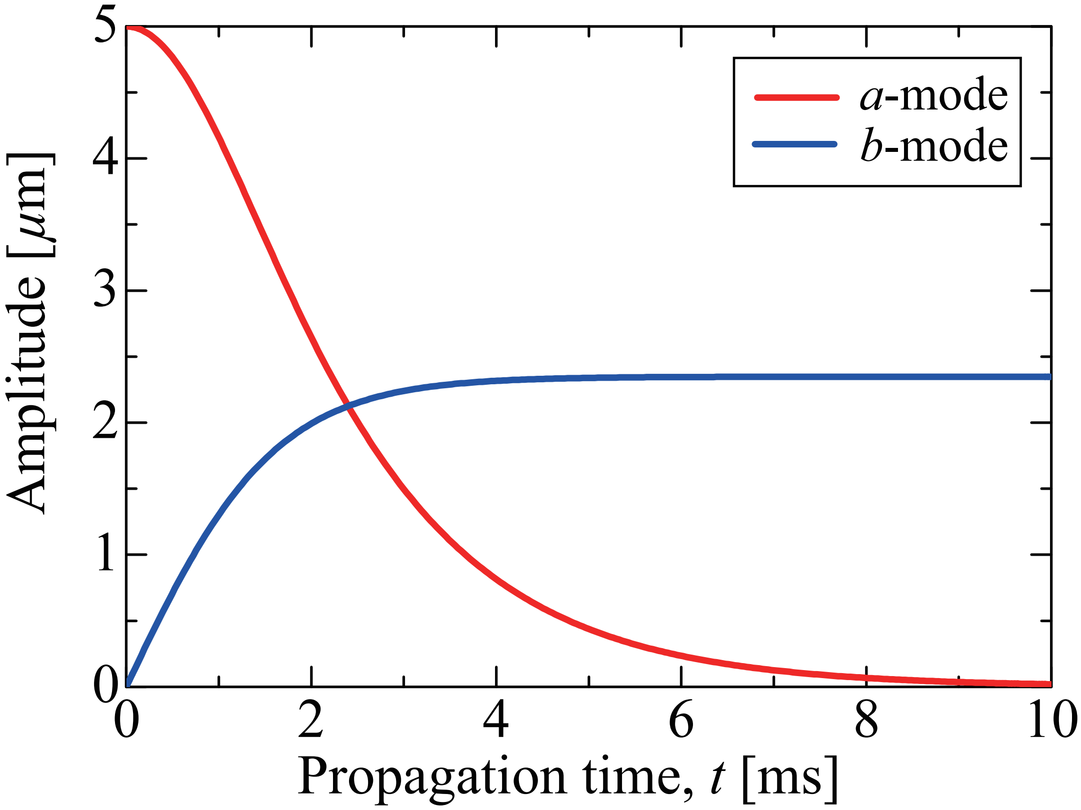

Figure A.1　Modal amplitudes depending on propagation time with absence of damping under $\tau = 0$.

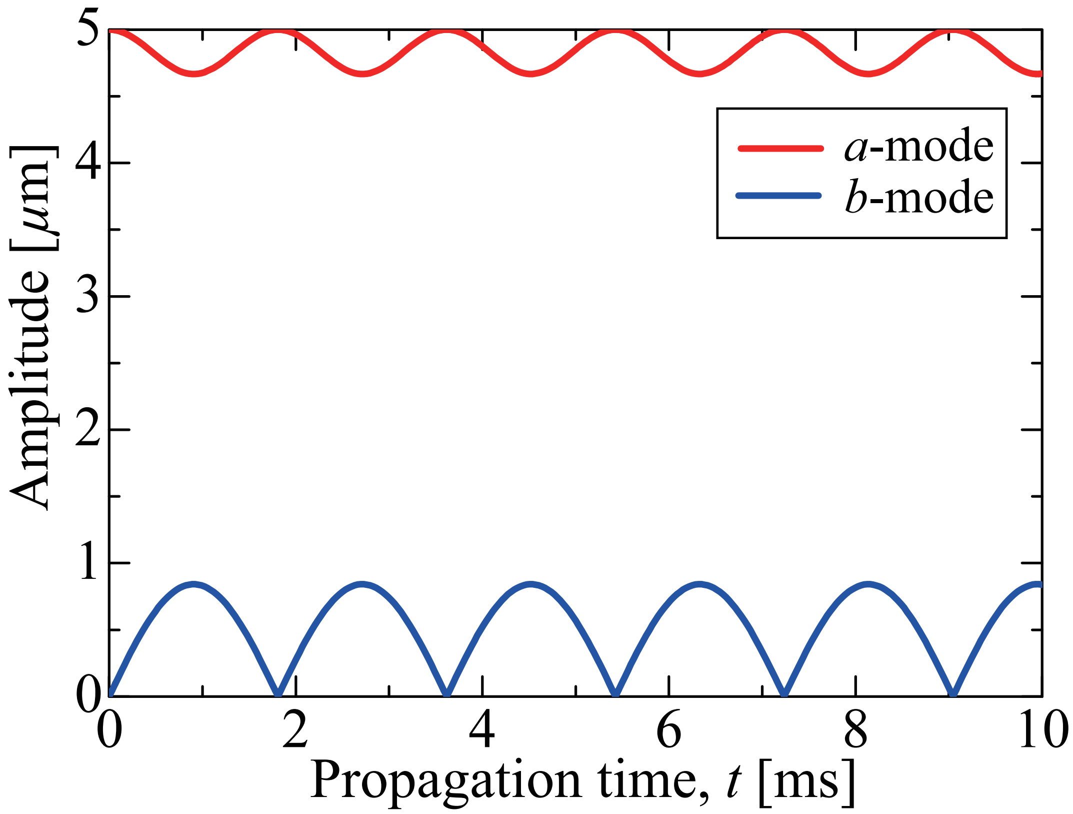

Figure A.2　Modal amplitudes depending on propagation time with absence of damping under $\tau = 10^{-3}$.

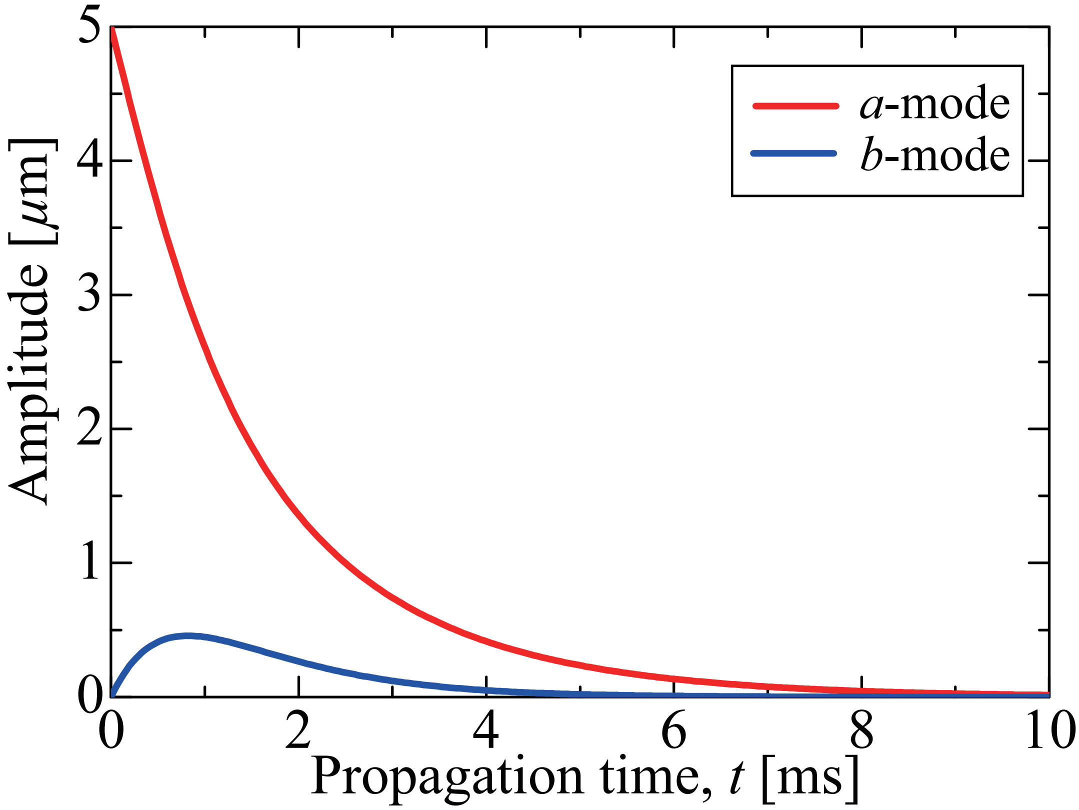

Figure A.3　Modal amplitudes depending on propagation time with presence of damping under $\tau = 0$.

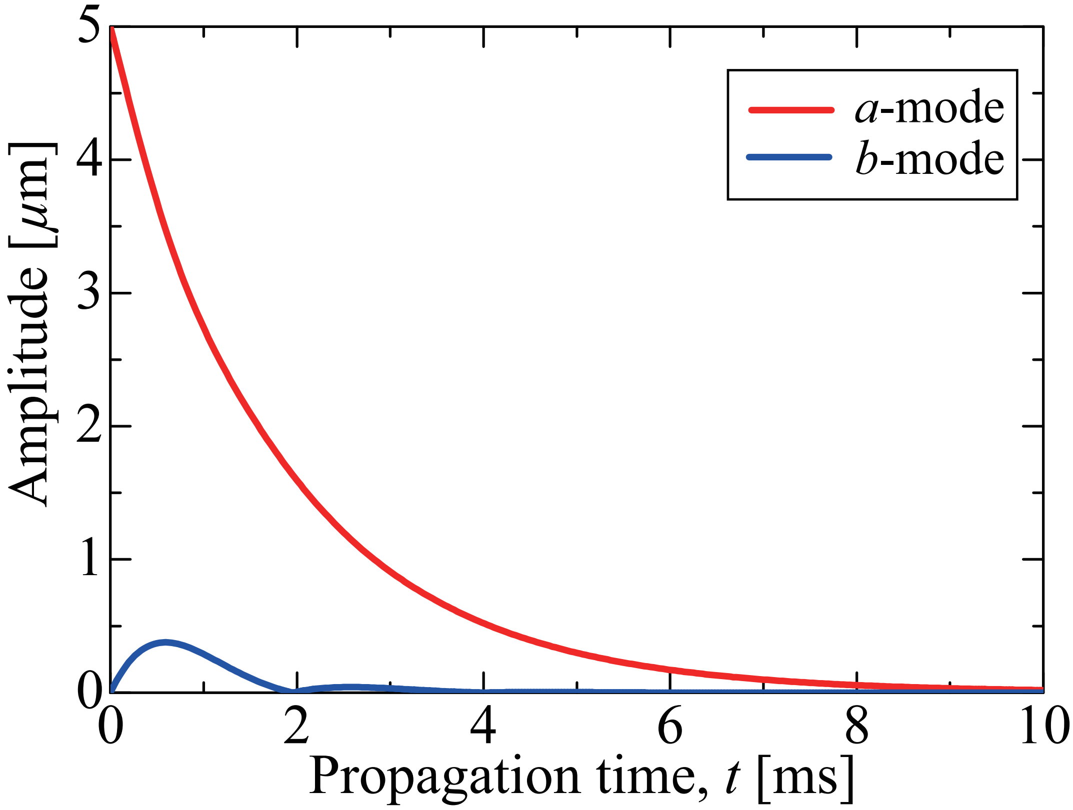

Figure A.4 Modal amplitudes depending on propagation time with presence of damping under $\tau = 10^{-3}$.

付録 B

The Green-Lagrange strain tensor

連続体の変形について Lagrange 座標で定式化を行う．まず, 物体中の 2 点間の座標を $x_i, x_i{+}dx_i$ $(i = x, y, z)$ とする．外力が作用すると物体が変形し，2 点間の座標は $\xi_i, \xi_i + d\xi_i$ $(i = x, y, z)$ となる．変形前後の 2 点間距離は以下のように表せられる．

$$ds_x^2 = dx_i dx_i \tag{B.1}$$

$$ds_\xi^2 = d\xi_i d\xi_i \tag{B.2}$$

変形は x_i 座標系から ξ_i 座標系への写像であるとみなせ，以下の関係式が成立する．

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} d\xi_j \tag{B.3}$$

$$d\xi_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} dx_j \tag{B.4}$$

Eqs. (B.1)-(B.3) より，変形による 2 点間距離は

$$\begin{aligned} ds_\xi^2 - ds_x^2 &= (\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} - \delta_{ij}) dx_i dx_j \\ &= 2\epsilon_{ij} dx_i dx_j \end{aligned} \tag{B.5}$$

となる．ここで, 変位場を $u_i = \xi_i - x_i$ と定義し, Green のひずみテンソル ϵ_{ij}(the Green-Lagrange strain tensor) は以下のように導出できる．

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}) \tag{B.6}$$

Eq. (B.6) における非線形性を幾何学的非線形と呼ぶ [66]．概念図を Fig. B.1 に示す．ここで，Green のひずみはベクトル表記を用いて，以下のように表せられる．

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}^T + \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^T) \tag{B.7}$$

ここで，$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{\nabla u}$ であり，$\boldsymbol{\nabla}$ は勾配作用素，$\boldsymbol{u}$ は変位ベクトルである．超弾性体におけるひずみ-応力関係はひずみエネルギー関数を用いて以下のように記述される．

$$\boldsymbol{T}^{'} = \frac{\partial W(\boldsymbol{E})}{\partial \boldsymbol{E}} \tag{B.8}$$

非線形超弾性体における 3 次の非線形性を考慮したひずみエネルギー関数は以下のように表せられると仮定する．

$$W(\boldsymbol{E}) = \frac{\lambda}{2}(\mathrm{tr}[\boldsymbol{E}])^2 + \mu\mathrm{tr}[\boldsymbol{E}^2] + \frac{A}{3}\mathrm{tr}[\boldsymbol{E}^3] + B\mathrm{tr}[\boldsymbol{E}]\mathrm{tr}[\boldsymbol{E}^2] + \frac{C}{3}(\mathrm{tr}[\boldsymbol{E}])^3 + \cdots \tag{B.9}$$

ここで，A, B, C は材料の非線形性を表す材料定数である．Eq. (B.8) を用いて，応力 $\boldsymbol{T}^{'}$ は

$$\boldsymbol{T}^{'} = \lambda\mathrm{tr}[\boldsymbol{E}]\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{E} + C(\mathrm{tr}[\boldsymbol{E}])^2 + B\mathrm{tr}[\boldsymbol{E}^2]\boldsymbol{I} + 2B\mathrm{tr}[\boldsymbol{E}]\boldsymbol{E} + A\boldsymbol{E}^2 + \cdots \tag{B.10}$$

となる．Eq. (B.10) に Eq. (B.7) の関係を代入し，the second Piola-Kirchhoff stress $\boldsymbol{T}^{'}$ から the first Piola-Kirchhoff stress $\boldsymbol{T}$ に以下の関係式を用いて座標変換を実行する．

$$\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{H})\boldsymbol{T}^{'} \tag{B.11}$$

得られた応力テンソル $\boldsymbol{T}$ を線形部 $\boldsymbol{T}_L$，非線形部 $\boldsymbol{T}_{NL}$ に分離すると以下のようになる．

$$\boldsymbol{T}_L = \lambda\mathrm{tr}[\boldsymbol{H}]\boldsymbol{I} + \mu(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}^T) \tag{B.12}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}_{NL} = \quad & \left\{\frac{\lambda}{2}\mathrm{tr}[\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}] + C(\mathrm{tr}[\boldsymbol{H}])^2\right\}\boldsymbol{I} + B\mathrm{tr}[\boldsymbol{H}]\boldsymbol{H}^T \\ & + \frac{A}{4}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}^T + \frac{B}{2}\mathrm{tr}[\boldsymbol{H}^2 + \boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}]\boldsymbol{I} \\ & + (\lambda + B)\mathrm{tr}[\boldsymbol{H}]\boldsymbol{H} + \left(\mu + \frac{A}{4}\right)(\boldsymbol{H}^2 + \boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^T) \end{aligned} \tag{B.13}$$

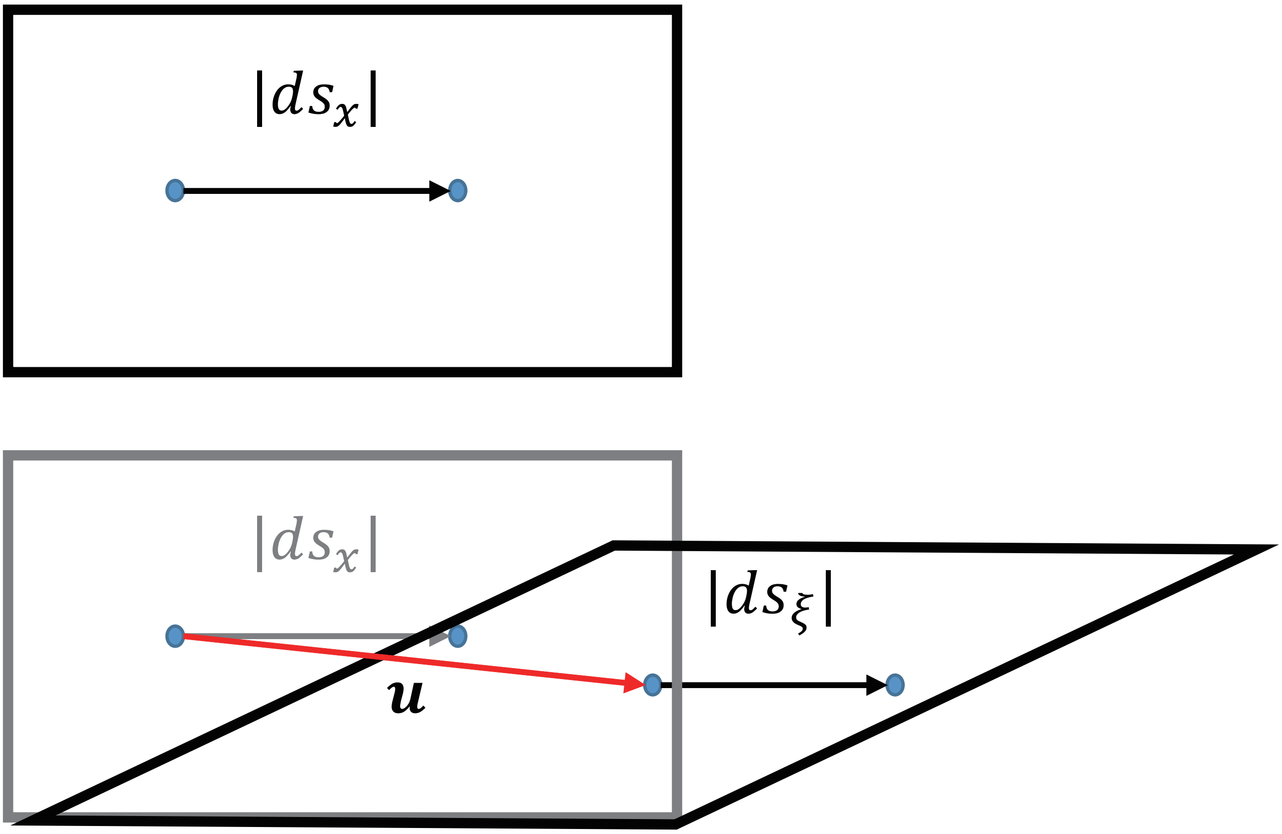

Figure B.1 Schematic of coordinate transformation caused by deformation.

$\mathcal{O}(\epsilon^2)$ の支配方程式，境界条件に現れる非線形項 C_{NL1}-C_{NL6} は $\mathcal{O}(\epsilon^1)$ の解を Eq. (B.13) と Eqs. (4.1.1)-(4.1.6) に代入することで得られる．本研究では，$\mathcal{O}(\epsilon^1)$ の解として，a-mode, b-mode のみが発生すると仮定し，伝播モードの直交性を用いて可解条件を導出する．そのため，以下に a-mode, b-mode の永年項を生じさせる項の係数として現れる具体的な式を以下に示す．ここで，Eqs. (4.1.7)-(4.1.12), (5.1.7)-(5.1.12) における C_{NLl} は $(l=1,2,\cdots,6)$ から算出される j-mode の永年項を生じさせる項の係数を $C_{jNLl}(l=1,2,\cdots,6)$ と表記する．

$$
\begin{aligned}
C_{aNL1} =& i\Bigg[2\left(\frac{3}{2}\lambda+3\mu+A+3B+C\right)k_a k_b(-k_a+k_b)\phi_{ax}\phi_{bx} \\
&+2\left(\frac{\lambda}{2}+\mu+\frac{A}{4}+\frac{B}{2}\right)(-k_a+k_b)\frac{d\phi_{ax}}{dz}\frac{d\phi_{bx}}{dz} \\
&+\left(\mu+\frac{A}{2}+B\right)\left(k_a k_b\frac{d\phi_{ax}}{dz}\phi_{bz}-k_b^2\frac{d\phi_{ax}}{dz}\phi_{bz}\right. \\
&\left.+k_a k_b\phi_{az}\frac{d\phi_{bx}}{dz}-k_a^2\phi_{az}\frac{d\phi_{bx}}{dz}\right) \\
&+2\left(\frac{\lambda}{2}+\mu+\frac{A}{4}+\frac{B}{2}\right)k_a k_b(k_a-k_b)\phi_{az}\phi_{bz} \\
&+\left(\lambda+\frac{A}{2}+2B\right)\left\{k_a(-k_a+k_b)\phi_{ax}\frac{d\phi_{bz}}{dz}+k_b(-k_b+k_a)\frac{d\phi_{az}}{dz}\phi_{bx}\right\} \\
&+2\left(\frac{\lambda}{2}+B\right)\left(k_a\frac{d\phi_{az}}{dz}\frac{d\phi_{bz}}{dz}-k_b\frac{d\phi_{az}}{dz}\frac{d\phi_{bz}}{dz}\right)\Bigg]
\end{aligned}
\tag{B.14}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{aNL2} =& i\Bigg[\left(\lambda+2\mu+\frac{A}{2}+B\right)\left\{-k_a\left(\frac{d\phi_{ax}}{dz}\frac{d\phi_{bx}}{dz}+\phi_{ax}\frac{d^2\phi_{bx}}{dz^2}\right)\right. \\
&\left.+k_b\left(\frac{d\phi_{ax}}{dz}\frac{d\phi_{bx}}{dz}+\frac{d^2\phi_{ax}}{dz^2}\phi_{bx}\right)\right\} \\
&+\left(\mu+\frac{A}{2}+B\right)k_a k_b\left(\frac{d\phi_{ax}}{dz}\phi_{bz}+\phi_{ax}\frac{d\phi_{bz}}{dz}+\frac{d\phi_{az}}{dz}\phi_{bx}+\phi_{az}\frac{d\phi_{bx}}{dz}\right) \\
&+\left(\lambda+2\mu+\frac{A}{2}+B\right)\left(\frac{d^2\phi_{ax}}{dz^2}\frac{d\phi_{bz}}{dz}+\frac{d\phi_{ax}}{dz}\frac{d^2\phi_{bz}}{dz^2}\right. \\
&\left.+\frac{d\phi_{az}}{dz}\frac{d^2\phi_{bx}}{dz^2}+\frac{d^2\phi_{az}}{dz^2}\frac{d\phi_{bx}}{dz}\right) \\
&+\left(\mu+\frac{A}{2}+B\right)\left\{k_a\left(\frac{d\phi_{az}}{dz}\frac{d\phi_{bz}}{dz}+\phi_{az}\frac{d^2\phi_{bz}}{dz^2}\right)\right. \\
&\left.-k_b\left(\frac{d\phi_{az}}{dz}\frac{d\phi_{bz}}{dz}+\frac{d^2\phi_{az}}{dz^2}\phi_{bz}\right)\right\}\Bigg]
\end{aligned}
\tag{B.15}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{aNL3} = \quad & \left(\mu + \frac{A}{2} + B\right)\left(-k_a^2\phi_{ax}\frac{d\phi_{bx}}{dz} + k_a k_b \phi_{ax}\frac{d\phi_{bx}}{dz}\right.\\
& \left. + k_a k_b \frac{d\phi_{ax}}{dz}\phi_{bx} - k_b^2 \frac{d\phi_{ax}}{dz}\phi_{bx}\right)\\
& + \left(\lambda + 2\mu + \frac{A}{2} + B\right) k_a k_b \left(k_a\phi_{ax}\phi_{bz} - k_b\phi_{ax}\phi_{bz}\right.\\
& \left. + k_a\phi_{az}\phi_{bx} - k_b\phi_{az}\phi_{bx}\right)\\
& + \left(\mu + \frac{A}{2} + B\right)\left(k_a\frac{d\phi_{ax}}{dz}\frac{d\phi_{bz}}{dz} - k_b\frac{d\phi_{ax}}{dz}\frac{d\phi_{bz}}{dz}\right.\\
& \left. + k_a\frac{d\phi_{az}}{dz}\frac{d\phi_{bx}}{dz} - k_b\frac{d\phi_{az}}{dz}\frac{d\phi_{bx}}{dz}\right)\\
& + \left(2\mu + \frac{A}{2} + B\right)\left(k_a^2\phi_{az}\frac{d\phi_{bz}}{dz}\right.\\
& \left. - k_a k_b \phi_{az}\frac{d\phi_{bz}}{dz} - k_a k_b \frac{d\phi_{az}}{dz}\phi_{bz} + k_b^2\frac{d\phi_{az}}{dz}\phi_{bz}\right)
\end{aligned}
\tag{B.16}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{aNL4} =& 2\left(\frac{\lambda}{2} + B + C\right) k_a k_b \left(\frac{d\phi_{ax}}{dz}\phi_{bx} + \phi_{ax}\frac{d\phi_{bx}}{dz}\right)\\
& + 2\left(\frac{\lambda}{2} + \mu + \frac{A}{4} + \frac{B}{2}\right)\left(\frac{d^2\phi_{ax}}{dz^2}\frac{d\phi_{bx}}{dz} + \frac{d\phi_{ax}}{dz}\frac{d^2\phi_{bx}}{dz^2}\right)\\
& - 2\left(\frac{\lambda}{2} + \mu + \frac{A}{4} + \frac{B}{2}\right) k_a k_b \left(\frac{d\phi_{az}}{dz}\phi_{bz} + \phi_{az}\frac{d\phi_{bz}}{dz}\right)\\
& + (\lambda + 2B + 2C)\left(k_a\frac{d\phi_{ax}}{dz}\frac{d\phi_{bz}}{dz} + k_a\phi_{ax}\frac{d^2\phi_{bz}}{dz^2} - k_b\frac{d^2\phi_{az}}{dz^2}\phi_{bx}\right.\\
& \left. - k_b\frac{d\phi_{az}}{dz}\frac{d\phi_{bx}}{dz}\right)\\
& - 2\left(\frac{3}{2}\lambda + 3\mu + A + 3B + C\right)\left(\frac{d^2\phi_{az}}{dz^2}\frac{d\phi_{bz}}{dz} + \frac{d\phi_{az}}{dz}\frac{d^2\phi_{bz}}{dz^2}\right)\\
& + \left(\mu + \frac{A}{2} + B\right)\left(-k_b\frac{d^2\phi_{ax}}{dz^2}\phi_{bz} - k_b\frac{d\phi_{ax}}{dz}\frac{d\phi_{bz}}{dz}\right.\\
& \left. + k_a\frac{d\phi_{az}}{dz}\frac{d\phi_{bx}}{dz} + k_a\phi_{az}\frac{d^2\phi_{bx}}{dz^2}\right)
\end{aligned}
\tag{B.17}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{aNL5} =& i\left[\left(\mu + \frac{A}{2} + B\right)\left(-k_a\phi_{ax}\frac{d\phi_{bx}}{dz} + k_b\frac{d\phi_{ax}}{dz}\phi_{bx}\right)\right.\\
& + \left(\lambda + 2\mu + \frac{A}{2} + B\right) k_a k_b (\phi_{ax}\phi_{bz} + \phi_{az}\phi_{bx})\\
& + \left(\mu + \frac{A}{2} + B\right)\left(\frac{d\phi_{ax}}{dz}\frac{d\phi_{bz}}{dz} + \frac{d\phi_{az}}{dz}\frac{d\phi_{bx}}{dz}\right)\\
& \left. + \left(2\mu + \frac{A}{2} + B\right)\left(k_a\phi_{az}\frac{d\phi_{bz}}{dz} - k_b\frac{d\phi_{az}}{dz}\phi_{bz}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{B.18}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{aNL6} =& 2\left(\frac{\lambda}{2}+B+C\right)k_a k_b \phi_{ax}\phi_{bx} + 2\left(\frac{\lambda}{2}+\mu+\frac{A}{4}+\frac{B}{2}\right)\frac{d\phi_{ax}}{dz}\frac{d\phi_{bx}}{dz} \\
& -2\left(\frac{\lambda}{2}+\mu+\frac{A}{4}+\frac{B}{2}\right)k_a k_b \phi_{az}\phi_{bz} \\
& +(\lambda+2B+2C)\left(k_a\phi_{ax}\frac{d\phi_{bz}}{dz} - k_b\frac{d\phi_{az}}{dz}\phi_{bx}\right) \\
& -2\left(\frac{3}{2}\lambda+3\mu+A+3B+C\right)\frac{d\phi_{az}}{dz}\frac{d\phi_{bz}}{dz} \\
& +\left(\mu+\frac{A}{2}+B\right)\left(-k_b\frac{d\phi_{ax}}{dz}\phi_{bz}+k_a\phi_{az}\frac{d\phi_{bx}}{dz}\right)
\end{aligned}
\tag{B.19}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{bNL1} =& \quad 2i\left[-\left(\frac{3}{2}\lambda+3\mu+A+3B+C\right)k_a^3\phi_{ax}^2\right. \\
& + \left(\frac{\lambda}{2}+\mu+\frac{A}{4}+\frac{B}{2}\right)k_a\left(\frac{d\phi_{ax}}{dz}\right)^2 \\
& -\left(\mu+\frac{A}{2}+B\right)k_a^2\frac{d\phi_{ax}}{dz}\phi_{az} + \left(\frac{\lambda}{2}+\mu+\frac{A}{4}+\frac{B}{2}\right)k_a^3\phi_{az}^2 \\
& \left.-\left(\lambda+\frac{A}{2}+2B\right)k_a^2\phi_{ax}\frac{d\phi_{az}}{dz} - \left(\frac{\lambda}{2}+B\right)k_a\left(\frac{d\phi_{az}}{dz}\right)^2\right]
\end{aligned}
\tag{B.20}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{bNL2} =& i\left[\left(\lambda+2\mu+\frac{A}{2}+B\right)k_a\left\{\left(\frac{d\phi_{ax}}{dz}\right)^2+\phi_{ax}\frac{d^2\phi_{ax}}{dz^2}\right\}\right. \\
& -\left(\mu+\frac{A}{2}+B\right)k_a^2\left(\frac{d\phi_{ax}}{dz}\phi_{az}+\phi_{ax}\frac{d\phi_{az}}{dz}\right) \\
& +\left(\frac{\lambda}{2}+\mu+\frac{A}{2}+B\right)\left(\frac{d^2\phi_{ax}}{dz^2}\frac{d\phi_{az}}{dz}+\frac{d\phi_{ax}}{dz}\frac{d^2\phi_{az}}{dz^2}\right) \\
& \left.-\left(\frac{\mu}{2}+\frac{A}{2}+B\right)k_a\left\{\left(\frac{d\phi_{az}}{dz}\right)^2+\phi_{az}\frac{d^2\phi_{az}}{dz^2}\right\}\right]
\end{aligned}
\tag{B.21}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{bNL3} =& 2\left[-\left(\mu+\frac{A}{2}+B\right)k_a^2\phi_{ax}\frac{d\phi_{ax}}{dz}+\left(\lambda+2\mu+\frac{A}{2}+B\right)k_a^3\phi_{ax}\phi_{az}\right. \\
& \left.-\left(\mu+\frac{A}{2}+B\right)k_a\frac{d\phi_{ax}}{dz}\frac{d\phi_{az}}{dz}+\left(2\mu+\frac{A}{2}+B\right)k_a^2\phi_{az}\frac{d\phi_{az}}{dz}\right]
\end{aligned}
\tag{B.22}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{bNL4} =& -2\left(\frac{\lambda}{2}+B+C\right)k_a^2\phi_{ax}\frac{d\phi_{ax}}{dz}+2\left(\frac{\lambda}{2}+\mu+\frac{A}{4}+\frac{B}{2}\right)\frac{d\phi_{ax}}{dz}\frac{d^2\phi_{ax}}{dz^2} \\
&+2\left(\frac{\lambda}{2}+\mu+\frac{A}{4}+\frac{B}{2}\right)k_a^2\phi_{az}\frac{d\phi_{az}}{dz} \\
&-(\lambda+2B+2C)k_a\left(\frac{d\phi_{ax}}{dz}\frac{d\phi_{az}}{dz}+\phi_{ax}\frac{d^2\phi_{az}}{dz^2}\right) \\
&-2\left(\frac{3}{2}\lambda+3\mu+A+3B+C\right)\frac{d\phi_{az}}{dz}\frac{d^2\phi_{az}}{dz^2} \\
&-\left(\mu+\frac{A}{2}+B\right)k_a\left(\frac{d^2\phi_{ax}}{dz^2}\phi_{az}+\frac{d\phi_{ax}}{dz}\frac{d\phi_{az}}{dz}\right)
\end{aligned}
\tag{B.23}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{bNL5} =& i\left[\left(\mu+\frac{A}{2}+B\right)k_a\phi_{ax}\frac{d\phi_{ax}}{dz}-\left(\lambda+2\mu+\frac{A}{2}+B\right)k_a^2\phi_{ax}\phi_{az}\right. \\
&\left.+\left(\mu+\frac{A}{2}+B\right)\frac{d\phi_{ax}}{dz}\frac{d\phi_{az}}{dz}-\left(2\mu+\frac{A}{2}+B\right)k_a\phi_{az}\frac{d\phi_{az}}{dz}\right]
\end{aligned}
\tag{B.24}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{bNL6} =& -\left(\frac{\lambda}{2}+B+C\right)k_a^2\phi_{ax}^2+\left(\frac{\lambda}{2}+\mu+\frac{A}{4}+\frac{B}{2}\right)\left(\frac{d\phi_{ax}}{dz}\right)^2 \\
&+\left(\frac{\lambda}{2}+\mu+\frac{A}{4}+\frac{B}{2}\right)k_a^2\phi_{az}^2-(\lambda+2B+2C)k_a\phi_{ax}\frac{d\phi_{az}}{dz} \\
&-\left(\frac{3}{2}\lambda+3\mu+A+3B+C\right)\left(\frac{d\phi_{az}}{dz}\right)^2-\left(\mu+\frac{A}{2}+B\right)k_a\frac{d\phi_{ax}}{dz}\phi_{az}
\end{aligned}
\tag{B.25}
$$

付録 C

振幅方程式の係数

可解条件から導出される振幅方程式の係数は以下の式で表せられる．

$$
\begin{aligned}
C_{j1} =& \mu_r \phi_{jx}(h)\phi_{jz}(h) - \mu_r \phi_{jx}(-h)\phi_{jz}(-h) \\
& -\lambda_r \phi_{jx}(h)\phi_{jz}(h) + \lambda_r \phi_{jx}(-h)\phi_{jz}(-h) \\
& -2(\lambda_r + 2\mu_r)k \int_{-h}^{h} \phi_{jx}^2 dz - (\lambda_r + \mu_r) \int_{-h}^{h} \phi_{jx} \frac{d\phi_{jz}}{dz} dz \\
& +(\lambda_r + \mu_r) \int_{-h}^{h} \frac{d\phi_{jx}}{dz} \phi_{jz} dz - 2\mu_r k \int_{-h}^{h} \phi_{jz}^2 dz
\end{aligned} \tag{C.1}
$$

$$
\begin{aligned}
D_j =& -\hat{\mu}_i \phi_{jx}(h) \frac{d\phi_{jx}(h)}{dz} + \hat{\mu}_i k \phi_{jx}(h)\phi_{jz}(h) \\
& +\hat{\mu}_i \phi_{jx}(-h) \frac{d\phi_{jx}(-h)}{dz} - \hat{\mu}_i k \phi_{jx}(-h)\phi_{jz}(-h) \\
& -\hat{\lambda}_i k \phi_{jx}(h)\phi_{jz}(h) - (\hat{\lambda}_i + 2\hat{\mu}_i)\phi_{jz}(h) \frac{d\phi_{jz}(h)}{dz} + \hat{\lambda}_i k \phi_{jx}(-h)\phi_{jz}(-h) \\
& +(\hat{\lambda}_i + 2\hat{\mu}_i)\phi_{jz}(-h) \frac{d\phi_{jz}(-h)}{dz} \\
& -(\hat{\lambda}_i + 2\hat{\mu}_i)k^2 \int_{-h}^{h} \phi_{jx}^2 dz - (\hat{\lambda}_i + \hat{\mu}_i)k \int_{-h}^{h} \phi_{jx} \frac{d\phi_{jz}}{dz} dz \\
& +\hat{\mu}_i \int_{-h}^{h} \phi_{jx} \frac{d^2\phi_{jx}}{dz^2} + (\hat{\lambda}_i + \hat{\mu}_i)k \int_{-h}^{h} \frac{d\phi_{jx}}{dz} \phi_{jz} dz \\
& +(\hat{\lambda}_i + 2\hat{\mu}_i) \int_{-h}^{h} \frac{d^2\phi_{jz}}{dz^2} \phi_{jz} dz - \hat{\mu}_i k^2 \int_{-h}^{h} \phi_{jz}^2 dz
\end{aligned} \tag{C.2}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{j2} =& \int_{-h}^{h} [\phi_{jx}(z)\{C_{jNL1}(z) + C_{jNL2}(z)\}] dz \\
& - \int_{-h}^{h} [i\phi_{jz}(z)\{C_{jNL3}(z) + C_{jNL4}(z)\}] dz \\
& -\phi_{jx}(h) C_{jNL5}(h) + \phi_{jx}(-h) C_{jNL5}(jh) \\
& +i\phi_{jz}(h) C_{jNL6}(h) - i\phi_{jz}(-h) C_{jNL6}(-h)
\end{aligned} \tag{C.3}
$$

ここで，Eq. (C.1) は Eq. (3.2.11) に対応し，Eq. (C.2) は Eq. (3.2.12) に対応し，$j = a, b$ である．4, 5 章で示した通り，$C_{j1} (j = a, b)$ は伝播距離に対する振幅の変化のし難さ，D_j は減衰の効果，C_{j2} は非線形連成の大きさをそれぞれ表す．

付録 D

内部共振現象に起因した減衰の無いガイド波の伝播距離依存性の導出

Eq. (4.6.3) の微分方程式において，Eq. (4.6.2) を用いて，x_1 と b の変数変換を行うと，

$$a^2 b\cos\gamma\frac{d\gamma}{db} = -\left\{\frac{2C_{a2}C_{b1}}{C_{a1}C_{b2}}b^2 + a^2\right\}\sin\gamma + \frac{2C_{b2}}{C_{b1}}\hat{\rho}b \tag{D.1}$$

となる．$\nu = -C_{a2}C_{b1}/C_{a1}C_{b2}$ の関係を用いて書き直すと以下の関係式を得る．

$$a^2 bd(\sin\gamma) + 2ab\sin\gamma da + a^2\sin\gamma db - \frac{2C_{b1}}{C_{b2}}\hat{\rho}bdb = 0 \tag{D.2}$$

Eq. (D.2) は

$$d(a^2 b\sin\gamma) - \frac{C_{b1}}{C_{b2}}\hat{\rho}d(b^2) = 0 \tag{D.3}$$

とも書き表せ，Eq. (D.3) を積分すると以下の方程式を得る．

$$a^2 b\sin\gamma - \frac{C_{b1}}{C_{b2}}\hat{\rho}b^2 = L \tag{D.4}$$

ここで，L は積分定数である．Eq. (D.4) は a, b, γ の 3 変数のうち，a, b は Eq. (4.6.4) より媒介変数 ξ を用いて 1 変数で表すことができる．

$$a^2 = E\xi \tag{D.5}$$

$$\nu b^2 = E(1-\xi) \tag{D.6}$$

Eq. (4.6.1) と Eqs. (D.4)-(D.6) を用いて，γ を消去し，以下の ξ の微分方程式を得る．

$$\begin{aligned}\frac{C_{a1}^2}{C_{a2}^2}\left(\frac{d\xi}{dx_1}\right)^2 =& E^3\xi^2(1-\xi) - \left\{L + \frac{C_{b1}E(1-\xi)}{C_{b2}\nu}\hat{\rho}\right\}^2 \\ =& (\xi_3-\xi)(\xi-\xi_2)(\xi-\xi_1)\end{aligned} \tag{D.7}$$

ここで，Eq. (D.7) において，$\xi_3 - \xi = (\xi_3 - \xi_2)\sin\chi^2$ と変数変換を行い，x と χ の変数分離をし，積分を実行すると，

$$\kappa(x - X_0) = \int_0^{\chi} \frac{d\chi}{\sqrt{1 - \eta^2 \sin\chi^2}} \tag{D.8}$$

を得る．ここで，$\eta = \sqrt{(\xi_3 - \xi_2)/(\xi_3 - \xi_1)}$，$X_0$ は $\chi = 0$ に対応する定数，$\kappa = \epsilon C_{a2}\sqrt{E(\xi_3 - \xi_1)}/2C_{a2}\sqrt{\gamma}$ である．Eq. (D.8) はヤコビの楕円関数を用いて以下のようにも表せられる．

$$\sin\chi = \mathrm{sn}[\kappa(x - X_0); \eta] \tag{D.9}$$

Eqs. (D.5), (D.9) より，

$$\frac{a^2}{E} = \xi = \xi_3 - (\xi_3 - \xi_2)\mathrm{sn}^2[\kappa(x - X_0); \eta] \tag{D.10}$$

となり，a, b はヤコビの楕円関数を用いて以下のように表すことができる．

$$a = \sqrt{\xi_3 E} - \sqrt{(\xi_3 - \xi_2)E}\,\mathrm{sn}[\kappa(x - X_0); \eta] \tag{D.11}$$

$$b = \sqrt{\frac{E}{\nu}} - \sqrt{\frac{\xi_3 E}{\nu}} + \sqrt{\frac{(\xi_3 - \xi_2)E}{\nu}}\,\mathrm{sn}[\kappa(x - X_0); \eta] \tag{D.12}$$

$\hat{\rho} = 0$ の場合は，Eq. (D.7) より $L = 0$ の場合のみ，3 つ (重解を含む) の $\xi_i (i = 1, 2, 3)$ を取り得る．したがって，変数変換は以下のように行う．

$$\xi = \mathrm{sech}^2\phi \tag{D.13}$$

Eq. (D.13) の変数変換を Eq. (D.7) に適用すると，

$$\frac{d\phi}{dx_1} = \kappa \tag{D.14}$$

となり，a, b は

$$a = \sqrt{E\xi} = \sqrt{E}\,\mathrm{sech}[\kappa(x - X_0)] \tag{D.15}$$

$$b = \sqrt{\frac{E}{\nu}}\tanh[\kappa(x - X_0)] \tag{D.16}$$

と双曲関数を用いて表すことができる．