学位論文　博士（理学）

四つの超電荷を持つ四次元共形超重力理論の統一的定式化

2018 年 2 月

慶應義塾大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻

横倉　諒

論文要旨

超重力理論は、超対称性と呼ばれるボソンとフェルミオンの入れ替え対称性を持った一般相対性理論である。この理論は暗黒物質の性質や量子重力理論の基本的自由度など、自然界の基本法則を探る素粒子論の抱える未解決問題を説明する有望な候補である。

一方で、超重力理論は多数の超対称なボソンとフェルミオンの組を重力場中で扱うため、作用の構成が複雑である。これを解決する手法は大別して 2 つある。1 つは超対称な組を統一して扱う「超空間」を用いる手法である。もう 1 つは共形超重力理論における「テンソル算法」で、スケール対称性を加えた超共形対称性で重力の自由度を拘束する。これらは等価であるが、両者の対称性が一見異なるため、その対応は複雑である。

近年、2 つの手法を統一した「共形超空間」が考案された。共形超空間は従来の超空間との対応は知られている一方、共形超空間にのみに作用する特別な制限があるという議論より、テンソル算法との具体的関係は未知のままであった。

本論文では、共形超空間とテンソル算法が等価な定式化であることを示した。まず、先行研究で議論された共形超空間にのみ作用する特別な制限を、超共形対称性の観点から注意深く調べた結果、その制限は存在しないことが分かった。次に、両定式化における物理的な力学変数である重力場、物質場、ゲージ場の対応を具体的に構成することで、物理的自由度を等価に扱えることを示した。そして、超重力理論の作用を構成するために用いられるカイラル射影と超共形不変な積分公式の両手法間の関係を具体的に示した。

物理的自由度などの対応を示したのち、共形超空間からテンソル算法を得られることを、共形超空間上の非物理的自由度をゲージ固定することで示した。ここで非物理的自由度とは、超対称なボソンとフェルミオンの組を統一的に扱うために、共形超空間上に導入された余分な自由度のことである。一方で、この自由度は超空間を用いていないテンソル算法には現れていない。この余分な自由度は共形超空間上のゲージ自由度を用いて固定できることをあらわに示した。

最後に共形超空間から超重力理論の作用を得るためのゲージ固定について議論した。このゲージ固定には、テンソル算法を経由するゲージ固定と、従来の超空間形式を経由するゲージ固定の 2 つがある。これらのゲージ固定の等価性を、具体的なゲージ固定条件の対

応を提示することで示した。

本論文で得られた結果から、超重力理論の作用の構成において、共形超空間とテンソル算法を統一的に扱うことが可能になった。この共形超空間とテンソル算法の間の具体的な対応とゲージ固定による関係を用いることで、従来の定式化では技術的に困難だった新たな相互作用の構成や、散乱振幅のような観測量の計算を、簡潔に遂行できることが期待される。

Thesis abstract

In particle physics, supergravity (SUGRA) is a plausible candidate for a theory explaining unsolved problems such as the nature of dark matter and fundamental degrees of freedom in quantum gravity. Here, SUGRA is general relativity possessing supersymmetry which relates bosons and fermions.

On the other hand, construction of SUGRA actions is complicated due to a large number of dynamical valuables of bosons and fermions. Two methods are known to avoid such complexities. One is "superspace formalism," which describes a pair of bosons and fermions in a unified way using "superspace". The other is "tensor calculus" based on conformal SUGRA, which constrains gravitational degrees of freedom by superconformal symmetry. Here, the superconformal symmetry is realized by further imposing scale invariance on SUGRA. Though two formulations are equivalent to each other, the relation between them is not apparent because their symmetries differ by the scale symmetry.

Recently, a new formulation of "conformal superspace formalism" was proposed. It simply unifies the above two methods. The relation of conformal superspace to the conventional superspace was revealed. However, such a concrete relation between conformal superspace and the tensor calculus has still remained unknown because of a special restriction acting only on conformal superspace.

In this thesis, we show the equivalence between conformal superspace and the tensor calculus. We carefully examine the special restriction on conformal superspace in the viewpoint of the superconformal symmetry, and find that such a restriction is absent. We establish the concrete relations of physical variables of gravitational, matter and gauge fields between two formulations. We also investigate the correspondences of chiral projection and superconformally invariant integrations. We obtain the tensor calculus from conformal superspace by gauge-fixing unphysical variables in conformal superspace. Such variables are introduced to unify pairs of bosons and fermions, and do not appear in the tensor calculus without superspace. We explicitly show that the unphysical valuables

are fixed by gauge freedom in conformal superspace. Finally, we show in conformal superspace that the way to obtain SUGRA actions via the tensor calculus is equivalent to the way via the conventional superspace. The equivalence is exhibited by showing the explicit correspondence of the two gauge-fixing conditions.

From the results of the thesis, we can use conformal superspace and the tensor calculus in a unified way to formulate SUGRA actions. These correspondences and the relations by gauge-fixing conditions allow us to construct new interactions and calculate physical observables like scattering amplitudes more simply than the previous formulations.

目 次

第 1 章　序論

1.1　一般相対性理論と素粒子標準模型を超える理論としての超重力理論

一般相対性理論と素粒子標準模型は、現在までに理論的にも実験・観測的にも成功した理論である。一般相対性理論は、重力を時空のゆがみとして幾何学的に記述する。素粒子標準模型は、身の回りの物質とその間に働く重力以外の力の最小単位だと考えられている素粒子の模型である。この模型は電子やニュートリノなどのレプトン、原子核を作るクォーク、これらの間に働く電磁気力・強い力・弱い力を伝えるゲージ粒子、そしてこれらの素粒子に質量を与えるヒッグス粒子からなる。

しかし、これらの理論にも不満足な点がある。例えば、宇宙における銀河団の大規模構造の起源として存在が示唆されている暗黒物質は、現在のところ素粒子標準模型では説明できていない。また、素粒子標準模型の 3 つの力の強さを表す結合定数の関係が明らかでない。さらに、素粒子標準模型における基礎的な自由度は電子や光子などの素粒子である一方、量子化した重力理論を記述する基礎的な自由度はわかっていない。従ってこれらの不満足な点全てを無矛盾に解決する理論が求められる。

そのような理論の候補として 4 次元 $\mathcal{N} = 1$ 超重力理論がある [1,2]。超重力理論は超対称性を持つ一般相対性理論である。ここで超対称性とは、スピン半整数のフェルミオンとスピン整数のボソンを入れ替える対称性である [3]。また、$\mathcal{N}$ は理論に存在する超対称性電荷の数を表し、$\mathcal{N} = 1$ は 4 次元時空ではその数が 4 つである理論を意味する。超対称性電荷の数は理論的には一意ではないが、右巻きフェルミオンと左巻きフェルミオンが異なる量子数を持つ、実験と整合するカイラルな理論の場合は 4 つである。4 つを超えた数の場合はかならず左巻きフェルミオンに対し同じ量子数を持った右巻きフェルミオンが出てしまう。

一般相対性理論と素粒子標準模型に超対称性を新たに導入することで、以下のような利点がある。まず、超対称性がボソンとフェルミオンの間の対称性であることから、もし超対称性が存在すれば、標準模型にない新たな粒子の存在が示唆される。すなわち、標準

模型の素粒子やスピン 2 のボソンであると考えられている重力に対して、超対称パートナーと呼ばれるスピンの異なる粒子が存在することが予言される。そしてこれらの予言された素粒子の一部は電荷を持っておらず光子と直接相互作用しないので、暗黒物質の候補となる可能性がある [4]。 また、標準模型に超対称性を導入した模型では、電磁気力・強い力・弱い力の結合定数がおよそ 10^{16} GeV でほぼ一致し、3 つの力の統一が示唆される [5]。さらに、超対称性を持つゲージ理論では非摂動効果を対称性、特に正則性から解析できる場合がある [6]。

超重力理論はさらに重力の量子論と密接な関係があると考えられている。なぜなら、超対称性を持つ重力理論では必然的にフェルミオンという量子論の概念が導入されるからである。実際、超重力理論は量子重力理論の候補と考えられている超弦理論の低エネルギー有効理論の一つとしても知られている。加えて、重力の量子論が重要であると考えられているブラックホールの量子的側面も、超重力理論を用いて解析できる場合がある [7–9]。

ただし、超対称性が仮に自然界に存在するならば、我々のエネルギースケールでは破れていなければならない。なぜなら (平坦な時空上では) 超対称な組は同じ質量を持つが、例えば電子と同質量のボソンは現在までに発見されていないからである。

1.2　超重力理論の定式化

このように、一般相対性理論と標準模型を超える物理の候補としても、超弦理論の有効理論としても超重力理論は重要である。ここでは超重力理論の構成について考える。変分原理に従えば、理論は作用を与えることで決まる。この作用は、系の持つべき対称性によって制限される。超重力理論の対称性は超ポアンカレ対称性であるため、超重力理論の作用は超ポアンカレ対称性を守るように構成すれば良い。ここで、超ポアンカレ対称性とは、一般相対性理論のゲージ対称性である時間と空間の並進およびローレンツ対称性からなるポアンカレ対称性に、超対称性を加えた対称性である。

超重力理論における作用の定式化の歴史を、本論文と直接関係し現象論的応用において重要と考えられるものに関して以下にまとめる。まず、1974 年に Wess と Zumino [3] によって初めて超対称性が 4 次元時空に導入されたのち、物質を含まない超重力理論の定式化は 1976 年に Freedman と van Nieuwenhuizen [1] および Deser と Zumino [2] によって行われた。さらに電子やニュートリノなどの物質が結合した場合の超重力理論の定式化を Cremmer たち [10] が整備した。そして標準模型を埋め込むことができる Yang–Mills (YM) ゲージ場を含んだ超重力理論は Cremmer たち [11], Kugo と Uehara (KU) [12], Bagger [13]

によってなされた。ここでYM ゲージ場とは、標準模型において力を伝える素粒子を記述する場で、非可換ゲージ理論に基づく。しかし、上記の超重力理論の作用の構成方法は一般相対性理論のそれよりも複雑なことが知られている。その理由は大きく2つあると考えられる。一つは超対称性によって新たな場、すなわち力学変数が多数現れるからである。もう一つは、これらの新たな場を含めた多数の場が重力と結合することが挙げられる。

上記の作用が超重力理論のこれらの複雑さを超えて構成できたのは、多変数を統一して扱うような超重力理論の定式化の研究が発展したからだと考えられる。このような定式化で歴史的に重要なものが2つある。一つは重力を含まない場合では広く知られている「超空間」を用いた定式化である [14–16] (レビューおよび教科書は [17–19])。ここで超空間とは可換なボソン的座標で張られる時空 (x) に反可換なフェルミオン的座標 (θ) を形式的に導入した超対称な空間 (x, θ) を意味する。超空間のフェルミオン的座標を用いることで、ボソンとフェルミオンを統一的に扱うことができる。実際、文献 [13] においてYM ゲージ場と物質が結合した超重力理論で示されたように超重力理論の作用は超対称性が明白な超空間上の積分で書くことが可能となる。

もう一つの定式化は共形超重力理論に基づく「テンソル算法」と呼ばれる[*1] [20–25] (レビューおよび教科書は [26–29])。この定式化では超重力理論を超ポアンカレ対称性から超共形対称性に拡張する。ここで超共形対称性とは、スケール変換を含む相似変換の元での対称性である共形対称性に超対称性を導入したものである。この超共形対称性のゲージ理論として構成される重力理論を共形超重力理論と言う。この共形超重力理論の元で、超対称性変換の規則を与えて作用を構成する方法をテンソル算法と呼ぶ。共形超重力理論では、拡張された対称性によって重力の自由度が拘束されるため、重力の扱いが簡潔になる。元の超重力理論は、超共形対称性の中のスケール変換の自由度を固定することで得ることができる。このスケール変換の自由度に対する固定条件を用いることで、重力の運動項を表す Einstein–Hilbert (EH) 作用を簡潔に導出できることが KU [12] によって見出された。以降は、超ポアンカレ対称性に基づく超重力理論を共形超重力理論と明確にする場合には「ポアンカレ超重力理論」と呼ぶことにする。

これら2つの定式化は現在においても共に広く用いられている。これらがどちらかに統一されていない大きな理由は2つあると考えられる。一つは超重力理論の定式化がそもそも複雑であるためである。特にYM ゲージ場と物質が結合したポアンカレ超重力理論の

[*1] 正確には超共形テンソル算法 (superconformal tensor calculus) と超ポアンカレテンソル算法と分けて呼ぶべきだが、本論文では主に共形超重力理論を扱うため、超共形テンソル算法を単にテンソル算法と呼ぶことにする。

作用は教科書 [18] で20行以上におよぶ。もう一つは両者の特長は相補的であることによる。テンソル算法は従来の場の理論のようにボソンとフェルミオンを別に扱うため、超空間形式のように超対称性が明白であるというわけではない。また、超空間形式は超共形対称性を用いていないため作用の導出において EH 作用を直接導くことが難しい。そのため、超重力理論の研究においては、その局面によって有効な定式化を選ぶという技術的な選択が求められる。

そのような背景から、一方の定式化の特長をもう一方に取り入れようと、これらの定式化を発展させる研究がなされた。例えば、超空間形式において超対称性を明白に扱える理由は、超空間上に定義された場である超場と、その場に対して超対称性変換をフェルミオン的座標の並進として与えるフェルミオン的微分が導入されているからである。そのような超場やフェルミオン的微分をテンソル算法の多重項で表示する方法は KU [30] によって行われた。

一方、テンソル算法における特長は、スケール変換を用いて EH 項を簡潔に得られるところであった。そのような利点を持つ超空間形式の定式化を Binétruy たちが見出した [31]。この定式化は物質場の運動項を導くケーラー・ポテンシャル (第4章参照) を用いた $U(1)$ ゲージ場を扱うので「ケーラー超空間」 (Kähler superspace) と呼ばれる。さらに、YM ゲージ場が結合した場合は、「等長ケーラー超空間」 (isometric Kähler superspace) と呼ばれる [32]。等長ケーラー超空間の他にも、超共形対称性のうちのスケール対称性を部分的に導入した定式化もある [33]。

最終的に2つの定式化の利点を用いるためには、両者の簡潔で一般的な対応が求められる。しかしテンソル算法と超空間で対称性が一見異なるため、その対応は複雑であった。そこで両者の長所を直接組み合わせて、超空間で超共形対称性を扱う定式化が考えられる。しかしこの定式化には、テンソル算法には存在しなかった特別な制限がつくことが KU [30] によって議論された。この特別な制限は、超空間上のフェルミオン的微分が作用できる場が満たすべき超共形対称性の元での変換則に対するものである (詳細は (4.56) 式参照)。この制限の存在は、超空間で超共形対称性を扱う定式化でテンソル算法と等価なものを構成することが困難であることを意味する。

1.3　共形超空間形式

ところが、その困難だと考えられていた超空間の定式化が Butter によってが提唱された [34]。この定式化を本論文では「共形超空間形式」と呼ぶ。また、以降はポアンカレ超

重力理論の超空間形式を共形超空間形式と区別するために「ポアンカレ超空間形式」と呼ぶ*2。この定式化は、Howe [33] の定式化と異なり、対称性として超共形対称性全てをゲージ化し、そのため用いる対称性はテンソル算法と同じものである。この定式化は超共形対称性を超空間に導入するため構成が簡単であるのみならず、フェルミオン的微分である超共形共変スピノル微分 ∇_α の反交換関係が重力を含まない超対称性理論の時と同じ構造になる*3：

$$\{\nabla_\alpha, \nabla_\beta\} = \{\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}, \bar{\nabla}_{\dot{\beta}}\} = 0, \quad \{\nabla_\alpha, \bar{\nabla}_{\dot{\beta}}\} = -2i\nabla_{\alpha\dot{\beta}}. \tag{1.1}$$

ここで、$\alpha, \dot{\alpha}$ はフェルミオン的微分の持つスピン自由度を表し、$\nabla_{\alpha\dot{\beta}}$ は超共形共変ベクトル微分をスピン自由度を用いて表したものである (詳細は第 4 章参照)。さらに文献 [34] では、物質場が結合した共形超空間形式のゲージ固定で従来のポアンカレ超空間形式 [18]、ケーラー超空間形式 [31]、Howe によるスケール不変な超空間形式 [33] を得ることを示した。

しかし、共形超空間には次の未解決の問題が存在する。

1. 共形超空間形式とテンソル算法の整合性が理解されていない。
2. カイラル compensator 形式で YM ゲージ場と物質場が結合した共形超重力理論の作用が構成されていない。
3. 共形超空間形式からテンソル算法を得るためのゲージ固定が具体的に明らかにされていない。
4. 共形超空間形式からテンソル算法を経由してポアンカレ超重力理論を得る方法と、共形超空間形式からポアンカレ超空間形式を経由してポアンカレ超重力理論を得る方法との整合性が理解されていない。

これらについて以下で説明する。

まず、KU [30] によって議論されたフェルミオン的微分が作用できる場の超共形変換則に対する制限が、Butter [34] の共形超空間形式にも存在するかが理解されていない。仮にその特別な制限が存在しない場合、共形超空間をテンソル算法と超空間形式の両方の長

*2 超対称性の super- (超) は一回だけ使うのが慣例になっているようである。Superconformal superspace (超共形超空間) や、superconformal supergravity (超共形超重力理論) はそれぞれ conformal superspace および conformal supergravity と呼ばれる。

*3 ポアンカレ超重力理論でのスピノル微分の反交換関係は一般には 0 にならない。例えば $\{\nabla_\alpha, \nabla_\beta\}$ に対応する反交換関係はローレンツ変換を生成する [17]。

所を持った定式化として実際に使うならば、それらの間の一般的な対応を明らかにする必要がある。

2つめの問題について説明する。YMゲージ場は素粒子標準模型の3つの相互作用を記述するため、それが結合した作用を超重力理論で構成することは重要である。カイラルcompensator 形式は第4章で説明するカイラル compensator を用いた作用の構成法を意味する。この方法は YM ゲージ場と物質を含む超重力理論で最も広いクラスの模型を扱える定式化だと考えられており [35]、それを用いた作用はテンソル算法 [11,12,25] やポアンカレ超空間形式 [13] では知られている。しかし、共形超空間ではそれに対応する作用が構成されていない。そのため共形超空間でカイラル compensator を用いた定式化をすることが求められる[*4]。

3つめの問題は共形超空間形式からテンソル算法へのゲージ固定で、テンソル算法には現れない自由度が取り除かれているかが理解されていないことである。第1の不満足点がテンソル算法と共形超空間形式の具体的対応によって解決できたとする。しかし共形超空間にはテンソル算法に直接対応するものが一見存在しない余分な力学変数とゲージ自由度が一見存在している。この自由度は超空間のフェルミオン的座標に由来する。共形超空間形式とテンソル算法との対応を考えるならば、両定式間で物理的な自由度は一致していること、すなわちこれらの力学変数はテンソル算法で表される量であるか、そうでなければ余分なゲージ自由度を用いて消去されていることをあらわに確かめる必要がある。

第4の問題は、共形超空間形式からテンソル算法を経由してポアンカレ超重力理論を得る方法と、共形超空間形式からポアンカレ超空間形式を経由してポアンカレ超重力理論を得る方法との整合性がはっきりと理解されていない点である。これらの2通り方法で得られる結果は同じであるが、一見異なるゲージ条件が超空間上のゲージ場に課されている。よってそれらのゲージ条件がどのように無矛盾になっているかをあらわに確かめる必要がある。

---

*4 以下の特別な場合については行われている。一つはカイラル compensator ではなく、系が $U(1)_R$ 対称性と呼ばれる対称性を持つような場合に対して用いることができる線形 (linear) compensator を用いた場合である [36]。もう一つはカイラル compensator を用いた pure Fayet-Iliopoulos $U(1)$ 系である [37]。Compensator についての文献は [24]、カイラル compensator に関連した定式化は文献 [22, 38, 39]、線形 compensator に関連した定式化については文献 [40] を参照。また、線形 compensator を用いた定式化がカイラル compensator 定式化の特別なクラスになることは文献 [35] でテンソル算法を用いて示された。また、高階微分系においてはカイラル compensator では困難だが線形 compensator では構成できる模型が例えば Aoki と Yamada によって知られている [41]。

1.4　本論文の目的

本論文では、上記の共形超空間形式に関する未解決問題を解決することで共形超空間、テンソル算法、ポアンカレ超空間形式の等価性を示すことを目的とする。本論文では大きく分けて 4 つの異なる定式化を扱う。それらの関係を図 1.1 で示した。

まず、第 1 の問題を解決するために共形超空間形式がテンソル算法と等価であることを示す。これは図 1.1 の矢印 I において、ゲージ固定なしに移りあえる部分の具体的な関係を与えることにあたる。

次に第 2 の問題を解決するために、共形超空間に YM ゲージ場を導入し、YM ゲージ場と物質が結合した超重力理論の作用を与える。この作用における超共形対称性のゲージ固定で既存のポアンカレ超空間形式、特に等長ケーラー超空間形式が得られることを示す。これは図 1.1 の矢印 II で表される。

そして第 3 の問題である共形超空間からテンソル算法を得るゲージ固定について議論する。これは図 1.1 の矢印 I にあたる。

これらポアンカレ超空間へのゲージ固定とテンソル算法へのゲージ固定について論じた後、第 4 の問題、図 1.1 の矢印 II+III と矢印 I+IV で表される共形超空間からポアンカレ超重力理論を得るための 2 通りのゲージ固定がどのように無矛盾となっているかを、具体的なゲージ条件を通じて議論する。

1.5　本論文の構成

本論文は次のように構成されている。まず、第 2 章から第 4 章までで、本論文の目的を議論するための前提となる事項についてまとめる。

第 2 章では一般相対性理論と共形重力理論とその関係について説明する。ここで共形重力理論とは一般相対性理論のゲージ対称性を拡張した共形対称性に基づく重力理論であり、共形対称性のゲージ理論として得ることができる。これは共形超重力理論を導入するために、必要な事項の一つである。特に compensator と呼ばれる場が共形重力理論から一般相対性理論を得る際に重要な役割を果たすことについて説明する。

第 3 章では共形超重力理論を導入するために必要なもう一つの事項である超対称性および超対称ゲージ理論についてまとめる。相対論的な場の理論の模型から始めて超対称性代数を導入する。次に超空間を導入し、超対称性理論が超空間上の幾何学として理解できることを説明する。そして、その超空間を用いて超対称ゲージ理論を構成する。この超対

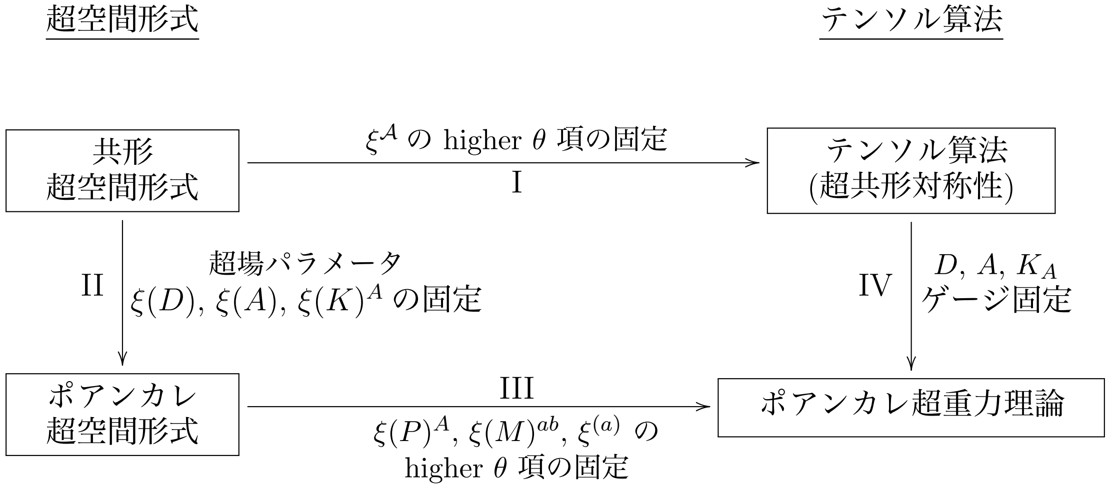

図 1.1: 4 つの超重力理論の定式化の関係図。超ポアンカレ対称性と超共形対称性それぞれに基づいた超空間形式とテンソル算法がある。ポアンカレ超重力理論を共形超空間形式から得るには、I+IV という経路をたどる方法と II+III という経路をたどる方法がある。ここで、ξ は超共形対称性と内部対称性のゲージ変換パラメータ超場である。詳細な定義は本文を参照。

称ゲージ理論の構成の手法は、共形超空間の構成のみならず、本論文の結果の一つである共形超空間における YM ゲージ場の導入に直接応用できる。

第 4 章では、共形超重力理論の導入を行う。まず超共形代数について説明した後、テンソル算法を用いた共形超重力理論の構成について説明する。次に 第 3 章で確認したことを用いて共形超空間を導入する。そしてテンソル算法では YM ゲージ場と物質が結合した超重力理論の作用を、共形超空間では先行研究で明らかにされている物質のみが結合した超重力理論の作用を構成し、それぞれでポアンカレ超重力理論を得るためのゲージ条件について述べる。

次に、第 5 章から第 8 章で本論文の目的であるテンソル算法と共形超空間形式の等価性、および共形超空間における YM ゲージ場の導入、そして共形超空間におけるゲージ固定について議論する。ここでの内容は、筆者の博士課程の研究で得られたものであり、本論文の骨子となっている文献 [42, 43] に基づく。

第 5 章では、本論文の目的の一つであるテンソル算法と共形超空間形式の等価性について述べる。まず、両形式間で作用を構成するために必要な諸量の対応を構築する。具体的には、重力を記述するために用いる超共形対称性に属するゲージ場および曲率、曲率の

拘束条件、超共形変換則、物質場や YM ゲージ場を記述するために用いる超共形多重項、カイラル射影、超共形不変な作用 $\boldsymbol{u}$-associated 微分、物質場のみが結合した共形超重力理論での超共形対称性のゲージ固定の対応を構成する。その中で、KU によって議論された共形超空間の共変スピノル微分には特別な制限が存在しないことについても言及する。

第 6 章では、共形超空間に YM ゲージ場を導入し、YM ゲージ場と物質場が結合した超重力理論の作用を構成する。そして、超空間において超共形ゲージ対称性を固定した結果、等長ケーラー超空間が得られることを示す。また、ゲージ固定を変えない YM ゲージ変換の変形についても論ずる。

第 7 章では、共形超空間からテンソル算法を得るためのゲージ固定について論ずる。すなわち、共形超空間のフェルミオン的座標に由来した、テンソル算法では直接表示されない余分な力学的自由度とゲージ自由度に注目する。これらの余分な力学的自由度は余分なゲージ自由度によって固定されるか、もしくはテンソル算法で表される量で書くことができることを具体的に確かめる。

第 8 章では、YM ゲージ場と物質場が結合した超重力理論において標準的な EH 項を与えるゲージ固定の対応を調べる。そして、共形超空間からポアンカレ超重力理論を得るための 2 通りのゲージ固定がどのように整合しているかを、具体的なゲージ条件を通じて議論する。

第 9 章で本論文の結論と今後の展望を述べる。

付録 A では、本論文で用いる記法についてまとめた。テンソル算法では、文献 [30] をはじめ、慣習上ユークリッド計量 $\delta_{ab} = (1,1,1,1)$ と虚時間 $x^4 = it$ を用いる記法を用いるものが多い (物理的にはミンコフスキー計量と実時間を用いた記法と変わらない) が、それらの間の対応についてもまとめた。

付録 B では超共形多重項の超対称性変換則 (Q 変換則) の具体形をまとめた。

付録 C では、第 5 章で超共形多重項とカイラル射影の対応を示す際の詳細な計算をまとめた。

付録 D では、共形超空間形式を用いた応用として、テンソル階層性を持つテンソルゲージ理論の構成をまとめた。共形超空間を用いることで、通常の超重力理論の枠組みでは構成することが複雑であるテンソルゲージ理論を、重力を含まない超対称性理論の場合と同じように構成することができる。この付録の内容も、筆者の博士課程での研究成果 [44,45] に基づく。

本論文では、換算プランク定数 $\hbar$ と光速度 c を 1 にとる自然単位系 $\hbar = 1,\, c = 1$ に加えて、換算プランク質量 $M_{\mathrm{Pl}} = \sqrt{\hbar c/8\pi G_N} \simeq 2.4 \times 10^{18}$ GeV を 1 にとる単位系を用い

る。ここで G_N は万有引力定数である。

第2章　共形重力理論

本章では共形重力理論と、共形重力理論を用いた一般相対性理論を構成する手続きを文献 [29] に従って確認する。この構成の手続きは共形超空間を用いた超重力理論の構成に直接関わる。

一般相対性理論は、特殊相対性理論における時空の対称性であるポアンカレ対称性を、局所的対称性として扱ったゲージ理論として構成される。ここでポアンカレ対称性とは、特殊相対性理論における時間と空間を等価に扱うミンコフスキー時空で、長さを変えない並進・回転・ローレンツブースト変換の元での対称性である。後述の共形重力理論と区別するために、あえて対称性の名前を用いて一般相対性理論をポアンカレ重力理論と呼ぶことにする。

一方で、共形重力理論は共形対称性のゲージ理論として構成される。ここで共形対称性とはポアンカレ対称性にスケール変換を加えた角度を変えない変換の元で不変な対称性である。ポアンカレ対称性を共形対称性に拡張すると次のような技術的な利点がある。のちの第 4 章で説明するように、共形超重力理論では、物質場が結合した超重力理論において標準的な EH 項をゲージ固定で直接簡潔に与えることができる。一方でポアンカレ超重力理論の枠組みでは、標準的な EH 項を得るためには技術的に複雑な四脚場などの場のリスケールを行う必要がある。

ただし、超重力理論で行う場合は、扱う対称性が共形対称性から超共形対称性、およびポアンカレ対称性が超ポアンカレ対称性となるため、重力と超対称性を同時に考える技術的な複雑さが生じる。そのため、ここでは超共形対称性よりも簡単な共形対称性を用いて物理的な重力理論を得る概念的な手続きをここで理解する。この手続きにおける考え方は、のちの第 4 章で行う共形超重力理論とそれを用いたポアンカレ超重力理論の構成において直接用いることができる。

以下にここで扱う理論およびその説明の概要をまとめる。まずポアンカレ重力理論を考える。この理論は局所ポアンカレ対称性のゲージ理論として構成される。この対称性を記述する演算子はのちの (2.7) 式および (2.8) 式で定義する。ポアンカレ重力理論では重力

の運動項は EH 作用

$$S_{\mathrm{EH}} = -\tfrac{M_{\mathrm{Pl}}^2}{2}\int d^4xeR \tag{2.1}$$

で記述される。ここで、e は四脚場の行列式で作られる密度場であり R はリッチ・スカラーである。それぞれの後の (2.36) 式および (2.34) 式で定義を与える。本章ではスケール依存性を理解するために換算プランク質量 M_{Pl} をあらわに書いておく。

ポアンカレ重力理論の次に共形重力理論を考える。前述の通り共形対称性とはスケール変換などの角度を変えない変換で記述される対称性で、共形重力理論は共形対称性のゲージ理論として構成される。ここで、共形対称性の重要な特徴は角度と距離を変えないポアンカレ対称性を部分対称性として含むことである。このため共形重力理論はポアンカレ対称性のゲージ理論として構成されるポアンカレ重力理論を何らかの意味で含んでいると考えられる。

しかし、EH 項をそのままでは共形不変な作用に導入することはできない。この理由は以下の通りである。共形対称性はポアンカレ対称性よりも広い対称性であるため、共形重力理論はポアンカレ重力理論に比べてより厳しい対称性で制限されている。実際、共形重力理論ではポアンカレ重力理論で重力の運動項を記述するための EH 項をそのままでは作用に導入することができない。なぜなら、リッチ・スカラーは質量次元が 0 の計量と質量次元が +1 の空間微分からなる、質量次元 +2 の量であるからである。

共形重力理論の枠組みでポアンカレ超重力理論を得るために、compensator を用いるという工夫がある。Compensator とは、共形重力理論において EH 項を人工的にスケール不変にする場のことである。大まかに compensator の役割を説明する。まず、EH 項の係数であるプランク質量 M_{Pl} をスケール変換する質量次元[*1]+1 の場 ϕ に格上げする：$M_{\mathrm{Pl}} \to \phi$。この時、EH 項は リッチ・スカラー に compensator が結合したものになる：

$$-\frac{M_{\mathrm{Pl}}^2}{2}\int d^4xeR \to -\frac{1}{2}\int d^4xe\phi^2R. \tag{2.2}$$

リッチ・スカラーのスケール変換則 $R \to e^{2\rho}R$ と四脚場のスケール変換則 $e \to e^{-4\rho}e$ に合わせて、compensator のスケール変換則を $\phi \to e^{\rho}\phi$ と約束し、この compensator のスケール変換まで含めて EH 項はスケール不変となるように構成する。ここで ρ は実パラメータである。

共形重力理論の EH 項 ϕ^2R からポアンカレ重力理論の EH 項 M_{Pl}^2R はスケール対称性をゲージ固定で破ることによって得ることができる。すなわち、実パラメータ $\rho(x)$ を用

[*1] 共形対称性を扱う時には、厳密には質量次元ではなく、場に対するスケール変換則を特徴付ける係数であるワイル・ウェイトを定義する。質量次元は場もパラメータも持つ概念であるが、ワイル・ウェイトは場に対して定義される概念である。

いた ϕ のスケール変換 $\phi(x) \to e^{\rho(x)}\phi(x)$ において、$e^{\rho(x)} = M_{\rm Pl}/\phi(x)$ とゲージ固定することで、スケール対称性が破れる。このとき、EH 項は $\phi^2 R \to M_{\rm Pl}^2 R$ となり、確かにポアンカレ重力理論の EH 項を得ることができる。本章では、EH 項を含む作用が共形重力理論で compensator の "運動項"

$$S = -\frac{1}{2}\int d^4 x e \phi \nabla^a \nabla_a \phi \tag{2.3}$$

から得られることを示す。ここで、∇_a は共形共変微分を表す。

2.1　ポアンカレ重力理論

ポアンカレ重力理論を時空のゲージ理論として定式化するために、曲がった時空の各点に時空の各点にポアンカレ対称性の構造を導入する。そのために計量テンソルとミンコフスキー計量を時空の各点で関係付ける四脚場を導入する。そして実際に四脚場を用いてポアンカレ対称性のゲージ理論としてポアンカレ重力理論を構成する。

2.1.1　計量と四脚場

ポアンカレ重力理論において重力は時空の歪みとして理解される。その歪みを表すための基本的な量は曲がった時空の中で線素を測るための計量テンソル g_{mn} $(m, n = 0, 1, 2, 3)$ である。計量テンソルを用いて、時空の線素 ds^2 は、

$$ds^2 = g_{mn}(x) dx^m dx^n \tag{2.4}$$

と書くことができる。計量は対称行列であるため、計量の行列式が負符号である限り、各点ごとに平坦な時空であるミンコフスキー時空の計量 $\eta_{ab} = (-1, +1, +1, +1)$ $(a, b = 0, 1, 2, 3)$ に実行列 $e(x)_m{}^a$ を用いて変換することができる：

$$g_{mn}(x) = e(x)_m{}^a e(x)_n{}^b \eta_{ab}. \tag{2.5}$$

ここで、ミンコフスキー計量から一般の計量への変換行列 $e_m{}^a$ $(a = 0, ..., 3)$ は四脚場 (tetrad もしくは vierbein) と呼ばれる。

ここで四脚場は添字 a で表される方向について、つまりミンコフスキー計量を持つ方向についてローレンツ変換共変であることに注意する。つまり、(一般に座標に依存して良

い) ローレンツ群の元 $\theta_a{}^b(x)$ を用いて、$e_m{}^a(x) \to e_m{}^b(x)\theta_b{}^a(x)$ とした四脚場も、もとの四脚場と同じ計量を与える:

$$g_{mn}(x) = e_m{}^a(x)e_n{}^b(x)\eta_{ab} \to e_m{}^c(x)\theta_c{}^a(x)e_n{}^d(x)\theta_d{}^b(x)\eta_{ab} = e_m{}^c(x)e_n{}^d(x)\eta_{cd} = g_{mn}(x). \tag{2.6}$$

このように、曲がった時空に対して、時空の各点ごとにミンコフスキー時空の構造が導入されること、および時空の計量は四脚場によって特徴付けられることがわかった。これより、時空の局所構造を局所的なローレンツ対称性、さらには、時空の並進まで含んだ局所ポアンカレ対称性に関係づけることができる。

以降は、計量テンソルの持つ添字（多様体の局所座標の添字）を $m, n, ...$ で表し、アインシュタイン添字と呼ぶ。また、ミンコフスキー計量をもった座標系の座標の添字を $a, b, ...$ で表し、ローレンツ添字と呼ぶ。超空間ではさらにスピノル添字がでてくるが、それらについても呼び方は同じである。アインシュタイン添字とローレンツ添字は、四脚場で常に一方からもう一方に変換できる。また、今までは局所性を強調するために場に対して局所座標 x をあらわに $e_m{}^a(x)$ などと書いていたが、以降は省略して単に添字のみで $e_m{}^a$ と書くことにする。

2.1.2　ポアンカレ対称性のゲージ理論としての重力理論

ここまでは計量を四脚場で表すことを考えた。四脚場によって、時空の各点にミンコフスキー時空を導入できることがわかった。ミンコフスキー時空はポアンカレ対称性を持つため、曲がった時空に局所的にポアンカレ対称性を導入することができる。

ポアンカレ重力理論はこの局所的に定義されたポアンカレ対称性のゲージ理論として構成することができる。ここで、ポアンカレ重力理論をポアンカレ対称性のゲージ理論として構成する理由について改めて述べておく。その理由は、少なくとも本論文の文脈では、後に超重力理論を考えるからである[*2]。超重力理論においては、特に次の 2 点が重要になる。超重力理論を考える際には、超対称性のゲージ化を行う。一方で、後の (3.12) 式で説明するように超対称性は時空並進の演算子 P_a と超対称性代数 $\{Q, Q\} \sim P$ をなすので、超対称性のゲージ化は、時空並進のゲージ化を与える。もう一つは、半整数のスピンを持つ場と重力の結合を考える際には、以下で導入されるローレンツ変換に属するゲージ場

[*2] 超重力理論を考える以外にも、重力をエネルギー流に結合する外場と考える [46] 文脈において、エネルギー・運動量テンソルに結合するゲージ場として多脚場を考えるという応用方法がある [47–51]。

時空並進	ローレンツ
P_a	M_{ab}

表 2.1: ポアンカレ代数の演算子。

であるスピン接続を用いるからである。実際、超対称性に属するゲージ場であるグラヴィティーノはスピン 3/2 を持つ。

以下でポアンカレ代数のゲージ理論としてポアンカレ重力理論を構成することを詳しく説明する。まず、ポアンカレ対称性を記述するポアンカレ代数についてまとめておく。ミンコフスキー時空においては、計量テンソルは回転とローレンツブーストからなるローレンツ変換に対して不変である。ローレンツ変換の演算子は M_{ab} は次の代数をなす：

$$[M_{ab}, M_{cd}] = \eta_{bc}M_{ad} - \eta_{ac}M_{bd} - \eta_{bd}M_{ac} + \eta_{ad}M_{bc}. \tag{2.7}$$

さらに、時空並進の演算子 P_a はローレンツ変換でベクトルとして変換する：

$$[M_{ab}, P_c] = P_a\eta_{bc} - P_b\eta_{ac}. \tag{2.8}$$

このローレンツ変換 M_{ab} と時空並進 P_a のなす代数はポアンカレ代数と呼ばれる。これらの演算子を表 2.1 にまとめた。

局所ポアンカレ代数から重力理論を得るには次のように考える。まず、時空の各点にポアンカレ代数を局所内部対称性として導入する[*3]。局所対称性に対する共変性より、ポアンカレ代数に属するゲージ場が導入される。このゲージ場をポアンカレ代数の演算子 $X_{\mathcal{A}}$ に対して、

$$h_m := h_m{}^{\mathcal{A}} X_{\mathcal{A}} \tag{2.9}$$

と書く。ここで、本論文においては、$X_{\mathcal{A}}$ は考えている全ての対称性の演算子を表すことにする。その際は混乱を回避するために毎度その断りを書く。ここでは $X_{\mathcal{A}}$ はポアンカレ代数の演算子を表すが、共形重力理論を考えるときには $X_{\mathcal{A}}$ で共形代数の全ての (独立な) 演算子を、共形超重力理論では $X_{\mathcal{A}}$ で超共形代数の全ての (独立な) 演算子を表す。

ポアンカレ代数に属するゲージ場を次のようにとる。まず、並進 P_a に属するゲージ場を四脚場 $e_m{}^a$ にとる。そして、スピン接続と呼ばれるローレンツ変換 M_{ab} に属するゲージ

[*3] この局所内部対称性の自由度は接空間および余接空間とは別に導入する。これは曲がった時空においては接バンドルと余接バンドルに加え、ポアンカレ群のファイバーバンドルを導入するということもできる。ポアンカレ群のファイバーバンドルは導入しただけでは時空の対称性と何も関係がない。このファイバーバンドルは時空の対称性と (2.17) 式で関係づけられる。

場 $\omega_m{}^{ab}$ を導入する。これらのゲージ場をポアンカレ代数の演算子と共に次のように書く:

$$h_m{}^{\mathcal{A}} X_{\mathcal{A}} := e_m{}^a P_a + \frac{1}{2}\omega_m{}^{ba} M_{ab}. \tag{2.10}$$

これらゲージ場は局所ポアンカレ変換でゲージ変換を受ける。ポアンカレ代数に属する演算子に対して、場に依存しないゲージパラメータを

$$\xi^{\mathcal{A}} X_{\mathcal{A}} := \xi^a P_a + \frac{1}{2}\xi(M)^{ba} M_{ab} \tag{2.11}$$

と書く。ここで、ξ^a は演算子を明確にして $\xi(P)^a$ と書くべきだが、簡単のため単に ξ^a と書くことにする。

P 変換以外の演算子 $X_{\mathcal{A}'}$ の場に対する微小ゲージ変換[*4] は、場に対する変換を受けないポアンカレ代数の局所パラメータ $\xi^{\mathcal{A}'}$ を用いて $\delta_G(\xi^{\mathcal{A}'} X_{\mathcal{A}'})$ と記すことにする。まず、ゲージ場へのゲージ変換は次のように与えられる：

$$\delta_G(g^{\mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}'}) h_m{}^{\mathcal{A}} = \partial_m g^{\mathcal{B}'} \delta_{\mathcal{B}'}{}^{\mathcal{A}} + h_m{}^{\mathcal{B}} g^{\mathcal{C}'} f_{\mathcal{C}'\mathcal{B}}{}^{\mathcal{A}}, \tag{2.12}$$

ここで、$f_{\mathcal{C}\mathcal{B}}{}^{\mathcal{A}}$ はポアンカレ代数の構造定数

$$[X_{\mathcal{A}}, X_{\mathcal{B}}] = -f_{\mathcal{A}\mathcal{B}}{}^{\mathcal{C}} X_{\mathcal{C}} \tag{2.13}$$

である。P_a 変換はのちの (2.17) 式で与える。ローレンツ添字を持ったベクトル場 V_a は次のように局所ローレンツ変換を受ける：

$$\delta_G(\tfrac{1}{2}\xi(M)^{ba} M_{ab}) V_c = \xi(M)^{ba} V_a \eta_{bc} = \xi(M)_c{}^a V_a. \tag{2.14}$$

一方、ローレンツ添字ではなくアインシュタイン添字を持ったベクトル場 V_m は局所ローレンツ変換ではスカラーである:

$$\delta_G(\tfrac{1}{2}\theta^{ba} M_{ab}) V_m = 0. \tag{2.15}$$

V_a の変換と V_m の変換は四脚場の変換

$$\delta_G(\tfrac{1}{2}\xi(M)^{cb} M_{bc}) e_m{}^a = -e_m{}^b \xi(M)_b{}^a \tag{2.16}$$

を用いることで片方からもう片方に移ることができる。

ここまでは、ポアンカレ代数を時空とは独立な内部対称性の代数として扱っていた。いま、ポアンカレ対称性を時空の対称性を関係づける。その関係づけは、ポアンカレ代数によるゲージ変換と時空上のリー微分 (後述) との次の式による同一視

$$\mathcal{L}(\xi^m \partial_m) \equiv \delta_G(\xi^m h_m{}^{\mathcal{A}} X_{\mathcal{A}}) \tag{2.17}$$

[*4] 場に対する変換を考える理由は、場の変換に関する不変性を作用に要求するからである。

によって行う。ここで、$\partial_m := \frac{\partial}{\partial x^m}$ である。この同一視により P_a 変換は次のように定義される:

$$\delta_G(\xi^a P_a) = \mathcal{L}(\xi^a e_a{}^m \partial_m) - \delta_G(\tfrac{1}{2}\xi^a e_a{}^m \omega_m{}^{ba} M_{ab}). \tag{2.18}$$

ここで、ベクトル ξ^m によるリー微分について説明する。リー微分とは時空上のベクトル ξ^m で指定される方向に沿った微分で、アインシュタイン添字を持つ場 V_m に対して次のように定義される：

$$\mathcal{L}(\xi^n \partial_n) V_m = \xi^n \partial_n V_m + V_n \partial_m \xi^n. \tag{2.19}$$

第1項は時空上の異なる点に移動したことによる変化で、第2項はその移動による V_m の時空上の向きの変化に対応する。一方で (スカラー場を含む) ローレンツ添字のみを持つ場 V_a は時空上の向きを持たないため、通常の ξ^m による方向微分として定義される：

$$\mathcal{L}(\xi^m \partial_m) V_a = \xi^m \partial_m V_a. \tag{2.20}$$

一般のアインシュタイン添字を持つ場のリー微分は、四脚場に関するリー微分

$$\mathcal{L}(\xi^n \partial_n) e_m{}^a = \xi^n \partial_n e_m{}^a + e_n{}^a \partial_m \xi^n \tag{2.21}$$

とローレンツ添字を持つ場に関するリー微分に帰着できる。

次に、ポアンカレ重力理論における四脚場とスピン接続に対する曲率を構成する。四脚場に対する曲率はスピン接続を四脚場に関連づけるために、またスピン接続に対する曲率はEH作用の構成のためにそれぞれ用いられる。いま、ポアンカレ対称性に対する曲率を次のように導入する。

$$R_{mn}{}^{\mathcal{A}} := \partial_m h_n{}^{\mathcal{A}} - \partial_n h_m{}^{\mathcal{A}} - (e_n{}^c h_m{}^{\mathcal{B}'} - e_m{}^c h_n{}^{\mathcal{B}'}) f_{\mathcal{B}'c}{}^{\mathcal{A}} - h_n{}^{\mathcal{C}'} h_m{}^{\mathcal{B}'} f_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}{}^{\mathcal{A}}. \tag{2.22}$$

P および M 曲率はそれぞれ $R(P)_{mn}{}^a$, $R(M)_{mn}{}^{ab}$ と書く。具体的に書くと、

$$R(P)_{mn}{}^a = \partial_m e_n{}^a - \partial_n e_m{}^a + e_n{}^b \omega_{mb}{}^a - e_m{}^b \omega_{nb}{}^a, \tag{2.23}$$

$$R(M)_{mn}{}^{ab} = \partial_m \omega_n{}^{ab} - \partial_n \omega_m{}^{ab} + \omega_n{}^{ac} \omega_{mc}{}^b - \omega_m{}^{ac} \omega_{nc}{}^b \tag{2.24}$$

である。$R(P)_{mn}{}^a$ は捩率 (torsion) テンソル、$R(M)_{mn}{}^{ab}$ はリーマンの曲率テンソルと呼ばれる。これらの曲率は演算子と共に

$$R_{mn}{}^{\mathcal{A}} X_{\mathcal{A}} = R(P)_{mn}{}^a P_a + \frac{1}{2} R(M)_{mn}{}^{ba} M_{ab} \tag{2.25}$$

とまとめて書く。

場に対する微小ポアンカレ変換 $\delta_G(\xi^{\mathcal{A}}X_{\mathcal{A}})$ の交換関係は、P_a 変換同士以外のものについては元のポアンカレ代数を与える：

$$[\delta_G(\xi^{\mathcal{A}'}X_{\mathcal{A}'}), \delta_G(\eta^{\mathcal{B}}X_{\mathcal{B}})] = -\delta_G(\xi^{\mathcal{A}'}\eta^{\mathcal{B}}f_{\mathcal{A}'\mathcal{B}}{}^{\mathcal{C}}X_{\mathcal{C}}). \tag{2.26}$$

P_a 同士の交換関係は曲率を用いたポアンカレ変換を与える：

$$[\delta_G(\xi^a P_a), \delta_G(\eta^b P_b)] = -\delta_G(\xi^a\eta^b R_{ab}{}^{\mathcal{C}}X_{\mathcal{C}}). \tag{2.27}$$

ここで、ゲージ場に対する P_a 変換則は

$$\delta_G(\xi^a P_a)h_m{}^{\mathcal{B}} = (\partial_m\xi^a)\delta_a{}^{\mathcal{B}} + h_m{}^{\mathcal{C}'}\xi^a f_{a\mathcal{C}'}{}^{\mathcal{B}} + e_m{}^c\xi^a R_{ac}{}^{\mathcal{B}} \tag{2.28}$$

となることを用いた。

曲がった時空においては、単なる座標微分は局所変換に対して共変に変換しない。局所変換に対して共変に変換する微分として共変微分を定義する。この共変微分は P_a 変換を用いて定義できる。すなわち、アインシュタイン添字を持たないポアンカレ変換に対して共変な場 Φ に対して P_a 変換が作用するときの微分係数から共変微分 ∇_m を次のように定義する:

$$\delta_G(\xi^a P_a)\Phi = \xi^a e_a{}^m\left(\partial_m - \frac{1}{2}\omega_m{}^{ba}M_{ab}\right)\Phi = \xi^a e_a{}^m\nabla_m\Phi. \tag{2.29}$$

ここで、本論文においては、∇ はその章で考えている全ての対称性に対して共変な共変微分を表すことにする。従って、各章ごとに考えている対称性に合わせて共変微分 ∇ を定義し直す (ただし、第 3 章における超対称性変換共変スピノル微分 $D_\alpha, \bar{D}^{\dot{\alpha}}$ と、第 4.2 章の超共形ベクトル微分 D_a は除く)。

共変微分の交換関係は曲率と次のように関係する：

$$[\nabla_a, \nabla_b] = -R_{ab}{}^{\mathcal{C}}X_{\mathcal{C}}. \tag{2.30}$$

これは、(2.27) 式において、$\delta_G(\xi^a P_a)$ が共変な場に共変微分として作用する場合を考えれば導くことができる。

ここまで、四脚場とスピン接続は独立な自由度を持った場として扱っていた。ここで、拘束条件を要請することで、スピン接続の自由度を拘束する。この拘束条件はポアンカレ対称性を破らないように共変な場について行う。スピン接続を四脚場と関連づけるために捩率に対して

$$R(P)_{ab}{}^c = 0 \tag{2.31}$$

という拘束条件をおく。これにより、スピン接続が四脚場とその微分によって

$$\begin{aligned}\omega_{n,pm} &= \frac{1}{2}(e_{pa}\partial_n e_m{}^a + e_{ma}\partial_p e_n{}^a - e_{na}\partial_m e_p{}^a)\\ &\quad - \frac{1}{2}(e_{pa}\partial_m e_n{}^a + e_{ma}\partial_n e_p{}^a - e_{na}\partial_p e_m{}^a)\end{aligned} \tag{2.32}$$

と表される。ここで $\omega_{n,pm} := e_p{}^a e_{mb}\omega_{na}{}^b$ である。

最後に、ポアンカレ重力理論において、EH 項を持つ作用を導入する。EH 項は、リッチ・スカラーで書くことができる。リッチ・スカラーはリーマンの曲率テンソルを縮約したリッチ・テンソル

$$R_m{}^a := e_b{}^n R(M)_{mn}{}^{ab} \tag{2.33}$$

をさらに縮約することで得られる:

$$R := e_a{}^m R_m{}^a. \tag{2.34}$$

リッチ・テンソルとリッチ・スカラーには記法によって符号の違いがあるが、本論文ではこれらの式で定義する。最終的にポアンカレ重力理論の EH 項を持った作用を

$$S = -\frac{1}{2}M_{\mathrm{Pl}}^2 \int d^4x e R \tag{2.35}$$

を構成することができる。ここで、e は密度場

$$e := \det e_m{}^a = \sqrt{-\det g_{mn}} \tag{2.36}$$

である。

以上がポアンカレ重力理論の局所ポアンカレ対称性からのアプローチの概要である。次に、超重力理論を超共形代数から構成するための前段階として、共形代数からポアンカレ重力理論をどのように得るかをみる。

2.2　共形重力理論によるポアンカレ重力理論の構成

ここでは共形重力理論を導入し、ポアンカレ重力理論を共形重力理論のゲージ固定としてどのように得るかを解説する。まず、共形代数を導入した後、共形代数を用いた P 変換の定義を行う。そして、曲率を導入し曲率に対する拘束条件を置くことでゲージ場の自由度を拘束する。

時空並進	ローレンツ	スケール	共形ブースト
P_a	M_{ab}	D	K_a

表 2.2: 共形代数の演算子。

2.2.1　共形代数

まず、共形代数について説明する。共形代数は、ポアンカレ代数にスケール変換 D と、共形ブースト K_a をさらに加えた代数で、次の交換関係によって定義される[*5]：

$$
\begin{aligned}
&[M_{ab}, M_{cd}] = \eta_{bc}M_{ad} - \eta_{ac}M_{bd} - \eta_{bd}M_{ac} + \eta_{ad}M_{bc},\\
&[M_{ab}, P_c] = P_a\eta_{bc} - P_b\eta_{ac}, \qquad [M_{ab}, K_c] = K_a\eta_{bc} - K_b\eta_{ac},\\
&[D, P_a] = P_a, \qquad [D, K_a] = -K_a,\\
&[K_a, P_b] = 2D\eta_{ab} - 2M_{ab}.
\end{aligned}
\tag{2.37}
$$

共形代数の演算子を表 2.2 にまとめた。

先と同様に、共形代数を最初に局所内部対称性として扱う。まずゲージ場を

$$
h_m{}^{\mathcal{A}}X_{\mathcal{A}} := e_m{}^aP_a + \frac{1}{2}\omega_m{}^{ba}M_{ab} + b_mD + f_m{}^aK_a \tag{2.38}
$$

とする。ここで、ポアンカレ重力理論では $X_{\mathcal{A}}$ はポアンカレ代数の演算子を表していたが、ここでは共形代数の演算子を表すことにする。

ゲージ場 h_m のゲージ変換 δ_G は先ほどの議論を共形代数に置き換えればよい。場に依存しない共形代数のパラメータを

$$
\xi^{\mathcal{A}}X_{\mathcal{A}} = \xi^aP_a + \frac{1}{2}\xi(M)^{ba}M_{ab} + \xi(D)D + \xi(K)^aK_a \tag{2.39}
$$

と書く。このとき、ゲージ場に対する P 変換以外の演算子 $X_{\mathcal{A}'}$ ゲージ変換は次のように与えられる：

$$
\delta_G(\xi^{\mathcal{B}'}X_{\mathcal{B}'})h_m{}^{\mathcal{A}} = \partial_m\xi^{\mathcal{B}'}\delta_{\mathcal{B}'}{}^{\mathcal{A}} + h_m{}^{\mathcal{B}}\xi^{\mathcal{C}'}f_{\mathcal{C}'\mathcal{B}}{}^{\mathcal{A}}. \tag{2.40}
$$

ポアンカレ重力理論の時と同様に、時空の対称性と内部空間の共形対称性を

$$
\mathcal{L}(\xi^ae_a{}^m\partial_m) \equiv \delta_G(\xi^mh_m{}^{\mathcal{A}}X_{\mathcal{A}}) \tag{2.41}
$$

[*5] 共形変換は 2 次元では一次分数関数変換のことである。すなわち、複素数 z に対して $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ という変換である (ただし $ad - bc \neq 0$)。ポアンカレ変換は z を $e^{i\theta}z + \alpha$ とする変換であることに対し、共形変換は z のスケール倍と z の反転並進 (大まかにいうと分母の並進 $1/(z-\alpha)$) を含む。そしてそれぞれ D 変換と K 変換に対応する。

で関係づける。この関係は P 変換を

$$\delta_G(\xi^a P_a) := \mathcal{L}(\xi^m \partial_m) - \delta_G(\xi^a e_a{}^m h_m{}^{\mathcal{A}'} X_{\mathcal{A}'}) \tag{2.42}$$

と定義する。アインシュタイン添字を持たず、共形変換で共変に変換する場 Φ に対する P は、共形共変微分 ∇_m を与える：

$$\delta_G(\xi^a P_a)\Phi = \xi^a e_a{}^m \nabla_m \Phi = \xi^a e_a{}^m \left(\partial_m - \left(\frac{1}{2}\omega_m{}^{ba} M_{ab} + b_m D + f_m{}^a K_a\right)\right)\Phi. \tag{2.43}$$

ここで、共変微分 ∇_m はポアンカレ重力理論ではポアンカレ共変に定義していたが、ここでは共形共変に定義されたものとする。

共形対称性に属する曲率はポアンカレ対称性の時と同様に、

$$R_{mn}{}^{\mathcal{A}} := \partial_m h_n{}^{\mathcal{A}} - \partial_n h_m{}^{\mathcal{A}} - (e_n{}^c h_m{}^{\mathcal{B}'} - e_m{}^c h_n{}^{\mathcal{B}'}) f_{\mathcal{B}'c}{}^{\mathcal{A}} - h_n{}^{\mathcal{C}'} h_m{}^{\mathcal{B}'} f_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}{}^{\mathcal{A}} \tag{2.44}$$

と表される。特に、M に対する曲率は、K ゲージ場 $f_m{}^a$ を含めて

$$R(M)_{mn}{}^{ab} = \partial_m \omega_m{}^{ab} - \partial_n \omega_m{}^{ab} + \omega_n{}^{ac}\omega_{mc}{}^b - \omega_m{}^{ac}\omega_{nc}{}^b - 2e_n{}^a f_m{}^b + 2e_n{}^b f_m{}^a + 2e_m{}^a f_n{}^b - 2e_m{}^b f_n{}^a \tag{2.45}$$

と定義されることに注意する。この定義とのちに述べる M 曲率に対する拘束条件より、ポアンカレ重力理論のリッチ・スカラーが K ゲージ場 $f_m{}^a$ を用いて書けることを示す。

共形重力理論はポアンカレ重力理論よりもゲージ場による自由度が大きい。特に、K ゲージ場の自由度がポアンカレ重力理論に比べて新たに存在している。これらのゲージ場の自由度は次の曲率に対する拘束条件を置くことで落とすことができる。まず、捩率について次の拘束条件をおく:

$$R(P)_{ab}{}^c = 0. \tag{2.46}$$

この拘束条件はポアンカレ重力理論と同様に、スピン接続を四脚場と D ゲージ場で与えるものである。次に、共形重力理論におけるリッチ・テンソルに対応する量に拘束条件をおく:

$$R(M)_{ab}{}^{cb} = 0. \tag{2.47}$$

これより、共形重力理論のリーマン・テンソルには共形リッチ・テンソルや共形リッチ・スカラーのような自由度は存在しないことになる。

拘束条件 (2.47) 式はポアンカレ重力理論のリッチ・テンソルにのちに行うゲージ固定 $b_m = 0$ で一致するテンソルを K ゲージ場で与える。$R(M)_{ab}{}^{cb} = 0$ と $R(M)_{mn}{}^{cd}$ の定義 (2.45) 式を用いることで、

$$R_{ab}{}^{cb} = -4f_a{}^c - 2f_b{}^b \delta_a^c. \tag{2.48}$$

ここで、$R_{ab}{}^{cb}$ はのちに要請する $b_m = 0$ というゲージ条件の元でポアンカレ重力理論のリッチ・テンソルに一致するため、ポアンカレ重力理論のものと同じ記号を用いた。さらに添字を縮約することでポアンカレ超重力理論のリッチ・スカラーは K ゲージ場を用いて

$$R = -12 f_a{}^a \tag{2.49}$$

と書くことができる。このリッチ・スカラーと K ゲージ場の関係は次に議論する共形重力理論からポアンカレ重力理論の EH 作用を構成する際に用いられる。

2.2.2　共形重力理論からポアンカレ重力理論へ

いま、ポアンカレ重力理論を共形重力理論から得ることを考える。ポアンカレ重力理論では、EH 作用が重力場の運動項を与える重要な作用であった。しかし、EH 作用は 4 次元ではスケール変換で不変でない。従って、共形重力理論の中で EH 項を導く作用を構成するには工夫をする必要がある。

その工夫が compensator と呼ばれる場の導入である。Compensator は EH 項を人工的にスケール不変にするために導入するスカラー場である。大まかには、compensator の働きは定数パラメータ ρ によるスケール変換を用いて次のように理解できる。まず、四脚場のスケール変換 $e_m{}^a \to e^{-\rho} e_m{}^a$ によって、EH 項 eR は $R \to e^{-2\rho} R$ と変換するため、EH 項はスケール不変でないことがわかる。ここで、密度場のスケール変換 $e \to e^{-4\rho} e$ と、リッチ・スカラーのスケール変換 $R \to e^{2\rho} R$ を用いた。そこで、新たにスカラー場 ϕ を $\phi \to e^{\rho}\phi$ とスケール変換する場として導入する。この ϕ を用いると、$e\phi^2 R$ はスケール変換に対して不変となる。

この人工的に導入した compensator は、ちょうどスケール変換のゲージ固定によって取り除くことができる。つまり、$e^{\rho} = M_{\mathrm{Pl}}/\phi$ とゲージ固定することで、compensator の自由度が落ちる。さらに、場に依存したゲージ変換を行うことにより、場のスケール変換性を固定したため、理論のスケール変換性が破れる。

ただし、上記の議論はあくまで大まかな議論である。なぜなら共形対称性にはポアンカレ対称性に存在しない K 変換も含まれているからである。共形不変な作用、すなわち K 変換に対してもさらに不変な作用から EH 作用を構成するには次のように考える。共形重力理論においては、M 曲率の拘束条件 (2.47) 式よりポアンカレ重力理論のリッチ・スカラーが K ゲージ場を用いて (2.49) 式のようにかけていることに注目する。従って、EH 作用を共形重力理論から導出するには、K ゲージ場を含み、compensator を用いた共形不変な作用を考える。

いま、共形不変な作用から EH 作用を具体的に構成する。まず、共形重力理論に compensator を導入する。Compensator は共形変換の元で共変に変換し、

$$M_{ab}\phi = 0, \quad D\phi = 1\phi, \quad K_a\phi = 0 \tag{2.50}$$

と変換するものとする。ここで、一般の共変な場に対する微小ゲージ変換 $\delta_G(\xi^{\mathcal{A}}X_{\mathcal{A}})$ は、ゲージ変換の演算子 $X_{\mathcal{A}}$ のみで書くことにする。

いま、ポアンカレ重力理論で EH 作用を与える共形不変な作用は compensator の "運動項"

$$S = -\frac{1}{2}\int d^4xe\phi\nabla^a\nabla_a\phi \tag{2.51}$$

で書けることをこれから説明する。最初に作用 (2.51) 式が共形不変であることを示す。まず、$X_{\mathcal{A}'}$ 変換の不変性を示したのち、P 変換の不変性を示す。密度場 e の $X_{\mathcal{A}'}$ 変換は

$$\delta_G(\xi^{\mathcal{A}'}X_{\mathcal{A}'})e = ee_b{}^m\delta_G(\xi^{\mathcal{A}'}X_{\mathcal{A}'})e_m{}^b = ee_b{}^mh_m{}^{\mathcal{C}}\xi^{\mathcal{A}'}f_{\mathcal{A}'\mathcal{C}}{}^b = ee_b{}^me_m{}^c\xi^{\mathcal{A}'}f_{\mathcal{A}'c}{}^b = e\xi^{\mathcal{A}'}f_{\mathcal{A}'b}{}^b \tag{2.52}$$

である。これを各演算子について読み取ると、

$$\delta_G(\tfrac{1}{2}\xi(M)^{ab}M_{ba})e = 0, \quad \delta_G(\xi(D)D)e = -4e, \quad \delta_G(\xi(K)^aK_a)e = 0 \tag{2.53}$$

である。一方、$\phi\nabla^a\nabla_a\phi$ の $X_{\mathcal{A}'}$ 変換則は、

$$M_{bc}\phi\nabla^a\nabla_a\phi = 0, \quad D\phi\nabla^a\nabla_a\phi = 4\phi\nabla^a\nabla_a\phi \tag{2.54}$$

および、

$$\begin{aligned} &K_b\phi\nabla^a\nabla_a\phi \\ &= \phi\eta^{ac}(2D\eta_{bc} - 2M_{bc})\nabla_a\phi + \phi\nabla^a(2D\eta_{ba})\phi \\ &= 4\phi\nabla_b\phi - (+2)(+4)\phi\nabla_b\phi + 2\phi\nabla_b\phi + 2\phi\nabla_b\phi \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.55}$$

よって、作用 (2.51) 式は $X_{\mathcal{A}'}$ 不変である。

次に P 変換の元での不変性を調べる。P 変換の不変性を調べる上で注意するべきことは、密度場が P 変換の元で斉次に変換しないことである。実際に P 変換を計算する。この不変性は密度場を除く被積分関数の $X_{\mathcal{A}'}$ 変換則以外の詳細にはよらないので $V := \phi\nabla^a\nabla_a\phi$ として被積分関数を eV とおく。被積分関数 eV の P 変換則は、定義に従って変形すると

$$\delta_G(\xi^aP_a)eV = \mathcal{L}(\xi^m\partial_m)eV - \delta_G(\xi^ae_a{}^mh_m{}^{\mathcal{A}'}X_{\mathcal{A}'})eV = \mathcal{L}(\xi^m\partial_m)eV \tag{2.56}$$

である。ここで、被積分関数は $X_{\mathcal{A}'}$ 不変であること、すなわち $\delta_G(\xi^a e_a{}^m h_m{}^{\mathcal{A}'} X_{\mathcal{A}'})eV = 0$ を用いた。さらに計算すると、結局次のように全微分の形になることがわかる。

$$
\begin{aligned}
\delta_G(\xi^a P_a)eV &= \mathcal{L}(\xi^m \partial_m)eV \\
&= ee_a{}^n(\xi^m \partial_m e_n{}^a + e_m{}^a \partial_n \xi^m)V + e\xi^m \partial_m V \\
&= \xi^m(\partial_m e)V + e(\partial_m \xi^m)V + e\xi^m \partial_m V \\
&= \partial_m(\xi^m eV).
\end{aligned}
\tag{2.57}
$$

よって、作用 (2.51) 式は P 変換の元で、表面項を除いて不変であることがわかった。

作用 (2.51) 式がポアンカレ重力理論のリッチ・スカラーを含んでいることを確かめる。このことは作用が次のように変形できることにより簡潔に示される：

$$
-\frac{1}{2}\int d^4xe\phi\nabla^a\nabla_a\phi = \int d^4xe\left(+\frac{1}{2}\nabla^a\phi\nabla_a\phi - f_a{}^a\phi^2\right) = \int d^4xe\left(+\frac{1}{2}\nabla^a\phi\nabla_a\phi - \frac{1}{12}R\phi^2\right).
\tag{2.58}
$$

この変形について説明する。まず、共変微分に関する積の微分

$$
\phi\nabla^a\nabla_a\phi = \nabla^a(\phi\nabla_a\phi) - \nabla^a\phi\nabla_a\phi \tag{2.59}
$$

を用いる。この時、第1項が表面項に等しいことを見る。そのために、次の等式が成立することを用いる: 一般に、$DV^a = 3V^a$ であるが一般には K 不変とは限らない V^a について、

$$
\partial_m(ee_a{}^m V^a) = eR(P)_{ab}{}^b V^a + e\nabla_a V^a + ee_a{}^m f_m{}^b(K_b V^a) \tag{2.60}
$$

が成立する。この式の導出には、密度場と四脚場の微分から捩率が現れること、および $\omega_m{}^{ab}$, b_m, $f_m{}^b$ 項 は V^a に作用する共変微分と釣り合って現れることを用いた。今回の場合、捩率の拘束条件 $R(P)_{ab}{}^c = 0$ および $K_b\phi\nabla^a\phi = 2\delta_b^a\phi^2$ であることを用いると、表面項をのぞいて

$$
\int d^4xe\frac{1}{2}\nabla^a(\phi\nabla_a\phi) = -\int d^4xef_a{}^a\phi^2 \tag{2.61}
$$

が従う。結局、作用は表面項を除いて (2.58) 式のようにかけることがわかる。

以上で共形重力理論からポアンカレ重力を得る準備ができた。いま、共形対称性の中でポアンカレ対称性には存在しない D, K 対称性をゲージ固定によって破ることを考える。これは、場に依存するゲージパラメータでゲージ変換を行うことでできる。そのゲージ固定は

$$
b_m = 0 \quad (K\text{ ゲージ}), \tag{2.62}
$$

$$
\phi = \sqrt{6}M_{\rm Pl} \quad (D\text{ ゲージ}) \tag{2.63}
$$

である。実際にこのようなゲージ固定ができることは具体的にゲージ変換を見ることでできる。K ゲージ固定については b_m の K ゲージ変換 $\delta_G(\xi(K)^a K_a)b_m = -2e_m{}^a\xi(K)_a$ を用いることでできる。また、D ゲージ固定については compensator の有限変換

$$\phi \to e^{\xi(D)}\phi \tag{2.64}$$

によりゲージ固定ができる。

このゲージ固定によって、作用 (2.58) 式が EH 作用になること、より具体的には $\nabla_a\phi = 0$ となることが次のようにしてわかる。まず、共形対称性をゲージ固定する前の段階では

$$\nabla_a\phi = e_a{}^m(\partial_m\phi - 1b_m\phi) \tag{2.65}$$

である。ゲージ固定 $b_m = 0$ 及び $\phi = \sqrt{6}M_{\rm Pl}$ によって、

$$\nabla_a\phi = e_a{}^m(\partial_m\sqrt{6} - 1\cdot 0\sqrt{6})M_{\rm Pl} = 0. \tag{2.66}$$

従って、作用 (2.51) 式は、ゲージ固定の結果

$$S = -\frac{1}{2}M_{\rm Pl}^2\int d^4xeR \tag{2.67}$$

となることがわかった。

このようにポアンカレ重力理論の作用を共形重力理論から得られたが、さらにポアンカレ重力理論の共変微分や曲率への拘束条件も共形重力理論のゲージ固定で再現できることを確かめる。まずポアンカレ対称性の共変微分 $\nabla^{\rm P}$ は、K ゲージ条件で D ゲージ場が 0 にゲージ固定されたとき、共形対称性の共変微分を用いて

$$\nabla_a^{\rm P} = \nabla_a + f_a{}^bK_b \tag{2.68}$$

と表される。次にポアンカレ重力理論の曲率の拘束条件は次のように再現される。拘束条件 $R(P)_{ab}{}^c = 0$ においてゲージ条件 $b_m = 0$ を置くことで、ポアンカレ重力理論の捩率 $R^{\rm P}(P)_{ab}{}^c$ の拘束条件

$$R^{\rm P}(P)_{ab}{}^c = 0 \tag{2.69}$$

を導く。

このように、ポアンカレ重力理論は、compensator ϕ を用いた共形重力理論のゲージ固定によって得られることがわかった。第 4 章ではここで行ったポアンカレ重力理論の共形重力理論からのアプローチを次章で導入する超対称性に拡張して考える。そのために、次章で超対称性を導入する。

第3章　超対称性と超対称ゲージ理論

本章では、本論文の主題である超重力理論について説明する準備として重力を含まない超対称性理論を説明する。まず、文献 [18] に従って、超対称性を単純な場の理論の模型を通じて説明する。この模型で超対称性は時空並進と共に超対称性代数と呼ばれる代数をなすことを示す。この時、従来の場の理論の表式のまま超対称性を扱う成分形式を用いる。この成分形式は、第 4 章以降で議論する共形超重力理論ではテンソル算法にあたるものである。次に、時空並進と超対称性変換をひとまとまりにして扱う超空間形式について説明する。そして、超対称性理論でゲージ理論を扱う超対称ゲージ理論を超空間形式を用いて構成する。

3.1　成分形式

同質量のボソンとフェルミオンが存在する系には超対称性、すなわちボソンとフェルミオンの入れ替えの元での対称性が存在することを場の理論の模型を用いて説明する。

電子やクォークなどのフェルミオンは、複素 4 成分のディラック場で記述できる。しかし、超対称性を考える上では、それらがフェルミオンであるという性質が重要である。従って、超対称性の導入においては、質量を持った最も単純なフェルミオンである複素 2 成分スピノルのマヨラナフェルミオンで議論すれば良い。

超対称性は、電子やクォークなどのフェルミオンに、同質量のスカラーボソンが存在することを予言する。これらの超対称パートナーがボソンであるという性質が重要であるので、マヨラナフェルミオンと物理的な自由度が等しい複素スカラー場を導入して考える。

ここで、対称性を議論する際に次のことに注意する。マヨラナフェルミオンは、運動方程式に従う物理的な自由度は実 2 自由度であるが、運動方程式を課さない作用の段階では 4 つの実自由度がある。一方、フェルミオンの超対称パートナーとなる複素スカラー場は作用の段階で 2 つの実自由度しか持たない。作用の段階ではボソンとフェルミオンの自由度が等しくならないため、運動方程式無しに対称性を議論することが困難である。この困難は複素スカラー場と 2 成分のスピノル場に加えて、物理的な自由度を持たない複素スカ

ラー場を導入することで解決できる。この新たな場の導入で、フェルミオンとボソンの自由度が共に4となり、運動方程式を用いずに作用の不変性を論ずることができる。この物理的な自由度を持たない場は補助場 (auxiliary field) と呼ばれ、超対称性を数学的に明白に構成するために重要な役割を果たす。

いま、複素スカラー場 ϕ と2成分スピノル場 ψ_α、補助場 F を含んだ作用の運動項 S_D を以下のように与える：

$$S_D = \int d^4x \left(-\partial_m \phi^* \partial^m \phi + i \partial_m \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^m)^{\dot{\alpha}\beta} \psi_\beta + F^* F \right), \tag{3.1}$$

ここで、第1項、第2項はそれぞれ複素スカラー場と2成分スピノル場の運動項、第3項は時空微分を持たない補助場の "運動項" である。また、$\phi^*, \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}, F^*$ はそれぞれ ϕ, ψ_α, F のエルミート共役である。ψ_α および $\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}$ の添字は、右巻きスピノル添字 $\alpha = 1, 2$ および左巻きスピノル添字 $\dot{\alpha} = \dot{1}, \dot{2}$ であり、相対論的フェルミオンの持つスピン自由度を表す。$(\bar{\sigma}^m)^{\dot{\alpha}\beta}$ は4次元パウリ行列である。2成分スピノル ψ_α および $\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}$ はパウリの排他律に従うフェルミオンを記述するため、これらは反可換数であるとする：$\psi_\alpha \psi_\beta = -\psi_\beta \psi_\alpha$。スピノル添字の縮約規則や4次元パウリ行列の定義は付録 A にまとめた。

この作用は次の反可換な2成分スピノルパラメータ ξ_α およびそのエルミート共役 $\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}$ を用いた変換

$$\delta\phi = \sqrt{2} \xi^\alpha \psi_\alpha, \tag{3.2}$$

$$\delta\psi_\alpha = \sqrt{2} i (\sigma^m)_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\xi}^{\dot{\beta}} \partial_m \phi + \sqrt{2} \xi_\alpha F, \quad \delta\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} = -\sqrt{2} i \xi^\beta (\sigma^m)_{\beta\dot{\alpha}} \partial_m \phi^* + \sqrt{2} \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} F^*, \tag{3.3}$$

$$\delta F = \sqrt{2} i \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^m)^{\dot{\alpha}\beta} \partial_m \psi_\beta \tag{3.4}$$

で不変である：

$$\delta S_D = 0. \tag{3.5}$$

この変換がボゾンとフェルミオンを入れ替える超対称性変換である。この変換は次のように考えることで構成することができる。まず、場の質量次元はラグランジアンが4、時空微分が1であることから、ϕ が1,ψ_α が3/2, F が2である。ϕ を ψ_α に変える無限小変換を定めると、その変換パラメータ ξ_α の質量次元は $-1/2$ となる。これより、ψ_α の変換は、質量次元2を持った場への変換、F の変換は質量次元5/2を持った場への変換であることがわかる。特に、(ϕ, ψ_α, F) と $(\phi^*, \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}, F^*)$ がそれぞれの中で変換し、作用が不変であるようにとると、上の変換が得られる。

次に質量項について考える。質量 m を持つマヨラナフェルミオンの質量項は $-\frac{1}{2} m \psi^\alpha \psi_\alpha +$

h.c. である。この質量項を含んで超対称性変換で不変な作用 S_m は、

$$S_m = \int d^4 x m \left(\phi F - \frac{1}{2}\psi^\alpha \psi_\alpha + \text{h.c.} \right) \tag{3.6}$$

である。これより、運動項と質量項を含んだ作用 S は、

$$S = S_D + S_m \tag{3.7}$$

と書くことができる。この作用は超対称性変換不変であるが、ボソンとフェルミオンの質量が等しいことは、補助場 F を消去することでよみとることができる。F についての運動方程式 $F = -m\phi^*$ を用いると、作用は

$$S = S_D + S_m = \int d^4 x \left(-\partial_m \phi^* \partial^m \phi + i \partial_m \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^m)^{\dot{\alpha}\beta} \psi_\beta - \left(m^2 \phi\phi^* + \frac{1}{2} m \psi^\alpha \psi_\alpha + \text{h.c.} \right) \right) \tag{3.8}$$

となり、確かにボソンとフェルミオンで等しい質量を持っていることがわかる。

超対称性は作用 (3.7) 式の対称性であることが以上の議論でわかった。この超対称性変換のなす代数を考える。超対称性変換の交換関係は、場の時空微分、つまり場の時空並進となることを示す。変換のパラメータを ξ_1, ξ_2 としたときの超対称性変換を $\delta_{\xi_1}, \delta_{\xi_2}$ で表すと、

$$\begin{aligned}
[\delta_{\xi_1}, \delta_{\xi_2}]\phi &= \left((\xi_1)^\alpha (\sigma^m)_{\alpha\dot{\beta}} (\bar{\xi}_2)^{\dot{\beta}} + (\bar{\xi}_1)_{\dot{\beta}} (\bar{\sigma}^m)^{\dot{\beta}\alpha} (\xi_2)_\alpha \right) (-2i\partial_m \phi), \\
[\delta_{\xi_1}, \delta_{\xi_2}]\psi_\alpha &= \left((\xi_1)^\alpha (\sigma^m)_{\alpha\dot{\beta}} (\bar{\xi}_2)^{\dot{\beta}} + (\bar{\xi}_1)_{\dot{\beta}} (\bar{\sigma}^m)^{\dot{\beta}\alpha} (\xi_2)_\alpha \right) (-2i\partial_m \psi_\alpha), \\
[\delta_{\xi_1}, \delta_{\xi_2}]F &= \left((\xi_1)^\alpha (\sigma^m)_{\alpha\dot{\beta}} (\bar{\xi}_2)^{\dot{\beta}} + (\bar{\xi}_1)_{\dot{\beta}} (\bar{\sigma}^m)^{\dot{\beta}\alpha} (\xi_2)_\alpha \right) (-2i\partial_m F).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

いま、超対称性の演算子を $Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ と書き、超対称性変換を場 X に対して、

$$\delta X := \xi^\alpha Q_\alpha X + \bar{\xi}_\alpha \bar{Q}^{\dot{\alpha}} X \tag{3.10}$$

と作用するものとする。このとき、

$$\begin{aligned}
Q_\alpha \phi &= \sqrt{2}\psi_\alpha, \\
\bar{Q}_{\dot{\alpha}} \phi &= 0, \\
Q_\alpha \psi_\beta &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (\epsilon_{\alpha\beta} Q^\gamma Q_\gamma + \{Q_\alpha, Q_\beta\})\phi = -\sqrt{2}\epsilon_{\alpha\beta} F, \\
\bar{Q}_{\dot{\alpha}} \psi_\beta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, Q_\beta\}\phi = -\sqrt{2} i (\sigma^m)_{\beta\dot{\alpha}} \partial_m \phi
\end{aligned} \tag{3.11}$$

およびこのエルミート共役が従う。$P_m = -i\partial_m$ を用いると、超対称性変換の演算子は、

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2(\sigma^a)_{\alpha\dot{\beta}} P_a, \quad \{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0, \quad \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 \tag{3.12}$$

時空並進	超対称性
P_a	$(Q_\alpha, \bar{Q}^{\dot{\alpha}})$

表 3.1: 超対称性代数の演算子。

という代数をなす。超対称性代数の演算子を表 3.1 にまとめた。この代数は、超対称性変換を 2 回行うと時空の並進が起きるということを意味する。超対称性と時空の対称性は不可分であることがこの代数からわかる。従って、4 次元時空 (x^m) と、超対称性のパラメータを同時に扱った定式化を考えるのは自然である。次では超空間形式と呼ばれる、これらのパラメータを同時に扱う定式化について述べる。

3.2 超空間形式

ここまでで場の理論の模型で超対称性を導入し、その対称性の代数が時空の代数と関わることを説明した。以下では、文献 [18] に従って超対称性代数を用いて空間を超対称な空間に拡張し、その空間上の場を考えることで明白に超対称な作用を構成することを考える。

3.2.1 超空間と超場

超対称性理論では時空並進と超対称性変換が代数をなすため、これらを等価に扱うこと、すなわち扱う空間を通常の時空 (x^m) を超対称性変換のパラメータである反可換数の座標 $(\theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$ まで含めた空間 $(x^m, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$ に拡張することは自然である。この反可換数まで含めた空間は超空間と呼ばれる。超空間を用いることで、明白に超対称な作用を構成することができる。この超空間を用いた超対称性理論の構成を以下で説明する。

ここまでは場に対して $P_m = -i\partial_m$ としてきたが、以降は、P_m で単に微分演算子を表すことにする。すなわち、$-i$ 倍を外して、$P_m = \partial_m$ とする。

一般的に時空上の場 $f(x)$ は時空並進の演算子を用いて

$$f(x) = e^{x^m P_m} f(0) \tag{3.13}$$

と書くことができる。これはテイラー展開に他ならない。従って、ϕ を含み、時空の並進と超対称性変換をひとまとまりに扱う場を構成するには、$e^{x^m P_m}$ を反可換数パラメータ

$\theta_\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ を用いた $e^{x^m P_m + \theta^\alpha Q_\alpha + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}}}$ に拡張し、

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) := e^{x^m P_m + \theta^\alpha Q_\alpha + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}}} \phi(0) \tag{3.14}$$

と定義する。P と Q は可換であるので、

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{\theta^\alpha Q_\alpha + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}}} \phi(x) \tag{3.15}$$

と書くこともできる。パラメータ $(x, \theta, \bar{\theta})$ で張られる空間を超空間、そして $\Phi(x, \theta, \bar{\theta})$ を超場と呼ぶ。超空間の座標を通常の時空の座標 x^m と反可換数座標 $\theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ をまとめて (z^M) で表す。添字 M はベクトル添字とスピノル添字をひとまとまりで表す：すなわち $z^m := x^m, z^\alpha := \theta^\alpha, z_{\dot{\alpha}} := \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ である。

超場に対して、従来の表式である ϕ, ψ_α, F は成分場と呼ばれ、それらの組 (ϕ, ψ_α, F) は多重項と呼ばれる。成分場は超場から再現することができる。まず、$\phi(x)$ について考える。超場 $\Phi(x, \theta, \bar{\theta})$ を $\theta = \bar{\theta} = 0$ に制限すると、

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta})|_{\theta = \bar{\theta} = 0} = e^{x^m P_m} \phi(0) = \phi(x) \tag{3.16}$$

となる。従って、成分場 $\phi(x)$ は超場の $\theta = \bar{\theta} = 0$ 成分として再現することができる。超空間を時空に制限する記号 $\Phi(z)|_{\theta = \bar{\theta} = 0}$ は以降は単に $\Phi(z)|$ と表すことにする。この制限は、θ の冪級数展開の最低次の項をとる操作でもあるので、$\Phi(z)$ の最低次をとるとも言う。

次に $\psi_\alpha(x)$ を超場 $\Phi(z)$ からどのように得るかを考える。すなわち、成分場の言葉で書いた $\psi_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} Q_\alpha \phi$ を超場 $\Phi(z)$ の言葉で表すことを考える。ψ_α を超空間に拡張すると

$$\psi_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\theta^\alpha Q_\alpha + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}}} Q_\alpha \phi(x)| \tag{3.17}$$

であるため、ψ_α を超場の言葉で表すには、この式を $\Phi(z)$ で表すことを考えれば良い。Q_α を exp の右側に作るために、$\Phi(z)$ のパラメータ θ^α による微分 $\partial_\alpha := \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}$ を考える[*1]：

$$\partial_\beta \Phi(z) = \partial_\beta e^{\theta^\alpha Q_\alpha + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}}} \phi(x) = e^{\theta^\alpha Q_\alpha + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}}} (Q_\beta - i(\sigma^m)_{\beta\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} P_m) \phi(x), \tag{3.18}$$

ここで、超対称性代数から従う

$$[\theta^\alpha Q_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] = -2i\theta^\alpha (\sigma^m)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} P_m, \tag{3.19}$$

および、演算子 A, B が $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ を満たすときに成り立つ公式

$$e^{A+B} = e^B e^{A + \frac{1}{2}[A, B]} \tag{3.20}$$

[*1] 反可換数による微分は常に左微分とする：$\partial_\alpha := \dfrac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \theta^\alpha}$.

を用いた。これより、

$$(\partial_\beta + i(\sigma^m)_{\beta\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_m)e^{\theta^\alpha Q_\alpha + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}}}\phi(x) = e^{\theta^\alpha Q_\alpha + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}}}Q_\beta\phi(x) \tag{3.21}$$

であるので、ここから定義される微分

$$D_\beta := \partial_\beta + i(\sigma^m)_{\beta\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_m \tag{3.22}$$

は超対称性の演算子 Q_β を exp の右側につくる演算である。ψ_α は、この微分 D_β を超場 $\Phi(z)$ 作用させたものの最低次をとることで得られる：

$$\psi_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}D_\alpha\Phi(z)|. \tag{3.23}$$

この性質を用いて、残りの $F(x)$ は次のように得られる。

$$F(x) = -\frac{1}{4}e^{\theta^\beta Q_\beta + \bar{\theta}_{\dot{\beta}}\bar{Q}^{\dot{\beta}}}Q^\alpha Q_\alpha\phi(x)| = -\frac{1}{4}D^\alpha D_\alpha\Phi(z)|. \tag{3.24}$$

ここで、記号

$$D^2 := D^\alpha D_\alpha \tag{3.25}$$

を導入すると、$F(x) = -\frac{1}{4}D^2\Phi(z)|$ と簡潔に書ける。

ここまでは Q_α を超空間上の微分で書くことを考えたが、$\bar{Q}^{\dot{\alpha}}$ に対しても同様に超空間上の微分として書くことができる。微分 $\bar{D}_{\dot{\beta}}$ を

$$\bar{D}_{\dot{\beta}} := -\partial_{\dot{\beta}} - i\theta^\alpha(\sigma^m)_{\alpha\dot{\beta}}\partial_m \tag{3.26}$$

と定義すると、$\bar{Q}_{\dot{\beta}}$ を exp の右側に作ることができる：

$$\bar{D}_{\dot{\beta}}\Phi(z) = e^{\theta^\alpha Q_\alpha + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}}}\bar{Q}_{\dot{\beta}}\phi(x). \tag{3.27}$$

ここで、$\bar{Q}_{\dot{\alpha}}\phi = 0$ であったので、

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi(z) = 0. \tag{3.28}$$

$\Phi(z)$ は点付きの微分 $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ で動かないことから、$\Phi(z)$ は点付き（左巻き）スピノルを自由度として持たないことがわかる。この条件はカイラリティを区別する条件であることから、カイラル条件と呼ばれる。また、このような条件を満たす超場 $\Phi(z)$ をカイラル超場と呼ぶ。

ここまでは、$\phi(x)$ を最低次に含む超場 Φ について議論してきたが、$\phi^*(x)$ についても、全く同様の議論ができる：

$$\bar{\Phi}(z) := e^{\theta^\alpha Q_\alpha + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}}}\phi^*(x) = \Phi(z)^\dagger, \tag{3.29}$$

で定義される超場を導入すると、

$$\phi^*(x) = \bar{\Phi}(z)|, \tag{3.30}$$

$$\bar{D}_{\dot{\beta}}\bar{\Phi}(z)| = e^{\theta^\alpha Q_\alpha + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}}}\bar{Q}_{\dot{\beta}}\phi^*(x)| = \sqrt{2}\bar{\psi}_{\dot{\beta}}(x), \tag{3.31}$$

$$-\frac{1}{4}\bar{D}^2\bar{\Phi}(z) := -\frac{1}{4}\bar{D}_{\dot{\beta}}\bar{D}^{\dot{\beta}}\bar{\Phi}(z)| = -\frac{1}{4}e^{\theta^\alpha Q_\alpha + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}}}\bar{Q}_{\dot{\beta}}\bar{Q}^{\dot{\beta}}\phi^*(x)| = F^*(x), \tag{3.32}$$

$$D_\beta\bar{\Phi}(z) = e^{\theta^\alpha Q_\alpha + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}}}Q_\beta\phi^*(x) = 0. \tag{3.33}$$

ここで、最後の $D_\beta\bar{\Phi}(z) = 0$ という条件は $\bar{\Phi}(z)$ が右巻きスピノルを自由度として持たないことを意味し、反カイラル条件と呼ばれる。

　このようにして、超場 $\Phi(z)$ に対して D_α および、$\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ を作用させることで、もとの場の超対称性変換を得ることができた。これまでの議論は、カイラル、反カイラル条件以外は $\Phi(z)$ もしくは $\phi(x)$ の性質を用いていないため、一般の場 $f(x)$ および、それを最低次に持つ超場 $\Psi(z) := e^{\theta^\alpha Q_\alpha + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}}}f(x)$ に対して、$D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}$ と $Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ の関係は成り立つ。

　D_α, $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ は超対称性の演算子を生成する微分であるので、$D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}$ の反交換関係を調べておくことは有益である。

$$D_\alpha\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Psi(z) = D_\alpha e^{\theta^\beta Q_\beta + \bar{\theta}_{\dot{\beta}}\bar{Q}^{\dot{\beta}}}\bar{Q}_{\dot{\alpha}}f(x) = e^{\theta^\beta Q_\beta + \bar{\theta}_{\dot{\beta}}\bar{Q}^{\dot{\beta}}}Q_\alpha\bar{Q}_{\dot{\alpha}}f(x) \tag{3.34}$$

であるので、

$$\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\}\Psi(z) = -2i(\sigma^m)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_m\Psi(z) \tag{3.35}$$

となる。この性質は超場を表現空間にとった場合の超対称性の表現が $D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}$ で与えられていることを意味する。

　さらに、$D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}$ は次の条件をみたす：

$$e^{\xi^\alpha Q_\alpha + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}}}D_\gamma\Psi(z) = e^{\xi^\alpha Q_\alpha + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}}}e^{\theta^\beta Q_\beta + \bar{\theta}_{\dot{\beta}}\bar{Q}^{\dot{\beta}}}Q_\gamma f(x) = D^\xi_\gamma e^{\xi^\alpha Q_\alpha + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}}}\Psi(z). \tag{3.36}$$

ここで、D^ξ_α は、$e^{\xi^\alpha Q_\alpha + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}}}$ によって反可換数座標 $(\theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$ を動かしたときの微分である。$\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ についても同様のことが成り立つ。すなわち、上記の性質は $D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}$ は、超空間上の並進に対する共変微分であることを示している。ここで、時空微分 ∂_m も特に共変微分であることに注意する：

$$D_a := \delta_a{}^m\partial_m. \tag{3.37}$$

これより、超空間では超対称性の演算子は $D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}$ で記述することがわかった。従って、超場に対する超対称性変換は $D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}$ を用いて

$$\delta_\xi\Psi(z) = (\xi^\alpha D_\alpha + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{D}^{\dot{\alpha}})\Psi(z) \tag{3.38}$$

で与えられる。この変換の最低次をとることにより、ϕ, ψ などに対して定義した超対称性変換が再現できる：例えば、

$$\delta_\xi \psi_\beta = (\xi^\alpha D_\alpha + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{D}^{\dot{\alpha}}) D_\beta \Phi(z)|. \tag{3.39}$$

従って、超空間では時空上で行ってきた超対称性変換が超場とその共変微分によって得られることがわかった。

超対称性の性質から、カイラル超場に限らず、一般の (複素) 超場 $\Psi(z)$ がどれだけの成分場を含んでいるかが、次のように共変微分によってわかる。それぞれの成分場を後の議論に対応して名付ける。まず最低次項を $C(x)$ と書くと、

$$\mathcal{C}(x) = \Psi(z)| \tag{3.40}$$

である。これはボソン $\phi(x)$ の一般化である。次に、共変微分を点付き、点無しをそれぞれ1階ずつ作用したものからフェルミオン場が導かれる：

$$Z_\alpha(x) = -iD_\alpha \Psi(z)|, \quad Z_{\dot{\alpha}}(x) = +i\bar{D}_{\dot{\alpha}} \Psi(z)|. \tag{3.41}$$

これはフェルミオン $\psi_\alpha(x)$ の一般化である。次に2階微分を考える。2階微分は次の

$$D^2\Psi, \quad \bar{D}^2\Psi, \quad \{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\}\Psi, \quad [D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}]\Psi$$

の4つがあるが、このうちの $\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\}\Psi$ は $\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\}\Psi| = -2i(\sigma^a)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_a C(x)$ であるため、独立な自由度をもたない。独立な組み合わせとして、今後の議論に合わせて書くと、次の3つがある：

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{4}(D^2\Psi(z) + \bar{D}^2\Psi(z))|, \\ K &= -\frac{1}{4}i(D^2\Psi(z) - \bar{D}^2\Psi(z))|, \\ B_m &= -\frac{1}{4}(\bar{\sigma}_m)^{\dot{\alpha}\alpha}[D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}]\Psi(z)|. \end{aligned} \tag{3.42}$$

3階微分について考える。独立な成分場として、

$$\Lambda_\alpha = -\frac{1}{4}i\bar{D}^2 D_\alpha \Psi(z)|, \quad \Lambda_{\dot{\alpha}} = +\frac{1}{4}iD^2 \bar{D}_{\dot{\alpha}} \Psi(z)| \tag{3.43}$$

がある。他にも3階微分の組み合わせがあるが、それらは $(\bar{\sigma}^m)^{\dot{\alpha}\alpha}\partial_m Z_\alpha$ の違いとしてしか現れず、従って独立な自由度を持たない。4階微分によって得られる成分場が最高次の独立な自由度である：

$$D = \frac{1}{8}D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha \Psi(z)|. \tag{3.44}$$

これ以上の階数の微分はすべてこれまでの成分場の空間微分としてしか現れない。このようにして、一般の超場から独立な成分場を共変微分を用いて見つけ出すことができる。これらは成分場の超対称性変換でも互いに移りあう。従って、成分形式においては、超対称性変換で移り合う一般の多重項 V を、独立な成分場で

$$V = [C, Z, H, K, B_m, \Lambda, D] \tag{3.45}$$

と書き下すことで表記する。

3.2.2 超対称性変換不変な作用

いま、超空間と超場を用いて超対称性変換不変な作用を構成する。超空間を用いると、超対称性変換不変な量を超空間上の積分として明白に構成することができる。これは、場の理論において座標不変量を空間全体の積分で作ることができることの拡張である。まず例として、(3.1) 式で与えられた多重項 (ϕ, ψ_α, F) の運動項 S_D を超空間上の積分で与えることを考える。大まかな形を導くために次元解析から行う。カイラル超場 $\Phi(z)$ の質量次元は、定義より $\phi(x)$ の質量次元と等しい 1 である。また、反可換数による積分は反可換数による微分に他ならない[*2]ので、反可換パラメータによる積分

$$\int d^2\theta = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta^1}\frac{\partial}{\partial\theta^2} = -\frac{1}{4}\partial^\alpha\partial_\alpha \tag{3.46}$$

および、

$$\int d^2\bar{\theta} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{1}}}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{2}}} = -\frac{1}{4}\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\bar{\partial}^{\dot{\alpha}} \tag{3.47}$$

の質量次元はそれぞれ +1 である。従って、$\int d^2\theta \int d^2\bar{\theta}$ は質量次元 2 の演算子である。さらに、∂_α と $\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}$ の組み合わせ 1 つから 1 階の時空微分 ∂_m が作られるので、$\int d^2\theta \int d^2\bar{\theta}$ は 2 階の時空微分を与える演算子であると予想できる。この θ 積分の性質と、作用が実数であるという条件から、超空間上の積分として、まず次の量が考えられる：

$$\int d^4x \int d^2\theta \int d^2\bar{\theta}\Phi(z)\bar{\Phi}(z). \tag{3.48}$$

この積分の中の θ 積分を実行する。時空上の積分の中では、表面項を無視すれば常に全微分項を加えることができるので、∂_α を D_α に置き換えることができる。また、θ について積分したあとは被積分関数に θ 依存性は無いので、

$$\int d^4x \int d^2\theta \int d^2\bar{\theta}\Phi(z)\bar{\Phi}(z) = \int d^4x \frac{1}{32}(D^2\bar{D}^2 + \bar{D}^2D^2)\Phi(z)\bar{\Phi}(z)| \tag{3.49}$$

[*2] 例えば文献 [52] 参照。本論文では $\int d\theta^1\theta^1 = 1$ の規約をとる。

となる。ここで、恒等式

$$D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha = \bar{D}_{\dot{\alpha}} D^2 \bar{D}^{\dot{\alpha}}, \tag{3.50}$$

$$D^2\bar{D}^2 + \bar{D}^2 D^2 - 2D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha = 16\partial^m\partial_m \tag{3.51}$$

を用いて、共変微分を実行すると、

$$\int d^4x \int d^2\theta \int d^2\bar{\theta}\Phi(z)\bar{\Phi}(z) = \int d^4x \left(-\partial_m\phi^*\partial^m\phi + i\partial_m\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^m)^{\dot{\alpha}\beta}\psi_\beta + F^*F\right). \tag{3.52}$$

これは成分形式での運動項 S_D に他ならない。

次に (3.6) 式で与えられた質量項 S_m について考える。S_m は $\psi^\alpha\psi_\alpha \propto D^\alpha\Phi D_\alpha\Phi|$ を含んでいることから、$m\Phi^2$ の $d^2\theta$ による積分から得られるという予想ができる。実際、

$$\int d^4x \int d^2\theta m\Phi^2 + \text{h.c.} = \int d^4x m\left(\phi F - \frac{1}{2}\psi^\alpha\psi_\alpha + \text{h.c.}\right) \tag{3.53}$$

となり、確かに超対称性変換不変な質量項 S_m が得られた。ここで、$d^2\theta$ 積分は $d\bar{\theta}$ を含んでいないため、$\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ の作用で不変でないように見える。しかし、被積分関数がカイラル超場 $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi^2 = 2\Phi\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0$ であることから作用は不変である。

これらの作用は、単に超場の積を作り、反可換数座標で積分することで得られた。従って、超空間における作用は、運動項は Φ と $\bar{\Phi}$ からなる実関数 $K(\Phi,\bar{\Phi})$、質量項はカイラル超場 Φ を複素数 z と見たときの正則関数 $W(\Phi)$ に一般化してもやはり超対称な作用ができる。$d^4\theta := d^2\theta d^2\bar{\theta}$ として、

$$S = \int d^4x \int d^4\theta K(\Phi,\bar{\Phi}) + \left(\int d^4x \int d^2\theta W(\Phi) + \text{h.c.}\right) \tag{3.54}$$

これらは超対称性だけから決まる一般的な模型である非線形シグマ模型を与える。ここで、K はケーラー・ポテンシャル、W はスーパーポテンシャルとそれぞれ呼ばれ、物質場を記述する一般の作用積分の構成における基本的な量となる。

上記の作用の構成で用いた $\int d^4x \int d^4\theta$ および $\int d^4x \int d^2\theta$ で表される超空間上の積分をそれぞれ D-type 積分および F-type 積分と言う。そして D-type 積分および F-type 積分で構成される作用を D-type 作用および F-type 作用という。以降は積分記号 $\int$ は 1 回のみ書くことにする。

のちの共形超重力理論を扱う際に重要となる性質の一つに、D-type 作用は F-type 作用で表すことができるというものがある。d^4x 積分の中では $d^2\bar{\theta} = -\frac{1}{4}\bar{D}^2$ であるので、実超場 $V(=V^\dagger)$ の D-type 積分は

$$\int d^4x d^4\theta V = \frac{1}{2}\int d^4x d^2\theta\left(-\frac{1}{4}\bar{D}^2V\right) + \frac{1}{2}\int d^4x d^2\bar{\theta}\left(-\frac{1}{4}D^2V\right) \tag{3.55}$$

と F-type 積分の形にすることができる。ここで、$-\frac{1}{4}\bar{D}^2V$ はカイラル超場であることに注意する。超対称性代数より従う反交換関係 $\{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = 0$ より、

$$-\tfrac{1}{4}\bar{D}_{\dot{\alpha}}\bar{D}^2V = 0. \tag{3.56}$$

これは一般の超場に対して成立する。従って、$-\frac{1}{4}\bar{D}^2$ は「カイラル射影」と呼ばれる。

以上の議論で、通常の時空を超空間に拡張することで超対称性変換不変な作用積分が系統的に得られることがわかった。このように超空間上で議論することにより、超対称性を自然に考えることができるが、超空間は幾何学的にはどのような性質を持つのであろうか。

3.2.3 超空間の幾何学的意味

空間の微分幾何学を探る上では、共変微分の交換関係が重要な役割を果たす。例えばポアンカレ重力理論においては、時空の歪みは曲率で記述された。曲率は時空内の無限小の閉曲線に沿った平行移動、すなわち共変微分の交換関係によって、時空の局所ローレンツ変換がどれくらい引き起こされるのかを表す量である。

超空間についても同様に、その幾何学的性質を調べるために、超空間上に定義された共変微分 $D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}$ の交換関係について考える。

まず、共変微分と超空間の通常のパラメータ微分を

$$D_A := E_A{}^M\partial_M \tag{3.57}$$

で関係づける。ここで、

$$E_A{}^M = \begin{pmatrix} \delta_a{}^m & 0 & 0 \\ i\bar{\theta}_{\dot{\nu}}(\bar{\sigma}^m)^{\dot{\nu}\beta}\epsilon_{\beta\alpha} & \delta_\alpha{}^\mu & 0 \\ i\theta^\nu(\sigma^m)_{\nu\dot{\beta}}\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} & 0 & \delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\mu}} \end{pmatrix} \tag{3.58}$$

である。また、添字 $A, B, ...$ は超空間を扱う形式ではローレンツ・ベクトル添字 a とローレンツ・スピノル添字 $(\alpha, \dot{\alpha})$ を同時に表すものであるとする：$A = (a, \alpha, \dot{\alpha})$。また、添字 $M, N, ...$ でアインシュタイン・ベクトル添字 m とアインシュタイン・スピノル添字 $(\mu, \dot{\mu})$ を同時に表す：$M = (m, \mu, \dot{\mu})$。重力を含まない超対称性理論では、アインシュタイン・スピノルはローレンツ添字にクロネッカーのデルタで書き換えることができる：$\theta^\alpha = \theta^\mu\delta_\mu{}^\alpha$。

$E_A{}^M$ は逆に解くことができる。$E_A{}^M$ に対して、

$$E_M{}^AE_A{}^N = \delta_M{}^N, \quad E_A{}^ME_M{}^B = \delta_A{}^B \tag{3.59}$$

となる ${E_M}^B$ が存在して、

$$\partial_M = {E_M}^A D_A. \tag{3.60}$$

${E_M}^A$ を超四脚場、または単に四脚場と呼ぶ。${E_A}^M$ も特に断りのない限り四脚場と呼ぶ。${E_M}^A$ の成分は具体的には

$${E_M}^A = \begin{pmatrix} {\delta_m}^a & 0 & 0 \\ -i\bar{\theta}_{\dot{\nu}}(\bar{\sigma}^a)^{\dot{\nu}\nu}\epsilon_{\nu\mu} & {\delta_\mu}^\alpha & 0 \\ -i\theta^\nu(\bar{\sigma}^a)_{\nu\dot{\nu}}\epsilon^{\dot{\nu}\dot{\mu}} & 0 & {\delta^{\dot{\mu}}}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{3.61}$$

となる。

一般に、共変微分 $D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}$ の反交換関係が一般に 0 でなく再び共変微分となるとき、すなわち

$$[D_A, D_B] = -R(P)_{AB}{}^C D_C \tag{3.62}$$

となるとき、その係数のテンソル $R(P)_{AB}{}^C$ は捩率である。超空間においては、0 でない捩率テンソルは、

$$R(P)_{\alpha\dot{\beta}}{}^c = +2i(\sigma^c)_{\alpha\dot{\beta}} \tag{3.63}$$

である。超空間における捩れとはどのようなものなのかは、θ_α が通常の数ではなく反可換数であることから直感的に理解することは難しいが、その由来は超対称性代数に他ならない。従って、超対称性代数を超空間における捩率という幾何学量を用いて理解することができる。

3.3　超空間による超対称ゲージ理論の構成

ここでは、超重力理論を超対称性のゲージ理論として記述するために、そもそも超対称性においてゲージ理論がどのように構成されるかを文献 [18] に従って紹介する。ここで行うことは、本論文の主題の一つである共形超空間の構成、そして共形超空間上での YM 理論の定式化に直接関わるため、重力のないこの場合について詳しく述べておく。ここでの目標は (3.105) 式の超対称ゲージ理論の作用積分

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x d^2\theta \mathrm{tr}(\mathcal{W}^\alpha \mathcal{W}_\alpha) + \mathrm{h.c.} \tag{3.64}$$

を得ることである。

3.3.1 超空間上のゲージ対称性

ここでは、超空間上でゲージ理論を構成する。ゲージ理論はゲージ場を導入し微分を共変微分にすることで構成できた。超対称性理論においても、超空間上でのゲージ場であるゲージ超場を導入する。このゲージ超場を用いて、超空間上の場の強さを構成する。そして超空間における共変微分 $D_\alpha, \bar{D}_{\dot\alpha}$ をゲージ超場を用いてゲージ変換についても共変となるように拡張する。

まず、標準模型のゲージ群であるユニタリー群などを含むコンパクトリー群 $\mathscr{G}$ を内部対称性を記述する群とする。このリー群のリー代数の演算子を $X_{(a)}$ と書く。ここで、$(a) = 1, 2, ..., \dim\mathscr{G}$ であり、$\dim\mathscr{G}$ はリー群 $\mathscr{G}$ の次元 (線形独立なリー代数の演算子の数) である。また、$X_{(a)}$ は反エルミートであるとする：$(X_{(a)})^\dagger = -X_{(a)}$。演算子 $X_{(a)}$ 同士の交換関係を

$$[X_{(a)}, X_{(b)}] = -f_{(a)(b)}{}^{(c)} X_{(c)} \tag{3.65}$$

とする。演算子 $X_{(a)}$ は内部対称性に属する演算子であり、超空間上の並進を与える P_A とは可換であるものとする。これを構造定数を用いて

$$f_{P_A X_{(b)}}{}^{\mathcal{C}} = 0 \tag{3.66}$$

と書く。この構造定数の性質は四脚場が内部対称性のゲージ変換で変換しないことを示すために重要である。

次にエルミートなゲージ超場 $\mathcal{A}_M^{(a)}(z)$ を超空間上に導入する[*3]。$\mathcal{A}_m^{(a)}(z)$ の z^M を通常の時空 x^m にとったものを物理的なゲージ場 $\boldsymbol{a}_m(x)$ であるとする：

$$\mathcal{A}_m^{(a)}(z)| = \boldsymbol{a}_m^{(a)}(x). \tag{3.67}$$

いま、ゲージ超場のゲージ変換則と共変微分を導入する。重力を含まない超空間では、超対称性代数は四脚場の振率として共変微分により表現できた。超空間上で超対称ゲージ理論を構成するには、超空間上の並進の演算子 $P_A = (P_a, Q_\alpha, \bar{Q}^{\dot\alpha})$ と内部変換の演算子 $X_{(a)}$ に対するゲージ超場を導入する。重力を含まない超対称ゲージ理論におけるゲージ超場を

$$h_M{}^{\mathcal{A}} X_{\mathcal{A}} = E_M{}^A P_A + \mathcal{A}_M^{(a)} X_{(a)} \tag{3.68}$$

[*3] 内部対称性に属するゲージ超場を calligraphic で書くのは、のちに超共形対称性に属するゲージ超場で A_M と書くものがあるからである。

とする。ゲージ超場はすべて実 (フェルミオン的な超場についてはマヨラナ) であるとする。ここで、実超場とは、エルミートな超場を意味する。例えば $(E_m{}^a)^\dagger = E_m{}^a$ である。マヨラナな超場とはエルミート共役が例えば $(E_m{}^\alpha)^\dagger = E_m{}^{\dot\alpha}$ となる超場のことである。

ただし、重力を含まない超対称ゲージ理論では、四脚場 $E_M{}^A$ は (3.61) 式によって値を固定したものとする。また、ゲージパラメータを

$$\xi^{\mathcal{A}} X_{\mathcal{A}} = \xi^A P_A + \xi^{(a)} X_{(a)} \tag{3.69}$$

と書く。ここで、ξ^A は定数パラメータであるとする。一方、$\xi^{(a)}$ は超空間上の座標に依存したゲージパラメータとする。$\xi^{(a)}$ をゲージパラメータとすることで超対称ゲージ理論が構成できる。

ゲージ超場のゲージ変換則は次のように与えられる。ゲージ超場は P_A を除く演算子 $X_{\mathcal{A}'} = X_{(a)}$ の元で、

$$\delta_G(\xi^{\mathcal{A}'} X_{\mathcal{A}'}) h_M{}^{\mathcal{B}} = \partial_M \xi^{\mathcal{A}'} \delta_{\mathcal{A}'}{}^{\mathcal{B}} + h_M{}^{\mathcal{C}} \xi^{\mathcal{A}'} f_{\mathcal{A}'\mathcal{C}}{}^{\mathcal{B}} \tag{3.70}$$

と変換する。特に、四脚場は内部対称性に属するゲージ変換を受けない：

$$\delta_G(\xi^{\mathcal{A}'} X_{\mathcal{A}'}) E_M{}^B = h_M{}^{\mathcal{C}} \xi^{\mathcal{A}'} f_{\mathcal{A}'\mathcal{C}}{}^B = E_M{}^C \xi^{\mathcal{A}'} f_{\mathcal{A}'C}{}^B + \mathcal{A}_M^{(c)} \xi^{\mathcal{A}'} f_{\mathcal{A}'(c)}{}^B = 0. \tag{3.71}$$

ここで、$f_{(a)B}{}^C = f_{(a)(b)}{}^C = 0$ を用いた。従って、内部対称性のゲージ変換によって超空間の幾何学は変わらない。一方で、内部対称性のゲージ超場は

$$\delta_G(\xi^{\mathcal{A}'} X_{\mathcal{A}'}) \mathcal{A}_M^{(b)} = \partial_M \xi^{\mathcal{A}'} \delta_{\mathcal{A}'}{}^{(b)} + h_M{}^{\mathcal{C}} \xi^{\mathcal{A}'} f_{\mathcal{A}'\mathcal{C}}{}^{(b)} \tag{3.72}$$

と変換する。重力のない超対称ゲージ理論においては、$X_{\mathcal{A}'} = X_{(a)}$ であるので、

$$\delta_G(\xi^{\mathcal{A}'} X_{\mathcal{A}'}) \mathcal{A}_M^{(b)} = \partial_M \xi^{(b)} + \mathcal{A}_M^{(c)} \xi^{(a)} f_{(a)(c)}{}^{(b)} \tag{3.73}$$

となり、通常のゲージ理論のゲージ変換則を超空間上に拡張したものになっている。

次にゲージ超場に対する場の強さを定義する。この定義は共形重力理論での場の強さの定義をそのまま超空間に拡張したものを採用する：

$$R_{MN}{}^{\mathcal{A}} := \partial_M h_N{}^{\mathcal{A}} - \partial_N h_M{}^{\mathcal{A}} - (E_N{}^C h_M{}^{\mathcal{B}'} - E_M{}^C h_N{}^{\mathcal{B}'}) f_{\mathcal{B}'C}{}^{\mathcal{A}} - h_N{}^{\mathcal{C}'} h_M{}^{\mathcal{B}'} f_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}{}^{\mathcal{A}}. \tag{3.74}$$

具体的には、捩率は

$$R(P)_{MN}{}^A = \partial_M E_N{}^A - \partial_M E_M{}^A \tag{3.75}$$

であり、ゲージ超場を導入していない時と等しい。一方、内部対称性の場の強さについて考える。超空間上の場の強さを $\mathcal{F}_{MN}^{(a)}$ と書く。この場の強さは

$$\mathcal{F}_{MN}^{(a)} = \partial_M \mathcal{A}_N^{(a)} - \partial_M \mathcal{A}_M^{(a)} - \mathcal{A}_N^{(c)} \mathcal{A}_M^{(b)} {f_{(b)(c)}}^{(a)} \tag{3.76}$$

である。ここで、implicit grading (付録 A.4 参照) を用いた。特に、$\mathcal{F}_{mn}^{(a)}$ の最低次はボソン的な場の強さを与える：

$$\mathcal{F}_{mn}^{(a)}| = \partial_m \boldsymbol{a}_n^{(a)} - \partial_n \boldsymbol{a}_m^{(a)} - \boldsymbol{a}_n^{(c)} \boldsymbol{a}_m^{(b)} {f_{(b)(c)}}^{(a)}. \tag{3.77}$$

いま、超対称ゲージ理論における P_A 変換をゲージ共変な超空間の並進として導入することを考える。この導入は共形重力理論で行ったようにリー微分とゲージ変換の同一視

$$\mathcal{L}(\xi^M \partial_M) \equiv \delta_G(\xi^{\mathcal{A}} X_{\mathcal{A}}) \tag{3.78}$$

によって行うことができる。これは、P_A 変換がリー微分と $X_{(a)}$ 変換によって次のように定義されていることを意味する：

$$\delta_G(\xi^A P_A) := \mathcal{L}(\xi^A {E_A}^M \partial_M) - \delta_G(\xi^A {E_A}^M \mathcal{A}_M^{(a)} X_{(a)}). \tag{3.79}$$

ここで、超空間上のベクトル ξ^M によるリー微分 $\mathcal{L}(\xi^M \partial_M)$ は、ポアンカレ重力理論の場合と同様に、四脚場 ${E_M}^A$ に対して $\mathcal{L}(\xi^M \partial_M) {E_N}^A = \xi^M \partial_M {E_N}^A + (\partial_N \xi^M) {E_M}^A$ と作用するものとする。ゲージ超場の P_A 変換は、捩率及び場の強さを用いて

$$\delta_G(\xi^A P_A) {h_M}^{\mathcal{B}} = \partial_M \xi^{\mathcal{B}} {\delta_{\mathcal{B}}}^A + {E_M}^C \xi^A {R_{AC}}^{\mathcal{B}} \tag{3.80}$$

と表される。また、P 変換と $X_{(a)}$ 変換の交換関係、および、P 変換同士の交換関係は

$$[\delta_G(\xi^A P_A), \delta_G(\eta^{(b)} X_{(b)})] = 0, \tag{3.81}$$

$$[\delta_G(\xi^A P_A), \delta_G(\eta^B P_B)] = -\delta_G(\xi^A \eta^B {R_{AB}}^{\mathcal{C}} X_{\mathcal{C}}) \tag{3.82}$$

である。

共変微分は P 変換を通じて定義される。すなわち、アインシュタイン添字を持たず、内部対称性のゲージ変換で共変に変換する場 Φ に対して、

$$\begin{aligned}\delta_G(\xi^A P_A)\Phi &= \mathcal{L}(\xi^A {E_A}^M \partial_M)\Phi - \delta_G(\xi^A {E_A}^M \mathcal{A}_M^{(a)} X_{(a)})\Phi = \xi^A {E_A}^M (\partial_M - \mathcal{A}_M^{(a)} X_{(a)})\Phi \\ &= \xi^A {E_A}^M \nabla_M \Phi\end{aligned} \tag{3.83}$$

である。共変微分の交換関係は捩率および場の強さを与える。すなわち、(3.82) 式において P 変換が共変微分として作用する時、

$$[\nabla_A, \nabla_B] = -R_{AB}{}^{\mathcal{C}} X_{\mathcal{C}} \tag{3.84}$$

である。

ここまでで超空間にゲージ超場を導入することを考えてきた。いま、超対称ゲージ理論に物質場を導入する。超対称性理論では物質場は $\bar{D}^{\dot{\alpha}}\Phi = 0$ をみたすカイラル超場 Φ によって定義されていた。しかし、超対称ゲージ理論では超共変微分 $\bar{D}^{\dot{\alpha}}$ は座標微分のみで与えられているため、ゲージ変換で共変ではない。従って一般にはカイラル超場をゲージ変換したものはカイラル超場になるとは限らない。カイラル超場をゲージ理論と整合させるために、カイラル条件を先に導入したゲージ対称性についても共変な微分を用いて次のように再定義する：

$$\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}}\Phi = 0. \tag{3.85}$$

これは共変的カイラル条件 (covariantly chiral condition) と呼ばれるが、以降は単にカイラル条件という。

以上で、ゲージ超場、場の強さ、そして物質場を導入することができたので、これらを用いて理論の構成ができると考えられる。ただし、超空間上のゲージ超場には余分な自由度が存在する。特に、場の強さについて、スピノル方向の添字を持つ場の強さ $\mathcal{F}^{(a)}_{\alpha\beta}, \mathcal{F}^{(a)}_{\alpha b}$ で物理的なゲージ場 $\boldsymbol{a}^{(a)}_m$ と既約な多重項を作らない成分が存在する。これらの場の強さのいくつかの成分は拘束条件を課すことで0に置くことができる。この拘束条件を以下で与える[*4] ：

$$\mathcal{F}^{(a)}_{\alpha\beta} = 0, \quad \mathcal{F}^{(a)}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = 0, \quad \mathcal{F}^{(a)}_{\dot{\alpha}\beta} = 0. \tag{3.86}$$

これらの拘束条件がゲージ共変で超対称性変換共変であることに注意する。すなわち、ゲージ共変性は場の強さに対して拘束条件を置いているため保たれており、さらに超対称性変換の共変性は超場に対して拘束条件を置いているため保たれている。この拘束条件と (3.84) 式より、超対称ゲージ理論においても超対称性代数と同様の反交換関係

$$\{\nabla_\alpha, \nabla_\beta\} = 0, \quad \{\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}, \bar{\nabla}_{\dot{\beta}}\} = 0, \quad \{\nabla_\alpha, \bar{\nabla}_{\dot{\beta}}\} = -2i\nabla_{\alpha\dot{\beta}} \tag{3.87}$$

[*4] この拘束条件の見つけ方は以下のように考える。たとえば拘束条件 $\mathcal{F}^{(a)}_{\alpha\beta} = 0$ は、任意の反カイラル超場 $\bar{\Phi}(z)$ に対して、$0 = \{\nabla_\alpha, \nabla_\beta\}\bar{\Phi}(z) = -\mathcal{F}^{(a)}_{\alpha\beta} X_{(a)}\bar{\Phi}(z)$ となるべきであることから従う。このことから、拘束条件 $\mathcal{F}^{(a)}_{\alpha\beta} = 0$ とそのエルミート共役は representation-preserving constraint とも呼ばれる。これに対して、$\mathcal{F}^{(a)}_{\alpha\dot{\beta}} = 0$ は、ゲージ超場 $\mathcal{A}^{(a)}_{\alpha\dot{\beta}}$ の定義を変えることでできるため、conventional constraint と呼ばれる [17]。

が成り立つ。ただし、超対称ゲージ理論で通常の超対称ゲージ理論で異なることは、

$$[\nabla_\alpha, \nabla_{\beta\dot{\beta}}] = -\mathcal{F}^{(a)}_{\alpha,\beta\dot{\beta}} X_{(a)} \neq 0 \tag{3.88}$$

である。これは超空間において通常の時空と反可換変数の空間の間にゲージ超場の場の強さが存在することを意味する[*5]。以降で、これらの曲率が超対称ゲージ理論の作用の構成に重要な役割を果たすことを説明する。

3.3.2　曲率の拘束条件とビアンキ恒等式

ここまでで超空間にゲージ超場および曲率を導入した。曲率はビアンキ恒等式に従うが、超空間においては曲率に関する拘束条件が要請されている。従って、曲率のある成分に拘束条件をかけると、ビアンキ恒等式から他の曲率にも拘束がかかることがわかる。その結果、拘束条件を満たす基本的な超場が導かれ、その超場によって曲率が書ける。曲率は作用積分の構成において基本的な量であるので、その曲率を導く超場は超対称ゲージ理論の構成において基本的な量であると言える。

ここでは、そのような基本的な超場をビアンキ恒等式と拘束条件から具体的に導く。この手続きは共形超重力理論の超空間形式においても本質的に同様であるので、ここである程度詳しくまとめておく。

ビアンキ恒等式は共変微分に対して従う次の等式である：

$$[\nabla_A, [\nabla_B, \nabla_C]] + [\nabla_B, [\nabla_C, \nabla_A]] + [\nabla_C, [\nabla_A, \nabla_B]] = 0, \tag{3.89}$$

ここで、implicit grading を用いた。このビアンキ恒等式と、曲率に対する拘束条件 $\mathcal{F}^{(a)}_{\underline{\alpha\beta}} = 0$ を用いて、独立な超場を導く[*6]。

まず、$A = \alpha, B = \beta, C = \dot{\gamma}$ とすると、

$$[\nabla_\alpha, \{\nabla_\beta, \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}\}] + [\nabla_\beta, \{\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}, \nabla_\alpha\}] + [\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}, \{\nabla_\alpha, \nabla_\beta\}] = 0 \tag{3.90}$$

である。重力を含まない超対称性理論では捩率のスピノル・ベクトル成分が 0 であること $R(P)_{\alpha,\beta\dot{\gamma}}{}^D = 0$ を用いると、

$$\mathcal{F}^{(a)}_{\alpha,\beta\dot{\gamma}} + \mathcal{F}^{(a)}_{\beta,\dot{\gamma}\alpha} = 0 \tag{3.91}$$

[*5] 仮に $\mathcal{F}^{(a)}_{\alpha,\beta\dot{\beta}} = 0$ とおくと、超対称ゲージ理論における場の強さ $\mathcal{F}^{(a)}_{mn}|$ を 0 にしたものしか得ることができない。このことは、この拘束条件のもとでは力学的な自由度を持たない理論 (超対称性代数の自明な表現しか存在しない理論) しか構成できないことを意味する。これは以下で見るビアンキ恒等式において、$\mathcal{W}^{(a)}_\alpha = 0$ とすることでわかる。

[*6] スピノル添字に下線で点付き、点無しスピノルを合わせて表す。すなわち $\underline{\alpha} := \alpha, \dot{\alpha}$.

を得る。この式は、$\mathcal{F}^{(a)}_{\alpha,\beta\dot{\gamma}}$ が α,β についての交換に関して反対称であること $\mathcal{F}^{(a)}_{\alpha,\beta\dot{\gamma}}=-\mathcal{F}^{(a)}_{\beta,\dot{\gamma}\alpha}$ を示している。4次元の2成分スピノルに対して、点無し添字同士の反対称部分はスカラーである。従って1階の点付きスピノル超場 $\bar{\mathcal{W}}^{(a)}_{\dot{\gamma}}$ と2成分スピノルの不変テンソル $\epsilon_{\alpha\beta}$ をもちいて

$$\mathcal{F}^{(a)}_{\alpha,\beta\dot{\gamma}}=+2i\epsilon_{\alpha\beta}\bar{\mathcal{W}}^{(a)}_{\dot{\gamma}} \tag{3.92}$$

と表わすことができる。

また、ビアンキ恒等式において、$A=\alpha,B=\beta,C=\gamma\dot{\gamma}$ とすると、

$$\{\nabla_\alpha,\mathcal{F}^{(a)}_{\beta,\gamma\dot{\gamma}}\}-\{\nabla_\beta,\mathcal{F}^{(a)}_{\gamma\dot{\gamma},\alpha}\}=0 \tag{3.93}$$

である。これより、

$$\nabla_\alpha\bar{\mathcal{W}}^{(a)}_{\dot{\gamma}}=0 \tag{3.94}$$

を得る。これは、$\bar{\mathcal{W}}^{\dot{\delta}}$ が反カイラル超場であることを意味している。エルミート共役についても同様に、

$$\mathcal{F}^{(a)}_{\dot{\alpha},\gamma\dot{\beta}}=+2i\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\mathcal{W}^{(a)}_{\gamma}, \tag{3.95}$$

および、

$$\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}\mathcal{W}^{(a)}_{\beta}=0. \tag{3.96}$$

さらに、$A=\alpha,B=\dot{\beta},C=\gamma\dot{\gamma}$ とすることで、

$$\mathcal{F}^{(a)}_{\alpha\dot{\beta},\gamma\dot{\gamma}}=-\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\gamma}}\nabla_\alpha\mathcal{W}^{(a)}_{\gamma}-\epsilon_{\alpha\gamma}\bar{\nabla}_{\dot{\beta}}\mathcal{W}^{(a)}_{\dot{\gamma}}. \tag{3.97}$$

左辺は共にベクトル添字であるので、その最低次はボソン的な場の強さ $\mathcal{F}^{(a)}_{mn}|$ そのものである。超対称ゲージ理論の超空間における定式化では、ボソン的な場の強さは $\mathcal{W}^{(a)}_{\alpha}$ とそのエルミート共役で書けることを意味する。

超場 $\mathcal{W}^{(a)}_{\alpha}$ がまさに求めるべき超対称なゲージ理論における基本的な超場である。この超場はスピノル添字を1つ持ち、その最低次 $\lambda^{(a)}_{\alpha}$ はフェルミオンである：

$$\lambda^{(a)}_{\alpha}:=-\mathcal{W}^{(a)}_{\alpha}|. \tag{3.98}$$

このフェルミオンはスピノルの共変微分3つを用いてかけるので、質量次元は3/2である。さらに、$\lambda^{(a)}_{\alpha}$ の ∇_α による共変微分、つまり超対称性変換にゲージ場の微分を持つ場の強さ $\mathcal{F}^{(a)}_{\alpha\dot{\beta},\gamma\dot{\gamma}}$ が現れていることから、$\lambda^{(a)}_{\alpha}$ はゲージ場の超対称パートナーに他ならない。$\lambda^{(a)}_{\alpha}$ はゲージーノと呼ばれる。場の強さは、ベクトル添字について反対称であるので、スピノル添字について既約分解すると、

$$\mathcal{F}^{(a)}_{\alpha\dot{\beta},\gamma\dot{\gamma}}=-\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\gamma}}(\nabla_{\{\alpha}\mathcal{W}^{(a)}_{\gamma\}}+\nabla_\gamma\mathcal{W}^{(a)}_{\alpha})-\epsilon_{\alpha\gamma}(\bar{\nabla}_{\dot{\beta}}\mathcal{W}^{(a)}_{\dot{\gamma}}+\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}\mathcal{W}^{(a)}_{\dot{\beta}}) \tag{3.99}$$

となる。$\mathcal{F}_{\alpha\dot{\beta},\gamma\dot{\gamma}}$ について両辺の添字を縮約すると、$\mathcal{F}_{\alpha\dot{\beta},\gamma\dot{\gamma}}$ はベクトル添字について反対称であるので、左辺は 0 となり、独立なスカラー成分

$$D^{(a)} := \frac{i}{2}\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}\bar{\mathcal{W}}^{(a)\dot{\alpha}}| = \frac{i}{2}\nabla^{\beta}\mathcal{W}^{(a)}_{\beta}| \tag{3.100}$$

が導かれる。$D^{(a)}$ は質量次元が 2 の実スカラー場である。このスカラー場は物質場の超対称性理論において現れた F と同じ役割をする補助場で、運動項を持たない。

以上で超対称ゲージ理論に現れる既約な場 $(\boldsymbol{a}^{(a)}_m, \lambda^{(a)}_\alpha, D^{(a)})$ をゲージ超場 $\mathcal{A}^{(a)}_M$ およびゲージーノ超場 $\mathcal{W}^{(a)}_\alpha$ より構成することができた。ここから成分場同士の超対称性変換則はビアンキ恒等式の解から直接導くことができることを示す。$\boldsymbol{a}^{(a)}_m$ の超対称性変換は

$$\begin{aligned}
&\delta_G(\xi^{\underline{\alpha}}Q_{\underline{\alpha}})\boldsymbol{a}^{(a)}_m = \delta_G(\xi^{\underline{\alpha}}Q_{\underline{\alpha}})\mathcal{A}^{(a)}_m| = E_m{}^c\xi^{\underline{\alpha}}\mathcal{F}^{(a)}_{\underline{\alpha}c}| = -iE_m{}^c(\bar{\sigma}_c)^{\dot{\gamma}\gamma}(-\xi_\gamma\bar{\mathcal{W}}^{(a)}_{\dot{\gamma}} + \bar{\xi}_{\dot{\gamma}}\mathcal{W}^{(a)}_\gamma)| \\
&= i(\xi_\gamma(\bar{\sigma}_m)^{\dot{\gamma}\gamma}\bar{\lambda}^{(a)}_{\dot{\gamma}} + \bar{\xi}_{\dot{\gamma}}(\bar{\sigma}_m)^{\dot{\gamma}\gamma}\lambda^{(a)}_\gamma)
\end{aligned} \tag{3.101}$$

である。このように、ゲージ場の超対称性変換はゲージーノになることがビアンキ恒等式からわかる。ここで、この変換においてはゲージ場は内部対称性に属するゲージ変換で共変に変換しないため、上記の変換則の導出には共変微分を用いることはできないことに注意しておく。次に、ゲージーノの超対称性変換は、

$$\delta_G(\xi^{\underline{\alpha}}Q_{\underline{\alpha}})\lambda^{(a)}_\beta = -\delta_G(\xi^{\underline{\alpha}}Q_{\underline{\alpha}})\mathcal{W}^{(a)}_\beta|. \tag{3.102}$$

ゲージーノ超場はゲージ共変であるので、共変微分を用いることができて、

$$\begin{aligned}
\delta_G(\xi^{\underline{\alpha}}Q_{\underline{\alpha}})\lambda^{(a)}_\beta &= \xi^\alpha\nabla_\alpha\mathcal{W}^{(a)}_\beta + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}}\mathcal{W}^{(a)}_\beta \\
&= \frac{1}{2}\xi^\alpha(\nabla_\alpha\mathcal{W}^{(a)}_\beta + \nabla_\beta\mathcal{W}^{(a)}_\alpha) + \frac{1}{2}\xi^\alpha\epsilon_{\alpha\beta}\nabla^\gamma\mathcal{W}^{(a)}_\gamma.
\end{aligned} \tag{3.103}$$

補助場の変換則は、補助場の超場での表式を次のように工夫することで得ることができる：

$$\begin{aligned}
&\delta_G(\xi^{\underline{\alpha}}Q_{\underline{\alpha}})D^{(a)} = \frac{i}{2}\xi^\alpha\nabla_\alpha\bar{\nabla}_{\dot{\beta}}\bar{\mathcal{W}}^{(a)\dot{\beta}}| + \frac{i}{2}\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}}\nabla^\beta\mathcal{W}^{(a)}_\beta| = \xi^\alpha\nabla_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\mathcal{W}}^{(a)\dot{\beta}}| + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}\beta}\mathcal{W}^{(a)}_\beta| \\
&= \xi^\alpha\nabla_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\lambda}^{(a)\dot{\beta}} - \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}\beta}\lambda^{(a)}_\beta.
\end{aligned} \tag{3.104}$$

これらの式は、成分場の変換則は超空間上の場の強さという幾何学量とそのビアンキ恒等式から得ることができるということを意味している。このことは、共形超重力理論の共形超空間での構成においてより重要となる。

以上より、超対称ゲージ理論においては、質量次元 3/2 のゲージーノ $\lambda^{(a)}_\alpha = -\mathcal{W}^{(a)}_\alpha|$ そして質量次元 2 の場の強さ $\mathcal{F}^{(a)}_{\alpha\dot{\beta},\gamma\dot{\gamma}}|$、同じく質量次元 2 の補助場 $D^{(a)} = \frac{i}{2}\{\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}, \bar{\mathcal{W}}^{(a)\dot{\alpha}}\}|$ が多重項をなすことがわかった。

3.3.3　超対称ゲージ不変な作用

いま、ゲージ場を含む超対称性変換不変な作用を構成する。上で見たように、超対称ゲージ理論における基本的な超場はカイラル超場 $\mathcal{W}_\alpha$ である。このカイラル超場を含み、さらに反可換数について積分、つまり反可換数について微分した結果ゲージ場の運動項 $\mathcal{F}^{mn}\mathcal{F}_{mn}|$ を含む項は次のように与えられる：

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4xd^2\theta \mathrm{tr}(\mathcal{W}^\alpha\mathcal{W}_\alpha) + \mathrm{h.c.} \tag{3.105}$$

で与えられる。ここで、$\mathcal{W}_\alpha^{(a)}$ は超空間の場の強さであるので内部対称性の随伴表現に属することを用いた。この作用の展開はゲージ共変に行うことができる。すなわち、ゲージ不変な関数に対する共変微分の作用、つまり、自明な表現に対する共変微分は、ゲージ超場を含まない座標微分であること

$$\nabla_\alpha(\mathrm{inv.}) = D_\alpha(\mathrm{inv.}) \tag{3.106}$$

を逆に用いて、$d^2\theta$ 積分を共変微分として書くことができる。

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{4}\int d^4xd^2\theta \mathrm{tr}(\mathcal{W}^\alpha\mathcal{W}_\alpha) + \mathrm{h.c.} \\ &= \frac{1}{16}\int d^4xD^2\mathrm{tr}(\mathcal{W}^\alpha\mathcal{W}_\alpha) + \mathrm{h.c.} \\ &= \frac{1}{16}\int d^4x\nabla^2\mathrm{tr}(\mathcal{W}^\alpha\mathcal{W}_\alpha) + \mathrm{h.c.} \end{aligned} \tag{3.107}$$

共変微分の交換関係により、

$$[\nabla^\alpha, \{\nabla_\alpha, \mathcal{W}_\beta\}] = 4i[\nabla^c(\sigma_c)_{\beta\dot{\alpha}}, \bar{\mathcal{W}}^{\dot{\alpha}}] \tag{3.108}$$

であるので、

$$[\nabla^\alpha, \{\nabla_\alpha, \mathcal{W}_\beta\}]| = 4i[\nabla^c(\sigma_c)_{\beta\dot{\alpha}}, \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}] \tag{3.109}$$

を用いることで、成分展開を行うことができる。

第 4 章　共形超重力理論

本章では共形超重力理論と共形重力理論を用いた超重力理論の構成を説明する。超重力理論は、ポアンカレ対称性と超対称性を組み合わせた超ポアンカレ対称性のゲージ理論として構成することができる。物質場や YM ゲージ場を含まない重力のみの超重力理論の作用は

$$S=\int d^4xe\left(-\frac{1}{2}R+\frac{1}{2}\epsilon^{mnpq}(\bar{\psi}_{m\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}_n)^{\dot{\alpha}\beta}D^{\omega}_p\psi_{q\beta}-\psi_m{}^{\alpha}(\sigma_n)_{\alpha\dot{\beta}}D^{\omega}_p\bar{\psi}_q{}^{\dot{\beta}})-\frac{1}{3}M\bar{M}+\frac{1}{3}N^aN_a\right) \tag{4.1}$$

である。ここで第 2 項は、超対称性に属するゲージ場で重力の超対称パートナーであるグラヴィティーノ $\psi_{m\underline{\alpha}}$ の運動項であり、Rarita–Schwinger (RS) 項と呼ばれる。グラヴィティーノは重力の持つスピン 2 よりも半整数だけ小さいスピン 3/2 を持つため、この場に対する微分はスピン接続を用いて書かれるローレンツ変換で共変な微分 D^{ω}_p が作用する。また、上式の M および N_a は重力とグラヴィティーノの自由度を運動方程式なしで釣り合わせるための補助場である。

しかし、第 1 章で述べた通り、超重力理論の作用の定式化は、複雑であることが知られている。特に、現象論的応用において重要となる物質場と YM ゲージ場が結合した場合、作用 (4.1) 式への物質場や YM ゲージ場の結合の仕方が複雑になる。この複雑さは共形超重力理論を用いることで克服することができる。ここで、共形超重力理論は、超ポアンカレ対称性をスケール対称性を含む超共形対称性に拡張し、この対称性のゲージ理論として構成できる重力理論である。この共形超重力理論の構成には現在までで 2 種類の方法が知られている。ひとつはテンソル算法と呼ばれる方法である。これは、成分場で超対称性変換の規則を定める方法であり、従来の場の理論の言葉で行われる。そのため、物理的な応用を行いやすい。もうひとつは共形超空間を用いる方法である。超空間上で共形超重力理論を構成する方法である。これは前章で考えたように、超空間上のゲージ理論は超対称性変換を超空間上の並進として幾何学的に考えることができる。ここで重力理論は幾何学的に構成されることを思い出すと、共形超重力理論を超共形対称性を導入した超空間上の幾何学として構成することは自然であると考えられる。ただし、第 1 章で述べた通り、共形超空間はテンソル算法にはない特別な制限が存在するのではないかという議論がな

された。

本章ではこれらの定式化についてそれぞれ説明した後、KU [30] による共形超空間を構成しようとした際に生ずる困難について説明する。

4.1　超共形代数

まず、超共形代数を導入する。超共形代数は第 2 章で導入した共形代数 (P_a, M_{ab}, D, K_a) とそのスピノル的拡張 $(Q_{\underline{\alpha}}, S_{\underline{\alpha}}, A)$ から構成される[*1]。演算子の種類が多いので一見複雑に見えるが、共形代数と超対称性代数を組み合わせたものとして構造的に理解できる。以下で超共形代数を演算子の定義と共に説明する。

まず、共形代数部分は第 2.2 章と同じく

$$
\begin{aligned}
&[M_{ab}, M_{cd}] = \eta_{bc} M_{ad} - \eta_{ac} M_{bd} - \eta_{bd} M_{ac} + \eta_{ad} M_{bc},\\
&[M_{ab}, P_c] = P_a \eta_{bc} - P_b \eta_{ac}, \qquad [M_{ab}, K_c] = K_a \eta_{bc} - K_b \eta_{ac},\\
&[D, P_a] = P_a, \qquad [D, K_a] = -K_a,\\
&[K_a, P_b] = 2D\eta_{ab} - 2M_{ab}
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

である。次に、超対称性の演算子 $(Q_\alpha, \bar{Q}^{\dot{\alpha}})$ を導入する：

$$
\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = -2i(\sigma^a)_{\alpha\dot{\alpha}} P_a. \tag{4.3}
$$

いま、P に対する超対称性の演算子を導入したが、共形代数において K_a という演算子があり、それは P_a と共にベクトル演算子であることに注意すると、この K_a に対する超対称性演算子 $(S_\alpha, \bar{S}^{\dot{\alpha}})$ を次の代数を満たすように導入することができる：

$$
\{S_\alpha, \bar{S}_{\dot{\alpha}}\} = +2i(\sigma^a)_{\alpha\dot{\alpha}} K_a. \tag{4.4}
$$

S は本論文では共形超対称性変換と呼ぶことにする。Q と S はスピノルであるのでローレンツ変換のもとで次のように変換する：

$$
[M_{ab}, Q_\gamma] = (\sigma_{ab})_\gamma{}^\delta Q_\delta, \quad [M_{ab}, \bar{Q}^{\dot{\gamma}}] = (\bar{\sigma}_{ab})^{\dot{\gamma}}{}_{\dot{\delta}} \bar{Q}^{\dot{\delta}}, \tag{4.5}
$$

$$
[M_{ab}, S_\gamma] = (\sigma_{ab})_\gamma{}^\delta S_\delta, \quad [M_{ab}, \bar{S}^{\dot{\gamma}}] = (\bar{\sigma}_{ab})^{\dot{\gamma}}{}_{\dot{\delta}} \bar{S}^{\dot{\delta}}. \tag{4.6}
$$

[*1] 厳密には、共形代数が $SO(4,2)$ であることを用いて、そのフェルミオン的拡張である $SU(2,2|1)$ として超共形代数を定義する。

共形代数にはスケール変換の演算子 D があり、$[D, P_a] = P_a$, $[D, K_a] = -K_a$ であった。この関係より、Q と S についての D との交換関係を

$$[D, Q_\alpha] = \frac{1}{2} Q_\alpha, \quad [D, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] = \frac{1}{2} \bar{Q}^{\dot{\alpha}}, \tag{4.7}$$

$$[D, S_\alpha] = -\frac{1}{2} S_\alpha, \quad [D, \bar{S}^{\dot{\alpha}}] = -\frac{1}{2} \bar{S}^{\dot{\alpha}}. \tag{4.8}$$

このように、共形代数に P と K それぞれに対する超対称性 Q, S を導入した。これらはスピノルであり、カイラリティを持つ。そのカイラリティを区別する演算子 A を次のような交換関係を満たすものとして導入する：

$$[A, Q_\alpha] = -iQ_\alpha, \quad [A, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] = +i\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, \tag{4.9}$$

$$[A, S_\alpha] = +iS_\alpha, \quad [A, \bar{S}^{\dot{\alpha}}] = -i\bar{S}^{\dot{\alpha}}. \tag{4.10}$$

共形代数の演算子はスカラーであるかベクトル添字しか持たない演算子であるため、A とは可換であるとする。共形代数において P と K の交換関係が D と M を用いて与えられたように、超共形代数における Q と S の交換関係を次のように定める。

$$\{S_\alpha, Q_\beta\} = (2D - 3iA)\epsilon_{\alpha\beta} - 2M_{\alpha\beta}, \quad \{\bar{S}^{\dot{\alpha}}, \bar{Q}^{\dot{\beta}}\} = (2D + 3iA)\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} - 2M^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}. \tag{4.11}$$

ここで、$M_{\underline{\alpha\beta}}$ は、ローレンツ変換の演算子 M_{ab} のカイラル部分および反カイラル部分である：

$$M_{\alpha\beta} := (\sigma^{ba}\epsilon)_{\alpha\beta} M_{ab}, \quad M^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} := (\bar{\sigma}^{ba}\epsilon)^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} M_{ab}. \tag{4.12}$$

$M_{\alpha\beta}$ は点無しスピノル、$\bar{M}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ は点付きスピノルをそれぞれ変換する。例えば、(4.5) 式の両辺に $(\sigma^{ab})_\alpha{}^\beta$ と $(\bar{\sigma}^{ab})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}$ を作用し、添字を整理することで、

$$\begin{aligned} &[M_{\alpha\beta}, Q_\gamma] = -\epsilon_{\alpha\gamma} Q_\beta - \epsilon_{\beta\gamma} Q_\alpha, \quad [M_{\alpha\beta}, \bar{Q}^{\dot{\gamma}}] = 0, \\ &[M^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}, \bar{Q}^{\dot{\gamma}}] = -\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} - \epsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}}, \quad [M^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}, Q_\gamma] = 0 \end{aligned} \tag{4.13}$$

を得る。S についても同様である。

最後に、P, K と Q, S の交換関係を

$$[K_a, Q_\beta] = i(\sigma_a)_{\beta\dot{\gamma}} \bar{S}^{\dot{\gamma}}, \quad [K_a, \bar{Q}^{\dot{\beta}}] = i(\bar{\sigma}_a)^{\dot{\beta}\gamma} Q_\gamma, \tag{4.14}$$

$$[S_\alpha, P_b] = i(\sigma_b)_{\alpha\dot{\gamma}} \bar{Q}^{\dot{\gamma}}, \quad [\bar{S}^{\dot{\alpha}}, P_b] = i(\bar{\sigma}_b)_{\alpha\dot{\gamma}} \bar{Q}^{\dot{\gamma}} \tag{4.15}$$

で与える。以上が超共形代数の非自明な交換関係および反交換関係である。上記に現れなかった (反) 交換関係は全て 0 である。例えば $\{S_\alpha, \bar{Q}^{\dot{\beta}}\} = 0$ である。ここで超共形代数はヤコビ恒等式を満たすことも確かめることができることに注意しておく。

時空並進	超対称性	ローレンツ	スケール	カイラル	共形超対称性	共形ブースト
P_a	$(Q_\alpha, \bar{Q}^{\dot{\alpha}})$	M_{ab}	D	A	$(S_\alpha, \bar{S}^{\dot{\alpha}})$	K_a

表 4.1: 超共形代数の演算子。

上記の超共形代数を以下にまとめておく。

$$
\begin{aligned}
&[M_{ab}, M_{cd}] = \eta_{bc}M_{ad} - \eta_{ac}M_{bd} - \eta_{bd}M_{ac} + \eta_{ad}M_{bc}, \\
&[M_{ab}, P_c] = P_a\eta_{bc} - P_b\eta_{ac}, \qquad [M_{ab}, K_c] = K_a\eta_{bc} - K_b\eta_{ac}, \\
&[D, P_a] = P_a, \qquad [D, K_a] = -K_a, \quad [K_a, P_b] = 2D\eta_{ab} - 2M_{ab}, \\
&\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = -2i(\sigma^a)_{\alpha\dot{\alpha}}P_a, \quad \{S_\alpha, \bar{S}_{\dot{\alpha}}\} = +2i(\sigma^a)_{\alpha\dot{\alpha}}K_a, \\
&[M_{ab}, Q_\gamma] = (\sigma_{ab})_\gamma{}^\delta Q_\delta, \quad [M_{ab}, \bar{Q}^{\dot{\gamma}}] = (\bar{\sigma}_{ab})^{\dot{\gamma}}{}_{\dot{\delta}}\bar{Q}^{\dot{\delta}}, \\
&[M_{ab}, S_\gamma] = (\sigma_{ab})_\gamma{}^\delta S_\delta, \quad [M_{ab}, \bar{S}^{\dot{\gamma}}] = (\bar{\sigma}_{ab})^{\dot{\gamma}}{}_{\dot{\delta}}\bar{S}^{\dot{\delta}}, \\
&[D, Q_\alpha] = \frac{1}{2}Q_\alpha, \quad [D, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] = \frac{1}{2}\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, \quad [D, S_\alpha] = -\frac{1}{2}S_\alpha, \quad [D, \bar{S}^{\dot{\alpha}}] = -\frac{1}{2}\bar{S}^{\dot{\alpha}}, \\
&[A, Q_\alpha] = -iQ_\alpha, \quad [A, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] = +i\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, \quad [A, S_\alpha] = +iS_\alpha, \quad [A, \bar{S}^{\dot{\alpha}}] = -i\bar{S}^{\dot{\alpha}}, \\
&\{S_\alpha, Q_\beta\} = (2D - 3iA)\epsilon_{\alpha\beta} - 2M_{\alpha\beta}, \quad \{\bar{S}^{\dot{\alpha}}, \bar{Q}^{\dot{\beta}}\} = (2D + 3iA)\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} - 2M^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}, \\
&[K_a, Q_\beta] = i(\sigma_a)_{\beta\dot{\gamma}}\bar{S}^{\dot{\gamma}}, \quad [K_a, \bar{Q}^{\dot{\beta}}] = i(\bar{\sigma}_a)^{\dot{\beta}\gamma}Q_\gamma, \\
&[S_\alpha, P_b] = i(\sigma_b)_{\alpha\dot{\gamma}}\bar{Q}^{\dot{\gamma}}, \quad [\bar{S}^{\dot{\alpha}}, P_b] = i(\bar{\sigma}_b)_{\alpha\dot{\gamma}}\bar{Q}^{\dot{\gamma}}.
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

これら以外の (反) 交換関係は 0 である。超共形代数の演算子を 表 4.1 にまとめた。

超共形代数のうち、P_a, Q_a, M_{ab} は部分代数をなすことに注意する。

$$
\begin{aligned}
&[M_{ab}, M_{cd}] = \eta_{bc}M_{ad} - \eta_{ac}M_{bd} - \eta_{bd}M_{ac} + \eta_{ad}M_{bc}, \\
&[M_{ab}, P_c] = P_a\eta_{bc} - P_b\eta_{ac}, \\
&\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = -2i(\sigma^a)_{\alpha\dot{\alpha}}P_a, \\
&[M_{ab}, Q_\gamma] = (\sigma_{ab})_\gamma{}^\delta Q_\delta, \quad [M_{ab}, \bar{Q}^{\dot{\gamma}}] = (\bar{\sigma}_{ab})^{\dot{\gamma}}{}_{\dot{\delta}}\bar{Q}^{\dot{\delta}}.
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

この代数は超対称性代数とポアンカレ代数からなるので、「超ポアンカレ代数」と呼ばれる。ポアンカレ超重力理論はこの代数で記述される超ポアンカレ対称性のゲージ理論として得ることができるが、本論文ではその詳細は触れない。超ポアンカレ代数の演算子を 表 4.2 にまとめた。

時空並進	超対称性	ローレンツ
P_a	$(Q_\alpha, \bar{Q}^{\dot{\alpha}})$	M_{ab}

表 4.2: 超ポアンカレ代数の演算子。

4.2 テンソル算法

ここでは、テンソル算法についてまとめる。ここで目標とする作用は (4.51) 式の YM ゲージ場と物質が結合した超重力理論のラグランジアン

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{2}\left[\,\tilde{\phi}(S, \bar{S}e^{2V_{\mathrm{G}}})\Sigma_{\mathrm{c}}\bar{\Sigma}_{\mathrm{c}}\,\right]_D + \left[\,\Sigma_{\mathrm{c}}^3 g(S)\,\right]_F - \frac{1}{4}\left[\,f_{\alpha\beta}\bar{W}^\alpha W^\beta\,\right]_F \\
&= -\frac{1}{2}\left[\,\phi(S, \bar{S}e^{2V_{\mathrm{G}}})\Sigma_0\bar{\Sigma}_0\,\right]_D + \left[\,\Sigma_0^3\,\right]_F - \frac{1}{4}\left[\,f_{\alpha\beta}\bar{W}^\alpha W^\beta\,\right]_F
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

である。

4.2.1 超共形代数とそのゲージ超場と曲率および代数の変形

テンソル算法では超共形代数の元を X_A を用いて表すことにする。この時、反交換関係を構造定数 ${f_{AB}}^C$ を用いて

$$
[X_A, X_B\} = -{f_{AB}}^C X_C \tag{4.19}
$$

と書く。ここで、括弧 $[\ ,\ \}$ は、フェルミオン的演算子同士については反交換関係を、それ以外は交換関係を与える括弧である。また、演算子は場を変換する抽象的な演算子であり、場を表現空間の元とする表現行列ではないことに注意する。表現行列の場合は、交換関係の符号が逆転することに注意する。

共形超重力理論では、超共形対称性を局所対称性として扱う。超共形対称性に対するゲージ場と変換パラメータを次のように与える：

$$
{h_m}^A X_A = {e_m}^a P_a + \bar{\psi}_m Q + \frac{1}{2}{\omega_m}^{ab} M_{ab} + b_m D + A_m A + \bar{\varphi}_m S + {f_m}^a K_a, \tag{4.20}
$$

$$
\epsilon^A X_A = \xi^a P_a + \bar{\varepsilon} Q + \frac{1}{2}\lambda^{ab} M_{ab} + \rho D + \theta A + \bar{\zeta} S + {\xi_K}^a K_a. \tag{4.21}
$$

ここで、${e_m}^a$ は四脚場、ψ_m はグラヴィティーノ、${\omega_m}^{ab}$ はスピン接続である。上式でスピノルは 4 成分形式で記述しており、

$$
Q = \begin{pmatrix} Q_\alpha \\ \bar{Q}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} S_\alpha \\ \bar{S}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \bar{\psi}_m = ({\psi_m}^\alpha \quad \bar{\psi}_{m\dot{\alpha}}), \quad \bar{\varphi}_m = ({\varphi_m}^\alpha \quad \bar{\varphi}_{m\dot{\alpha}}) \tag{4.22}
$$

である。ゲージパラメータについても同様である。また、ここでの超共形代数は文献 [30] での定義を用いている。この定義は (4.16) 式の Q, M_{ab}, A, S を

$$(Q_\alpha, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}) \to 2(Q_\alpha, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}), \quad M_{ab} \to -M_{ab}, \quad A \to \frac{4}{3}A, \quad (S_\alpha, \bar{S}^{\dot{\alpha}}) \to -2(Q_\alpha, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}) \tag{4.23}$$

と再規格化すれば良い。

テンソル算法では P 変換と Q 変換を別に扱う。すなわち、P 変換は共形重力理論のようにリー微分と結びつける一方で、Q 変換は他の M, D, A, S, K 演算子と同様に扱う。また、一度 P 変換をリー微分と関連づける前の超共形変換則と曲率も次のように定義し、それぞれ group law 変換則、group law 曲率と呼ぶことにする。まず、 場に対する group law 変換則は

$$\delta_B^{\text{group}}(\epsilon^B) h_m{}^A = \partial_m \epsilon^A + h_m{}^B \epsilon^C f_{CB}{}^A \tag{4.24}$$

で与えられる。次に、group law 曲率は

$$R_{mn}^A = \partial_n h_m{}^A - \partial_m h_n{}^A + h_n{}^B h_m{}^C f_{CB}{}^A \tag{4.25}$$

と定義される。

次に P 変換を変形する。P 変換を場に対するリー微分と次のように関連づけ、それを $\tilde{P}$ 変換と名付ける：

$$\delta_{\tilde{P}}(\xi^a) := \mathcal{L}(\xi^m) - \sum_{A \neq P} \delta_A(\xi^m h_m{}^A), \tag{4.26}$$

ここで、リー微分の中の変換パラメータ ξ^m は $\xi^m = \xi^a e_a{}^m$ で定義される。また、 ξ^a は場に依存しないパラメータであるとする。

ここまでで、P 変換をリー微分と関連づけたが、Q 変換はリー微分とは関連づけられていなかった。しかし、超対称性代数によれば $\{Q, Q\} \sim P$ であるので、Q 変換の反交換関係を変形後の $\tilde{P}$ 変換に $[\delta_Q, \delta_Q] \sim \delta_{\tilde{P}}$ で結びつける。そのために次の拘束条件をおく：

$$R_{mn}(P^a) = 0, \tag{4.27}$$

$$R_{mn}(Q)\gamma^n = 0, \tag{4.28}$$

$$R_{np}(M_{ab}) e^{ap} e^b{}_m - \frac{1}{2} R_{pm}(Q) i\gamma_n \psi^p + \frac{1}{2}(*R)_{mn}(A) = 0, \tag{4.29}$$

ここで、 $\tilde{R}_{mn}(A)$ は $R_{mn}(A)$ のホッジ双対

$$(*R)_{mn}(A) = \frac{1}{2}\epsilon_{mnpq} R^{pq}(A) \tag{4.30}$$

で、

$$\gamma_a := \begin{pmatrix} 0 & (\sigma_a)_{\alpha\dot{\beta}} \\ (\bar{\sigma}_a)^{\dot{\alpha}\beta} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.31}$$

はガンマ行列を表す。これらの拘束条件から M_{ab}, S, K_a ゲージ場 (それぞれ ${\omega_m}^{ab}$, φ_m, ${f_m}^a$) は ${e_m}^a, \psi_m, b_m, A_m$ に依存した場になっている。この依存性により、これらの依存した場 に対する Q 変換 $\delta_Q(\varepsilon)$ は独立な場 ${e_m}^a, \psi_m, b_m, A_m$ により決まり、結果としてもとの $\delta_Q^{\mathrm{group}}(\varepsilon)$ からずれている。そのずれを $\delta'_Q(\varepsilon)$ で表すと、Q 変換は

$$\delta_Q(\varepsilon) = \delta_Q^{\mathrm{group}}(\varepsilon) + \delta'_Q(\varepsilon) \tag{4.32}$$

と書かれる。そして、変換のずれ $\delta'_Q(\varepsilon)$ は

$$\begin{aligned} \delta'_Q(\varepsilon){\omega_m}^{ab} &= \frac{1}{2}R^{ab}(Q)i\gamma_m\varepsilon, \\ \delta'_Q(\varepsilon)\varphi_m &= -\frac{1}{4}\gamma^n(\gamma_5 R_{nm}(A) - i(*R)_{nm}(A))\varepsilon, \\ \delta'_Q(\varepsilon){f_m}^a &= \frac{1}{2}R^{\mathrm{cov}}_{nm}(S)\sigma^{an}\varepsilon + \frac{1}{4}e^{an}i(*R)^{\mathrm{cov}}_{nm}(S)\gamma_5\varepsilon \end{aligned} \tag{4.33}$$

によりそれぞれ与えられる。ここで、

$$\sigma_{ab} = \begin{pmatrix} {(\sigma_{ab})_\alpha}^\beta & 0 \\ 0 & {(\bar{\sigma}_{ab})^{\dot{\alpha}}}_{\dot{\beta}} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}[\gamma_a, \gamma_b], \tag{4.34}$$

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} {\delta_\alpha}^\beta & 0 \\ 0 & -{\delta^{\dot{\alpha}}}_{\dot{\beta}} \end{pmatrix} \tag{4.35}$$

であり、$R^{\mathrm{cov}\,A}_{mn}$ は共変化された曲率

$$R^{\mathrm{cov}\,A}_{mn} = {R_{mn}}^A + \delta'_Q(\psi_m)h^A_n - \delta'_Q(\psi_n){h_m}^A \tag{4.36}$$

である。

P 変換の変形から従う交換関係を次のようにまとめる：

$$[\delta_A(\epsilon_1^A), \delta_B(\epsilon_2^B)]) = \sum_C \delta_C(\epsilon_1^A\epsilon_2^B {f_{BA}}^C), \tag{4.37}$$

ここで、A, B が P 変換を意味するときには、それは 変形後の $\tilde{P}_a$ であるとする。すなわち、

$$[\delta_Q(\varepsilon_1), \delta_Q(\varepsilon_2)] = \delta_{\tilde{P}}\Big(\frac{1}{2}\bar{\varepsilon}_2 i\gamma^a\varepsilon_1\Big) \tag{4.38}$$

である。さらに、$\tilde{P}$ 変換の定義より、

$$[\delta_{\tilde{P}}(\xi^a), \delta_Q(\varepsilon)] = \sum_{A=M,S,K} \delta_A(\xi^a \delta'_Q(\varepsilon) h_a{}^A) = \sum_{A=M,S,K} \delta_A(\xi^a \varepsilon^{\underline{\alpha}} f_{Q_{\underline{\alpha}} P_a}{}^A). \tag{4.39}$$

ここで、$\underline{\alpha} = (\alpha, \dot{\alpha})$ である。また、最右辺については Q 変換の変形から導かれる $[Q, P_a]$ の新たな交換関係を、変形された構造定数 $f_{QP_c}{}^X$ $(X = M_{ab}, S, K_a)$ として表したものである。$\tilde{P}$ 変換の定義より、$\tilde{P}$ 同士の交換関係は共変化された曲率を与える：

$$[\delta_{\tilde{P}}(\xi_1^a), \delta_{\tilde{P}}(\xi_2^b)] = \sum_{A \neq P} \delta_A(\xi_1^a \xi_2^b R_{ab}^{\mathrm{cov}\,A}), \qquad \left(\to f_{P_a P_b}{}^A = -R_{ab}^{\mathrm{cov}\,A}\right) \tag{4.40}$$

これまで、P 変換の変形とそれに伴う超共形代数の変形を考えてきた。次に、超共形代数の元で共変に変換する場とその場に対する超共形共変微分を考える。これは物質場などを記述するために必要である。一般のローレンツ添字 $\Gamma = (\alpha_1, ..., \alpha_m; \dot{\beta}_1, ..., \dot{\beta}_n)$ を持ち、アインシュタイン添字を持たない場 ϕ_Γ に対する共変微分 D_a を $\tilde{P}_a$ 変換を用いて

$$\xi^a D_a \phi_\Gamma := \delta_{\tilde{P}}(\xi^a)\phi_\Gamma = \xi^a \left(e_a{}^m \partial_m \phi_\Gamma - \sum_{A \neq \tilde{P}} \delta_A(h_a{}^A)\phi_\Gamma \right) \tag{4.41}$$

で定義する。次に、超共形多重項を定義する。これは物質場に加えて超共形不変な作用を構成するために必要である。一般の超共形多重項 $\mathcal{V}_\Gamma$ は $(8+8) \times \dim\Gamma$ の複素自由度を持った場の集合である。超共形多重項の各場を「成分場」と呼び、

$$\mathcal{V}_\Gamma = [\mathcal{C}_\Gamma,\, \mathcal{Z}_{\underline{\alpha}\Gamma},\, \mathcal{H}_\Gamma,\, \mathcal{K}_\Gamma,\, \mathcal{B}_{a\Gamma},\, \Lambda_{\underline{\alpha}\Gamma},\, \mathcal{D}_\Gamma] \tag{4.42}$$

で書かれる。ここで、$\dim\Gamma$ は Γ の属するローレンツ代数の表現空間の次元である。$\mathcal{V}_\Gamma$ の初項 $\mathcal{C}_\Gamma$ は、超共形多重項の中で最も小さいワイル・ウェイトを持った場で、次の超共形変換則を満たすように定義される:

$$\begin{aligned} &\delta_Q(\varepsilon)\mathcal{C}_\Gamma = \frac{1}{2} i\bar{\varepsilon}\gamma_5 \mathcal{Z}_\Gamma, \qquad \delta_M(\lambda^{ab})\mathcal{C}_\Gamma = \frac{1}{2}\lambda^{ab}(\Sigma_{ab})_\Gamma{}^\Sigma \mathcal{C}_\Sigma =: \frac{1}{2}\lambda^{ab}(\Sigma_{ab}\mathcal{C})_\Gamma \\ &\big(\delta_D(\rho) + \delta_A(\theta)\big)\mathcal{C}_\Gamma = \Big(w\rho + \frac{1}{2} in\theta\Big)\mathcal{C}_\Gamma, \qquad \delta_S(\zeta)\mathcal{C}_\Gamma = \delta_K(\xi_K^a)\mathcal{C}_\Gamma = 0. \end{aligned} \tag{4.43}$$

ここで、Σ^{ab} は Γ が属するローレンツ代数の表現の表現行列である。また、 w と n は $\mathcal{C}_\Gamma$ のワイル・ウェイトおよびカイラル・ウェイトである。ワイル・ウェイトとカイラル・ウェイトをまとめて共形ウェイトと呼ぶ。この超共形多重項について説明する。まず、初項 $\mathcal{C}_\Gamma$ に対する S および K 変換は必ず 0 になっていなければならないことに注意する。なぜなら $\mathcal{C}_\Gamma$ は超共形多重項の中で最も低いワイル・ウェイトを持っているからである。次に、Q 変換 $\delta_Q(\varepsilon)\mathcal{C}_\Gamma = \frac{1}{2} i\bar{\varepsilon}\gamma_5\mathcal{Z}_\Gamma$ は第 2 項 $\mathcal{Z}_\Gamma$ を定義する式である。初項よりも高次の超共形

多重項の成分とその超共形変換則は、曲率の不定性を除いてそれらの場にに対する超共形代数が成立するように定まる (不定性については文献 [30] を参照)。超共形多重項の全ての成分の Q 変換則は (B.1) 式にまとめた。この具体的な Q 変換則によって高次項の不定性が固定される。(B.1) 式で定義される超共形変換則を「標準形」と呼ぶことにする。この超共形変換則においては初項 $\mathcal{C}_\Gamma$ が多重項の全ての成分を特定するため、超共形多重項 $\mathcal{V}_\Gamma$ を初項のみを用いて

$$\mathcal{V}_\Gamma = [\![\mathcal{C}_\Gamma]\!] \tag{4.44}$$

と表記する。

通常の超対称性理論においては物質場はカイラル超場によって記述できていた。共形超重力理論においてもこのような制限つきの多重項を導入できる。ただし以下で見るように、共形ウェイトとローレンツ添字に制限がかかる。超共形カイラル多重項 $\Sigma_\Gamma^{(w,n)}$ は共形ウェイト (w,n) が $w=n$ を満たし、ローレンツ添字 Γ が点無しスピノルのみであるときにのみ存在する。これは、Q 変換で特徴付けられるカイラル条件と Q 変換と S 変換の反交換関係が整合する条件として得られる。超共形カイラル多重項は $(2+2)\times\dim\Gamma$ の複素自由度をもち、成分場はで表される：

$$\Sigma^{(w=n)}_{\Gamma=(\alpha_1\cdots\alpha_l)} = [\mathcal{A}_\Gamma,\ \mathcal{P}_\mathrm{R}\chi_\Gamma,\ \mathcal{F}_\Gamma]\,. \tag{4.45}$$

ここで、$\mathcal{P}_\mathrm{R}$ は右巻きスピノルのみを取り出す射影 $\mathcal{P}_\mathrm{R}=(1+\gamma_5)/2$ である。これらの 3 つの成分は、一般の超共形多重項に

$$\mathcal{V}(\Sigma_\Gamma) = [\mathcal{A}_\Gamma, -i\mathcal{P}_\mathrm{R}\chi_\Gamma, -\mathcal{F}_\Gamma, i\mathcal{F}_\Gamma, iD_a\mathcal{A}_\Gamma, 0, 0] \tag{4.46}$$

と埋め込まれる。これより、Q 変換および S 変換は

$$\begin{aligned}
\delta_{QS}\mathcal{A}_\Gamma &= \big(\delta_Q(\varepsilon)+\delta_S(\zeta)\big)\mathcal{A}_\Gamma = \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}_\mathrm{R}\mathcal{P}_\mathrm{R}\chi_\Gamma,\\
\delta_{QS}\mathcal{P}_\mathrm{R}\chi_\Gamma &= (-1)^\Gamma\Big(i\gamma^a D_a\mathcal{A}_\Gamma\varepsilon_\mathrm{L} + \mathcal{F}_\Gamma\varepsilon_\mathrm{R} + \big(2w\mathcal{A}_\Gamma + (\Sigma^{ab}\mathcal{A})_\Gamma\sigma_{ab}\big)\,\zeta_\mathrm{R}\Big),\\
\delta_{QS}\mathcal{F}_\Gamma &= \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}_\mathrm{L}i\gamma^a D_a\mathcal{P}_\mathrm{R}\chi_\Gamma + \bar{\zeta}_\mathrm{R}\Big((1-w)\mathcal{P}_\mathrm{R}\chi_\Gamma + \frac{1}{2}\sigma_{ab}(\Sigma^{ab}\mathcal{P}_\mathrm{R}\chi)_\Gamma\Big)
\end{aligned} \tag{4.47}$$

で与えられる。

重力を含まない超対称性理論において一般の超場からカイラル超場に射影するカイラル射影が定義できた。カイラル射影も共形超重力理論において導入できる。点無しスピノルのみを持ち、共形ウェイトが $w=n+2$ を満たす超共形多重項 $\mathcal{V}_\Gamma$ に対して、カイラル射影 Π を

$$\Pi\mathcal{V}_\Gamma^{(w,\,n=w-2)} = \Big[\,\frac{1}{2}(\mathcal{H}_\Gamma - i\mathcal{K}_\Gamma),\ i\mathcal{P}_\mathrm{R}(i\gamma^a D_a\mathcal{Z}_\Gamma + \Lambda_\Gamma),\ -\frac{1}{2}(\mathcal{D}_\Gamma + D^a D_a\mathcal{C}_\Gamma + iD^a\mathcal{B}_{a\Gamma})\Big] \tag{4.48}$$

で定義できる。このカイラル射影の作用の結果、右辺は共形ウェイトが $(w+1, w+1)$ である超共形カイラル多重項となる。

テンソル算法を用いると、超共形不変な作用を簡潔な形で表される。まず重力を含まない超対称性理論における $d^4xd^2\theta$ 積分に対応する作用公式を考える。この形の積分を F-type 積分と呼び、F-type 積分で構成される作用を F-type 作用という。超共形不変な F-type 作用は共形ウェイトが $w=n=3$ であるローレンツ添字を持たない超共形カイラル多重項 $\Sigma = \left[\mathcal{A} = \frac{1}{2}(A+iB),\, \mathcal{P}_{\mathrm{R}}\chi,\, \mathcal{F} = \frac{1}{2}(F+iG)\right]$ に対してのみ定義できる。そしてその作用は

$$\int d^4x \left[\,\Sigma^{(w=n=3)}\,\right]_F = \int d^4x\, e\Big(F + \frac{1}{2}\bar{\psi}_a i\gamma^a\chi - \frac{1}{2}\bar{\psi}_a\sigma^{ab}(A - i\gamma_5 B)\psi_b\Big) \tag{4.49}$$

で与えられる。次に重力を含まない場合の超対称性理論における $d^4xd^4\theta$ に対応する積分を考える。この型の積分とその積分で構成される作用をそれぞれ D-type 積分および D-type 作用と呼ぶ。D-type 作用は、$w = 2,\ n = 0$ を満たす超共形実多重項 $V = \left[C,\, Z,\, H,\, K,\, B_a,\, \lambda,\, D\right]$ に対してのみ定義できる。この作用は F-type 作用とカイラル射影 Π を用いて

$$\begin{aligned}
&\int d^4x \left[\,V^{(w=2)}\,\right]_D = \int d^4x \left[\,-\Pi V^{(w=2)}\,\right]_F \\
&= \int d^4x\, e\Big(\,D + D^aD_aC + \frac{1}{2}\bar{\psi}_a\gamma^a\gamma_5(i\gamma^b D_b Z + \lambda) + \frac{1}{2}\bar{\psi}_a\sigma^{ab}(H + i\gamma_5 K)\psi_b\Big) \\
&= \int d^4x\, e\,\Bigg(\,D + \frac{1}{2}\bar{\psi}_a\gamma^a\gamma_5\lambda + \bar{\varphi}_a\gamma^a\gamma_5 Z + \frac{1}{3}C\Big(R - \frac{1}{e}i\bar{\psi}_m\varepsilon^{mnpq}\gamma_5\gamma_n\Big(\partial_p\psi_q - \frac{i}{4}{\omega_p}^{ab}\sigma_{ab}\psi_q\Big)\Big) \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{4}i\varepsilon^{abcd}\bar{\psi}_a\gamma_b\psi_c\Big(B_d - A_dC - \frac{1}{2}\bar{\psi}_d Z\Big)\Bigg)
\end{aligned} \tag{4.50}$$

と表される。

ここまでで共形超重力理論におけるゲージ場と曲率、代数構造、超共形多重項、そして超共形不変な作用を導入できた。これらを用いて、YM 場と物質が結合した超重力理論をの作用を書くことができる。その作用は

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{2}\left[\,\tilde{\phi}(S, \bar{S}e^{2V_{\mathrm{G}}})\Sigma_{\mathrm{c}}\bar{\Sigma}_{\mathrm{c}}\,\right]_D + \left[\,\Sigma_{\mathrm{c}}^3 g(S)\,\right]_F - \frac{1}{4}\left[\,f_{\alpha\beta}\bar{W}^\alpha W^\beta\,\right]_F \\
&= -\frac{1}{2}\left[\,\phi(S, \bar{S}e^{2V_{\mathrm{G}}})\Sigma_0\bar{\Sigma}_0\,\right]_D + \left[\,\Sigma_0^3\,\right]_F - \frac{1}{4}\left[\,f_{(a)(b)}\bar{W}^{(a)}W^{(b)}\,\right]_F
\end{aligned} \tag{4.51}$$

である。この作用に書かれている諸量について説明する。まず D-type 作用の部分について説明する。$S_i = [z_i, \mathcal{P}_{\mathrm{R}}\chi_i, h_i]$ はクォークやレプトンを表すためのカイラル物質多重項であり、共形ウェイトは $w=n=0$ である。$\bar{S}^i$ は S_i のエルミート共役である。$V_{\mathrm{G}}^{(a)}$ は YM

ゲージ場 $B_m^{(a)}$ を超共形実多重項ベクトル成分として含む多重項で、YM ベクトル多重項と呼ばれる (作用では $V_{\rm G}$ の内部ゲージ対称性のリー代数の添字 (a) は以下の議論で用いないため省略している)。そして $\Sigma_{\rm c}$ は、共形超重力理論において超共形不変な作用を構成するために導入したカイラル compensator 多重項で、共形重力理論における compensator の拡張である。この compensator は共形ウェイト $(w,n)=(1,1)$ を持つとする。$\tilde{\phi}$ は物質場の運動項を表すケーラー・ポテンシャル K を $\tilde{\phi}=3e^{-K/3}$ で含む実多重項である。

次に F-type 作用の $g(S)$ を含む部分について説明する。$g(S)$ は物質場の質量項や相互作用項を表すスーパーポテンシャルで、カイラル物質多重項の関数で書かれる。スーパーポテンシャル $g(S)$ が消えない系においては、カイラル compensator を $\Sigma_{\rm c}\to\Sigma_0=g^{1/3}(S)\Sigma_{\rm c}=[z_0,\mathcal{P}_{\rm R}\chi_0,h_0]$ ととると便利である。このとき、ϕ は $\tilde{\phi}$ とスーパーポテンシャルで次のように表される: $\phi(S,\bar{S}e^{2V_{\rm G}})=\tilde{\phi}(S,\bar{S}e^{2V_{\rm G}})|g(S)|^{-2/3}$。

最後に $f_{(a)(b)}$ を含む部分について説明する。$f_{(a)(b)}$ はゲージ運動関数 (gauge kinetic function) と呼ばれる S_i の正則関数で、ゲージ結合定数を含む。この関数は YM 場の随伴表現の添字 $(a),(b)$ に対して対称である。$W^{(a)}$ は、超対称ゲージ理論のときに現れたゲージーノ超場のテンソル算法におけるもので、ゲージーノ多重項と呼ばれる。ゲージーノ多重項は、重力を含まない超対称性理論の場合と同様に、ゲージーノである右巻きスピノルを初項に持つカイラル多重項である。また、ゲージーノ多重項は、ここでは詳しく述べないが、YM ベクトル多重項の中の非物理的な場を取り除く Wess–Zumino (WZ) ゲージ [18] と、WZ ゲージを守る Q 変換を用いて構成される。この WZ ゲージを守る Q 変換 $\delta_Q^{\rm YM}(\varepsilon)$ の元でゲージーノ多重項の各成分は次のように与えられる。表示の利便性のため右巻き成分のみを持つスピノル $\eta=\mathcal{P}_{\rm R}\eta$ 用いると、ゲージーノ多重項の各成分は $\bar{\eta}W^{(a)}=[\bar{\eta}\lambda^\alpha,(\sigma^{ab}\hat{F}_{ab}^{(a)}+iD^{(a)})\eta,i\bar{\eta}\gamma^a D_a\lambda^{(a)}]$ と書くことができる。ここで、$\hat{F}_{mn}$ は $\delta_Q^{\rm YM}(\varepsilon)$ で共変な場の強さで、$\hat{F}_{mn}=\partial_m B_n^{(a)}-\partial_n B_m^{(a)}-B_n^{(c)}B_m^{(b)}f_{(b)(c)}{}^{(a)}-\frac{1}{2}(\bar{\psi}_m\gamma_n\lambda^{(a)}-\bar{\psi}_n\gamma_m\lambda^{(a)})$ である ($f_{(a)(b)}{}^{(c)}$ は内部対称性を表すリー代数の構造定数である)。

共形超重力理論からポアンカレ超重力理論を得ることを考える。そのために、超共形対称性に存在するが、超ポアンカレ対称性には存在しない D, A, S, K_a ゲージ対称性をゲージ固定する。ここで、文献 [12] によって用いられた「KU ゲージ」と呼ばれる次のゲージ固定

$$
\begin{aligned}
&D,\ A\,\text{ゲージ}:\ z_0=z_0^*=\sqrt{3}\phi^{-\frac{1}{2}}(z,z^*),\\
&S\,\text{ゲージ}:\ \chi_{\rm R0}=-z_0\phi^{-1}\phi^i\chi_{{\rm R}i},\qquad K_a\text{ゲージ}:\ b_m=0
\end{aligned}
\tag{4.52}
$$

を置く。ここで、$\chi_{\rm R0}=\frac{1}{2}\mathcal{P}_{\rm R}\chi_0$ および $\chi_{{\rm R}i}=\frac{1}{2}\mathcal{P}_{\rm R}\chi_i$ である。このゲージ固定は超共形実多重項 $\phi\Sigma_0\bar{\Sigma}_0$ の初項と第 2 項を D-type 作用においてそれぞれ 3 および 0 に固定するも

のである。結果として、標準的な EH 項と RS 項を直接得ることができる。

さらに、このゲージ条件は、超共形対称性のもとでの Q 変換とポアンカレ超重力理論での Q 変換を

$$\delta_Q^{\mathrm{P}}(\varepsilon) = \delta_Q^{\mathrm{YM}}(\varepsilon) + \delta_A(\theta(\varepsilon)) + \delta_S(\zeta(\varepsilon)) + \delta_K(\xi^a(\varepsilon)) \tag{4.53}$$

で結びつける。ここで、

$$\begin{aligned}
\theta(\varepsilon) &= -\frac{i}{3}\left(\mathcal{G}^i\bar{\varepsilon}_{\mathrm{R}}\chi_{\mathrm{R}i} - \mathcal{G}_i\varepsilon_{\mathrm{L}}\chi^i_{\mathrm{L}}\right), \\
\zeta_{\mathrm{R}}(\varepsilon) &= -\frac{1}{2}\left(h_0 z_0^{-1} + \frac{1}{3}h_i\mathcal{G}^i\right)\varepsilon_{\mathrm{R}} - \frac{1}{3}\left(\left(\mathcal{G}^{ij} - \frac{1}{3}\mathcal{G}^i\mathcal{G}^j\right)\bar{\varepsilon}_{\mathrm{R}}\chi_{\mathrm{R}j} + \mathcal{G}^i_j\bar{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\chi^j_{\mathrm{L}}\right)\chi_{\mathrm{R}i} \\
&\qquad - \frac{1}{12}i\left(\mathcal{G}^i\gamma^a\nabla_a z_i - \mathcal{G}_i\gamma^a\nabla_a z^{*i}\right)\varepsilon_{\mathrm{L}} - \frac{1}{4}\gamma^a A_a\varepsilon_{\mathrm{L}}, \\
\xi_a(\varepsilon) &= \frac{1}{4}\left(\bar{\varphi}_a\varepsilon - \bar{\psi}_a\zeta(\varepsilon)\right).
\end{aligned} \tag{4.54}$$

である。上の式において、$\nabla_m z_i$ は、内部 YM 対称性に対する共変微分であり、$\mathcal{G}$ は $\mathcal{G} = 3\log\frac{1}{3}\phi(z,z^*)$ で与えられる。ここで、 $\mathcal{G}$ の持つ添字 $i, j, ...$ は z_i と z^{*i} による微分をあらわす。例えば $\mathcal{G}^i{}_j = \partial^2\mathcal{G}/\partial z_i\partial z^{*j}$ である。

4.2.2 超共形共変スピノル微分の作用する超共形多重項への制限

重力を含まない超対称性理論においては、従来の場の理論の表式を用いた成分形式と、超対称性変換を並進と考えて理論の構成を行う超空間形式が存在した。超空間形式において超対称性変換は共変スピノル微分 D_α で表される。そこで、共形超重力理論においても、超共形変換に対する共変スピノル微分を構成できるのではないか、と考えられる。しかし、そのような超共形共変なスピノル微分が作用できる超共形多重項には特別な制限がつくことが文献 [30] によって論じられた。ここでは、この議論を確認する。

仮に、一般の超共形多重項 $\mathcal{V}_\Gamma$ に対するスピノル微分 $\mathcal{D}_\alpha\mathcal{V}_\Gamma$ が定義可能であるならば、$\mathcal{D}_\alpha\mathcal{V}_\Gamma$ の初項は $\mathcal{Z}_{\alpha\Gamma}$ であり、

$$\mathcal{D}_\alpha\mathcal{V}_\Gamma = [\![\mathcal{Z}_{\alpha\Gamma}]\!] \tag{4.55}$$

であるはずである。ここで、ただ一つの非自明な条件は、$\mathcal{Z}_{\alpha\Gamma}$ は S 変換で不変であること、すなわち

$$0 = \delta_S(\zeta)\mathcal{Z}_{\alpha\Gamma} \tag{4.56}$$

である。テンソル算法でこの条件を具体的に書くと、

$$0 = -i(n+w)\zeta_\alpha\mathcal{C}_\Gamma + i(\sigma^{ab}\zeta)_\alpha(\Sigma^{ab}\mathcal{C})_\Gamma \tag{4.57}$$

となる。これは、超共形多重項のローレンツ添字と共形ウェイトの間に特別な制限がつくことを意味する。(4.56) 式で与えられる制限が KU によって議論された制限である。

後の第 5 章で、この制限が Butter の構成した共形超空間形式に存在するかを議論する。

4.3　共形超空間

ここでは共形超空間を用いた超重力理論の構成について文献 [34] に従って説明する。共形超重力理論の超空間による構成は、第 2 章で行った共形超重力理論の構成を、第 3.3 章で行った超空間における超対称ゲージ理論の構成の方法を応用することで得ることができる。ここで目標とする作用は (4.93) 式の物質場が結合した超重力理論の作用

$$S = -3\int d^4xd^4\theta\, E\, \Phi^{\mathrm{c}}\bar{\Phi}^{\mathrm{c}}e^{-K/3} + \left(\int d^4xd^2\theta\, \mathcal{E}\, (\Phi^{\mathrm{c}})^3W + \mathrm{h.c.}\right) \tag{4.58}$$

である。

本章での超共形代数は (4.16) 式で導入されたものを用いる。

4.3.1　超共形対称性、ゲージ超場、曲率とその拘束条件、ビアンキ恒等式

いま、超空間上に超共形対称性を導入することによって共形超空間を構成する。まず、超空間上に超共形対称性のゲージ超場を以下のように導入する。

$$h_M{}^{\mathcal{A}}X_{\mathcal{A}} = E_M{}^AP_A + \frac{1}{2}\phi_M{}^{ba}M_{ab} + B_MD + A_MA + f_M{}^AK_A. \tag{4.59}$$

ここで、本章では calligraphic な添字 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, ...$ は超共形代数全てを動くものとする。また、$P_A = (P_a, Q_\alpha, \bar{Q}^{\dot{\alpha}})$ および $K_A = (K_a, S_\alpha, \bar{S}^{\dot{\alpha}})$ である。ゲージ超場はすべて実 (フェルミオン的な超場についてはマヨラナ) であるとする。第 3.3 章における重力を含まない超対称ゲージ理論では四脚場 $E_M{}^A$ を具体的に固定していたが、ここでは重力を力学的自由度であると考えているので、具体的な値には固定しない。ただし、四脚場は可逆であるという性質は仮定する：

$$E_M{}^AE_A{}^N = \delta_M{}^N, \qquad E_A{}^ME_M{}^B = \delta_A{}^B. \tag{4.60}$$

四脚場の最低次 $E_m{}^a|$ と $E_m{}^{\underline{\alpha}}|$ はそれぞれ通常の時空上の四脚場とグラヴィティーノを与える：

$$E_m{}^a| = e_m{}^a, \quad E_m{}^{\underline{\alpha}}| = \frac{1}{2}\psi_m{}^{\underline{\alpha}}. \tag{4.61}$$

超空間上の超共形対称性によるゲージ変換のパラメータを以下のように書く。

$$\xi^{\mathcal{A}}X_{\mathcal{A}} = \xi(P)^A P_A + \frac{1}{2}\xi(M)^{ab}M_{ba} + \xi(D)D + \xi(A)A + \xi(K)^A K_A. \tag{4.62}$$

ここで、これらのパラメータは実 (マヨラナ) 超場である。

P_A を除いた超共形代数の演算子 $X_{\mathcal{A}'} = (M_{ab}, D, A, K_A)$ によるゲージ変換 $\delta_G(\xi^{\mathcal{A}'}X_{\mathcal{A}'})$ を次のように定める：

$$\delta_G(\xi^{\mathcal{B}'}X_{\mathcal{B}'})h_M{}^{\mathcal{A}} = \partial_M \xi^{\mathcal{B}'}\delta_{\mathcal{B}'}{}^{\mathcal{A}} + h_M{}^{\mathcal{C}}\xi^{\mathcal{B}'}f_{\mathcal{B}'\mathcal{C}}{}^{\mathcal{A}}, \tag{4.63}$$

ここで、$\mathcal{A}'$ は、P_A 以外の全ての超共形対称性の演算子を動くものとする。

いま、共形超空間における P_A 変換を定義する。これは共形重力理論や超対称ゲージ理論と同様に、超空間上のリー微分と超共形対称性によるゲージ変換を同一視することでできる：

$$\delta_G(\xi^A P_A) = \mathcal{L}(\xi^A E_A{}^M \partial_M) - \delta_G(\xi^M h_M{}^{\mathcal{B}'}X_{\mathcal{B}'}). \tag{4.64}$$

P_A 変換によって共形超空間上の共変微分 ∇_M を定義できる。$X_{\mathcal{A}'}$ 変換によって共変に変換し、アインシュタイン添字を持たない超場 Φ に対して、

$$\delta_G(\xi^A P_A)\Phi = \xi^M(\partial_M - h_M{}^{\mathcal{A}'}X_{\mathcal{A}'})\Phi =: \xi^M \nabla_M \Phi. \tag{4.65}$$

いま、超共形対称性に属する曲率を次のように定義する：

$$R_{MN}{}^{\mathcal{A}} = \partial_M h_N{}^{\mathcal{A}} - \partial_N h_M{}^{\mathcal{A}} - (E_N{}^C h_M{}^{\mathcal{B}'} - E_M{}^C h_N{}^{\mathcal{B}'})f_{\mathcal{B}'C}{}^{\mathcal{A}} - h_N{}^{\mathcal{C}'}h_M{}^{\mathcal{B}'}f_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}{}^{\mathcal{A}}. \tag{4.66}$$

この曲率を用いると、共変微分同士の交換関係が

$$\begin{aligned}[\nabla_A, \nabla_B] = -R_{AB}{}^{\mathcal{C}}X_{\mathcal{C}} = -R(P)_{AB}{}^C\nabla_C - \frac{1}{2}R(M)_{AB}{}^{dc}M_{cd} \\ - R(D)_{AB}D - R(A)_{AB}A - R(K)_{AB}{}^C K_C\end{aligned} \tag{4.67}$$

と書くことができる。

超対称ゲージ理論で議論したように、この曲率には、超対称性代数の既約表現を得るよりも多くの自由度を含む。これらの余分な自由度を拘束条件として手で落とす。ただし、この拘束条件は超共形対称性を保つように曲率に対して要請する。その拘束条件は以下のように与える。

$$\begin{gathered} R_{\alpha\beta}{}^{\mathcal{A}} = 0, \qquad R_{\dot\alpha\dot\beta}{}^{\mathcal{A}} = 0, \qquad R(P)_{\alpha\dot\beta}{}^c = 2i(\sigma^c)_{\alpha\dot\beta}, \\ R_{\alpha\dot\beta}{}^{\mathcal{A}} = 0 \quad \text{(otherwise)}. \end{gathered} \tag{4.68}$$

この拘束条件により、共変スピノル微分 $(\nabla_\alpha, \bar{\nabla}^{\dot{\alpha}})$ 同士の反交換関係は、重力を含まない超対称性理論と同じ代数になる：

$$\{\nabla_\alpha, \nabla_\beta\} = 0, \qquad \{\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}, \bar{\nabla}_{\dot{\beta}}\} = 0, \qquad \{\nabla_\alpha, \bar{\nabla}_{\dot{\beta}}\} = -2i\nabla_{\alpha\dot{\beta}}. \tag{4.69}$$

さらに、共形重力理論においては曲率のスピノル・ベクトル成分について次の拘束条件をおく。

$$R(P)_{\underline{\gamma} b}{}^{A} = 0, \qquad R(D)_{\underline{\beta} a} = 0, \qquad R(A)_{\underline{\beta} a} = 0. \tag{4.70}$$

この拘束条件のもとで、超対称ゲージ理論と同様に次のビアンキ恒等式を解く：

$$[\nabla_A, [\nabla_B, \nabla_C]] + [\nabla_B, [\nabla_C, \nabla_A]] + [\nabla_C, [\nabla_A, \nabla_B]] = 0. \tag{4.71}$$

以下に詳しく述べるように、ビアンキ恒等式を解くことで、共形超空間における曲率はただ一つの完全対称スピノルを持ったカイラル超場 $W_{\alpha\beta\gamma}$ で書くことができる。

まず、一つ目の拘束条件 (4.68) 式を用いると、曲率のスピノル・ベクトル成分およびベクトル・ベクトル成分がカイラル超場 $\mathcal{W}_\alpha$ および $\mathcal{W}^{\dot{\alpha}}$ を用いて書くことができる：

$$R_{\alpha,\beta\dot{\gamma}} = -[\nabla_\alpha, \nabla_{\beta\dot{\gamma}}] = 2i\epsilon_{\alpha\beta}\mathcal{W}_{\dot{\gamma}}, \qquad R_{\dot{\alpha},\dot{\beta}\gamma} = -[\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}, \nabla_{\dot{\beta}\gamma}] = 2i\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\mathcal{W}_\gamma, \tag{4.72}$$

$$R_{\alpha\dot{\alpha},\beta\dot{\beta}} = -\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\{\nabla_{(\alpha}, \mathcal{W}_{\beta)}\} - \epsilon_{\alpha\beta}\{\bar{\nabla}_{(\dot{\alpha}}, \mathcal{W}_{\dot{\beta})}\}, \tag{4.73}$$

ここで、ベクトル添字をパウリ行列を用いて $(\sigma^b)_{\beta\dot{\gamma}}R_{\alpha b} = R_{\alpha,\beta\dot{\gamma}}$ とスピノル 2 つで書き直した。また、添字の括弧 ( ) は重み 1 で添字を対称化したものである。例えば、$\psi_{(\alpha}\chi_{\beta)} = (1/2)(\psi_\alpha\chi_\beta + \psi_\beta\chi_\alpha)$ である。この超共形代数に値を持つ超場 $\mathcal{W}_{\underline{\alpha}}$ は、超対称ゲージ理論で導いたゲージーノ超場の性質と同じ形の性質を持つ：

$$\{\nabla_\alpha, \mathcal{W}_{\dot{\gamma}}\} = \{\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}, \mathcal{W}_\gamma\} = 0, \quad (\text{カイラル条件}) \tag{4.74}$$

$$\{\nabla^\alpha, \mathcal{W}_\alpha\} = \{\bar{\nabla}_{\dot{\beta}}, \mathcal{W}^{\dot{\beta}}\}, \qquad (\text{実条件}) \tag{4.75}$$

$$[M_{bc}, \mathcal{W}_\alpha] = (\sigma_{bc})_\alpha{}^\beta\mathcal{W}_\beta, \quad [D, \mathcal{W}_\alpha] = \frac{3}{2}\mathcal{W}_\alpha, \quad [A, \mathcal{W}_\alpha] = i\mathcal{W}_\alpha, \quad [K_A, \mathcal{W}_\alpha] = 0. \tag{4.76}$$

これらは超対称ゲージ理論と同様に、ビアンキ恒等式およびヤコビ恒等式より従う。上記のゲージーノと同じ構造を持つという性質により、$\mathcal{W}_{\underline{\alpha}}$ は "ゲージーノ" 超場と呼ばれる。さらに、曲率の拘束条件 (4.70) 式から、$\mathcal{W}_{\underline{\alpha}}$ の P_A, D, A 成分が 0 であること $\mathcal{W}(P)_{\underline{\alpha}}{}^A = \mathcal{W}(D)_{\underline{\alpha}} = \mathcal{W}(A)_{\underline{\alpha}} = 0$, すなわち

$$\mathcal{W}_\alpha = \frac{1}{2}\mathcal{W}(M)_\alpha{}^{bc}M_{cb} + \mathcal{W}(K)_\alpha{}^B K_B \tag{4.77}$$

であることが従う。ここで、さらに超共形対称性を用いることで、$\mathcal{W}_\alpha$ のカイラル条件 (4.74) 式と実条件 (4.75) 式は次の $\mathcal{W}_\alpha$ の最終的な表式を導く：

$$\mathcal{W}_\alpha = (\epsilon\sigma^{bc})^{\beta\gamma} W_{\alpha\beta\gamma} M_{cb} + \frac{1}{2}\left(\nabla^\gamma W_{\gamma\alpha}{}^\beta\right) S_\beta - \frac{1}{2}\left(\nabla^{\gamma\dot\beta} W_{\gamma\alpha}{}^\beta\right) K_{\beta\dot\beta}, \tag{4.78}$$

$$\mathcal{W}^{\dot\alpha} = (\bar\sigma^{bc}\epsilon)^{\dot\gamma\dot\beta} W^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta\dot\gamma} M_{cb} - \frac{1}{2}\left(\bar\nabla_{\dot\gamma} W^{\dot\gamma\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\right) \bar S^{\dot\beta} - \frac{1}{2}\left(\nabla^{\dot\gamma\beta} W_{\dot\gamma}{}^{\dot\alpha\dot\beta}\right) K_{\beta\dot\beta}, \tag{4.79}$$

ここで、実条件はあらわに

$$\{\nabla^\alpha, \mathcal{W}_\alpha\} = \{\bar\nabla_{\dot\alpha}, \bar{\mathcal{W}}^{\dot\alpha}\} = -\frac{1}{2}(\nabla^\alpha \nabla^{\gamma\dot\beta} W_{\gamma\alpha}{}^\beta) K_{\beta\dot\beta} = -\frac{1}{2}(\bar\nabla_{\dot\alpha} \nabla^{\dot\gamma\beta} W_{\dot\gamma}{}^{\dot\alpha\dot\beta}) K_{\beta\dot\beta} \tag{4.80}$$

と書かれる。上式において “ゲージーノ” 超場 $\mathcal{W}_\alpha$ はスピン 3/2 を持った 3 階の完全対称スピノル $W_{\alpha\beta\gamma}$ で表される。ここで、$W_{\alpha\beta\gamma}$ は次の条件を満たす：

$$\bar\nabla_{\dot\alpha} W_{\alpha\beta\gamma} = 0, \quad D W_{\alpha\beta\gamma} = \frac{3}{2} W_{\alpha\beta\gamma}, \quad A W_{\alpha\beta\gamma} = i W_{\alpha\beta\gamma}, \quad K_A W_{\alpha\beta\gamma} = 0. \tag{4.81}$$

結局、全ての曲率 R_{AB} は (4.72) 式および (4.73) 式を用いて $W_{\alpha\beta\gamma}$ とそのエルミート共役 $\bar W_{\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma}$、そしてこれらに作用する共変微分で書くことができる。特に、超空間ではない通常の空間での曲率を含む ベクトル・ベクトル曲率 R_{ab} は次のようにあらわに表される：

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\dot\alpha,\beta\dot\beta} = \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta} \Bigg(& 2W_{\alpha\beta}{}^\gamma Q_\gamma + \nabla^\gamma W^\delta{}_{\alpha\beta} M_{\delta\gamma} + \nabla^\gamma W_{\gamma\alpha\beta} D - \frac{3}{2} i \nabla^\gamma W_{\gamma\alpha\beta} A \\
& + \frac{1}{4}\nabla^2 W_{\alpha\beta}{}^\gamma S_\gamma - i \nabla^\gamma{}_{\dot\gamma} W_{\gamma\alpha\beta} \bar S^{\dot\gamma} + \frac{1}{2} \nabla_\alpha \nabla^{\dot\beta\gamma} W_{\gamma\beta}{}^\delta K_{\delta\dot\beta} \Bigg) \\
+ \epsilon_{\alpha\beta} \Bigg(& -2W_{\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma} \bar Q^{\dot\gamma} + \bar\nabla_{\dot\gamma} W_{\dot\delta\dot\alpha\dot\beta} M^{\dot\gamma\dot\delta} + \bar\nabla_{\dot\gamma} W^{\dot\gamma}{}_{\dot\alpha\dot\beta} D + \frac{3}{2} i \bar\nabla_{\dot\gamma} W^{\dot\gamma}{}_{\dot\alpha\dot\beta} A \\
& - \frac{1}{4} \bar\nabla^2 W_{\dot\beta\dot\alpha\dot\delta} \bar S^{\dot\delta} - i \nabla^{\dot\gamma\gamma} W_{\dot\gamma\dot\alpha\dot\beta} S_\gamma + \frac{1}{2} \bar\nabla_{\dot\alpha} \nabla^{\dot\gamma\beta} W_{\dot\gamma\dot\beta}{}^{\dot\delta} K_{\beta\dot\delta} \Bigg).
\end{aligned} \tag{4.82}$$

以上が超共形対称性に属するゲージ超場及び曲率に関する議論である。

4.3.2　カイラル超場およびプライマリー超場

ここでは共形超空間で物質場やゲージ場、そして超共形不変な作用を考えるための超場を導入する。具体的には、カイラル超場とプラリマリー超場である。

まず、物質場を記述するためのカイラル超場を考える。共形超重力理論において、一般のローレンツ添字 $\Gamma = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \dot\beta_1, \ldots, \dot\beta_m)$ を持つカイラル超場 Φ_Γ を

$$\bar\nabla^{\dot\alpha} \Phi_\Gamma = 0 \tag{4.83}$$

を満たす超場として定義する。

次にプライマリー超場と呼ばれる超場を導入する。この超場は共形超重力理論の構成においてのみならず、本論文の結果の一つである共形超空間とテンソル算法との等価性を示す際に重要な役割を果たす。プライマリー超場 Φ_Γ は、超共形代数の作用のもとで次のように共変に変換する超場として定義される：

$$M_{bc}\Phi_\Gamma = (\mathcal{S}_{bc})_\Gamma{}^\Sigma \Phi_\Sigma, \quad D\Phi_\Gamma = \Delta\Phi_\Gamma, \quad A\Phi_\Gamma = iw\Phi_\Gamma, \quad K_A\Phi_\Gamma = 0. \tag{4.84}$$

ここで、Γ および Σ は一般のローレンツ添字 $\Gamma = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \dot{\beta}_1, \ldots, \dot{\beta}_m)$ を表し、$\mathcal{S}_{bc}$ は Φ が属するローレンツ代数の表現の表現行列である。また、実定数 Δ および w はそれぞれワイル・ウェイトおよびカイラル・ウェイトと呼ばれ、Φ_Γ のスケール変換およびカイラル変換を特徴付ける。テンソル算法の時と同様にこれら 2 つのウェイトをまとめて共形ウェイトと呼ぶことにする。ここで、以上 3 つの M, D, A 変換に対する条件は Φ_Γ が M, D, A 共変な超場であることを示す式であり、Φ_Γ がプラリマリー超場である必要はないことに注意する。最後の K_A に対する条件 $K_A\Phi_\Gamma = 0$ がプラリマリー超場を特徴付ける式である。すなわち、プライマリー超場は K_A 変換不変である超共形共変な超場として特徴付けられる。プライマリー条件は一般には共変微分 ∇_A によって破れることがあることに注意する。たとえば、$(\Delta, w) = (2, 0)$ であるプライマリー超場 V に対する共変微分 $\nabla_\alpha V$ はプライマリー超場ではない：$S_\alpha \nabla_\beta V = \{S_\alpha, \nabla_\beta\} V = \epsilon_{\alpha\beta} 4V \neq 0$。プライマリー超場の例として曲率を導く超場 $W_{\alpha\beta\gamma}$ が挙げられる。(4.81) 式は、$W_{\alpha\beta\gamma}$ はワイル・ウェイト $\Delta = 3/2$、カイラル・ウェイト $w = 1$ をもった 3 階の完全対称スピノルを持つプライマリー超場であることを意味する。

また、カイラル超場でありプライマリー超場である超場をプライマリーカイラル超場と呼ぶ。プライマリーカイラル超場 Φ_Γ は、カイラル条件 $\bar{\nabla}_{\dot\alpha}\Phi_\Gamma = 0$ とプライマリー条件、特に $\bar{S}_{\dot\alpha}\Phi_\Gamma = 0$ の整合性より、$\{\bar{S}^{\dot\beta}, \bar{\nabla}^{\dot\beta}\}\Phi_\Gamma = 0$ が要求される。超共形代数を用いると、この条件は、Φ_Γ の共形ウェイトが $2\Delta = 3w$ で、Γ は点無しスピノルのみであるという条件を与える。

4.3.3　超共形不変な積分

共形超空間における超共形不変な積分を考える。まず、重力を含まない超対称性の場合での $\int d^4\theta$ 積分に対応する積分を考える。その積分は共形超空間で次のように書かれる：

$$S_D = \int d^4x d^4\theta \, EV. \tag{4.85}$$

この $d^4\theta$ の形で書かれる作用を D-type 作用と呼ぶ。ここで E は共形超空間上の密度超場

$$E := \det(E_M{}^A) \tag{4.86}$$

であり、ここで行列式 det は implicit grading を用いた超行列式 sdet で*2、四脚場の微小変換 $\delta E_M{}^A$ に対して $\delta E = EE_A{}^M \delta E_M{}^A$ を満たす。また、V は実超場であるが、D-type 作用が超共形不変であるためには V には超共形対称性から要請される制限がある。この条件は密度超場の超共形変換則から導かれる。まず、密度超場の超共形変換則は

$$\begin{aligned}\delta_G(\xi^{\mathcal{A}'}X_{\mathcal{A}'})E = EE_A{}^M\delta_G(\xi^{\mathcal{A}'}X_{\mathcal{A}'})E_M{}^A = EE_A{}^M h_M{}^{\mathcal{C}}\xi^{\mathcal{B}'}f_{\mathcal{B}'\mathcal{C}}{}^A = E\xi^{\mathcal{B}'}f_{\mathcal{B}'A}{}^A \\ \to \quad D\,E = -2\,E, \quad M_{ab}\,E = A\,E = K_A\,E = 0\end{aligned} \tag{4.87}$$

である。これは、超共形代数の交換関係において、交換関係の結果 P_A が現れるのは、交換関係のどちらかに P_A がある場合のみであるということから従う。この密度超場の性質 (4.87) 式により、被積分関数 V への条件が

$$D\,V = 2\,V, \quad A\,V = M_{ab}\,V = K_A\,V = 0 \tag{4.88}$$

と定まる。すなわち、V は共形ウェイトが $(\Delta, w) = (2, 0)$ であるプラリマリー実超場でなければならない。これらの条件は超共形代数のうち $X_{\mathcal{A}'}$ に対する条件であった。D-type 作用の P_A 変換の不変性は次のようにしてわかる。まず、P_A 変換はリー微分と $X_{\mathcal{A}'}$ 変換を用いて定義されていた。D-type 作用のリー微分に対する不変性は超空間全体で積分が定義されていることから従い、$X_{\mathcal{A}'}$ 変換の不変性は (4.88) 式から従う。よって、D-type 作用は P_A 変換についても不変である。これより、D-type 作用は超共形不変であることがわかった。

次に、重力を含まない超対称性理論での $d^2\theta$ 型の作用に対応する F-type 作用を

$$S_F = \int d^4x d^2\theta\, \mathcal{E} W \tag{4.89}$$

で導入する。ここで、$\mathcal{E}$ はカイラル密度超場と呼ばれ、超空間のうちの $\bar{\theta}_{\dot{\mu}}$ 方向を取り除いた (x^m, θ^μ) のみの四脚場 $\mathcal{E}_{\mathfrak{m}}{}^{\mathfrak{a}} = E_{\mathfrak{m}}{}^{\mathfrak{a}}$ ($\mathfrak{a} = (a, \alpha)$, $\mathfrak{m} = (m, \mu)$) で定義される超行列式である。(4.89) 式において, W は $\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}} W = 0$ であるカイラル超場である。先ほどと同様に $X_{\mathcal{A}'}$ 変換での F-type 作用の不変性を要求すると、W は共形ウェイト $(\Delta, w) = (3, 2)$ を

*2 超行列式の定義は、

$$\mathrm{sdet}(E_M{}^A) = \frac{\det E_m{}^a}{\det(E_{\underline{\mu}}{}^{\underline{\alpha}} - E_{\underline{\mu}}{}^a E_a{}^m E_m{}^{\underline{\alpha}})}$$

である [17] が、以降ではその変換則しか用いない。

持ったプライマリーカイラル超場でなければならない。この時、F-type 作用は $\bar{Q}^{\dot{\alpha}}$ 変換についても $P_{\mathfrak{a}}$ 変換についても不変であることが D-type 作用の時と同様に従う。

ここまで、D-type 作用も F-type 作用も超空間上の積分として書かれていた。これらの作用を重力を含まない超対称性理論の時と同じように成分展開する。まず、S_F が $\bar{\theta}$ に依存しないことを用いると、作用の $d^2\theta$ 積分を次のように実行することができる：

$$\int d^4xd^2\theta\,\mathcal{E}W = \int d^4x\,e\left(-\frac{1}{4}\nabla^2W + \frac{i}{2}\bar{\psi}_{a\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^a)^{\dot{\alpha}\beta}\nabla_\beta W - \left(\bar{\psi}_a\bar{\sigma}^{ab}\bar{\psi}_b\right)W\right)| \tag{4.90}$$

次に D-type 作用の展開について考える。D-type 作用は、F-type 作用と次のように関係する：

$$\int d^4xd^4\theta\,EV = \frac{1}{2}\int d^4xd^2\theta\,\mathcal{E}\mathcal{P}[V] + \frac{1}{2}\int d^4xd^2\bar{\theta}\,\bar{\mathcal{E}}\bar{\mathcal{P}}[V], \tag{4.91}$$

ここで、

$$\mathcal{P}[V] = -\frac{1}{4}\bar{\nabla}^2V \tag{4.92}$$

はカイラル射影演算子である。この D-type 作用と F-type 作用の関係、および F-type 作用の成分展開を用いて D-type 作用の展開を行うことができる。

4.3.4　物質場の結合した超重力理論

ここまで、理論を記述するために必要なゲージ超場、曲率、プライマリー超場、D-, F-type 作用を構成して来た。これらを用いて、物質場が結合した作用を構成する。その作用は

$$S = -3\int d^4xd^4\theta\,E\,\Phi^{\mathrm{c}}\bar{\Phi}^{\mathrm{c}}e^{-K/3} + \left(\int d^4xd^2\theta\,\mathcal{E}\,(\Phi^{\mathrm{c}})^3W + \mathrm{h.c.}\right) \tag{4.93}$$

とかける。ここで、ケーラー・ポテンシャル K およびスーパーポテンシャル W は物質場を記述する共形ウェイトが $(\Delta, w) = (0,0)$ であるプライマリーカイラル超場 Φ^i の関数である。加えて、重力を含まない超対称性理論の時と同様に、K は実超場、および W は Φ^i に関して正則な超場である。そして、Φ^{c} は共形ウェイト $(\Delta, w) = (1, 2/3)$ を持つプライマリーカイラル超場で、カイラル compoensator と呼ばれる。これは共形重力理論の時に導入した compensator の超対称な拡張である。

ポアンカレ超重力理論はカイラル compensator のゲージ固定で得られる。特に、標準的な EH 項 $-\frac{1}{2}eR$ を導くゲージ固定は

$$D,\ A\,\text{ゲージ}:\ \Phi^{\mathrm{c}} = \bar{\Phi}^{\mathrm{c}} = e^{K/6}, \qquad K_A\text{ゲージ}:\ B_M = 0 \tag{4.94}$$

である。第 2.2 章において、共形重力理論の場合は、K_a ゲージ条件 $b_m = 0$ と曲率への拘束条件から、K_a ゲージ場 $f_m{}^a$ が重力を記述するリッチ・スカラー R と関係することを確かめた。共形超重力理論の場合、K_A ゲージ条件 $B_M = 0$ と共形超空間における曲率への拘束条件から、ポアンカレ超重力理論を記述するための超場が K_A ゲージ超場 $f_M{}^A$ を用いて表される。これはスケール変換 D に対する曲率 $R(D)_{AB}$ への拘束条件とゲージ固定条件から次のように読み取ることができる。まず D 曲率は共形超空間上で次のように定義される：

$$R(D)_{AB} = E_A{}^M E_B{}^N(\partial_M B_N - \partial_N B_M) + 2f_{AB}(-)^a - 2f_{BA}(-)^b. \tag{4.95}$$

$R(D)_{AB}$ のスピノル方向への拘束条件 $R(D)_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = 0$ とゲージ条件 $B_M = 0$ は K_A ゲージ超場のスピノル成分 $f_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}$ を次のように拘束する：

$$f_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\alpha\beta}\bar{R}, \qquad f_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}R, \qquad f_{\alpha\dot{\beta}} = -f_{\dot{\beta}\alpha} = -\frac{1}{2}G_{\alpha\dot{\beta}}. \tag{4.96}$$

ここに現れた超場 R および $G_{\alpha\dot{\alpha}}$ の最低次は、(4.1) 式の補助場 M および N_a それぞれ同定されるが、本論文の結果には直接関わらないためこれ以上立ち入らないことにする。次に、D 曲率のスピノル・ベクトル方向の拘束条件 $R(D)_{\underline{\alpha}b} = 0$ は $f_{\underline{\alpha}b}$ が反対称テンソルであるという拘束条件を導く：

$$f_{\underline{\alpha}b} = -f_{b\underline{\alpha}}. \tag{4.97}$$

この反対称テンソル $f_{\underline{\alpha}b}$ は R と G_a を用いて表されることが次のようにしてわかる。K 曲率 $R(K)_{\alpha\beta,\underline{\gamma}}$ の定義ととその拘束条件 $R(K)_{\alpha\beta,\dot{\gamma}} = 0$ $R(K)_{\alpha\dot{\gamma}}{}^{\underline{\beta}} = 0$ から、

$$3if_{\alpha,\beta\dot{\beta}} = \frac{1}{2}\mathcal{D}_\alpha G_{\beta\dot{\beta}} + \mathcal{D}_\beta G_{\alpha\dot{\beta}} + \epsilon_{\alpha\beta}\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\beta}}\bar{R}, \tag{4.98}$$

$$-3if_{\dot{\alpha},\beta\dot{\beta}} = \frac{1}{2}\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}} G_{\beta\dot{\beta}} + \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\beta}} G_{\beta\dot{\alpha}} + \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\mathcal{D}_\alpha R. \tag{4.99}$$

ここで、$\mathcal{D}_A$ は、K_A ゲージ対称性を固定した後の M, D, A 共変微分である：$\mathcal{D}_A = [\nabla_A + f_A{}^B K_B]_{B_M=0}$. 最後に、$K$ 曲率 $R(K)_{\alpha\dot{\beta}}{}^c$ の定義とその拘束条件 $R(K)_{\alpha\dot{\beta}}{}^c = 0$ から、

$$f_{\alpha\dot{\alpha},\beta\dot{\beta}} = \frac{i}{2}(\mathcal{D}_\alpha f_{\dot{\alpha},\beta\dot{\beta}} + \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}} f_{\alpha,\beta\dot{\beta}}) + 2\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}R\bar{R} + \frac{1}{2}G_{\beta\dot{\alpha}}G_{\alpha\dot{\beta}} \tag{4.100}$$

が従う。超共形対称性の曲率が $W_{\alpha\beta\gamma}$ で書かれていることから、ゲージ固定後のポアンカレ超重力理論は $R, G_{\alpha\dot{\beta}}, W_{\alpha\beta\gamma}$ そして $\mathcal{D}_A$ で書かれることがわかる。

ゲージ固定条件 (4.94) 式は、K ゲージ超場 $f_M{}^A$ のみならず A ゲージ超場 A_M も固定する。これは次のようにしてわかる。カイラル compensator Φ^c のカイラル条件は、共変微分の定義より、$0 = \bar{\nabla}^{\dot{\alpha}}\Phi^c = E^{\dot{\alpha}M}\partial_M\Phi^c - B^{\dot{\alpha}}\Phi^c - \frac{2}{3}iA^{\dot{\alpha}}\Phi^c$ と書き直すことができる。こ

こで、ゲージ条件 $\Phi^{\mathrm{c}} = e^{K/6}$ および $B^{\dot\alpha} = 0$ をおくと、$A^{\dot\alpha}$ がケーラーポテンシャルを用いて

$$A^{\dot\alpha} = -\frac{i}{4} K_{i^*} \bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha} \bar\Phi^{i^*}, \tag{4.101}$$

と表される。ここで、$\bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}\bar\Phi^{i^*} = E^{\dot\alpha M}\partial_M \bar\Phi^{i^*}$ および $K_{i^*} = \partial K/\partial\bar\Phi^{i^*}$ である。また、ここで、 Φ^i のカイラル条件 $0 = \bar\nabla^{\dot\alpha}\Phi^i = E^{\dot\alpha M}\partial_M \Phi^i = \bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}\Phi^i$ を用いた。同様に $\nabla_\alpha \bar\Phi^{\mathrm{c}} = 0$ から、A_α が

$$A_\alpha = \frac{i}{4} K_i \mathcal{D}_\alpha \Phi^i \tag{4.102}$$

と固定される。同様に、$\bar\nabla^{\dot\alpha}\nabla_\alpha \Phi^{\mathrm{c}} = -2i\nabla_\alpha{}^{\dot\alpha}\Phi^{\mathrm{c}}$ から、$A_{\alpha\dot\alpha}$ の条件

$$A_\alpha{}^{\dot\alpha} = \frac{i}{4}(K_i \mathcal{D}_\alpha{}^{\dot\alpha}\Phi^i - K_{i^*}\mathcal{D}_\alpha{}^{\dot\alpha}\bar\Phi^{i^*}) - \frac{3}{2}G_\alpha{}^{\dot\alpha} + \frac{1}{4} g_{ij^*}(\mathcal{D}_\alpha\Phi^i)(\bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}\bar\Phi^{j^*}), \tag{4.103}$$

が導かれる。ここで、$G_\alpha{}^{\dot\alpha} = -2 f_\alpha{}^{\dot\alpha}$ および $g_{ij^*} = \partial^2 K/\partial\Phi^i\partial\Phi^{j^*}$ である。

以上が共形超空間による作用の構成法である。次章では、テンソル算法と共形超空間形式の一般的な対応を求める。そして、共形超空間形式には (4.56) 式で示された制限は存在しないことを示す。

第5章　共形超重力理論のテンソル算法と共形超空間形式の一般的対応

本章では、本論文の主題である共形超重力理論のテンソル算法と共形超空間形式の一般的対応について論ずる。ここで対応を明らかにするものは超重力理論の作用の構成に必要な、超共形代数とそれに属するゲージ場、曲率、ローレンツ添字を持った超共形多重項、カイラル射影、そして超共形不変な作用である。

5.1　超共形代数とそのゲージ場及び曲率

第 4.2 章で議論したように、テンソル算法では、Q 変換と P 変換は元々の超共形代数から従う group law からリー微分を用いて変形される。以下では、変形後のもののみを扱う。そのため、$\tilde{P}_a$ 変換を単に P_a と書くことにする。

まず最初に 2 つの形式間での超共形代数および共形ウェイトの記法を対応させることから始める。この対応は以下の通りである：

テンソル算法	共形超空間形式
$P_a,\ 2Q_\alpha,\ 2\bar{Q}^{\dot{\alpha}}$	$(P_a,\ Q_\alpha,\ \bar{Q}^{\dot{\alpha}}) = P_A$
$-M_{ab},\ D,\ \frac{4}{3}A$	$M_{ab},\ D,\ A$
$K_a,\ -2S_\alpha,\ -2\bar{S}^{\dot{\alpha}}$	$(K_a,\ S_\alpha,\ \bar{S}^{\dot{\alpha}}) = K_A$
$w,\ \frac{2}{3}n$	$\Delta,\ w$

(5.1)

この対応により、超共形対称性に属するゲージパラメータの対応が $\epsilon^A X_A \leftrightarrow \xi^{\mathcal{A}}| X_{\mathcal{A}}$ で与えられる。ここで、記号 “$\leftrightarrow$” は両形式での対応を表す。超共形代数の各成分に対してこの対応を書き下すと次のようになる：

	テンソル算法	共形超空間形式
$P,\ Q$	$(\xi^a,\ \frac{1}{2}\bar{\varepsilon})$	$(\xi(P)^a,\ \xi(P)^\alpha,\ \bar{\xi}(P)_{\dot{\alpha}})| = \xi(P)^A|$
$M,\ D,\ A$	$\lambda^{ab},\ \rho,\ \frac{3}{4}\theta$	$\xi(M)^{ab}|,\ \ \xi(D)|,\ \ \xi(A)|$
$K,\ S$	$(\xi_K^a,\ \frac{-1}{2}\bar{\zeta})$	$(\xi(K)^a,\xi(K)^\alpha,\bar{\xi}(K)_{\dot{\alpha}})| = \xi(K)^A|$

(5.2)

ゲージ場と超共形代数の演算子の積が同じ量を表すので、$h_m{}^A X_A \leftrightarrow h_m{}^{\mathcal{A}}|X_{\mathcal{A}}$ である。これを超共形代数の各演算子について書くと

	テンソル算法	共形超空間形式
$P,\ Q$	$(e_m{}^a,\ \frac{1}{2}\psi_m)$	$E_m{}^A\| = (E_m{}^a,\ E_{m\alpha},\ E_m{}^{\dot{\alpha}})\| = (e_m{}^a,\ \frac{1}{2}\psi_{m\alpha},\ \frac{1}{2}\bar{\psi}_m{}^{\dot{\alpha}})$
$M,\ D,\ A$	$\omega_m{}^{ab},\ b_m,\ \frac{3}{4}A_m$	$\phi_m{}^{ab}\| = \omega_m{}^{ab},\quad B_m\|,\quad A_m\|$
$K,\ S$	$(f_m{}^a,\ -\frac{1}{2}\varphi_m)$	$f_m{}^A\| = (f_m{}^a,\ f_{m\alpha},\ f_m{}^{\dot{\alpha}})\|$

(5.3)

となる。

共形超空間におけるアインシュタイン添字を持った曲率 $R_{mn}{}^{\mathcal{C}}$ は (4.66) 式で定義される。一方で、ローレンツ添字を持った曲率は $R_{ab}{}^{\mathcal{C}}$

$$
\begin{aligned}
R_{ab}{}^{\mathcal{C}}| = E_b{}^N E_a{}^M R_{MN}{}^{\mathcal{C}}| = e_a{}^m e_b{}^n R_{mn}{}^{\mathcal{C}}| - \frac{i}{2}\left(\psi_a{}^\alpha(\sigma_b)_{\alpha\dot{\beta}} - \psi_b{}^\alpha(\sigma_a)_{\alpha\dot{\beta}}\right)\mathcal{W}^{\dot{\beta}\mathcal{C}}| \\
+ \frac{i}{2}\left(\bar{\psi}_{a\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}_b)^{\dot{\alpha}\beta} - \bar{\psi}_{b\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}_a)^{\dot{\alpha}\beta}\right)\mathcal{W}_\beta{}^{\mathcal{C}}| + \frac{1}{4}\psi_a{}^{\underline{\alpha}}\psi_b{}^{\underline{\beta}} R_{\underline{\alpha\beta}}{}^{\mathcal{C}}|
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

で与えられる。ゲージ場の対応 (5.3) 式を用いると、テンソル算法における共変化された曲率と共形超空間形式におけるローレンツ添字を持つ曲率の最低次が次のように対応する：

テンソル算法	共形超空間形式
$-\big(R_{ab}(P^c),\ \frac{1}{2}R_{ab}(Q)\big)$	$\big(R(P)_{ab}{}^c,\ R(P)_{ab}{}^\gamma,\ R(P)_{ab\dot{\gamma}}\big)\| = R(P)_{ab}{}^C\|$
$-R^{\mathrm{cov}}_{ab}(M^{cd}),\ -R_{ab}(D),\ \frac{-3}{4}R_{ab}(A)$	$R(M)_{ab}{}^{cd}\|,\quad R(D)_{ab}\|,\quad R(A)_{ab}\|$
$-\big(R^{\mathrm{cov}}_{ab}(K^c),\ -\frac{1}{2}R^{\mathrm{cov}}_{ab}(S)\big)$	$\big(R(K)_{ab}{}^c,\ R(K)_{ab}{}^\gamma,\ R(K)_{ab\dot{\gamma}}\big)\| = R(K)_{ab}{}^C\|$

(5.5)

ここで、テンソル算法における記号 cov で表される共変化 ‘covariantization’ は M, S, K_a 曲率のみに必要である。そしてこの共変化は共形超空間形式においては、M, S, K 項にのみ “ゲージーノ” 超場 $\mathcal{W}_{\underline{\alpha}}$ が存在していることに対応する。この対応 (5.5) 式を得るために超空間における “ゲージーノ” 超場 $\mathcal{W}_\alpha$ とテンソル算法における以下の曲率に次の対応

があることを用いた：

テンソル算法	共形超空間形式
$R_{ab}(Q)\gamma_5$	$\Big(\mathcal{W}(M)^{\alpha}{}_{ab},\ \ \mathcal{W}(M)_{\dot\alpha,ab}\Big)\| = -2\Big(R(P)_{ab}{}^{\alpha},\ \ -R(P)_{ab,\dot\alpha}\Big)\|$
$\frac{i}{4}\sigma^{ab}\gamma_5 R_{ab}(A)$	$\begin{pmatrix}\mathcal{W}(K)_\alpha{}^\beta & 0\\ 0 & \mathcal{W}(K)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\end{pmatrix}\| = -\frac{i}{3}\begin{pmatrix}(\sigma^{ab})_\alpha{}^\beta & 0\\ 0 & (\bar\sigma^{ab})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}R(A)_{ab}\|$
$-\frac{1}{4}iR^{\rm cov}_{bc}(S)\gamma^c\gamma_5 + \frac{1}{4}(*R)^{\rm cov}_{bc}(S)\gamma^c$	$\Big(\mathcal{W}(K)^\alpha{}_b\ \ \mathcal{W}(K)_{\dot\alpha b}\Big)\| = -\frac{i}{2}\Big(R(K)_{bc}{}^\beta\ \ R(K)_{bc,\dot\beta}\Big)\|\begin{pmatrix}0&(\sigma^c)_{\beta\dot\alpha}\\(\bar\sigma^c)^{\dot\beta\alpha}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\Big((*R(K))_{bc}{}^\beta\ \ (*R(K))_{bc,\dot\beta}\Big)\|\begin{pmatrix}0&(\sigma^c)_{\beta\dot\alpha}\\(\bar\sigma^c)^{\dot\beta\alpha}&0\end{pmatrix}$

(5.6)

ここで、これらの量は (4.72) 式により超空間における曲率のスピノル・ベクトル成分 $R_{\underline{\alpha}b}{}^{\mathcal{C}}$ を表すものである。

曲率の対応は結局次の単純な形

$$R^{\mathrm{cov}}_{ab}{}^{C}X_C\ \text{(テンソル算法)}\quad\leftrightarrow\quad -R_{ab}{}^{\mathcal{C}}|\,X_{\mathcal{C}}\ \text{(共形超空間形式)} \tag{5.7}$$

にまとめられる。ここで、曲率の対応は ローレンツ添字を持った成分に対して対応があり、一般にはアインシュタイン添字を持った成分に対してはないことに注意する。一方で、ゲージ場の対応はアインシュタイン添字を持ったものに対して対応があることに注意する。すなわち、

$$h_m{}^{C}X_C\ \text{(テンソル算法)}\quad\leftrightarrow\quad h_m{}^{\mathcal{C}}|\,X_{\mathcal{C}}\ \text{(共形超空間形式)}. \tag{5.8}$$

なぜなら、共形超空間形式におけるローレンツ添字を持ったゲージ場の最低次はグラヴィティーノを含むからである：

$$h_a{}^{\mathcal{C}}| = E_a{}^{M}h_M{}^{\mathcal{C}}| = e_a{}^{m}h_m{}^{\mathcal{C}}| - \frac{1}{2}\psi_a{}^{\underline{\alpha}}h_{\underline{\alpha}}{}^{\mathcal{C}}|. \tag{5.9}$$

曲率に対する拘束条件も対応があることが以下で見るようにわかるが、共形超空間形式における曲率への拘束条件は スピノル・スピノル成分とスピノル・ベクトル成分に直接要請されるものであることに注意する。そして、超空間における ベクトル・ベクトル成

分 R_{ab} への拘束条件は、曲率を記述するカイラル超場 $W_{\alpha\beta\gamma}$ の性質から導かれる。超空間における曲率 $R(X)_{ab}{}^{\mathcal{A}}$ は、$W_{\alpha\beta\gamma}$ および (4.82) 式を用いて次のように表される：

共形超空間形式における曲率 $R_{ab}{}^{\mathcal{A}}$		
$R(P)_{ab}{}^{c}$	0	
$R(P)^{-}_{\gamma\beta}{}^{\alpha},\quad R(P)^{+}_{\dot\gamma\dot\beta,\dot\alpha}$	$W_{\gamma\beta}{}^{\alpha},\quad W_{\dot\gamma\dot\beta\dot\alpha}$	
$\frac{1}{4}R(M)^{-,-}_{\beta\alpha,\delta\gamma},\quad \frac{1}{4}R(M)^{+,+}_{\dot\beta\dot\alpha,\dot\delta\dot\gamma}$	$\nabla_{(\delta}W_{\gamma)\beta\alpha},\quad \bar\nabla_{(\dot\delta}W_{\dot\gamma)\dot\beta\dot\alpha}$	(5.10)
$R(D)^{-}_{\beta\alpha}=\frac{2}{3}iR(A)^{-}_{\beta\alpha},\quad R(D)^{+}_{\dot\beta\dot\alpha}=\frac{-2}{3}iR(A)^{+}_{\dot\beta\dot\alpha}$	$-\frac{1}{2}\nabla^{\gamma}W_{\gamma\beta\alpha},\quad \frac{1}{2}\bar\nabla^{\dot\gamma}W_{\dot\gamma\dot\beta\dot\alpha}$	
$R(K)^{-}_{\gamma\beta}{}^{\alpha},\quad R(K)^{+}_{\dot\gamma\dot\beta,\dot\alpha}$	$\frac{1}{8}\nabla^{2}W_{\gamma\beta}{}^{\alpha},\quad \frac{1}{8}\bar\nabla^{2}W_{\dot\gamma\dot\beta\dot\alpha}$	
$R(K)^{-}_{\gamma\beta}{}^{a}(\sigma_a)_{\alpha\dot\alpha},\quad R(K)^{+}_{\dot\gamma\dot\beta}{}^{a}(\sigma_a)_{\alpha\dot\alpha}$	$\frac{-1}{2}\nabla_{\gamma}\nabla^{\delta}{}_{\dot\alpha}W_{\delta\beta\alpha},\ \frac{1}{2}\bar\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\alpha}{}^{\dot\delta}W_{\dot\delta\dot\beta\dot\alpha}$	

ここで、反対称テンソルのカイラル分解 $R^{-}_{\alpha\beta}$ および $R^{+}_{\dot\alpha\dot\beta}$ は (A.11) 式で定義される。

共形超空間形式における曲率への拘束条件は曲率の ベクトル・ベクトル成分 $R(X)_{ab}{}^{\mathcal{A}}$ が $W_{\alpha\beta\gamma}$ で表されることから従う。まず、テンソル算法における (4.27) 式は $R_{ab}(P^c)=0$ に等しい。そしてそれは共形超空間形式における $R(P)_{ab}{}^{c}|=0$ に対応する。これは (5.10) 式と曲率の対応 (5.5) 式からわかる。次に、Q 曲率に対する拘束条件 (4.28) 式について考える。この拘束条件はローレンツ添字を用いて $R_{ab}(Q)\gamma^b=0$ と書き直すことができる。一方、共形超空間形式においては、Q 曲率 $R(P)_{ab}{}^{\alpha}$ およびこのエルミート共役は $R(P)_{ab}{}^{\alpha}|(\sigma^b)_{\alpha\dot\delta}=0$ およびそのエルミート共役を満たすため、Q 曲率の拘束条件も対応していることがわかる。この条件は (5.10) 式において、$R(P)_{ab}{}^{\alpha}$ がカイラル成分しか持たないこと $R(P)_{\gamma\dot\gamma,\beta\dot\beta}{}^{\alpha}=2\varepsilon_{\dot\gamma\dot\beta}W_{\gamma\beta}{}^{\alpha}$ そして $W_{\alpha\beta\gamma}$ が完全対称テンソルであることから従う次の式

$$R(P)_{ab}{}^{\alpha}(\sigma^b)_{\alpha\dot\delta}\ \propto\ (\bar\sigma_b)^{\dot\beta\beta}\varepsilon_{\dot\gamma\dot\beta}W_{\gamma\beta}{}^{\alpha}(\sigma^b)_{\alpha\dot\delta}\ \propto\ \varepsilon_{\dot\gamma\dot\delta}W_{\gamma\alpha}{}^{\alpha} \tag{5.11}$$

から示される。そして最後のテンソル算法おける M 曲率に対する拘束条件 (4.29) 式について考える。この拘束条件は、ローレンツ添字を用いて

$$R^{\mathrm{cov}}_{ac}(M^{cb})+\frac{1}{2}(*R)^{b}{}_{a}(A)=0 \tag{5.12}$$

とかける。一方、共形超空間形式においては M 曲率と A 曲率との関係は

$$R(M)_{ac}{}^{cb}+\frac{2}{3}(*R(A))^{b}{}_{a}=0 \tag{5.13}$$

であるため、M 曲率に対する拘束条件も対応していることがわかる。これは (5.10) 式において、$R(M)_{ac}{}^{cb}$ および $R(A)_{ab}$ が $\nabla^{\beta}W_{\beta\alpha\gamma}$ およびこのエルミート共役で与えられることから従う。

ここまでの議論は、ゲージ場の対応に基づいて明らかにされた。これらのゲージ場に対する超共形変換則の対応は次のようになる:

テンソル算法	共形超空間形式
$\delta_P(\xi^a)+\delta_Q(\varepsilon)$	$\delta_G(\xi(P)^a\vert P_a)+\delta_G(\xi(P)^{\underline{\alpha}}\vert Q_{\underline{\alpha}})=\delta_G(\xi(P)^A\vert P_A)$
$\delta_M(\lambda^{ab})+\delta_D(\rho)+\delta_A(\theta)$	$\delta_G(\frac{1}{2}\xi(M)^{ba}\vert M_{ab})+\delta_G(\xi(D)\vert D)+\delta_G(\xi(A)\vert A)$
$\delta_K(\xi_K^a)+\delta_S(\zeta)$	$\delta_G(\xi(K)^a\vert K_a)+\delta_G(\xi(K)^{\underline{\alpha}}\vert S_{\underline{\alpha}})=\delta_G(\xi(K)^A\vert K_A)$

(5.14)

この対応における変換パラメータの対応は (5.2) 式で与えられる。これらの対応は両形式における交換関係から従う。この対応において M_{ab}, D, A, S, K_a 変換については明らかであるが、$P_A=(P_a,\, Q_\alpha,\, \bar{Q}^{\dot{\alpha}})$ 変換の対応は非自明である。特に $Q_{\underline{\alpha}}$ 変換の変形の扱いが両形式間で異なることに注意する。共形超空間形式では、Q 変換はリー微分とゲージ変換の線形結合で定義された。一方で、テンソル算法においては、Q 変換は gruop law と曲率の拘束条件による変形を用いて定義されていた。従って、以下で P_A 変換の関わる交換関係を詳しく議論する。まず、共形超空間形式では P 変換は (4.64) 式によって

$$\delta_G(\xi^A P_A)=\mathcal{L}(\xi^M:=\xi^A E_A{}^M)-\delta_G(\xi^M h_M{}^{\mathcal{B}'}X_{\mathcal{B}'}) \tag{5.15}$$

と定義されていた。従って、P_A 変換の関わる交換関係を調べるには、リー微分と $X_{\mathcal{B}'}$ 変換の交換関係を調べる必要がある。その交換関係は P_A 変換のパラメータ ξ^A, η^A が場に依存しないことに注意すると、

$$\begin{aligned}
&[\delta_{\mathrm{GC}}(\xi^B E_B{}^N),\, \delta_{\mathrm{GC}}(\eta^C E_C{}^L)]\\
&\qquad=\delta_{\mathrm{GC}}(\xi^N\eta^L(\partial_L E_N{}^A-\partial_N E_L{}^A)E_A{}^M),\\
&[\delta_G(\xi^A h_A{}^{\mathcal{A}'}X_{\mathcal{A}'}),\, \delta_{\mathrm{GC}}(\eta^A E_A{}^M)]\\
&\qquad=\delta_G(\eta^L(\partial_L\xi^N)h_N{}^{\mathcal{B}'}X_{\mathcal{B}'})+\delta_G(\eta^L\xi^N(\partial_L E_N{}^A)h_A{}^{\mathcal{B}'}X_{\mathcal{B}'})\\
&\qquad\quad-\delta_{\mathrm{GC}}(\eta^L E_L{}^C\xi^N h_N{}^{\mathcal{B}'}f_{\mathcal{B}'C}{}^D E_D{}^M),\\
&[\delta_G(\xi^A h_A{}^{\mathcal{A}'}X_{\mathcal{A}'}),\, \delta_G(\eta^B h_B{}^{\mathcal{B}'}X_{\mathcal{B}'})]\\
&\qquad=\delta_G(\xi^L\eta^N(h_N{}^{\mathcal{B}'}E_L{}^E-h_L{}^{\mathcal{B}'}E_N{}^E)f_{\mathcal{B}'E}{}^F h_F{}^{\mathcal{A}'}X_{\mathcal{A}'})\\
&\qquad\quad+\delta_G((\eta^N(\partial_N\xi^L)-\xi^N(\partial_N\eta^L))h_L{}^{\mathcal{A}'}X_{\mathcal{A}'})+\delta_G(\eta^N\xi^L R_{LN}{}^{\mathcal{A}'}X_{\mathcal{A}'})
\end{aligned} \tag{5.16}$$

となる。これらの関係式と P_A 変換の定義を用いると

$$[\delta_G(\xi^A P_A),\, \delta_G(\eta^B P_B)]=-\delta_G(\xi^A\eta^B R_{AB}{}^{\mathcal{C}}X_{\mathcal{C}}) \tag{5.17}$$

を得る。変換パラメータ ξ^A はベクトル ξ^a かスピノル $\xi^{\underline{\alpha}}$ であるため、これらをベクトルかスピノルにとることで、Q-Q, Q-P そして P-P 間の交換関係が導かれる。(5.17) 式に

おいて ξ^A と η^B の両方をスピノルにとり、曲率 $R_{\underline{\alpha\beta}}$ に対する拘束条件を用いると、Q-Q の交換関係が次のようになる：

$$[\delta_G(\xi^{\underline{\alpha}}Q_{\underline{\alpha}}),\, \delta_G(\eta^{\underline{\beta}}Q_{\underline{\beta}})] = 2\delta_G\left(\begin{pmatrix}\eta^\beta & \bar{\eta}_{\dot\beta}\end{pmatrix} i \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^a)_{\beta\dot\alpha} \\ (\bar\sigma^a)^{\dot\beta\alpha} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_\alpha \\ \bar\xi^{\dot\alpha}\end{pmatrix} P_a\right). \tag{5.18}$$

そして、この交換関係はテンソル算法のものと対応する：

$$[\delta_Q(\varepsilon_1), \delta_Q(\varepsilon_2)] = \delta_P\Big(\frac{1}{2}\bar\varepsilon_2\gamma^a\varepsilon_1\Big). \tag{5.19}$$

ここで、パラメータの対応 (5.2) 式より $\frac{1}{2}\bar\varepsilon_1 \leftrightarrow \begin{pmatrix}\xi^\alpha & \bar\xi_{\dot\alpha}\end{pmatrix}|$ および $\frac{1}{2}\bar\varepsilon_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix}\eta^\beta & \bar\eta_{\dot\beta}\end{pmatrix}|$ となることを用いた。次に、ベクトルパラメータ ξ^a とスピノルパラメータ $\eta^{\underline{\beta}}$ に対して、交換関係 (5.17) 式は

$$\begin{aligned}&[\delta_G(\xi^aP_a),\, \delta_G(\eta^{\underline{\beta}}Q_{\underline{\beta}})]\\ &= -\Big(\delta_G\big(\tfrac{1}{2}\xi^a\eta^{\underline{\beta}}R(M)_{a\underline{\beta}}{}^{dc}M_{cd}\big) + \delta_G\big(\xi^a\eta^{\underline{\beta}}R(K)_{a\underline{\beta}}{}^{\underline{\gamma}}S_{\underline{\gamma}}\big) + \delta_G\big(\xi^a\eta^{\underline{\beta}}R(K)_{a\underline{\beta}}{}^cK_c\big)\Big)\end{aligned} \tag{5.20}$$

となる。曲率と "ゲージーノ" 超場との関係を $R_{a\beta} = -i(\sigma_a)_{\beta\dot\gamma}\mathcal{W}^{\dot\gamma}$ を用いると、この交換関係はテンソル算法における

$$\begin{aligned}[\delta_P(\xi^a),\, \delta_Q(\varepsilon)] &= \sum_{A=M,S,K}\delta_A(\xi^b\delta'_Q(\varepsilon)h_b{}^A)\\ &= \delta_M\Big(\frac{1}{2}\xi^cR^{ab}(Q)\gamma_c\varepsilon\Big) + \delta_S\Big(\frac{1}{4}i\xi^a\gamma^b(\gamma_5R_{ba}(A) + \tilde{R}_{ba}(A))\varepsilon\Big)\\ &\quad + \delta_K\Big(-\frac{1}{2}\xi^bR^{\mathrm{cov}}_{cb}(S)\sigma^{ac} - \frac{1}{4}\xi^b\delta^{ac}\tilde{R}^{\mathrm{cov}}_{cb}(S)\gamma_5\varepsilon\Big)\end{aligned} \tag{5.21}$$

に対応する。ここで、$\frac{1}{2}\bar\varepsilon = \begin{pmatrix}\eta^\beta & \bar\eta_{\dot\beta}\end{pmatrix}|$ である。最後に、ξ^A と η^B とをともにベクトルパラメータにとると、

$$[\delta_G(\xi^aP_a),\, \delta_G(\eta^bP_b)] = -\delta_G(\xi^a\eta^bR_{ab}{}^{\mathcal{A}}X_{\mathcal{A}}) \tag{5.22}$$

を得る。これはテンソル算法の

$$[\delta_P(\xi_1^a),\, \delta_P(\xi_2^b)] = \sum_{A\neq P}\delta_A(\xi_1^a\xi_2^bR^{\mathrm{cov}A}_{ab}) \tag{5.23}$$

に対応する。ここで、$\xi_1^a \leftrightarrow \xi^a|$ および $\xi_2^b \leftrightarrow \eta^b|$ であり、テンソル算法における $R_{ab}(P^c)$ と共形超空間形式における $R(P)_{ab}{}^c$ はともに 0 であることに注意する。

ここで、P_a 変換と Q 変換の交換関係の対応から、テンソル算法においては代数的に決まった交換関係 $[\delta_P, \delta_Q]$ は、超空間においてはベクトル・スピノル曲率という幾何学量として解釈できることに注意する。

5.2　超共形多重項

これまでで超共形変換則が両方の形式で正確に一致することを確かめた。そして、テンソル算法においては代数が定まれば超共形多重項の変換則が定まる。すなわち、テンソル算法において最低のワイル・ウェイトを持った場の変換則を特定すれば、それ以外の多重項の成分場の超共形変換則が高次項の定義の不定性を除いて定まる。従って、超共形多重項の対応が

$$\text{超共形多重項 } \mathcal{V}_\Gamma \text{ (4.42) 式} \quad \leftrightarrow \quad \text{プライマリー超場 } \Phi_\Gamma \text{ (4.84) 式}$$

となることが導かれる。これについて説明する。テンソル算法では、超共形多重項 $\mathcal{V}_\Gamma$ の初項 $\mathcal{C}_\Gamma$ は多重項の中で最も低いワイル・ウェイトを持ち、S および K_a 変換で消えるように定義される。一方で共形超空間形式では、プライマリー超場は K_A 不変であると定義される。第 4 章においてテンソル算法での (4.43) 式と共形超空間形式の (4.84) 式で議論したように、テンソル算法の $\mathcal{C}_\Gamma$ と共形超空間形式の $\Phi_\Gamma|$ は超共形変換で同じ形で変換する。さらに、仮にこれらが同じワイル・ウェイト $w = \Delta$ およびカイラル・ウェイト $n = (3/2)w$ をもち、そしてローレンツ代数の同じ表現空間の元で表現行列が同じである $\Sigma_{ab} = -\mathcal{S}_{ab}$ ならば、両形式間でこの多重項と超場は一致する。そして、超共形多重項の高次項は、Q 変換で順に決めることができ、高次項の定義の不定性は標準形 (B.1) 式で固定できる。

従って、共形超空間形式においても、高次項の超場での表式を $Q_{\underline{\alpha}}$ $(= \nabla_{\underline{\alpha}})$ を超場に順に作用させ、変換則をテンソル算法のものと比較することで得ることができる。この導出の詳細は付録 C.1 に回すが、超共形多重項 $\mathcal{V}_\Gamma$ の各成分の共形超空間形式への対応は、ワ

イル・ウェイトの小さい順に次のようになる。

ワイル・ウェイト	テンソル算法	共形超空間形式
w	$\mathcal{C}_\Gamma$	$\Phi_\Gamma\|$
$w+\frac{1}{2}$	$\mathcal{Z}_\Gamma$	$\begin{pmatrix} -i\nabla_\alpha\Phi_\Gamma \\ +i\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}}\Phi_\Gamma \end{pmatrix}\Big\|$
$w+1$	$\mathcal{H}_\Gamma$	$+\frac{1}{4}(\nabla^2\Phi_\Gamma+\bar{\nabla}^2\Phi_\Gamma)\|$
	$\mathcal{K}_\Gamma$	$-\frac{i}{4}(\nabla^2\Phi_\Gamma-\bar{\nabla}^2\Phi_\Gamma)\|$
	$\mathcal{B}_{a\Gamma}$	$-\frac{1}{4}(\bar{\sigma}_a)^{\dot{\beta}\beta}[\nabla_\beta,\bar{\nabla}_{\dot{\beta}}]\Phi_\Gamma\|$
$w+\frac{3}{2}$	Λ_Γ	$\dfrac{i}{4}\begin{pmatrix} -\bar{\nabla}^2\nabla_\alpha\Phi_\Gamma \\ +\nabla^2\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}}\Phi_\Gamma \end{pmatrix}\Big\| + 2i\begin{pmatrix} \mathcal{W}_\alpha \\ \mathcal{W}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}\Phi_\Gamma\|$
$w+2$	$\mathcal{D}_\Gamma$	$\frac{1}{8}\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}\nabla^2\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}}\Phi_\Gamma\|+\mathcal{W}_{\dot{\alpha}}\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}}\Phi_\Gamma\|$ $=\frac{1}{8}\nabla^\alpha\bar{\nabla}^2\nabla_\alpha\Phi_\Gamma\|-\mathcal{W}^\alpha\nabla_\alpha\Phi_\Gamma\|$

(5.24)

この対応において、全体にかかる係数の不定性があるが、この不定性は初項を $\mathcal{C}_\Gamma \leftrightarrow \Phi_\Gamma|$ とすることで固定できる。ここで、最後の $\mathcal{D}_\Gamma$ 項の対応において、次の恒等式

$$\nabla^\alpha\bar{\nabla}^2\nabla_\alpha-\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}\nabla^2\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}}=8\big(\mathcal{W}_{\dot{\alpha}}\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}}+\mathcal{W}^\alpha\nabla_\alpha+\{\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}},\,\mathcal{W}^{\dot{\alpha}}\}\big), \tag{5.25}$$

を用いた。これは、重力を含まない共形超空間形式における恒等式 $D^\alpha\bar{D}^2D_\alpha-\bar{D}_{\dot{\alpha}}D^2\bar{D}^{\dot{\alpha}}=0$ の共形超空間形式における拡張である。(5.25) 式の右辺は、共形超空間では $\mathcal{W}_{\underline{\alpha}}$ に比例したゼロでない ベクトル・スピノル曲率があることに起因する。

ここで、ローレンツ添字がない超共形多重項の場合は、Λ および $\mathcal{D}$ の対応は重力を含まない共形超空間形式と同じ単純な形になる：

$$\Lambda \quad\leftrightarrow\quad \frac{i}{4}\begin{pmatrix} -\bar{\nabla}^2\nabla_\alpha\Phi \\ +\nabla^2\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}}\Phi \end{pmatrix}\Bigg|, \qquad \mathcal{D} \quad\leftrightarrow\quad \frac{1}{8}\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}\nabla^2\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}}\Phi|=\frac{1}{8}\nabla^\alpha\bar{\nabla}^2\nabla_\alpha\Phi|. \tag{5.26}$$

これは (4.78) 式および (4.79) 式から “ゲージーノ” 超場 $\mathcal{W}_\alpha$ が M および K_A 成分しか持たないこと、そして (4.80) 式より $\{\nabla^\alpha,\mathcal{W}_\alpha\}=\{\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}},\mathcal{W}^{\dot{\alpha}}\}$ が K_a 成分しか持たないことから従う。

5.3　カイラル射影と超共形不変な作用

ここでは、超共形カイラル多重項とカイラル射影、そして超共形不変な作用の対応について調べる。

まず超共形カイラル多重項の対応について調べる。超共形カイラル多重項は、共形ウェイトとローレンツ添字に制限がついていた。この制限がテンソル算法と共形超空間形式とで一致することをまず確かめる。共形超空間形式では、第 4 章で議論したように、プライマリーカイラル超場 Φ_Γ は次の条件を満たすものとして定義されていた：

$$\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}\Phi_\Gamma = 0, \quad K_A\Phi_\Gamma = 0. \tag{5.27}$$

ここで、カイラル条件とプライマリー条件が整合するためには

$$0 = \{\bar{S}^{\dot{\alpha}}, \bar{\nabla}^{\dot{\beta}}\}\Phi_\Gamma = \left((2D + 3iA)\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} - 2M^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\right)\Phi_\Gamma \tag{5.28}$$

でなければならなかった。これは Φ_Γ の共形ウェイト (Δ, w) は $2\Delta - 3w = 0$ を満たし、かつ Γ は点無しスピノル添字のみ $\Gamma = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots)$ でなければならないことを意味する。これらの条件はテンソル算法における (4.45) 式と対応するものである。

次に具体的に成分場の対応を調べる。プライマリーカイラル超場 Φ_Γ に対して超共形多重項の一般的な対応 (5.24) 式を用いると、

$$\left(\mathcal{C}_\Gamma, \mathcal{Z}_\Gamma, \mathcal{H}_\Gamma, \mathcal{K}_\Gamma, \mathcal{B}_{a\Gamma}, \Lambda_\Gamma, \mathcal{D}_\Gamma\right) \quad \leftrightarrow \quad \left(\Phi_\Gamma|,\, -i\nabla_\alpha\Phi_\Gamma|,\, \tfrac{1}{4}\nabla^2\Phi_\Gamma|,\, \tfrac{-i}{4}\nabla^2\Phi_\Gamma|,\, i\nabla_a\Phi_\Gamma|,\, 0,\, 0\right) \tag{5.29}$$

を得る。ここで、プライマリーカイラル超場に対して成立する次の等式

$$\bar{\nabla}_{\dot{\beta}}\nabla_\alpha\Phi_\Gamma = \{\bar{\nabla}_{\dot{\beta}},\, \nabla_\alpha\}\Phi = -2i\nabla_{\alpha\dot{\beta}}\Phi_\Gamma, \qquad \mathcal{W}^{\dot{\alpha}}\Phi_\Gamma = 0 \tag{5.30}$$

を用いた。$\mathcal{W}^{\dot{\alpha}}\Phi_\Gamma = 0$ はプライマリーカイラル超場に対して $M^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}\Phi_\Gamma = K_A\Phi_\Gamma = 0$ であること、すなわち、Φ_Γ はプライマリーでローレンツ添字 Γ は点無しスピノルしか持たないことから従う。超共形カイラル多重項の一般の多重項への埋め込み (4.46) 式と、プライマリーカイラル超場の対応 (5.29) 式を用いると、超共形カイラル多重項 $[\,\mathcal{A}_\Gamma,\ \mathcal{P}_{\mathrm{R}}\chi_\Gamma,\ \mathcal{F}_\Gamma\,]$ とプライマリーカイラル超場 Φ_Γ の対応が

$$[\,\mathcal{A}_\Gamma,\ \mathcal{P}_{\mathrm{R}}\chi_\Gamma,\ \mathcal{F}_\Gamma\,]\ (\text{テンソル算法}) \quad \leftrightarrow \quad \left[\,\Phi_\Gamma|,\ \nabla_\alpha\Phi_\Gamma|,\ -\tfrac{1}{4}\nabla^2\Phi_\Gamma|\,\right]\ (\text{共形超空間形式}) \tag{5.31}$$

と求まる。

これまで超共形カイラル多重項の対応について議論してきた。この対応を用いてカイラル射影の対応を構成することができる。まず、共形超空間形式においてカイラル射影と、カイラル射影が実際に射影として成立するためのプラリマリーカイラル超場に対する一般的条件について考える。カイラル射影は、超共形共変スピノル微分を用いて表すことが

できる。実際、超共形スピノル微分の代数 (4.69) 式の $\{\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}, \bar{\nabla}_{\dot{\beta}}\} = 0$ を用いると、

$$\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}\bar{\nabla}^2\Psi_\Gamma = 0 \tag{5.32}$$

が(プライマリー超場とは限らない)一般の超場 Ψ_Γ について成立する。従って、$\bar{\nabla}^2\Psi_\Gamma$ は形式的にはカイラル超場である。しかし、仮に $\bar{\nabla}^2\Psi_\Gamma$ がプライマリー超場でない場合、この $\bar{\nabla}^2$ が作用した超場は元の超場の自由度であった $8+8$ の複素自由度を持ち続ける。これはプライマリーカイラル超場が $2+2$ の複素自由度しか持たないことと異なる性質である。このような奇妙な性質が生じるのは、共形超重力理論における $\bar{S}_{\dot{\alpha}}$ 変換が $\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}$ の逆として作用することに起因する。

仮に、$\bar{\nabla}^2\Psi_\Gamma$ が S_α 変換を含む K_A 変換で不変なプライマリー超場であるならば、$\bar{\nabla}^2\Psi_\Gamma$ はプライマリーカイラル超場の持つ $2+2$ の複素自由度だけを持つ。Ψ_Γ の共形ウェイトを (Δ, w) とすると、超共形代数より $\bar{\nabla}^2\Psi_\Gamma$ は共形ウェイト $(\Delta+1, w+2)$ を持つ。従って、$\bar{\nabla}^2\Psi_\Gamma$ は $2(\Delta+1) - 3(w+2) = 0$ かつ Γ が点無しスピノルのみの時のみプライマリーカイラル超場となる。これは $\bar{\nabla}^2$ はこの演算子が作用するプライマリー超場 Ψ_Γ のウェイトが上記の条件を満たす時のみカイラル射影として作用することを意味する。そしてこのカイラル射影の性質はテンソル算法におけるカイラル射影 (4.48) 式が満たすべき条件と一致する。そして超共形多重項の対応 (5.24) を用いると、共形超空間形式とテンソル算法におけるカイラル射影 $\mathcal{P}$ と Π の関係が次のようになる:

$$\Pi \quad \leftrightarrow \quad -\mathcal{P} = \frac{1}{4}\bar{\nabla}^2. \tag{5.33}$$

これは実際付録 C.2 で行うように、カイラル射影を受けたプライマリー超場 $\mathcal{P}\Psi_\Gamma$ がテンソル算法における (4.48) 式の超共形カイラル多重項 $\Pi\mathcal{V}_\Gamma$ に (5.24) 式を用いて同定されることから示される。この同定において、次の恒等式が有用である：

$$\begin{aligned}
\nabla^2\bar{\nabla}^2 &= \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}\nabla^2\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}} + 8\nabla^a\nabla_a - 2i\nabla_a(\bar{\sigma}^a)^{\dot{\alpha}\alpha}[\nabla_\alpha, \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}] - 8\mathcal{W}_{\dot{\alpha}}\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}}, \\
\bar{\nabla}^2\nabla^2 &= \nabla^\alpha\bar{\nabla}^2\nabla_\alpha + 8\nabla^a\nabla_a + 2i\nabla_a(\bar{\sigma}^a)^{\dot{\alpha}\alpha}[\nabla_\alpha, \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}] + 8\mathcal{W}^\alpha\nabla_\alpha.
\end{aligned} \tag{5.34}$$

ここで、これらの恒等式の和が

$$\nabla^2\bar{\nabla}^2 + \bar{\nabla}^2\nabla^2 - \nabla^\alpha\bar{\nabla}^2\nabla_\alpha - \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}\nabla^2\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}} = 16\nabla^a\nabla_a + 8\mathcal{W}^\alpha\nabla_\alpha - 8\mathcal{W}_{\dot{\alpha}}\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}} \tag{5.35}$$

となることに注意する。この恒等式は重力を含まない超対称性理論における次の恒等式

$$D^2\bar{D}^2 + \bar{D}^2D^2 - 2D^\alpha\bar{D}^2D_\alpha = 16\partial^m\partial_m \tag{5.36}$$

の共形超空間での拡張になっている。

最後に、超共形不変な作用の対応について考える。作用には、F-type と D-type とがあるが、まず F-type 作用の対応について考え、次にこの F-type 作用の対応を用いて D-type 作用の対応を調べる。

テンソル算法において、F-type 作用は $w = n = 3$ でローレンツ添字をもたない超共形カイラル多重項 Σ に対してのみ定義できた。共形超空間形式においての (4.90) 式で与えられる F-type 作用の成分展開は、成分展開の (4.49) 式で与えられる F-type 作用に一致する。すなわち、

$$\int d^4x \left[\, \Sigma \,\right]_F \quad \leftrightarrow \quad \int d^4x d^2\theta \, \mathcal{E}\Sigma + \int d^4x d^2\bar{\theta} \, \bar{\mathcal{E}}\bar{\Sigma}. \tag{5.37}$$

これはゲージ場の対応 (5.3) 式と、超共形カイラル多重項の対応 (5.31) 式から従う。

次にもう一つの超共形不変な作用である D-type 作用の対応について考える。D-type 作用は共形ウェイト $(w, n) = (2, 0)$ であり、かつローレンツ添字を持たない超共形実多重項 V に対してのみ定義できる。D-type 作用はテンソル算法においても共形超空間形式においても、カイラル射影と F-type 作用を用いて得ることができる。従ってカイラル射影の対応 (5.33) 式と F-type 作用の対応 (5.37) 式より、テンソル算法の D-type 作用 (4.50) 式と共形超空間形式における D-type 作用 (4.91) 式が

$$\int d^4x \left[\, V \,\right]_D \quad \leftrightarrow \quad 2\int d^4x d^4\theta \, EV \tag{5.38}$$

と対応している。

5.4 $\boldsymbol{u}$-associated 微分

5.4.1 超共形共変スピノル微分への制限はあるか？

まず、超共形共変スピノル微分についての歴史的な問題について述べる。文献 [30] において、 KU はテンソル算法におけるスピノル微分 $\mathscr{D}_{\underline{\alpha}}$ を構成し、この微分はそれが作用する超共形多重項 $\mathcal{V}_\Gamma$ が共形ウェイトとローレンツ添字に特別な条件を満たす時のみ存在することを主張した。一方で、Butter は文献 [34] において共形超空間で超共形共変微分 ∇_A を定義した。これは KU の主張したような特別な制限なしにどのような超場にでも作用できるものである。これらの微分の違いは何か。

この違いを見分ける点は、KU はテンソル算法において、超共形多重項 $\mathcal{V}_\Gamma$ をその初項 $\mathcal{C}_\Gamma$ を用いて $\mathcal{V}_\Gamma = [\![\mathcal{C}_\Gamma]\!]$ と書いた点である。超共形多重項の初項 $\mathcal{C}_\Gamma$ は最も低いワイル・

ウェイトを持つため、作用した先でワイル・ウェイトを下げるような S, K 変換で0にならなければならない。このことは共形超空間形式でもプライマリー超場 Φ_Γ に対して次のように言い換えることができる:

$$\mathcal{V}_\Gamma = [\![\mathcal{C}_\Gamma]\!] \quad \leftrightarrow \quad \Phi_\Gamma, \qquad\qquad \delta_S \mathcal{C}_\Gamma = \delta_K \mathcal{C}_\Gamma = 0 \quad \leftrightarrow \quad K_A \Phi_\Gamma = 0. \tag{5.39}$$

KU が構成したスピノル微分 $\mathscr{D}_{\underline{\alpha}}$ は、超共形多重項 $\mathcal{V}_\Gamma$ を $\mathcal{V}_\Gamma$ の第2項 $\mathcal{Z}_{\underline{\alpha}\Gamma}$ を初項に持つ別の超共形多重項に移すものであった:

$$\mathscr{D}_\alpha \ : \ \mathcal{V}_\Gamma = [\![\mathcal{C}_\Gamma]\!] \quad \to \quad \mathscr{D}_\alpha \mathcal{V}_\Gamma = [\![\mathcal{Z}_{\alpha\Gamma}]\!]. \tag{5.40}$$

ここが共形超空間形式の ∇_A と本質的に異なる点である。∇_α はプライマリー超場を別のプライマリー超場に一般には移さない。共形超空間形式における ∇_A に KU の主張した制限がないことは、テンソル算法における Q 変換にそのような制限がないことと整合する。なぜならテンソル算法では第2項 $\mathcal{Z}_{\alpha\Gamma}$ の S 変換は一般には0になるようには要請されないからである。従って、テンソル算法の Q 変換に対応する超共形共変スピノル微分は共形超空間における $\nabla_{\underline{\alpha}}$ であって、$\mathscr{D}_{\underline{\alpha}}$ ではない。

逆に言えば、$\nabla_\alpha \Phi_\Gamma$ がプライマリーであれという要請を課した場合、プライマリーである条件 $S_\beta \nabla_\alpha \Phi_\Gamma = 0$ は KU が見出した Φ_Γ に対する条件を与える。

5.4.2 $\boldsymbol{u}$-associated 微分

このように、超共形共変スピノル微分に対する歴史的問題は $\nabla_{\underline{\alpha}}$ がプライマリー超場を必ずしもプライマリー超場に移すとは限らず、それはテンソル算法における Q 変換と整合することで解決した。しかし、超共形不変な F-type および D-type 作用を構成するためには、多重項の S, K_a 変換の不変性が望まれる。そのようなスピノル微分 $\mathcal{D}_\alpha{}^{(\boldsymbol{u})}$ はゲージ固定における compensator と似た初項が0にならない compensating 多重項 $\boldsymbol{u}$ の導入によって構成することができる [30]。このスピノル微分には KU の主張したような特別な制限は存在せず、どのような超共形多重項にも自由に作用することができる。このスピノル微分を「$\boldsymbol{u}$-associated スピノル微分」と呼ぶ。このような微分は以下で説明するようにベクトル微分に対しても構成することができ、それを「$\boldsymbol{u}$-associated ベクトル微分」と呼ぶ。

この $\boldsymbol{u}$-associated 微分の構成について説明したのち、共形超空間形式においてこの微分に対応するものを構成する。そしてその微分に対して共形ウェイトを $(\Delta, w) = (2, 0)$ に取った時、Butter [36] の構成した “compensated derivatives” に対応することを示す。

まず、共形ウェイトが (w_0, n_0) で、ローレンツ添字を持たない超共形多重項 $\boldsymbol{u}$ を考える。その成分場を

$$\boldsymbol{u} = [\,\mathcal{C}_u, \mathcal{Z}_u, \mathcal{H}_u, \mathcal{K}_u, \mathcal{B}_{ua}, \Lambda_u, \mathcal{D}_u\,] \tag{5.41}$$

と書く。この超共形多重項の初項 $\mathcal{C}_u$ が 0 でないと仮定すると、次のスピノル場を導入することができる：

$$\lambda^S := \frac{i\mathcal{Z}_u}{(w_0+n_0)\mathcal{C}_u}. \tag{5.42}$$

ここで、このスピノル場は S 変換で非線形に変換する $\delta_S(\zeta)\lambda^S = \zeta$。これらを用いて $\boldsymbol{u}$-associated スピノル微分 $\mathcal{D}_\alpha{}^{(\boldsymbol{u})}$ を

$$\mathcal{D}_\alpha{}^{(\boldsymbol{u})}\mathcal{V}_\Gamma = \left[\!\!\left[\mathcal{Z}_{\alpha\Gamma} + i(w+n)\lambda_\alpha{}^S\mathcal{C}_\Gamma + (\sigma_{ab})_\alpha{}^\beta\lambda_\beta{}^S(\Sigma^{ab}\mathcal{C})_\Gamma\right]\!\!\right] \tag{5.43}$$

で定義する。ここで w と n はそれぞれ $\mathcal{C}_\Gamma$ の共形ウェイトである。$\mathcal{Z}_\Gamma$ の S 変換は $\delta_S(\zeta)\mathcal{Z}_\Gamma = -i(w+n)\zeta\mathcal{C}_\Gamma - \sigma_{ab}\zeta\,(\Sigma^{ab}\mathcal{C})_\Gamma$, であるので、(5.43) 式の右辺の括弧の中は S 不変になっていて、従って右辺は超共形多重項 $\mathcal{D}_\alpha{}^{(\boldsymbol{u})}\mathcal{V}_\Gamma$ を定義している。ここで、上記のスピノル微分のエルミート共役 $\bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha(\boldsymbol{u})}$ は $\bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha(\boldsymbol{u})}\mathcal{V}_\Gamma = (\mathcal{D}^{\alpha(\boldsymbol{u})}\mathcal{V}_\Gamma^*)^*$ で与えられる。

同様に、 $\boldsymbol{u}$-associated ベクトル微分も同様に構成することができる。ベクトル場 $V_a{}^K$ およびスピノル場 χ^S を

$$V_a{}^K := \frac{1}{4w_0}\left(\frac{D_a\mathcal{C}_u}{\mathcal{C}_u} + \frac{D_a\mathcal{C}_u{}^*}{\mathcal{C}_u{}^*}\right), \qquad \chi^S := \frac{1}{2w_0}i\gamma_5\left(\frac{\mathcal{Z}_u}{\mathcal{C}_u} + \frac{\mathcal{Z}_u{}^*}{\mathcal{C}_u{}^*}\right) \tag{5.44}$$

と導入する。このとき、$V_a{}^K$ および χ^S はそれぞれ K_a および S 変換でシフトする：$\delta_K(\xi^K)V_a{}^K = \xi_a^K$, $\delta_S(\zeta)\chi^S = \zeta$。また、$V_a{}^K$ の S 変換はスピノル場 χ^S を導く：$\delta_S(\zeta)V_a{}^K = \frac{-1}{4}i\bar\zeta\gamma_a\chi^S$。これらの場を用いると、(4.41) 式で定義した超共形共変ベクトル微分 $D_a\mathcal{C}_\Gamma$ から S 変換不変な $\boldsymbol{u}$-associated ベクトル微分を

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_a{}^{(\boldsymbol{u})}\mathcal{V}_\Gamma = \Big[\!\!\Big[& D_a\mathcal{C}_\Gamma - 2wV_a{}^K\mathcal{C}_\Gamma + 2V^{bK}(\Sigma_{ab}\mathcal{C})_\Gamma - \frac{1}{2}\bar\chi^S\gamma_a\gamma_5\mathcal{Z}_\Gamma \\ & + \frac{1}{4}i(\bar\chi^S\gamma_5\gamma^b\chi^S)\big(\eta_{ab}n\mathcal{C}_\Gamma - i((*\Sigma)_{ab}\mathcal{C})_\Gamma\big)\Big]\!\!\Big]\end{aligned} \tag{5.45}$$

によって定義できる。ここで、 $\mathcal{D}_a{}^{(\boldsymbol{u})}\mathcal{V}_\Gamma$ は超共形多重項である。

この $\boldsymbol{u}$-associated 微分の共形超空間形式での表式を上で得られた対応を用いて得ることができる。まず、 $\boldsymbol{u}$ に対応するプライマリー超場 X_u を導入する：

$$\boldsymbol{u} \quad \leftrightarrow \quad X_u. \tag{5.46}$$

ここで、X_u は共形ウェイト $(\Delta_0, w_0) = (w_0, \frac{2}{3}n_0)$ を持つとする。共形ウェイトの対応と、超共形多重項の対応 (5.24) 式より、スピノル場 λ^S が共形超空間形式で

$$\lambda_\alpha{}^S \quad \leftrightarrow \quad \frac{2}{(2\Delta_0+3w_0)X_u|}\nabla_\alpha X_u| \tag{5.47}$$

と表されることがわかる。そして (5.43) の $\mathcal{D}_\alpha{}^{(\boldsymbol{u})}\mathcal{V}_\Gamma$ に対して超共形多重項の対応 (5.24) を用いることで、u-associated スピノル微分の共形超空間形式での表式が

$$\mathcal{D}_\alpha{}^{(\boldsymbol{u})}\mathcal{V}_\Gamma \quad \leftrightarrow \quad -i\Big(\nabla_\alpha + \frac{1}{(2\Delta_0+3w_0)X_u}(\nabla^\beta X_u)\{S_\beta, Q_\alpha\}\Big)\Phi_\Gamma \tag{5.48}$$

となることが導かれる。これは点付きスピノル微分についても同じことが言える。プライマリー超場 X_u が実超場で共形ウェイトが $(\Delta_0, w_0) = (2, 0)$ のとき、(5.48) 式の右辺のスピノル微分は文献 [36] で導入された compensated スピノル微分を再現する。従って、(5.48) 式は compensated スピノル微分の X_u を任意の共形ウェイトにした場合の一般化である。

同様に、$\boldsymbol{u}$-associated ベクトル微分の超空間での表式を次のように得ることができる。そのために、実超場 Y_u を

$$Y_u = \log X_u + \log \bar{X}_u \tag{5.49}$$

で定義する[*1] 。成分場の対応 (5.24) 式を用いることで、$\boldsymbol{u}$-associated ベクトル微分を構成するためのベクトル場 $V_a{}^K$ およびスピノル場 χ^S を

$$V_a{}^K \;\leftrightarrow\; \frac{1}{4\Delta_0}\nabla_a Y_u|, \qquad \chi^S \;\leftrightarrow\; \frac{1}{2\Delta_0} i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\nabla_\alpha Y_u \\ +i\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}} Y_u \end{pmatrix} | \tag{5.50}$$

と共形超空間形式へ対応させることができる。従って、$\boldsymbol{u}$-associated ベクトル微分の共形超空間形式での表式は (5.45) 式を共形超空間形式へ対応させることで

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_a{}^{(\boldsymbol{u})}\mathcal{V}_\Gamma \quad \leftrightarrow \quad & \nabla_a\Phi_\Gamma - \frac{1}{2\Delta_0}(\nabla_a Y_u)D\Phi_\Gamma - \frac{1}{2\Delta_0}(\nabla^b Y_u)M_{ab}\Phi_\Gamma \\
& + \frac{1}{4\Delta_0}\begin{pmatrix} \nabla^\alpha Y_u & \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} Y_u \end{pmatrix} i \begin{pmatrix} 0 & (\sigma_a)_{\alpha\dot{\beta}} \\ (\bar{\sigma}_a)^{\dot{\alpha}\beta} & 0 \end{pmatrix} i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\nabla_\beta\Phi_\Gamma \\ +i\bar{\nabla}^{\dot{\beta}}\Phi_\Gamma \end{pmatrix} \\
& + \frac{1}{8\Delta_0}\begin{pmatrix} \nabla^\alpha Y_u & \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} Y_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} i \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^b)_{\alpha\dot{\beta}} \\ (\bar{\sigma}^b)^{\dot{\alpha}\beta} & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2\Delta_0}\begin{pmatrix} \nabla_\beta Y_u \\ \bar{\nabla}^{\dot{\beta}} Y_u \end{pmatrix} \\
& \times \left(-\frac{3i}{2}\eta_{ab}A + \frac{1}{2}(-i\varepsilon_{abcd})(-M^{cd})\right)\Phi_\Gamma
\end{aligned} \tag{5.51}$$

となることがわかる。このベクトル微分において、とくに X_u をプライマリー実超場 X に取り、共形ウェイトを $(\Delta_0, w_0) = (2, 0)$ とする。この時、文献 [36] によって構成された compensated ベクトル微分で、パラメータを $\lambda = 1$ に取ったものに対応することがわかる。ここで、$Y_u \to 2\log X$ という対応に注意する。

[*1] 厳密に言うと、$\Delta_0 = w_0 = 0$ でない限り、Y_u は (4.84) 式で定義されるような共変な超場にはなっていない。なぜなら、$\log X_u$ は D, A 変換で非線形に変換するからである $DY_u = \Delta_0$, $AY_u = iw_0$. しかし、Y_u に対する共変微分は次のように X_u を通じて $\nabla_A Y_u = \nabla_A X_u/X_u + \nabla_A \bar{X}_u/\bar{X}_u$ と定義できる。$\nabla_A Y_u$ は ∇_A だけの共形ウェイトを持った共変な超場である.

5.5　ポアンカレ超重力理論を得るための超共形対称性のゲージ固定

ここまでで共形超重力理論において超重力理論の作用を構成するために必要な諸量の対応を確かめた。共形超重力理論を構成するための超共形代数は、ポアンカレ超重力理論を得るために必要な超ポアンカレ代数よりもより多くの演算子 D, A, S, K_a を含んでいる。従って、ポアンカレ超重力理論を得るためには、これらのゲージ対称性をゲージ固定する必要がある。ここでは、テンソル算法でも共形超空間形式でもその定式化が明らかにされている物質場が結合した共形超重力理論でそのゲージ固定の対応を調べる。YM 場も結合した共形超重力理論のゲージ固定は第 6 章において共形超空間形式で YM 場を導入した後に議論する。

5.5.1　共形超空間形式におけるゲージ固定

まず、物質場を記述する超場を導入する。物質超場を Φ^i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ をプライマリーカイラル超場とする: $\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}}\Phi^i = 0$。そして、物質超場の共形ウェイトは $(\Delta, w) = (0, 0)$ であるとする。第 4.3 で行ったように、物質場が結合した超重力理論は共形超空間形式で次のように書かれる：

$$S = -3\int d^4xd^4\theta\, E\,\Phi^{\mathrm{c}}\bar{\Phi}^{\mathrm{c}}e^{-K/3} + \left(\int d^4xd^2\theta\,\mathcal{E}\,(\Phi^{\mathrm{c}})^3W + \mathrm{h.c.}\right), \tag{5.52}$$

ここで、ケーラー・ポテンシャル $K = K(\Phi^i, \bar{\Phi}^{i*})$ は、物質超場の実関数であり、スーパーポテンシャル $W = W(\Phi^i)$ は物質超場を複素数と見たときの正則関数である。作用の第 1 項 (D-type 作用) について、作用の超共形不変性はカイラル compensator 超場 Φ^{c} がプライマリーであり共形ウェイト $(\Delta, w) = (1, 2/3)$ を持つことを要請する。この要請の元で作用の第 2 項 (F-type 作用) の compensator 依存性が F-type 作用の超共形不変性より上記のように定まる。ここでスーパーポテンシャルが 0 でない場合、compensator Φ^{c} を次のように再定義しておくと便利である*2 ：

$$\Phi^{\mathrm{c}} \;\to\; \Phi^0 = \Phi^{\mathrm{c}}W^{1/3}. \tag{5.53}$$

*2 ここで、(5.53) 式による再定義はスーパーポテンシャルが 0 でない $W \neq 0$ ときにのみである。$W = 0$ の場合は、有用なゲージ固定条件は第 4.3 で言及した $\Phi^{\mathrm{c}} = e^{K/6}$ (および $B_M = 0$) である [34]。

ここで、新たな chiral compensator Φ^0 は元の Φ^c と同じ共形ウェイトを持つ $(\Delta, w) = (1, 2/3)$。Φ^0 を用いて作用を書くと

$$S = -3\int d^4xd^4\theta\, E\, \Phi^0\bar{\Phi}^0 e^{-G/3} + \left(\int d^4xd^2\theta\, \mathcal{E}\, (\Phi^0)^3 + \mathrm{h.c.}\right) \tag{5.54}$$

となる。ここで

$$G = K + \ln|W|^2 \tag{5.55}$$

である。Φ^0 および G を用いる長所はのちに YM 場を導入した時に具体的に述べるが、Φ^0 と G は共に内部対称性のもとで不変であることである。一方で、Φ^c および K はケーラー変換の不定性があるため一般には内部対称性の元で不変ではない。この Φ^0 および G の不変性によって内部対称性の存在に関わらずゲージ固定を簡潔に表すことができる。

いま、ポアンカレ超重力理論を得るための超共形対称性のゲージ固定の対応について論ずる。テンソル算法では標準的な EH 項および RS 項、そして実数のグラヴィティーノの質量パラメータを与えるゲージ固定が (4.52) 式で与えられる [30]。このゲージ固定に対応する共形超空間形式での表式を求める。対応するゲージ固定は以下のものである：

$$D,\ A\,\text{ゲージ：}\ \Phi^0 = \bar{\Phi}^0 = e^{G/6}, \qquad K_A\text{ゲージ：}\ B_M = 0. \tag{5.56}$$

ここで、第2式は D ゲージ場 B_M に対する K_A 変換 $\delta_G(\xi(K)^A K_A)B_M = -2E_{MA}\xi(K)^A$ で得られる。一方で、第1式は次の理由から一見奇妙である：プライマリーカイラル超場 Φ^0 を $4+4$ の実自由度 ($2+2$ の複素自由度) しか持たないことに対して、$8+8$ の実自由度を持つ実プラリマリー超場 $e^{G/6}$ に固定しているからである。しかし、この奇妙さはゲージ条件 (5.56) 式は共形超空間形式では第 4.3 章の (4.62) 式で言及したようにゲージ変換は実超場パラメータで行われていることに注意すると解決する。すなわち、実超場パラメータを用いた有限の D および A 変換によって、カイラル compensator は $\Phi^0 \mapsto e^{\xi(D)+\frac{2i}{3}\xi(A)}\Phi^0$ と変換される。ここで、$\xi(D) = G/6 - (1/2)\ln(\Phi^0\bar{\Phi}^0)$ および $\xi(A) = (3/4i)\ln(\bar{\Phi}^0/\Phi^0)$ と共に実超場に取れば Φ^0 を $e^{G/6}$ に固定することができる。

以下でこのゲージ固定が実際に (4.52) 式に対応することを示すために、ゲージ条件 (5.56) 式は他の超場についても新たな条件を与えることを明らかにしておく。ここではカイラル超場と A ゲージ超場 A_M について考える。一般に (ゲージ固定する前の) 共形超重力理論において共形ウェイトが (Δ, w) であり、ローレンツ添字を持たないプライマリー超場 $\Phi^{(\Delta,w)}$ に対する共変微分 ∇_A の作用を (4.65) 式を用いて次のように分解できる：

$$\nabla_A\Phi^{(\Delta,w)} = \mathcal{D}^{\mathrm{P}}_A\Phi^{(\Delta,w)} - \big(\Delta B_A + iwA_A\big)\Phi^{(\Delta,w)}, \tag{5.57}$$

$$\nabla_A \nabla_\alpha \Phi^{(\Delta,w)} = \mathcal{D}^{\rm P}_A \nabla_\alpha \Phi^{(\Delta,w)} - \Big((\Delta + \frac{1}{2}) B_A + i(w-1) A_A \Big) \nabla_\alpha \Phi^{(\Delta,w)} + (2\Delta + 3w) f_{A\alpha} \Phi^{(\Delta,w)}. \tag{5.58}$$

この式について説明する。まず、最後の項 $(2\Delta{+}3w) f_{A\alpha}\Phi^{(\Delta,w)}$ は反交換関係 $-f_A{}^\beta\{S_\beta, \nabla_\alpha\}\Phi^{(\Delta,w)}$ を計算したものである。次に $B = b, \dot{\beta}$ に対して $K_B \nabla_\alpha \Phi^{(\Delta,w)} = [K_B, \nabla_\alpha]\Phi^{(\Delta,w)} = 0$ を用いた。これは $\Phi^{(\Delta,w)}$ がプライマリー超場であることから成立する。そして、微分 $\mathcal{D}^{\rm P}_A$ は超ポアンカレ $(P_A{,}M_{ab})$ 共変微分

$$\mathcal{D}^{\rm P}_A = E_A{}^M \partial_M - \frac{1}{2}\phi_A{}^{bc} M_{cb}, \tag{5.59}$$

である。この共変微分は文献 [34] において導入された $\mathcal{D}_A$ とは異なるものであることに注意する (第 4.3 章を参照)。ゲージ条件 (5.56) 式 と (5.57) 式 そして (5.58) 式を用いることで、カイラル compensator 超場 Φ^0 の高次項に対して次の条件が課されることがわかる：

$$\Phi^0\big| = e^{G/6}\big|, \tag{5.60}$$

$$\nabla_\alpha \Phi^0\big| = \Big(\mathcal{D}^{\rm P}_\alpha - \frac{2}{3} i A_\alpha\Big) e^{G/6}\Big|, \tag{5.61}$$

$$\nabla^2 \Phi^0\big| = \Big(\mathcal{D}^{{\rm P}\alpha} + \frac{1}{3} i A^\alpha\Big)\Big(\mathcal{D}^{\rm P}_\alpha - \frac{2}{3} i A_\alpha\Big) e^{G/6}\Big| - 4 f_\alpha{}^\alpha e^{G/6}\Big|. \tag{5.62}$$

ここで、 $\nabla_\alpha \Phi^0 \neq \nabla_\alpha e^{G/6}$ であり、かつ $\mathcal{D}^{\rm P}_\alpha \Phi^0 = \mathcal{D}^{\rm P}_\alpha e^{G/6}$ であることに注意する。なぜなら、ゲージ条件 $\Phi^0 = e^{G/6}$ によって M_{ab} 対称性は保たれるが、D および A 対称性は破れるからである。

(5.61) 式および (5.62) において残った A ゲージ超場 A_α はカイラル compensator のカイラル条件のゲージ固定の後の表式から定まっていることが次のようにしてわかる。(5.57) 式をゲージ固定前のカイラル compensator のカイラル条件 $\bar{\nabla}_{\dot\alpha}\Phi^0 = 0$ に適用し、ゲージ条件 (5.56) 式を用いることで

$$0 = \bar{\nabla}_{\dot\alpha}\Phi^0 = \bar{\mathcal{D}}^{\rm P}_{\dot\alpha}\Phi^0 - \frac{2}{3} i A_{\dot\alpha}\Phi^0 \quad \to \quad A_{\dot\alpha} = -\frac{i}{4} G_{j^*} \bar{\mathcal{D}}^{\rm P}_{\dot\alpha} \bar{\Phi}^{j^*} \tag{5.63}$$

を得る。ここで、$G_i = \partial G/\partial \Phi^i$ および $G_{i^*} = \partial G/\partial \bar{\Phi}^{i^*}$ である。同様に、カイラル条件 $\nabla_\alpha \bar{\Phi}^0 = 0$ から A_α が

$$A_\alpha = \frac{i}{4} G_j \mathcal{D}^{\rm P}_\alpha \Phi^j \tag{5.64}$$

と定まる。これらを用いると、 (5.61) 式と (5.62) 式は次のように物質超場を用いて

$$\nabla_\alpha \Phi^0\big| = \frac{1}{3} e^{G/6} G_i \mathcal{D}^{\rm P}_\alpha \Phi^i\big|, \tag{5.65}$$

$$\nabla^2\Phi^0\big| = \frac{1}{3}e^{G/6}\Big(G_i\mathcal{D}^{\mathrm{P}2}\Phi^i + \big(G_{ij}+\frac{1}{12}G_iG_j\big)(\mathcal{D}^{\mathrm{P}\alpha}\Phi^j)(\mathcal{D}^{\mathrm{P}}_\alpha\Phi^i) - 24\bar{R}\Big)\Big| \tag{5.66}$$

と書き直すことができる。ここで、(4.96) 式の関係 $f_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\alpha\beta}\bar{R}$ を用いた。この関係は曲率への拘束条件とゲージ条件 $B_M = 0$ から従う。(5.66) 式はカイラル compensator の $\nabla^2\Phi^0|$ 成分と S ゲージ超場 $f_\alpha{}^\beta$ でゲージ固定後に決まらずに残った補助場部分 $\bar{R}$ を関係付ける式である。

ここで、我々は共形超重力理論から出発していた。特にテンソル算法との対応を調べる上では、超場の $\theta=\bar{\theta}=0$ 射影として得られる成分場は共形超重力理論の共変微分 (∇) を用いて与えられるべきで、ポアンカレ超重力理論の共変微分 $(\mathcal{D}^{\mathrm{P}})$ で与えられるべきではないことに注意しておく。ただし、物質超場については共形ウェイトが $(\Delta, w) = (0,0)$ であるためこれらの1階微分の結果 (成分場はスピノル場) は一致する。しかし、2階微分 (成分場は F 成分) は異なる結果を与える。テンソル算法との比較のため、上記の結果を超共形共変微分 ∇ を用いて書き直しておく。(5.57) 式、(5.58) 式そして (5.64) 式より、物質場に対する超共形および超ポアンカレ共変微分の関係はおよび $\mathcal{D}^{\mathrm{P}}_\alpha\Phi^i = \nabla_\alpha\Phi^i$ と

$$\mathcal{D}^{\mathrm{P}2}\Phi^i = \nabla^2\Phi^i - iA^\alpha\mathcal{D}^{\mathrm{P}}_\alpha\Phi^i = \nabla^2\Phi^i + \frac{1}{4}G_j\nabla^\alpha\Phi^j\nabla_\alpha\Phi^i \tag{5.67}$$

となる。これより、(5.65) 式および (5.66) 式は超共形共変微分 ∇ を用いて

$$A_\alpha = \frac{i}{4}G_i\nabla_\alpha\Phi^i \quad A^{\dot{\alpha}} = -\frac{i}{4}G_{i^*}\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}}\bar{\Phi}^{i^*}, \tag{5.68}$$

$$\nabla_\alpha\Phi^0\big| = \frac{1}{3}e^{G/6}G_i\nabla_\alpha\Phi^i\big|, \tag{5.69}$$

$$\nabla^2\Phi^0\big| = \frac{1}{3}e^{G/6}\Big(G_i\nabla^2\Phi^i + \big(G_{ij}+\frac{1}{3}G_iG_j\big)\nabla^\alpha\Phi^j\nabla_\alpha\Phi^i - 24\bar{R}\Big)\Big| \tag{5.70}$$

と書き直される。

ここまでで、A ゲージ超場のスピノル成分 $A_{\underline{\alpha}}$ について議論してきた。カイラル compensator のカイラル条件によって、A ゲージ超場のベクトル成分 A_a も固定されることを次のように示す。カイラル条件および反交換関係 $\{\nabla_\alpha, \bar{\nabla}^{\dot{\beta}}\} = -2i\nabla_\alpha{}^{\dot{\beta}}$ から

$$\bar{\nabla}^{\dot{\beta}}\nabla_\alpha\Phi^0 = -2i\nabla_\alpha{}^{\dot{\beta}}\Phi^0 \tag{5.71}$$

が従う。ゲージ固定の後、右辺のベクトル微分は $\nabla_\alpha{}^{\dot{\beta}}\Phi^0 = \mathcal{D}^{\mathrm{P}\dot{\beta}}_\alpha\Phi^0 - \frac{2}{3}iA_\alpha{}^{\dot{\beta}}\Phi^0$ となる。これは A ゲージ超場のベクトル部分を固定するために用いられる。(5.71) 式の左辺を (5.58) 式を用いて展開し、ゲージ条件 (5.56) 式および (5.65) 式を用いることで

$$\begin{aligned} A_\alpha{}^{\dot{\beta}} &= -\frac{i}{4}\mathcal{D}^{\mathrm{P}\dot{\beta}}_\alpha G - \frac{1}{4}e^{-G/6}\Big(\bar{\mathcal{D}}^{\mathrm{P}\dot{\beta}} + \frac{1}{3}iA^{\dot{\beta}}\Big)e^{G/6}G_i\mathcal{D}^{\mathrm{P}}_\alpha\Phi^i - 3f^{\dot{\beta}}{}_\alpha \\ &= \frac{i}{4}(G_i\nabla_\alpha{}^{\dot{\beta}}\Phi^i - G_{i^*}\nabla_\alpha{}^{\dot{\beta}}\bar{\Phi}^{i^*}) + \frac{1}{4}G_{ij^*}\nabla_\alpha\Phi^i\nabla^{\dot{\beta}}\bar{\Phi}^{j^*} - \frac{3}{2}G_\alpha{}^{\dot{\beta}} \end{aligned} \tag{5.72}$$

を得る。ここで第 2 行を得る際に、$\mathcal{D}^{\rm P}_\alpha \Phi^i = \nabla_\alpha \Phi^i$ および、ゲージ条件 $B_M = 0$ と曲率への拘束条件から得られる $f_{\alpha\dot\beta} = -G_{\alpha\dot\beta}/2$ を用いた。また、物質場に対する $\mathcal{D}^{\rm P}$ の 2 階スピノル微分 $\bar{\mathcal{D}}^{{\rm P}\dot\beta}\mathcal{D}^{\rm P}_\alpha\Phi^i$ は次のように 1 階のベクトル微分に変形できる：

$$\bar{\mathcal{D}}^{{\rm P}\dot\beta}\mathcal{D}^{\rm P}_\alpha\Phi^i + iA^{\dot\beta}\mathcal{D}^{\rm P}_\alpha\Phi^i = \bar\nabla^{\dot\beta}\nabla_\alpha\Phi^i = -2i\nabla_\alpha{}^{\dot\beta}\Phi^i = -2i\mathcal{D}^{\rm P}{}_\alpha{}^{\dot\beta}\Phi^i. \tag{5.73}$$

これは (5.58) 式とゲージ条件から従う。(5.72) 式は $G_\alpha{}^{\dot\beta}$ を補助場となった A ゲージ超場 A_a とを関係付ける式とみなすことができる。

5.5.2　テンソル算法との対応

ここまで共形超空間形式におけるゲージ固定条件について議論してきた。ここでは、このゲージ固定条件のテンソル算法と共形超空間形式との対応を調べる。まず、ケーラー・ポテンシャル、スーパーポテンシャルそしてカイラル compensator の対応は

テンソル算法	共形超空間形式
$S_i,\ \ \Sigma_{\rm c},\ \ \Sigma_0$	$\Phi^i,\ \ \Phi^{\rm c},\ \ \Phi^0$
$\tilde\phi,\ \ \phi$	$3e^{-K/3},\ \ 3e^{-G/3}$
$g,\ \ \mathcal{G}$	$W,\ \ -G$

(5.74)

である。ここでテンソル算法における記号は第 4.2 章で与えたものである。

いま、共形超空間形式におけるゲージ条件 (5.56) 式 がテンソル算法における D, A, S, K_a ゲージ条件 (4.52) 式に対応することを示す。第 5.3 章で示したように、テンソル算法のカイラル compensator 多重項 Σ_0 と共形超空間形式におけるカイラル compensator 超場 Φ^0 の対応は

$$\Sigma_0 = [\,z_0,\ \mathcal{P}_{\rm R}\chi_0,\ h_0\,] \quad\leftrightarrow\quad \big[\,\Phi^0|,\ \ \nabla_\alpha\Phi^0|,\ \ -\tfrac{1}{4}\nabla^2\Phi^0|\,\big]. \tag{5.75}$$

である。そして、ゲージ条件 (5.56) 式もしくはその最低次の式 (5.60) 式は、カイラル compensator の最低次のゲージ条件の対応を直接与える：

$$z_0 = \sqrt{3}\phi^{-\frac{1}{2}}(z,z^*) = e^{-\mathcal{G}/6} \quad\leftrightarrow\quad \Phi^0\big| = e^{G/6}\big|. \tag{5.76}$$

次にスピノル成分 $\nabla_\alpha\Phi^0|$ について考える。テンソル算法における S ゲージ条件と共形超空間形式における (5.69) 式は互いに一致する：

$$2\chi_{\rm R0} = -2z_0\phi^{-1}\phi^i\chi_{{\rm R}i} = -\frac{1}{3}e^{-\mathcal{G}/6}\mathcal{G}^i(2\chi_{{\rm R}i}) \quad\leftrightarrow\quad \nabla_\alpha\Phi^0\big| = \frac{1}{3}e^{G/6}G_i\nabla_\alpha\Phi^i\big|. \tag{5.77}$$

K_a ゲージ条件 $b_m = 0$ の対応は、ゲージ場の対応より従う。ここで、超空間における S ゲージ条件 $B_\alpha = 0$ は Φ^0 のスピノル成分のゲージ条件 (5.69) 式を与え、そして上記の対応 (5.77) 式を導いていることに注意する。また、 F 成分の自由度についても Σ_0 の h_0 がゲージ条件で固定されずに残っていることと、Φ^0 の F 成分が (5.70) 式にあるようにゲージ固定後にやはり固定されずに残っている $\bar{R}$ と関連づいていることから対応がある。

共形超空間形式においてゲージ条件をおくことの長所は 2 つある。一つはポアンカレ超空間形式を直接簡単に得ることができるという点である。もう一つは、ポアンカレ超重力理論の Q 変換則を直ちに読み取れるということである。すなわち、ポアンカレ超重力理論の共変スピノル微分は超空間形式では単に $\mathcal{D}^{\mathrm{P}}_\alpha$ および $\bar{\mathcal{D}}^{\mathrm{P}}_{\dot{\alpha}}$ である。

一方で、テンソル算法では、ポアンカレ超重力理論の Q 変換は D, A, S, K_a ゲージ条件を守るように共形超重力理論の Q 変形することによって得られる。この変形は文献 [12] において複雑で非自明な場に依存したパラメータをによる A, S, K_a 変換を (4.53) 式のように Q 変換に加えることでできることが示された。

最後に、このゲージ固定後のポアンカレ超重力理論における Q 変換則の対応を示す。特に、超空間形式の $\mathcal{D}^{\mathrm{P}}_{\underline{\alpha}}$ がテンソル算法における変形された Q 変換を再現することを導く。

まず、超ポアンカレ共変スピノル微分 (5.59) 式はゲージ固定後の超共形スピノル微分と $\mathcal{D}^{\mathrm{P}}_{\underline{\alpha}} = \nabla_{\underline{\alpha}} + A_{\underline{\alpha}} A + f_{\underline{\alpha}}{}^A K_A$ で関連している。従って、$\eta^{\underline{\alpha}} \mathcal{D}^{\mathrm{P}}_{\underline{\alpha}}$ で定義されるポアンカレ超空間での共変な場に対する Q 変換は共形超空間での Q 変換と A, K_A 変換との次のような線形結合でかける：

$$
\begin{aligned}
\eta^{\underline{\alpha}} \mathcal{D}^{\mathrm{P}}_{\underline{\alpha}} &= \eta^{\underline{\alpha}} \nabla_{\underline{\alpha}} + \xi(A)'(\eta) A + \xi(K)'(\eta)^{\underline{\alpha}} S_{\underline{\alpha}} + \xi(K)'(\eta)^a K_a, \\
&\xi(A)'(\eta) \ = \eta^\alpha A_\alpha + \bar{\eta}_{\dot{\alpha}} A^{\dot{\alpha}} = \frac{i}{4} G_j \eta^\alpha \mathcal{D}^{\mathrm{P}}_\alpha \Phi^j - \frac{i}{4} G_{j*} \bar{\eta}_{\dot{\alpha}} \bar{\mathcal{D}}^{\mathrm{P}\,\dot{\alpha}} \bar{\Phi}^{j*}, \\
&\xi(K)'(\eta)_\alpha = \eta^\beta f_{\beta\alpha} + \bar{\eta}_{\dot{\beta}} f^{\dot{\beta}}{}_\alpha = \eta_\alpha \bar{R} + \frac{1}{2} G_\alpha{}^{\dot{\beta}} \bar{\eta}_{\dot{\beta}}, \\
&\xi(K)'(\eta)^{\dot{\alpha}} = \eta^\beta f_\beta{}^{\dot{\alpha}} + \bar{\eta}_{\dot{\beta}} f^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} = -\bar{\eta}^{\dot{\alpha}} R - \frac{1}{2} \eta^\beta G_\beta{}^{\dot{\alpha}}, \\
&\xi(K)'(\eta)^a = \eta^\beta f_\beta{}^a + \bar{\eta}_{\dot{\beta}} f^{\dot{\beta} a}.
\end{aligned}
\tag{5.78}
$$

より一般に、ゲージ固定後のポアンカレ超空間における Q 変換は共形超空間における Q 変換を用いて

$$
\delta_G(\eta^{\underline{\alpha}} Q^{\mathrm{P}}_{\underline{\alpha}}) = \delta_G(\eta^{\underline{\alpha}} Q_{\underline{\alpha}}) + \delta_G(\xi(A)'(\eta) A) + \delta_G(\xi(K)'(\eta)^B K_B) \tag{5.79}
$$

とかける。ここでパラメータは (5.78) 式のものと同じである。この Q 変換がテンソル算法におけるポアンカレ超重力理論の Q 変換 (4.53) 式と一致することを (5.78) 式および

(4.54) 式の変換パラメータの対応を確かめることで示す。まず、A 変換において超空間における変換パラメータは

$$\xi(A)'(\eta)\big| = \frac{3}{4}\left(\frac{i}{3}G_j(2\eta^\alpha)\big(\tfrac{1}{2}\nabla_\alpha\Phi^j\big) - \frac{i}{3}G_{j^*}(2\bar{\eta}_{\dot{\alpha}})\big(\tfrac{1}{2}\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}}\bar{\Phi}^{j^*}\big)\right)\Big| \tag{5.80}$$

である。変換パラメータの対応 (5.2) 式より $\frac{3}{4}\theta \leftrightarrow \xi(A)|$ および $\bar{\varepsilon} \leftrightarrow 2\begin{pmatrix}\eta^\alpha & \bar{\eta}_{\dot{\alpha}}\end{pmatrix}|$ であることを用いると、(5.80) 式はテンソル算法における (4.54) 式の $\theta(\varepsilon)$ に一致する。S 変換についても同様に、共形超空間形式におけるパラメータ $\xi(K)'(\eta)_\alpha$ の補助場 R, G_a を (5.70) 式および (5.72) 式で示された compensator の F 項 $\nabla^2\Phi^0|$ と A ゲージ超場 A_a を用いて書き直すと、

$$\begin{aligned}
\xi(K)'(\eta)_\alpha\big| &= \Big(\eta_\alpha\bar{R} + \frac{1}{2}\bar{\eta}_{\dot{\beta}}G_\alpha{}^{\dot{\beta}}\Big)\Big| \\
&= \frac{-1}{2}\Bigg\{ -\frac{1}{2}\Big(\big(-\tfrac{1}{4}\nabla^2\Phi^0\big)\,e^{-G/6} - \frac{1}{3}\big(-\tfrac{1}{4}\nabla^2\Phi^i\big)\,G_i\Big)(2\eta_\alpha) \\
&\qquad + \frac{1}{3}\left(\Big(G_{ij} + \frac{1}{3}G_iG_j\Big)(2\eta^\gamma)\big(\tfrac{1}{2}\nabla_\gamma\Phi^j\big) + G_{ij^*}(2\bar{\eta}_{\dot{\beta}})\big(\tfrac{1}{2}\bar{\nabla}^{\dot{\beta}}\bar{\Phi}^{j^*}\big)\right)\big(\tfrac{1}{2}\nabla_\alpha\Phi^i\big) \\
&\qquad + \frac{1}{12}e_c{}^m\left(G_i\nabla_m\Phi^i - G_{i^*}\nabla_m\bar{\Phi}^{i^*}\right)(i\sigma^c_{\alpha\dot{\beta}}(2\bar{\eta}^{\dot{\beta}})) + \frac{i}{4}e_c{}^m\big(\tfrac{4}{3}A_m\big)(i\sigma^c_{\alpha\dot{\beta}}(2\bar{\eta}^{\dot{\beta}}))\Bigg\}\Bigg|
\end{aligned} \tag{5.81}$$

となる。これはテンソル算法における (4.54) 式の $\zeta_{\mathrm{R}}(\varepsilon)$ とやはり対応することがわかる。ここで、パラメータの対応 (5.2) 式とゲージ場の対応 (5.3) 式、特に $\bar{\zeta} \leftrightarrow -2(\xi(K)^\alpha, \bar{\xi}(K)_{\dot{\alpha}})|$ および $\frac{3}{4}A_m \leftrightarrow A_m|$ を用いた。同じ議論がエルミート共役 $\xi(K)'(\eta)^{\dot{\alpha}}$ についても成立する。最後に、K_a 変換部分について考える。曲率への拘束条件とゲージ条件 $B_M = 0$ から従う (4.97) 式 $f_{\beta a} = -f_{a\beta}$ を用いると、

$$f_{\beta a}| = -e_a{}^m f_{m\beta}| + \frac{1}{2}e_a{}^m\psi_m{}^\alpha f_{\alpha\beta}| + \frac{1}{2}e_a{}^m\bar{\psi}_{m\dot{\alpha}}f^{\dot{\alpha}}{}_\beta| \tag{5.82}$$

が成立する。これを用いると、共形超空間形式における (5.78) 式の K 変換パラメータ $\xi(K)'(\eta)_a$ を

$$\begin{aligned}
(\eta^\beta f_{\beta a} + \bar{\eta}_{\dot{\beta}}f^{\dot{\beta}}{}_a)| = \frac{1}{4}\Big\{&e_a{}^m\Big((-2f_m{}^\beta)(2\eta_\beta) + (-2f_{m\dot{\beta}})(2\bar{\eta}^{\dot{\beta}})\Big) \\
&- e_a{}^m\psi_m{}^\alpha\big(-2\big(\eta^\beta f_{\beta\alpha} + \bar{\eta}_{\dot{\beta}}f^{\dot{\beta}}{}_\alpha\big)\big) \\
&- e_a{}^m\bar{\psi}_{m\dot{\alpha}}\big(-2\big(\eta^\beta f_\beta{}^{\dot{\alpha}} + \bar{\eta}_{\dot{\beta}}f^{\dot{\beta}\dot{\alpha}}\big)\big)\Big\}\Big|
\end{aligned} \tag{5.83}$$

と書き直すことができる。この右辺はテンソル算法における (4.54) 式の $\xi_a(\varepsilon)$ と対応する。ここで、上で示した S 変換パラメータの対応式とゲージ場の対応 (5.3) 式とを用いた。従って、テンソル算法と共形超空間形式それぞれにおける共形超重力理論の Q 変換とポアンカレ超重力理論の Q 変換の関係も対応していることが示された。

第6章　共形超空間におけるYang–Millsゲージ場と物質の結合

第 5 章までで、共形超重力理論におけるテンソル算法と共形超空間形式の等価性を具体的な対応を構成することで示してきた。しかし、ここまでの議論だけでは不満足な点が 2 つある。一つは、物質場のみが結合した超重力理論を扱ったが、物質同士の間に働く力を記述する YM ゲージ場の結合が含まれていなかった点である。この理由は、共形超空間ではカイラル compensator を用いた超重力理論の作用と YM ゲージ場の一般的な結合が先行研究で未だ行われていなかったからである。一方でテンソル算法では文献 [11,12,25] によって、ポアンカレ超空間形式では文献 [13,31] によってそれぞれなされている。本章ではまず共形超空間において YM ゲージ場の導入を行う。以下で見るように、スピノル微分の代数の簡潔さにより YM ゲージ場の共形超空間への導入は、重力を含まない超対称ゲージ理論の導入のように簡潔に行うことができる。

次に YM ゲージ場と物質場が結合した超重力理論の作用を構成し、標準的な EH 項を持つゲージ固定を 2 種類提示する。一つは第 5 章で用いた $G = K + \ln|W|^2$ を用いるゲージ固定で、YM ゲージ対称性を保つものである。もう一つは、単にケーラーポテンシャル K を用いるゲージ固定で、スーパーポテンシャルが 0 になる場合でも用いることができる。

後者のゲージ条件は YM ゲージ対称性不変でないため、ゲージ条件を守るように YM ゲージ変換を変形する必要がある。この YM ゲージ変換の変形まで考慮すると、後者のゲージ条件はポアンカレ超空間形式の一つである等長ケーラー超空間を導くことを示す。

6.1　共形超空間におけるYM ゲージ場の導入と物質場の結合

ここでは YM ゲージ場を共形超空間に導入する。YM ゲージ場は物質場の内部対称性として物質場に結合する。そのゲージ変換は物質場のケーラー・ポテンシャルで表されるケーラー計量を不変に保つ等長変換として記述され、一般には物質場に対して非線形な変換を与える。

ゲージ場の構成においては、重力を含まない超対称ゲージ理論で用いた方法を採用する。このアプローチでは共変微分は内部対称性についても共変である [17, 32]。

その後、標準的な EH 項と RS 項を持ったポアンカレ超重力理論を得るためのゲージ条件を 2 つ提示する。一つは、前章でも行ったスーパーポテンシャルが 0 にならない場合に使えるグラヴィティーノの質量パラメータが実になるゲージ条件である。もう一つはスーパーポテンシャルが 0 になる場合でも使えるが、一般にはグラヴィティーノの質量パラメータが複素数になるゲージ条件である。

まず、コンパクトリー群 $\mathscr{G}$ を内部対称性を記述する群とする。このリー群のリー代数の元を $X_{(a)}$ と書く。ここで、 $(a) = 1, 2, ..., \dim\mathscr{G}$ であり、$\dim\mathscr{G}$ はリー群 $\mathscr{G}$ の次元 (線形独立なリー代数の元の数) である。また、$X_{(a)}$ は反エルミートであるとする。これらの交換関係を

$$[X_{(a)}, X_{(b)}] = -f_{(a)(b)}{}^{(c)} X_{(c)} \tag{6.1}$$

と書く。ここで $f_{(a)(b)}{}^{(c)}$ はリー代数の構造定数である。時空の対称性と内部対称性は互いに独立であるので、超共形代数の演算子と内部対称性の演算子 $X_{(a)}$ は互いに交換する。

いま、この内部対称性に属する実ゲージ超場 $\mathcal{A}_M^{(a)}$ を導入する。以降は超共形対称性と内部対称性を同時に扱う。従って、$X_{\mathcal{A}}$ で超共形対称性の演算子 P_A, M_{ab}, D, A, K_A と内部対称性の演算子 $X_{(a)}$ を同時に表す。本章ではゲージ超場とゲージパラメータ超場を

$$\begin{aligned} h_M{}^{\mathcal{A}} X_{\mathcal{A}} &= E_M{}^A P_A + \frac{1}{2}\phi_M{}^{ba} M_{ab} + B_M D + A_M A + f_M{}^A K_A + \mathcal{A}_M^{(a)} X_{(a)}, \\ \xi^{\mathcal{A}} X_{\mathcal{A}} &= \xi^A P_A + \frac{1}{2}\xi(M)^{ba} M_{ab} + \xi(D) D + \xi(A) A + \xi(K)^A K_A + \xi^{(a)} X_{(a)} \end{aligned} \tag{6.2}$$

で表す。YM ゲージ場を導入した共形超空間形式では、P_A 変換の変形は、YM ゲージ場も含めて

$$\begin{aligned} \delta_G(\xi^A P_A) &= \mathcal{L}(\xi^A E_A{}^M) - \delta_G(\xi^B E_B{}^M h_M{}^{\mathcal{A}'} X_{\mathcal{A}'}), \\ \nabla_M &= \partial_M - \frac{1}{2}\phi_M{}^{ba} M_{ab} - B_M D - A_M A - f_M{}^A K_A - \mathcal{A}_M^{(a)} X_{(a)} \end{aligned} \tag{6.3}$$

で行う。ここで、YM ゲージ場を導入した場合も ξ^A は場に依存しないものとする。また、$X_{\mathcal{A}'}$ は P_A 以外の演算子 $M_{ab}, D, A, K_A, X_{(a)}$ を表す。ゲージ超場 $\mathcal{A}_M^{(a)}$ のゲージ変換則は以下のように与えられる：

$$\delta(\xi^{\mathcal{A}} X_{\mathcal{A}}) \mathcal{A}_M^{(a)} = \partial_M \xi^{(a)} + \mathcal{A}_M^{(b)} \xi^{(c)} f_{(c)(b)}{}^{(a)} + E_M{}^B \xi(P)^C \mathcal{F}_{CB}^{(a)}, \tag{6.4}$$

ここで、 $\mathcal{F}_{MN}^{(a)}$ は、内部対称性に属する曲率である：

$$\mathcal{F}_{MN}^{(a)} = \partial_M \mathcal{A}_N^{(a)} - \partial_N \mathcal{A}_M^{(a)} - \mathcal{A}_N^{(b)} \mathcal{A}_M^{(c)} f_{(c)(b)}{}^{(a)}. \tag{6.5}$$

重力を含まない超対称ゲージ理論や YM ゲージ場を含まない共形超空間形式と同じように、曲率に対してスピノル微分の代数が $\{\nabla_\alpha, \nabla_\beta\} = 0$, $\{\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}, \bar{\nabla}_{\dot{\beta}}\} = 0$, および $\{\nabla_\alpha, \bar{\nabla}_{\dot{\beta}}\} = -2i\nabla_{\alpha\dot{\beta}}$ となるように拘束条件をおく。特に内部対称性の曲率に対して $\mathcal{F}^{(a)}_{\alpha\beta} = \mathcal{F}^{(a)}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \mathcal{F}^{(a)}_{\alpha\dot{\beta}} = 0$ という拘束条件をおく。この拘束条件の元で、第 3.3 章および第 4.3 章で行ったようにビアンキ恒等式を解くと、曲率 $R_{\underline{\alpha}b}$ および R_{ab} が "ゲージーノ" 超場 $\mathcal{W}_{\underline{\alpha}}$ を用いて

$$R_{\alpha,\beta\dot{\gamma}} = -[\nabla_\alpha, \nabla_{\beta\dot{\gamma}}] = 2i\epsilon_{\alpha\beta}\mathcal{W}_{\dot{\gamma}}, \qquad R_{\dot{\alpha},\dot{\beta}\gamma} = -[\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}, \nabla_{\dot{\beta}\gamma}] = 2i\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\mathcal{W}_{\gamma}, \tag{6.6}$$

$$R_{\alpha\dot{\alpha},\beta\dot{\beta}} = -[\nabla_{\alpha\dot{\alpha}}, \nabla_{\beta\dot{\beta}}] = -\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\{\nabla_{(\alpha}, \mathcal{W}_{\beta)}\} - \epsilon_{\alpha\beta}\{\bar{\nabla}_{(\dot{\alpha}}, \mathcal{W}_{\dot{\beta})}\} \tag{6.7}$$

とかけることがわかる。ここで、 $\mathcal{W}_{\underline{\alpha}}$ は YM のゲージーノ超場 $\mathcal{W}^{(a)}_{\underline{\alpha}}$ を含む：

$$\mathcal{W}_\alpha = (\epsilon\sigma^{bc})^{\beta\gamma}W_{\alpha\beta\gamma}M_{cb} + \frac{1}{2}\nabla^\gamma W_{\gamma\alpha}{}^\beta S_\beta - \frac{1}{2}\nabla^{\gamma\dot{\beta}}W_{\gamma\alpha}{}^\beta K_{\beta\dot{\beta}} + \mathcal{W}^{(a)}_\alpha X_{(a)}, \tag{6.8}$$

$$\mathcal{W}^{\dot{\alpha}} = (\bar{\sigma}^{bc}\epsilon)^{\dot{\gamma}\dot{\beta}}W^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}\dot{\gamma}}M_{cb} - \frac{1}{2}\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}W^{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\bar{S}^{\dot{\beta}} - \frac{1}{2}\nabla^{\dot{\gamma}\beta}W_{\dot{\gamma}}{}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}K_{\beta\dot{\beta}} + \mathcal{W}^{(a)\dot{\alpha}}X_{(a)}. \tag{6.9}$$

(6.6) 式は、特に YM 部分において

$$\mathcal{F}^{(a)}_{\alpha,\beta\dot{\gamma}} = 2i\epsilon_{\alpha\beta}\mathcal{W}^{(a)}_{\dot{\gamma}}, \qquad \mathcal{F}^{(a)}_{\dot{\alpha},\gamma\dot{\beta}} = 2i\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\mathcal{W}^{(a)}_{\gamma}, \tag{6.10}$$

$$\mathcal{F}^{(a)}_{\alpha\dot{\alpha},\beta\dot{\beta}} = -\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\nabla_{(\alpha}\mathcal{W}^{(a)}_{\beta)} - \epsilon_{\alpha\beta}\bar{\nabla}_{(\dot{\alpha}}\mathcal{W}^{(a)}_{\dot{\beta})} \tag{6.11}$$

であることを意味する。ここで、ゲージーノ超場 $\mathcal{W}^{(a)}_{\underline{\alpha}}$ はビアンキおよびヤコビ恒等式より、

$$\nabla^\alpha\mathcal{W}^{(a)}_\alpha = \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}\mathcal{W}^{\dot{\alpha}(a)}, \tag{6.12}$$

$$\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}\mathcal{W}^{(a)}_\alpha = 0, \quad D\mathcal{W}^{(a)}_\alpha = \frac{3}{2}\mathcal{W}^{(a)}_\alpha, \quad A\mathcal{W}^{(a)}_\alpha = i\mathcal{W}^{(a)}_\alpha, \quad K_A\mathcal{W}^{(a)}_\alpha = 0, \tag{6.13}$$

$$X_{(a)}\mathcal{W}^{(b)}_\alpha = \mathcal{W}^{(c)}_\alpha f_{(a)(c)}{}^{(b)} \tag{6.14}$$

が成立する。すなわち、ゲージーノ超場 $\mathcal{W}^{(a)}_\alpha$ は、共形ウェイトが $(\Delta, w) = (3/2, 1)$ のプライマリーカイラル超場で、YM ゲージ変換の元で随伴表現として変換する。ここで、ゲージーノ超場はその定義より反エルミートであること注意する：$(\mathcal{W}^{(a)}_\alpha)^\dagger = -\mathcal{W}^{(a)}_{\dot{\alpha}}$。また、 本論文での $\mathcal{A}^{(a)}_M$ および $\mathcal{W}^{(a)}_\alpha$ は、文献 [32] の $-i\mathcal{A}^{(r)}_M$ および $-i\mathcal{W}^{(r)}_\alpha$ にそれぞれ対応する。

YM 場と物質場の結合は文献 [25] で示されたテンソル算法と同様に行うことができる。前章と同様に n 個の物質超場 Φ^i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を共形ウェイトが $(\Delta, w) = (0, 0)$ であるプライマリーカイラル超場として導入する。ここで、カイラル条件は、超共形対称性と内部対称性それぞれについて共変な条件であるとする：

$$\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}}\Phi^i = 0. \tag{6.15}$$

内部対称性による物質場に対するゲージ変換は物質場を特徴付けるケーラー・ポテンシャルの 2 階微分で与えられるケーラー計量と呼ばれる量を不変にするものとして導入される。このケーラー計量はケーラー・ポテンシャル K を用いて

$$g_{ij^*} = \frac{\partial^2 K}{\partial \Phi^i \partial \bar{\Phi}^{j^*}} \tag{6.16}$$

と書かれる。

内部対称性の演算子 $X_{(a)}$ は、キリング・ベクトルと呼ばれるケーラー計量を不変にするリー微分を与えるベクトル場 $V_{(a)}$ として物質超場に作用することを以下で説明する。まず、Φ のカイラル条件との整合性より、$X_{(a)}$ の物質超場への作用を表すベクトル場 $V_{(a)}(\Phi, \bar{\Phi})$ は正則部分 $V^-_{(a)}$ と反正則部分 $V^+_{(a)}$ とに分解される：

$$V_{(a)} = V^-_{(a)} + V^+_{(a)}, \qquad V^-_{(a)} = V^i_{(a)}(\Phi)\frac{\partial}{\partial \Phi^i}, \quad V^+_{(a)} = \bar{V}^{i^*}_{(a)}(\bar{\Phi})\frac{\partial}{\partial \bar{\Phi}^{i^*}}. \tag{6.17}$$

従って、$X_{(a)}$ は物質超場に対して

$$X_{(a)}\Phi^i = V^i_{(a)}(\Phi), \qquad X_{(a)}\bar{\Phi}^{i^*} = \bar{V}^{i^*}_{(a)}(\bar{\Phi}) \tag{6.18}$$

と作用する。そして、$X_{(a)}$ は内部対称性の演算子であることから、$V_{(a)}$ はケーラー計量のリー微分を 0 にするキリング・ベクトルである：

$$\mathcal{L}(V_{(a)})g_{ij^*} = V^i_{(a)}\frac{\partial g_{jk^*}}{\partial \Phi^i} + \frac{\partial V^i_{(a)}}{\partial \Phi^j}g_{ik^*} + \bar{V}^{i^*}_{(a)}\frac{\partial g_{jk^*}}{\partial \bar{\Phi}^{i^*}} + \frac{\partial \bar{V}^{i^*}_{(a)}}{\partial \bar{\Phi}^{k^*}}g_{ji^*} = 0. \tag{6.19}$$

この方程式を解くと、$V^\pm_{(a)}$ のケーラー・ポテンシャルへの作用が次のように表される：

$$V^i_{(a)}K_i = F_{(a)} - iJ_{(a)}, \qquad \bar{V}^{i^*}_{(a)}K_{i^*} = \bar{F}_{(a)} + iJ_{(a)}. \tag{6.20}$$

ここで、 $K_i = \partial K/\partial \Phi^i$ および $K_{i^*} = \partial K/\partial \bar{\Phi}^{i^*}$ である。右辺の $F_{(a)}$ は Φ^i の正則関数であり、$J_{(a)}$ はキリング・ポテンシャル、もしくはモーメント写像[*1]と呼ばれる実関数である。これらの和によって $X_{(a)}$ のケーラーポテンシャルへの作用が

$$X_{(a)}K = V^i_{(a)}K_i + \bar{V}^{i^*}_{(a)}K_{i^*} = F_{(a)} + \bar{F}_{(a)} \tag{6.21}$$

となる。

ここまでで共形超空間に YM ゲージ超場を導入し、物質場への作用を構成してきた。YM ゲージ超場と物質場が結合した超重力理論の作用は共形超空間形式において次のよ

[*1] 正確に言うと、モーメント写像の像である。

うに書くことができる：

$$\begin{aligned} S = -3\int d^4xd^4\theta\, E\,\Phi^{\rm c}\bar{\Phi}^{\rm c}e^{-K/3} \\ +\left(\int d^4xd^2\theta\,\mathcal{E}\,(\Phi^{\rm c})^3W(\Phi) - \frac{1}{4}\int d^4xd^2\theta\,\mathcal{E}\,H_{(a)(b)}(\Phi)\mathcal{W}^{\alpha(a)}\mathcal{W}^{(b)}_{\alpha} + \text{h.c.}\right). \end{aligned} \tag{6.22}$$

ここで、前章に加えて新たに導入した $H_{(a)(b)}(\Phi)$ は、$(\Delta, w) = (0, 0)$ であるプライマリーカイラル超場で、物質超場 Φ^i の正則関数である。$H_{(a)(b)}(\Phi)$ はゲージ運動関数と呼ばれ、ゲージ結合定数を含む。$H_{(a)(b)}$ の添字は $(a) \leftrightarrow (b)$ の交換に対して対称である。ゲージ不変性を作用に課すと、$X_{(a)}$ のカイラル compensator とスーパーポテンシャル W、そしてゲージ運動関数の変換則は (6.14) 式および (6.21) 式から

$$\begin{gathered} X_{(a)}\Phi^{\rm c} = \frac{1}{3}F_{(a)}\Phi^{\rm c}, \quad X_{(a)}\bar{\Phi}^{\rm c} = \frac{1}{3}\bar{F}_{(a)}\bar{\Phi}^{\rm c}, \qquad X_{(a)}W = -F_{(a)}W, \\ X_{(a)}H_{(b)(c)} = V_{(a)}H_{(b)(c)} = -f_{(a)(b)}{}^{(d)}H_{(d)(c)} - f_{(a)(c)}{}^{(d)}H_{(b)(d)} \end{gathered} \tag{6.23}$$

となる。

6.2　ポアンカレ超空間へのゲージ固定

ここでは、物質場に加え YM ゲージ場が結合した超重力理論における共形超空間からポアンカレ超空間へのゲージ固定を考える。スーパーポテンシャルが 0 にならない場合は、前章と同様に $\Phi^{\rm c}$ を

$$\Phi^{\rm c} \ \to \ \Phi^0 = \Phi^{\rm c}W^{1/3} \tag{6.24}$$

と再定義しておくと便利である。このカイラル compensator Φ^0 は物質場のみが結合した場合と同様に、共形ウェイト $(\Delta, w) = (1, 2/3)$ を持つ。そして、ケーラー・ポテンシャル項およびスーパーポテンシャル項は $\Phi^{\rm c}\bar{\Phi}^{\rm c}e^{-K/3} = \Phi^0\bar{\Phi}^0e^{-G/3}$ および $(\Phi^{\rm c})^3W = (\Phi^0)^3$ と再定義される。ここで物質場のみが結合してる時と同様に

$$G = K + \ln|W|^2 \tag{6.25}$$

である。この再定義のもとでのカノニカルな EH 項および RS 項そして実数のグラヴィティーノの質量パラメータを与えるゲージ固定は

$$D,\ A\ \text{ゲージ}:\ \Phi^0 = e^{G/6}, \qquad K_A\ \text{ゲージ}:\ B_M = 0 \tag{6.26}$$

である。

前章で予告したように、 Φ^0 と G を用いる長所は、これらは、内部対称性に対して不変であるということである：$X_{(a)}\Phi^0 = X_{(a)}G = 0$。これらは (6.20) 式および (6.23) 式より従う。この Φ^0 および G の不変性は超共形対称性の固定を内部対称性と独立に簡潔に行えることができる。従って、前章の結果をそのまま用いることができる。すなわち、カイラル compensator のカイラル条件およびゲージ条件 (6.26) 式から

$$
\begin{aligned}
A_\alpha &= \frac{i}{4}G_j\mathcal{D}^{\mathrm{P}}_\alpha\Phi^j, \qquad A_{\dot\alpha} = -\frac{i}{4}G_{j^*}\bar{\mathcal{D}}^{\mathrm{P}}_{\dot\alpha}\bar\Phi^{j^*}, \\
A_\alpha{}^{\dot\beta} &= \frac{i}{4}(G_i\nabla_\alpha{}^{\dot\beta}\Phi^i - G_{i^*}\nabla_\alpha{}^{\dot\beta}\bar\Phi^{i^*}) + \frac{1}{4}G_{ij^*}\nabla_\alpha\Phi^i\bar\nabla^{\dot\beta}\bar\Phi^{j^*} - \frac{3}{2}G_\alpha{}^{\dot\beta}
\end{aligned}
\tag{6.27}
$$

が従う。ここで、本章においては、$\mathcal{D}^{\mathrm{P}}_A$ は超ポアンカレおよび YM 共変微分である:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathrm{P}}_A &= E_A{}^M\partial_M - \frac{1}{2}\phi_A{}^{bc}M_{cb} - \mathcal{A}^{(a)}_A X_{(a)} \\
&= \nabla_A + A_A\,A + B_A D + f_A{}^B K_B.
\end{aligned}
\tag{6.28}
$$

さらに、カイラル compensator のスピノル項および F 項の条件が

$$
\nabla_\alpha\Phi^0\big| = \frac{1}{3}e^{G/6}G_i\nabla_\alpha\Phi^i\Big|, \tag{6.29}
$$

$$
\nabla^2\Phi^0\big| = \frac{1}{3}e^{G/6}\Big(G_i\nabla^2\Phi^i + \big(G_{ij} + \frac{1}{3}G_iG_j\big)\nabla^\alpha\Phi^j\nabla_\alpha\Phi^i - 24\bar R\Big)\Big| \tag{6.30}
$$

となる。

ゲージ固定条件 (6.26) 式は有用であり、かつグラヴィティーノに実数の質量パラメータを与えると言う点で物理的なものである。しかし、再定義 (6.25) はスーパーポテンシャルが 0 になる場合は用いることができない。そのような場合でも有用なゲージ固定は

$$
\Phi^{\mathrm{c}} = e^{K/6}, \qquad B_M = 0 \tag{6.31}
$$

である。このゲージ固定も標準的な EH 項と RS 項を導く (ただし、$W \neq 0$ の場合で (6.31) 式によるゲージ固定を行った時には、一般にはグラヴィティーノの質量は複素数になる)。物質場のみが結合した場合と YM ゲージ場もさらに結合した場合で大きく異なる点は、このゲージ条件 (6.31) 式は、内部ゲージ対称性を保たないと言う点である。なぜなら、$e^{K/6}$ と Φ^{c} は $X_{(a)}$ の作用の元で異なる変換をするからである。しかし、この内部対称性は A ゲージ変換を用いると次のように保つことができる。まず、A 変換によって、Φ^{c} は $A\Phi^{\mathrm{c}} = i\frac{2}{3}\Phi^{\mathrm{c}}$ と変換するが、$e^{K/6}$ は変換しないことに注意する。従って、内部ゲージ変換と A 変換を組み合わせた $\tilde X_{(a)}$ による次の変換は Φ^{c} と $e^{K/6}$ とを同じように変換する：

$$
\tilde X_{(a)} = X_{(a)} + \frac{i}{4}(F_{(a)} - \bar F_{(a)})A. \tag{6.32}
$$

従って、 $\tilde{X}_{(a)}$ はゲージ条件 (6.31) 式で残る内部変換を与える。また、$\tilde{X}_{(a)}$ の交換関係は元の $X_{(a)}$ の交換関係と同じになる：

$$[\tilde{X}_{(a)}, \tilde{X}_{(b)}] = -f_{(a)(b)}{}^{(c)}\tilde{X}_{(c)}. \tag{6.33}$$

この交換関係は元の $X_{(a)}$ の交換関係 (6.1) 式の両辺をカイラル compensator に作用させることで得られる式 $V^i_{(a)}\partial F_{(b)}/\partial\Phi^i - V^i_{(b)}\partial F_{(a)}/\partial\Phi^i = -f_{(a)(b)}{}^{(c)}F_{(c)}$ 、および A と $X_{(a)}$ の交換関係は 0 であることから得られる。

このように $X_{(a)}$ 変換に A 変換を加えることでゲージ条件を保つ内部ゲージ変換 $X_{(a)}$ を構成できたが、これによって、A ゲージ超場 A_M はもはや $\tilde{X}_{(a)}$ 変換で不変にならず、次のように変換する：

$$\delta_G(\xi^{(a)}\tilde{X}_{(a)})A_M = \partial_M\left(\xi^{(a)}\frac{i}{4}(F_{(a)} - \bar{F}_{(a)})\right). \tag{6.34}$$

この内部ゲージ変換による A ゲージ超場の変換は文献 [32] で議論された “isometric Kähler transformation” に一致する。すなわち、超共形対称性の立場から言うと、isometric Kähler transformation はゲージ条件 (6.31) を保つ内部ゲージ変換と A 変換の組み合わせであると簡潔に理解できる。

ゲージ条件 (6.31) 式の元での超ポアンカレ共変微分 $\tilde{\mathcal{D}}^{\mathrm{P}}_A$ は、 $X_{(a)}$ ではなく $\tilde{X}_{(a)}$ を用いて

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{D}}^{\mathrm{P}}_A &= E_A{}^M\partial_M - \frac{1}{2}\phi_A{}^{cb}M_{bc} - \mathcal{A}^{(a)}_A\tilde{X}_{(a)} && (6.35)\\
&= \nabla_A + \left(A_A - \frac{i}{4}(F_{(a)} - \bar{F}_{(a)})\mathcal{A}^{(a)}_A\right)A + B_AD + f_A{}^BK_B && (6.36)
\end{aligned}$$

と定義される。ゲージ固定後の A ゲージ超場とカイラル compensator の高次項は (6.27) 式、 (6.29) 式および (6.30) 式と同様に得ることができる：

$$\begin{aligned}
&A_\alpha = \frac{i}{4}\left(K_j\tilde{\mathcal{D}}^{\mathrm{P}}_\alpha\Phi^j + (F_{(a)} - \bar{F}_{(a)})\mathcal{A}^{(a)}_\alpha\right), \qquad A_{\dot\alpha} = \frac{i}{4}\left(-K_{j^*}\bar{\tilde{\mathcal{D}}}^{\mathrm{P}}_{\dot\alpha}\bar{\Phi}^{j^*} + (F_{(a)} - \bar{F}_{(a)})\mathcal{A}^{(a)}_{\dot\alpha}\right),\\
&A_\alpha{}^{\dot\beta} = \frac{i}{4}\left(K_i\tilde{\mathcal{D}}^{\mathrm{P}}_\alpha{}^{\dot\beta}\Phi^i - K_{i^*}\tilde{\mathcal{D}}^{\mathrm{P}}_\alpha{}^{\dot\beta}\bar{\Phi}^{i^*} + (F_{(a)} - \bar{F}_{(a)})\mathcal{A}^{(a)}_\alpha{}^{\dot\beta}\right) + \frac{1}{4}K_{ij^*}(\tilde{\mathcal{D}}^{\mathrm{P}}_\alpha\Phi^i)(\bar{\tilde{\mathcal{D}}}^{\mathrm{P}\dot\beta}\bar{\Phi}^{j^*}) - \frac{3}{2}G_\alpha{}^{\dot\beta},\\
&\nabla_\alpha\Phi^{\mathrm{c}}\Big| = \frac{1}{3}e^{K/6}K_i\nabla_\alpha\Phi^i\Big|, \quad \nabla^2\Phi^{\mathrm{c}}\Big| = \frac{1}{3}e^{K/6}\Big(K_i\nabla^2\Phi^i + \big(K_{ij} + \frac{1}{3}K_iK_j\big)\nabla^\alpha\Phi^j\nabla_\alpha\Phi^i - 24\bar{R}\Big)\Big|.
\end{aligned} \tag{6.37}$$

A ゲージ超場の表式は直接計算する他にも、(6.26) 式によるゲージ固定での共変微分の定義の比較から、(6.27) 式において単に $A_A \to A_A - \frac{i}{4}(F_{(a)} - \bar{F}_{(a)})\mathcal{A}^{(a)}_A$ という置き換えによっても得ることができる。そして、この A ゲージ超場の表式は、文献 [32] における等長ケーラー超空間の A ゲージ超場に一致する。

これらのゲージ固定を行うことで、等長ケーラー超空間を得ることができた。一方、$\Phi^0 = e^{G/6}$ の場合は、共形超空間における作用は

$$S = \int d^4x d^4\theta\, E\left(-\frac{3}{2} + \frac{e^{G/2}}{2R} - \frac{1}{8R} H_{(a)(b)} \mathcal{W}^{(a)\alpha} \mathcal{W}^{(b)}{}_{\alpha}\right) + \text{h.c.} \tag{6.38}$$

となる。ここで F-type 作用から D-type 作用に移る次の関係

$$\int d^4x d^2\theta \mathcal{E} U = \int d^4x d^4\theta E \frac{U(\Phi^{\mathrm{c}} \bar{\Phi}^{\mathrm{c}} e^{-K/3})}{-\frac{1}{4}\bar{\nabla}^2(\Phi^{\mathrm{c}} \bar{\Phi}^{\mathrm{c}} e^{-K/3})} \tag{6.39}$$

を用いた。ここで U は共形ウェイト $(\Delta, w) = (3, 2)$ を持つプライマリーカイラル超場である。さらに、ゲージ条件 (6.26) 式と K_A ゲージ超場の条件 (4.96) 式より、

$$-\frac{1}{4}\bar{\nabla}^2(\Phi^{\mathrm{c}} \bar{\Phi}^{\mathrm{c}} e^{-K/3}) = f_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} (\Phi^{\mathrm{c}} \bar{\Phi}^{\mathrm{c}} e^{-K/3}) = 2R \tag{6.40}$$

が従うため、共形超空間の作用 (6.22) 式がゲージ固定によって (6.38) 式になる。もう一つのゲージ固定 $\Phi^{\mathrm{c}} = e^{K/6}$ によってもポアンカレ超重力理論の作用が同様に得られる。

第7章　共形超空間形式からテンソル算法へのゲージ固定

ここでは、共形超空間形式からテンソル算法をゲージ固定によって得ることを考える。共形超空間形式では、テンソル算法に比べて余分な場の自由度とゲージパラメータの自由度が存在している。すなわち、ゲージ超場 $h_m{}^{\mathcal{A}}$ とゲージパラメータ超場 $\xi^{\mathcal{A}}$ の θ の高次項がある。さらにスピノル添字を持ったゲージ超場 $h_\mu{}^{\mathcal{A}}$ および $h^{\dot{\mu}\mathcal{A}}$ がある (以降はスピノルゲージ超場と呼ぶ)。しかし、テンソル算法にはこのような余分な自由度は存在しない。これら2つの形式が自由度まで含めて等価であることを示すには、共形超空間形式の余分な場の自由度およびゲージパラメータの自由度ががどのように固定されているかを具体的に示す必要がある。

従ってここでは上記の余分な場の自由度が、余分なゲージパラメータの自由度によって固定されるか、そうでなければテンソル算法で表される量 (具体的にはあとで見るように曲率である) に帰着することを示す。

7.1　共形超空間形式とテンソル算法で対応が存在する量

まず、共形超空間形式における次の諸量はテンソル算法に対応する量があることに注意する：

1. アインシュタイン・ベクトル添字をもったゲージ超場の最低次項 $h_m{}^{\mathcal{A}}|$。これはテンソル算法における $h_m{}^A$ が対応する。

2. ローレンツ添字をもった スピノル・スピノル曲率およびスピノル・ベクトル曲率 $R_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}{}^{\mathcal{A}}|$ および $R_{a\underline{\beta}}{}^{\mathcal{A}}|$。これらはテンソル算法においては、それぞれ交換関係 $[\delta_Q, \delta_Q]$ および $[\delta_{\tilde{P}}, \delta_Q]$ の係数が対応する。

3. ローレンツ添字を持った スピノル・スピノルおよびベクトル・スピノル曲率に対する共変スピノル微分：$\nabla_{\underline{\beta}} \cdots \nabla_{\underline{\delta}} R_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}{}^{\mathcal{A}}|$ および $\nabla_{\underline{\beta}} \cdots \nabla_{\underline{\delta}} R_{a\underline{\beta}}{}^{\mathcal{A}}|$。これらはテンソル算法においては交換関係 $[\delta_Q, \delta_Q]$ および $[\delta_{\tilde{P}}, \delta_Q]$ の係数の Q 変換が対応する。

以下では、これら以外の全てのスピノルおよびベクトルゲージ超場そしてそれらの θ の高次項が、ゲージ自由度の θ の高次項によって 0 に固定されるか、そうでないならば上記のテンソル算法においても知られている量で表されることを示す。

7.2　スピノルゲージ超場に対するゲージ条件

まず、スピノルゲージ超場に対するゲージ条件を具体的に考える。スピノルゲージ超場のゲージ変換は

$$\delta_G(\xi^{\mathcal{B}}X_{\mathcal{B}})h_{\underline{\mu}}{}^{\mathcal{A}} = \partial_{\underline{\mu}}\xi^{\mathcal{A}} + h_{\underline{\mu}}{}^{\mathcal{C}}\xi^{\mathcal{B}}f_{\mathcal{B}\mathcal{C}}{}^{\mathcal{A}} \tag{7.1}$$

である。スピノルゲージ超場に対するゲージ条件をこのゲージ変換を用いて次のようにあらわに与えることができる。まず、ゲージパラメータ超場を次のように $\theta^{\underline{\mu}}$ で展開する：

$$\begin{aligned}\xi^{\mathcal{A}}(x,\theta,\bar{\theta}) &= \xi^{(0,0)\mathcal{A}}(x) + \theta^{\mu}\xi^{(1,0)\mathcal{A}}{}_{\mu}(x) + \bar{\theta}_{\dot{\mu}}\bar{\xi}^{(0,1)\mathcal{A}\dot{\mu}}(x)\\ &\quad + \theta^2\xi^{(2,0)\mathcal{A}}(x) + \bar{\theta}^2\bar{\xi}^{(0,2)\mathcal{A}}(x) + \theta^{\mu}\bar{\theta}_{\dot{\mu}}\xi^{(1,1)\mathcal{A}\dot{\mu}}{}_{\mu}(x)\\ &\quad + \theta^2\bar{\theta}^{\mu}\xi^{(2,1)\mathcal{A}}{}_{\mu}(x) + \bar{\theta}^2\theta^{\mu}\xi^{(1,2)\mathcal{A}}{}_{\mu}(x) + \bar{\theta}^2\theta^2\xi^{(2,2)\mathcal{A}}(x).\end{aligned} \tag{7.2}$$

最低次の項 $\xi^{(0,0)\mathcal{A}}(x)$ は (5.2) 式によってテンソル算法におけるゲージ変換に同定されるため、この項はゲージ固定に用いない。これ以外の全ての θ の高次項 $\xi^{(n,m)\mathcal{A}}(x)$ $(n+m\geq 1)$ をスピノルゲージ超場の θ の高次項を固定するために用いる：

	パタメータ	スピノルゲージ超場への条件
1st order	$\xi^{(1,0)\mathcal{A}}{}_{\mu}$	$E_{\mu}{}^{A}\vert = \delta_{\mu}{}^{\alpha}, \qquad h_{\mu}{}^{\mathcal{A}'}\vert = 0$
	$\xi^{(0,1)\mathcal{A}\dot{\mu}}$	$E^{\dot{\mu}A}\vert = \delta^{\dot{\mu}}{}_{\dot{\alpha}}, \qquad h^{\dot{\mu}\mathcal{A}'}\vert = 0$
2nd order	$\xi^{(2,0)\mathcal{A}}$	$\partial^{\mu}h_{\mu}{}^{\mathcal{A}}\vert = 0$
	$\xi^{(0,2)\mathcal{A}}$	$\bar{\partial}_{\dot{\mu}}h^{\dot{\mu}\mathcal{A}}\vert = 0$
	$\xi^{(1,1)\mathcal{A}\dot{\mu}}{}_{\mu}$	$\partial_{\mu}h^{\dot{\mu}\mathcal{A}}\vert - \bar{\partial}^{\dot{\mu}}h_{\mu}{}^{\mathcal{A}}\vert = 0$
3rd order	$\xi^{(2,1)\mathcal{A}\dot{\mu}}$	$\partial^2 h^{\dot{\mu}\mathcal{A}}\vert + \bar{\partial}^{\dot{\mu}}\partial^{\mu}h_{\mu}{}^{\mathcal{A}}\vert = 0$
	$\xi^{(1,2)\mathcal{A}}{}_{\mu}$	$\bar{\partial}^2 h_{\mu}{}^{\mathcal{A}}\vert + \partial_{\mu}\bar{\partial}_{\dot{\mu}}h^{\dot{\mu}\mathcal{A}}\vert = 0$
4th order	$\xi^{(2,2)\mathcal{A}}$	$\partial^2\bar{\partial}_{\dot{\mu}}h^{\dot{\mu}\mathcal{A}}\vert + \bar{\partial}^2\partial^{\mu}h_{\mu}{}^{\mathcal{A}}\vert = 0$

(7.3)

このゲージ条件は図 7.1 のように θ^{μ} のべき、すなわち $\partial_{\underline{\mu}}$ の階数に沿った図を用いて可視化できる。

ここで、ゲージ固定された成分は、ゲージ変換の非斉次部分が $\delta h_{\mu}{}^{\mathcal{A}} = \partial_{\mu}\xi^{\mathcal{A}}$ のように動く量である。これらのゲージ固定される組み合わせは、例えば $\{\partial_{\mu},\bar{\partial}^{\dot{\mu}}\}=0$ より

$$-\varepsilon_{\mu\nu}\partial^{\rho}h_{\rho}{}^{\mathcal{A}} = \partial_{\mu}h_{\nu}{}^{\mathcal{A}} - \partial_{\nu}h_{\mu}{}^{\mathcal{A}}, \qquad \partial^2 h^{\dot{\mu}\mathcal{A}} + \bar{\partial}^{\dot{\mu}}\partial^{\mu}h_{\mu}{}^{\mathcal{A}} = \partial^{\mu}\left(\partial_{\mu}h^{\dot{\mu}\mathcal{A}} - \bar{\partial}^{\dot{\mu}}h_{\mu}{}^{\mathcal{A}}\right) \tag{7.4}$$

であることを用いて得ることができる。

ここで重要な点は、(7.3) 式にゲージ固定された量によってゲージ変換で動くスピノルゲージ超場の成分が尽きていることである。従って、これらをゲージ固定で 0 もしくは定数にすれば、スピノルゲージ超場の他の成分は曲率を用いて書くことができる。

このことをよりあらわに示す。まず、ゲージ条件 (7.3) 式の元では、全てのアインシュタイン添字をもったスピノルゲージ超場に対する $\partial_{\underline{\mu}}$ 微分 $\partial_{\underline{\nu}}\cdots\partial_{\underline{\rho}}h_{\underline{\mu}}{}^{\mathcal{A}}$ は常に対称な微分

$$\partial_{\underline{\mu}}h_{\underline{\nu}}{}^{\mathcal{A}}+\partial_{\underline{\nu}}h_{\underline{\mu}}{}^{\mathcal{A}} \tag{7.5}$$

で書くことができることを具体的に示す。のちの議論で、この対称な微分はローレンツ・スピノル添字を持った曲率に書き直すことができること、つまりテンソル算法に対応がある量で書くことができることを確かめる。

まず 1 階微分について確かめる。微分の反対称部分はゲージ条件で 0 にできるため、

$$\partial_\nu h_\mu{}^{\mathcal{A}}|=\frac{1}{2}(\partial_\nu h_\mu{}^{\mathcal{A}}+\partial_\mu h_\nu{}^{\mathcal{A}})|,\qquad \bar\partial^{\dot\nu}h^{\dot\mu\mathcal{A}}|=\frac{1}{2}(\bar\partial^{\dot\nu}h^{\dot\mu\mathcal{A}}+\bar\partial^{\dot\mu}h^{\dot\nu\mathcal{A}})|, \tag{7.6}$$

および

$$\bar\partial^{\dot\nu}h_\mu{}^{\mathcal{A}}|=\frac{1}{2}(\bar\partial^{\dot\nu}h_\mu{}^{\mathcal{A}}+\partial_\mu h^{\dot\nu\mathcal{A}})|,\qquad \partial_\nu h^{\dot\mu\mathcal{A}}|=\frac{1}{2}(\partial_\nu h^{\dot\mu\mathcal{A}}+\bar\partial^{\dot\mu}h_\nu{}^{\mathcal{A}})| \tag{7.7}$$

を得る。次に、2 階微分について、恒等式 $\partial_\mu\partial^\nu h_\nu=\frac{1}{2}\partial^2 h_\mu$ を用いると

$$\partial^2 h_\mu{}^{\mathcal{A}}|=\frac{2}{3}\partial^\nu(\partial_\nu h_\mu{}^{\mathcal{A}}+\partial_\mu h_\nu{}^{\mathcal{A}})|,\qquad \bar\partial^2 h^{\dot\mu\mathcal{A}}|=\frac{2}{3}\bar\partial_{\dot\nu}(\bar\partial^{\dot\nu}h^{\dot\mu\mathcal{A}}+\bar\partial^{\dot\mu}h^{\dot\nu\mathcal{A}})| \tag{7.8}$$

が従う。この式は、$\theta=\bar\theta=0$ 射影 '|' を取らない超場の等式として実際成立している。

ゲージパラメータ $\xi^{(2,1)\mathcal{A}\dot\mu}$ および $\xi^{(1,2)\mathcal{A}}{}_\mu$ を用いて固定されるゲージ条件を用いると、

$$\begin{aligned}\bar\partial^2 h_\mu{}^{\mathcal{A}}&=\frac{1}{2}\bar\partial_{\dot\nu}(\bar\partial^{\dot\nu}h_\mu{}^{\mathcal{A}}+\partial_\mu h^{\dot\nu\mathcal{A}})|,\qquad \partial^2 h^{\dot\mu\mathcal{A}}|=\frac{1}{2}\partial^\nu(\partial_\nu h^{\dot\mu\mathcal{A}}+\bar\partial^{\dot\mu}h_\nu{}^{\mathcal{A}})|,\\ \partial_\rho\bar\partial^{\dot\nu}h_\mu{}^{\mathcal{A}}|&=\frac{1}{2}\partial_\rho(\bar\partial^{\dot\nu}h_\mu{}^{\mathcal{A}}+\partial_\mu h^{\dot\nu\mathcal{A}})|-\frac{1}{4}\bar\partial^{\dot\nu}(\partial_\rho h_\mu{}^{\mathcal{A}}+\partial_\mu h_\rho{}^{\mathcal{A}})|,\\ \bar\partial^{\dot\rho}\partial_\nu h^{\dot\mu\mathcal{A}}|&=\frac{1}{2}\bar\partial^{\dot\rho}(\partial_\nu h^{\dot\mu\mathcal{A}}+\bar\partial^{\dot\mu}h_\nu{}^{\mathcal{A}})|-\frac{1}{4}\partial_\nu(\bar\partial^{\dot\rho}h^{\dot\mu\mathcal{A}}+\bar\partial^{\dot\mu}h^{\dot\rho\mathcal{A}})|\end{aligned} \tag{7.9}$$

を得る。従って、2 階微分も対称な微分を用いて表すことができる。さらに 3 階微分について考える。(7.8) 式は $\theta=\bar\theta=0$ 射影なしで成立するため、この式を用いると、

$$\bar\partial^{\dot\nu}\partial^2 h_\mu{}^{\mathcal{A}}|=\frac{2}{3}\bar\partial^{\dot\nu}\partial^\rho(\partial_\rho h_\mu{}^{\mathcal{A}}+\partial_\mu h_\rho{}^{\mathcal{A}})|,\qquad \partial_\nu\bar\partial^2 h^{\dot\mu\mathcal{A}}|=\frac{2}{3}\partial_\nu\bar\partial_{\dot\rho}(\bar\partial^{\dot\rho}h^{\dot\mu\mathcal{A}}+\bar\partial^{\dot\mu}h^{\dot\rho\mathcal{A}})| \tag{7.10}$$

を導くことができる。そしてゲージパラメータ $\xi^{(2,2)}$ によって決まるゲージ条件から残りの 3 階微分も対称な微分でかけることがわかる：

$$\begin{aligned}\partial_\nu\bar\partial^2 h_\mu{}^{\mathcal{A}}|&=\frac{1}{2}\partial_\nu\bar\partial_{\dot\rho}(\bar\partial^{\rho}h_\mu{}^{\mathcal{A}}+\partial_\mu h^{\dot\rho\mathcal{A}})|+\frac{1}{4}\bar\partial^2(\partial_\nu h_\mu{}^{\mathcal{A}}+\partial_\mu h_\nu{}^{\mathcal{A}})|,\\ \bar\partial^{\dot\nu}\partial^2 h^{\dot\mu\mathcal{A}}|&=\frac{1}{2}\bar\partial^{\dot\nu}\partial^\rho(\partial_\rho h^{\dot\mu\mathcal{A}}+\bar\partial^{\dot\mu}h_\rho{}^{\mathcal{A}})|+\frac{1}{4}\partial^2(\bar\partial^{\dot\nu}h^{\dot\mu\mathcal{A}}+\bar\partial^{\dot\mu}h^{\dot\nu\mathcal{A}})|.\end{aligned} \tag{7.11}$$

最後に 4 階微分について、(7.8) 式を用いることで

$$\bar{\partial}^2\partial^2 h_\mu{}^{\mathcal{A}}| = \frac{2}{3}\bar{\partial}^2\partial^\nu(\partial_\nu h_\mu{}^{\mathcal{A}} + \partial_\mu h_\nu{}^{\mathcal{A}})|, \qquad \partial^2\bar{\partial}^2 h^{\dot{\mu}\mathcal{A}}| = \frac{2}{3}\partial^2\bar{\partial}_{\dot{\nu}}(\bar{\partial}^{\dot{\nu}} h^{\dot{\mu}\mathcal{A}} + \bar{\partial}^{\dot{\mu}} h^{\dot{\nu}\mathcal{A}})| \tag{7.12}$$

を得る。

このように、全てのスピノルゲージ超場に対する $\partial_{\underline{\mu}}$ 微分は対称な微分 $\partial_{\underline{\nu}} h_{\underline{\mu}}{}^{\mathcal{A}} + \partial_{\underline{\mu}} h_{\underline{\nu}}{}^{\mathcal{A}}$ を用いて書くことができることがわかった。

以下ではゲージ条件 (7.3) の元で上記の対称な微分で表したスピノルゲージ超場の成分はローレンツ添字をもった曲率 $R_{CB}{}^{\mathcal{A}}$ と共変スピノル微分 $\nabla_{\underline{\alpha}}$、すなわちテンソル算法に対応がある量を用いて書くことができることを示す。

まず、超空間における曲率の定義 (4.66) 式をもう一度書いておく：

$$R_{MN}{}^{\mathcal{A}} = \partial_M h_N{}^{\mathcal{A}} - \partial_N h_M{}^{\mathcal{A}} - (E_N{}^C h_M{}^{\mathcal{B}'} - E_M{}^C h_N{}^{\mathcal{B}'}) f_{\mathcal{B}'C}{}^{\mathcal{A}} - h_N{}^{\mathcal{C}'} h_M{}^{\mathcal{B}'} f_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}{}^{\mathcal{A}}. \tag{7.13}$$

この定義およびゲージ条件 $h_{\underline{\mu}}{}^{\mathcal{A}'}| = 0$ より、対称な微分の最低次 $(\partial_{\underline{\nu}} h_{\underline{\mu}}{}^{\mathcal{A}} + \partial_{\underline{\mu}} h_{\underline{\nu}}{}^{\mathcal{A}})|$ は曲率を用いて

$$(\partial_{\underline{\mu}} h_{\underline{\nu}}{}^{\mathcal{A}} + \partial_{\underline{\nu}} h_{\underline{\mu}}{}^{\mathcal{A}})| = \delta_{\underline{\mu}}{}^{\underline{\alpha}}\delta_{\underline{\nu}}{}^{\underline{\beta}} R_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}{}^{\mathcal{A}}| \tag{7.14}$$

と書くことができることがわかる。これは対称な微分の最低次 $(\partial_{\underline{\nu}} h_{\underline{\mu}}{}^{\mathcal{A}} + \partial_{\underline{\mu}} h_{\underline{\nu}}{}^{\mathcal{A}})|$ はテンソル算法の量で書くことができることを意味している。

ここで、アインシュタイン添字を持った曲率の最低次は、常にローレンツ添字を持った曲率とベクトルゲージ超場の最低次 $h_m{}^{\mathcal{A}}|$ を用いて

$$R_{\underline{\nu}\underline{\mu}}{}^{\mathcal{A}}| = \delta_{\underline{\nu}}{}^{\underline{\gamma}}\delta_{\underline{\mu}}{}^{\underline{\beta}} R_{\underline{\gamma}\underline{\beta}}{}^{\mathcal{A}}|, \qquad R_{\underline{\nu}m}{}^{\mathcal{A}}| = \delta_{\underline{\nu}}{}^{\underline{\gamma}} e_m{}^b R_{\underline{\gamma}b}{}^{\mathcal{A}}| - \frac{1}{2}\delta_{\underline{\nu}}{}^{\underline{\gamma}}\psi_m{}^{\underline{\beta}} R_{\underline{\gamma}\underline{\beta}}{}^{\mathcal{A}}| \tag{7.15}$$

と書けるため、テンソル算法に対応する量があることに注意する。

2 階微分 $\partial_{\underline{\rho}}(\partial_{\underline{\nu}} h_{\underline{\mu}}{}^{\mathcal{A}} + \partial_{\underline{\mu}} h_{\underline{\nu}}{}^{\mathcal{A}})|$ についても同様である。曲率の定義を用いて対称な微分を書き直し、$\partial_{ul\rho}$ 微分を実行すると、次の等式を得る：

$$\partial_{\underline{\rho}}(\partial_{\underline{\nu}} h_{\underline{\mu}}{}^{\mathcal{A}} + \partial_{\underline{\mu}} h_{\underline{\nu}}{}^{\mathcal{A}})| = \partial_{\underline{\rho}} R_{\underline{\nu}\underline{\mu}}{}^{\mathcal{A}}| + \frac{1}{2}(\delta_{\underline{\mu}}{}^{\underline{\gamma}} R_{\underline{\rho}\underline{\nu}}{}^{\mathcal{B}'} + \delta_{\underline{\nu}}{}^{\underline{\gamma}} R_{\underline{\rho}\underline{\mu}}{}^{\mathcal{B}'}) f_{\mathcal{B}'\underline{\gamma}}{}^{\mathcal{A}}|. \tag{7.16}$$

右辺の第 1 項 $\partial_{\underline{\rho}} R_{\underline{\nu}\underline{\mu}}{}^{\mathcal{A}}|$ はアインシュタイン・スピノル添字をを持った曲率に対するスピノル微分であるため、テンソル算法への対応は非自明である。しかし、四脚場をもちいてローレンツ添字を持った曲率に次のように書き換えたのち $\partial_{\underline{\rho}}$ 微分を実行し (7.14) 式を用いると、

$$\begin{aligned} \partial_{\underline{\rho}} R_{\underline{\nu}\underline{\mu}}{}^{\mathcal{A}}| &= \partial_{\underline{\rho}}\big(E_{\underline{\nu}}{}^C E_{\underline{\mu}}{}^B R_{CB}{}^{\mathcal{A}}\big)| \\ &= \frac{1}{2}R(P)_{\underline{\rho}\underline{\nu}}{}^C\delta_{\underline{\mu}}{}^{\underline{\beta}} R_{C\underline{\beta}}{}^{\mathcal{A}}| - \frac{1}{2}\delta_{\underline{\nu}}{}^{\underline{\gamma}} R(P)_{\underline{\rho}\underline{\mu}}{}^B R_{\underline{\gamma}B}{}^{\mathcal{A}}| + \delta_{\underline{\nu}}{}^{\underline{\gamma}}\delta_{\underline{\mu}}{}^{\underline{\beta}}\delta_{\underline{\rho}}{}^{\underline{\delta}}\nabla_{\underline{\delta}} R_{\underline{\gamma}\underline{\beta}}{}^{\mathcal{A}}| \end{aligned} \tag{7.17}$$

を得る。ここで、捩率 (の最低次) の定義 $R(P)_{\rho\nu}{}^{C}| = (\partial_\rho E_\nu{}^C + \partial_\nu E_\rho{}^C)|$ 、およびローレンツ添字を持った曲率を含む共変な超場 Φ への ∂_μ の作用は、現在用いているゲージ条件のもとでは $\delta_\mu{}^\alpha \nabla_\alpha$ の作用に最低次で等しいこと

$$\partial_{\underline{\mu}}\Phi| = (\partial_{\underline{\mu}} - h_{\underline{\mu}}{}^{\mathcal{A}'} X_{\mathcal{A}'})\Phi| = \delta_\mu{}^\alpha \nabla_\alpha \Phi| \tag{7.18}$$

を用いた。従って、2 階微分 $\partial_{\underline{\rho}}(\partial_{\underline{\nu}} h_{\underline{\mu}}{}^{\mathcal{A}} + \partial_{\underline{\mu}} h_{\underline{\nu}}{}^{\mathcal{A}})|$ もテンソル算法に存在する量を用いて書くことができるため、スピノルゲージ超場に対する 2 階微分はテンソル算法に存在する量を用いて書くことができる。

同じことが 3 階微分 $\partial_{\underline{\sigma}}\partial_{\underline{\rho}}(\partial_{\underline{\nu}} h_{\underline{\mu}}{}^{\mathcal{A}} + \partial_{\underline{\mu}} h_{\underline{\nu}}{}^{\mathcal{A}})|$ についても言える。3 階微分も同様に、

$$\partial_{\underline{\sigma}}\partial_{\underline{\rho}}(\partial_{\underline{\nu}} h_{\underline{\mu}}{}^{\mathcal{A}} + \partial_{\underline{\mu}} h_{\underline{\nu}}{}^{\mathcal{A}})| = \partial_{\underline{\sigma}}\partial_{\underline{\rho}} R_{\underline{\nu}\underline{\mu}}{}^{\mathcal{A}}\Big| - \partial_{\underline{\sigma}}\partial_{\underline{\rho}}\Big((E_{\underline{\mu}}{}^C h_{\underline{\nu}}{}^{\mathcal{B}'} + E_{\underline{\nu}}{}^C h_{\underline{\mu}}{}^{\mathcal{B}'}) f_{\mathcal{B}'C}{}^{\mathcal{A}} + h_{\underline{\mu}}{}^{\mathcal{C}'} h_{\underline{\nu}}{}^{\mathcal{B}'} f_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}{}^{\mathcal{A}}\Big)\Big| \tag{7.19}$$

と書くことができる。右辺第 1 項 $\partial_{\underline{\sigma}}\partial_{\underline{\rho}} R_{\underline{\nu}\underline{\mu}}{}^{\mathcal{A}}|$ 以外の右辺の項は高々2 階微分であるので、上の議論よりテンソル算法の量で書くことができる。非自明な右辺第 1 項 $\partial_{\underline{\sigma}}\partial_{\underline{\rho}} R_{\underline{\nu}\underline{\mu}}{}^{\mathcal{A}}|$ は共変スピノル微分を用いて

$$\partial_{\underline{\sigma}}\partial_{\underline{\rho}} R_{\underline{\nu}\underline{\mu}}{}^{\mathcal{A}}| = \delta_{\underline{\sigma}}{}^{\underline{\delta}} \delta_{\underline{\rho}}{}^{\underline{\gamma}} \delta_{\underline{\nu}}{}^{\underline{\beta}} \delta_{\underline{\mu}}{}^{\underline{\alpha}} \nabla_{\underline{\delta}} \nabla_{\underline{\gamma}} R_{\underline{\beta}\underline{\alpha}}{}^{\mathcal{A}}| + \cdots \tag{7.20}$$

と書き換えることができる。ここで、省略記号 $\cdots$ は上でテンソル算法に対応する量があることを示した、ローレンツ添字を持った曲率、その曲率への 1 階の共変スピノル微分、もしくはゲージ超場への 2 階スピノル微分のいずれかを用いて書くことができる量である。従って、アインシュタイン・スピノル添字を持つ曲率への 2 階スピノル微分、よってスピノルゲージ超場の 3 階スピノル微分は全てテンソル算法でも表される量で書くことができることが示された。

同様に、スピノルゲージ超場に対する 4 階スピノル微分、従って全ての階数のスピノル微分について、テンソル算法に対応する量が存在する量を用いて書くことができる。これはアインシュタイン・スピノル添字を持った曲率への 3 階のスピノル微分が、上の議論と同様に高々3 階のローレンツ添字を持った共変スピノル微分を用いて書くことができることから従う。

ここまでの議論は共形超空間において行なったが、この手続きはポアンカレ超空間とポアンカレ超重力理論のテンソル算法の間についてのゲージ固定についても意味をなす (図 1.1 におけるルート III)。なぜなら、この議論においては、曲率の一般的な定義とゲージ変換則の非斉次項しか用いていないからである。ポアンカレ超重力理論における対称性

以外の違いは、曲率への拘束条件の違い、すなわち、ゲージ固定後のスピノルゲージ超場の具体的な違いのみである。

最後に可能な他のゲージ条件についてコメントしておく。文献 [34] において点付きスピノルゲージ超場が超場全体でゲージ固定される条件 $E^{\dot{\mu}A} = \delta^{\dot{\mu}}{}_{\dot{\alpha}}$ および $h^{\dot{\mu}\mathcal{A}'} = 0$ が示されている。この場合は $\partial_\mu h^{\dot{\mu}\mathcal{A}}| = 0$ および $\partial^2 h^{\dot{\mu}\mathcal{A}}| = 0$ というゲージ条件のためにそれぞれ $\xi^{(1,1)\mathcal{A}\dot{\mu}}{}_\mu$ および $\xi^{(2,1)\mathcal{A}\dot{\mu}}$ がそれぞれ使われている。一方、点無しスピノルゲージ超場 $h_\mu{}^{\mathcal{A}}$ は一般にはゲージ固定されずに残る。もう一つの例は、第 8 章で行うテンソル算法での超共形対称性のゲージ固定 (4.52) 式の共形超空間に対応するものである。

7.3　ベクトルゲージ超場の θ の高次項

ここまでスピノルゲージ超場の θ 展開の各成分はゲージ固定されるか、テンソル算法に対応する量があるかのどちらかであることを確かめた。このゲージ固定において、ゲージパラメータ超場の自由度のうち、テンソル算法に対応がある最低次のゲージ自由度 $\xi^{\mathcal{A}}|$ 以外の θ の高次の自由度を使い切ってしまった。しかし、ベクトルゲージ超場の高次項は残っており、テンソル算法と対応させるにはこれらもゲージ固定しなければならない可能性がある。従って、ベクトルゲージ超場の θ 展開の高次項がテンソル算法に存在する量で書けるかは非自明である。ここではベクトルゲージ超場の θ 展開の高次項がテンソル算法に存在する量で書けていることを示す。

スピノルゲージ超場に対するゲージ条件 (7.3) 式と曲率 $R_{\underline{\mu}n}{}^{\mathcal{A}}$ の定義 (7.13) 式を用いると、 ベクトルゲージ超場に対するスピノル微分 $\partial_{\underline{\nu}} h_n{}^{\mathcal{A}}$ が

$$\begin{aligned}\partial_{\underline{\mu}} h_n{}^{\mathcal{A}}| &= \delta_{\underline{\mu}}{}^{\underline{\delta}} E_n{}^E R_{\underline{\delta}E}{}^{\mathcal{A}}| - \delta_{\underline{\mu}}{}^C h_n{}^{\mathcal{B}'}| f_{\mathcal{B}'C}{}^{\mathcal{A}} \\ &= \delta_{\underline{\mu}}{}^{\underline{\delta}} e_n{}^e R_{\underline{\delta}e}{}^{\mathcal{A}}| + (-)^1 \delta_{\underline{\mu}}{}^{\underline{\delta}} \tfrac{1}{2} \psi_n{}^{\underline{\epsilon}} R_{\underline{\delta}\underline{\epsilon}}{}^{\mathcal{A}}| - \delta_{\underline{\mu}}{}^{\underline{\gamma}} h_n{}^{\mathcal{B}'}| f_{\mathcal{B}'\underline{\gamma}}{}^{\mathcal{A}}\end{aligned} \tag{7.21}$$

と書くことができる。このことはベクトルゲージ超場に対する 1 階スピノル微分がテンソル算法の量を用いて書けていることを示している。この手続きを同様にベクトルゲージ超場の θ 展開の高次項に対しても行うことができる。例えば、曲率の定義 (7.13) 式を用いると、ベクトルゲージ超場に対する 2 階のスピノル微分が

$$\begin{aligned}\partial_{\underline{\rho}}\partial_{\underline{\mu}} h_n{}^{\mathcal{A}}| &= \partial_{\underline{\rho}} R_{\underline{\mu}n}{}^{\mathcal{A}}| + \partial_n \partial_{\underline{\rho}} h_{\underline{\mu}}{}^{\mathcal{A}}| \\ &\quad + ((\partial_{\underline{\rho}} E_n{}^C) h_{\underline{\mu}}{}^{\mathcal{B}'} + E_n{}^C (\partial_{\underline{\rho}} h_{\underline{\mu}}{}^{\mathcal{B}'}) - (\partial_{\underline{\rho}} E_{\underline{\mu}}{}^C) h_n{}^{\mathcal{B}'} - E_{\underline{\mu}}{}^C (\partial_{\underline{\rho}} h_n{}^{\mathcal{B}'}))| f_{\mathcal{B}'C}{}^{\mathcal{A}} \\ &\quad + (\partial_{\underline{\rho}} h_n{}^{\mathcal{C}'}) h_{\underline{\mu}}{}^{\mathcal{B}'}| f_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}{}^{\mathcal{A}} + h_n{}^{\mathcal{C}'} (\partial_{\underline{\rho}} h_{\underline{\mu}}{}^{\mathcal{B}'})| f_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}{}^{\mathcal{A}}\end{aligned} \tag{7.22}$$

となることわかる。ここで、アインシュタイン添字を持った曲率に対するスピノル微分は次のように共変スピノル微分を用いて書き直すことができる：

$$\begin{aligned}\partial_{\underline{\mu}} R_{\underline{\nu}p}{}^{\mathcal{A}}| &= \partial_{\underline{\mu}} E_{\underline{\nu}}{}^{C} E_p{}^B R_{CB}{}^{\mathcal{A}}| \\ &= (\partial_{\underline{\mu}} E_{\underline{\nu}}{}^{C}) E_p{}^B R_{CB}{}^{\mathcal{A}}| - E_{\underline{\nu}}{}^{C} (\partial_{\underline{\mu}} E_p{}^B) R_{CB}{}^{\mathcal{A}}| - E_{\underline{\nu}}{}^{C} E_p{}^B \delta_{\underline{\mu}}{}^{\underline{\delta}} \nabla_{\underline{\delta}} R_{CB}{}^{\mathcal{A}}|.\end{aligned} \tag{7.23}$$

ここで、最後の行の右辺第 1 項および第 2 項はテンソル算法の量で表されることをそれぞれ (7.14) 式および (7.21) 式ですでに確かめた。従って、ベクトルゲージ超場に対する 2 階のスピノル微分もローレンツ添字を持った曲率と共変微分、そしてベクトルゲージ超場の θ の最低次を用いて書くことができる。より高次の θ 項についても同様である。この場合は、曲率に対する高階のスピノル微分が現れるが、それは

$$\partial_{\underline{\mu}} \partial_{\underline{\nu}} R_{PQ}{}^{\mathcal{A}}| = \partial_{\underline{\mu}} \partial_{\underline{\nu}} E_P{}^C E_Q{}^D R_{CD}{}^{\mathcal{A}}| = E_P{}^C E_Q{}^D E_{\underline{\mu}}{}^G E_{\underline{\nu}}{}^F \nabla_G \nabla_F R_{CD}{}^{\mathcal{A}}| + \cdots \tag{7.24}$$

となる。ここで、省略記号 $\cdots$ は、テンソル算法に対応する量があるち曲率に対する 1 階スピノル微分とベクトルゲージ超場に対する 2 階スピノル微分で書ける項を意味する。同じことが曲率に対する 3 階スピノル微分についても言える。結局ゲージ条件 (7.3) の元では、スピノルおよびベクトルゲージ超場は θ 展開の全ての次数においてテンソル算法に存在する量で表されることがわかった。

7.4 テンソル算法における higher θ ゲージ不変性

ここまでで、共形超空間形式においてテンソル算法に対応する量があるもの以外の場は、ゲージパラメータの θ の高次項 $\xi^{(n,m)\mathcal{A}}(x)$ $(n+m \geq 1)$ を用いて消去されることを調べた。ここで、テンソル算法において次の一見驚くべきことに注意する。

「テンソル算法に現れる全ての場は higher θ ゲージ不変である。すなわち、$\xi^{(n,m)\mathcal{A}}(x)$ $(n+m \geq 1)$ を用いるが $\xi^{(0,0)\mathcal{A}}(x) = 0$ とおいたゲージ変換のもとではテンソル算法の全ての場はゲージ不変である。」

テンソル算法におけるゲージ場はベクトルゲージ超場 $h_m{}^{\mathcal{A}}|$ に対応する。例えば、四脚場 $E_m{}^a| = e_m{}^a$ やグラヴィティーノ $E_m{}^{\underline{\alpha}}| = \psi_m{}^{\underline{\alpha}}$ がそうである。ゲージ変換 (7.1) 式を $\underline{\mu} \to m$ としてベクトル添字について考えて、その最低次を取れば、次の関係式を得る：

$$\delta_G(\xi^{\mathcal{B}} X_{\mathcal{B}}) h_m{}^{\mathcal{A}}| = \partial_m \xi^{\mathcal{A}}| + h_m{}^{\mathcal{C}}\, \xi^{\mathcal{B}}|\, f_{\mathcal{B}\mathcal{C}}{}^{\mathcal{A}}. \tag{7.25}$$

このゲージ変換では、ゲージパラメータは最低次 $\xi^{\mathcal{A}}| = \xi^{(0,0)\mathcal{A}}(x)$ とその空間微分のみで、θ の高次項 $\xi^{(n,m)\mathcal{A}}(x)$ $(n+m \geq 1)$ は含まれていない。従って、テンソル算法のゲージ場は higher θ ゲージ不変である。

さらに、ゲージ超場のみならず、次のことが言える。プライマリー超場とその共変微分の最低次に対応づけられる超共形多重項の各成分場もまた higher θ ゲージ不変である。例えば、テンソル算法における一般の超共形多重項 $[\mathcal{C}, \mathcal{Z}, \mathcal{H}, \cdots]$ は (5.24) で行ったようにプライマリー超場 Φ と

$$\mathcal{C} = \Phi|, \qquad \mathcal{Z}_\alpha = -i\nabla_\alpha \Phi|, \qquad \mathcal{H} = \frac{1}{4}(\nabla^2\Phi + \bar{\nabla}^2\Phi)|, \quad \cdots . \tag{7.26}$$

と対応づけられる。これらの共変微分が作用した量はその構成から共変量であるので、これらのゲージ変換にはゲージパラメータ $\xi^{\mathcal{A}}(x, \theta, \bar{\theta})$ の微分は含まれない。従って、これら共変微分が作用した超場の最低次項のゲージ変換はゲージパラメータの最低次 $\xi^{\mathcal{A}}| = \xi^{(0,0)\mathcal{A}}$ のみしか関わらない。例えば、1 階共変スピノル微分について

$$\delta(\xi^A P_A)\nabla_\alpha \Phi| = \xi^A| \, \nabla_A(\nabla_\alpha \Phi)| \tag{7.27}$$

である。従って超共形多重項の各成分場も higher θ ゲージ不変である。

この意味で、テンソル算法における超共形不変な作用はテンソル算法のゲージ変換 $\xi^{\mathcal{A}}(x) = \xi^{(0,0)\mathcal{A}}$ で不変であるのみならず、ゲージパラメータ超場全体 $\xi^{\mathcal{A}}(x, \theta, \bar{\theta})$ を用いてもゲージ不変である。

簡単のために共形超重力理論の F-type 作用 [24, 34] を考える：

$$S_F^{\text{comp}} = \int d^4x \, e\Big(-\frac{1}{4}\nabla^2 W + \frac{i}{2}\bar{\psi}_{a\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^a)^{\dot{\alpha}\beta}\nabla_\beta W - \big(\bar{\psi}_a \bar{\sigma}^{ab}\bar{\psi}_b\big)\, W\Big)\Big| + \text{h.c.} \tag{7.28}$$

この作用の被積分関数は四脚場 $e_m{}^a$、グラヴィティーノ $\psi_m{}^\alpha$、そして共変な超場の最低次 $W|$, $\nabla_\alpha W|$, $\nabla^2 W|$ で書かれている。これら全ての成分は higher θ ゲージ不変であるので、作用はゲージパラメータ超場全体でゲージ不変である。

実際、文献 [34] で導かれた F-type 作用はゲージパラメータ超場のもとでゲージ不変な超空間での作用

$$S_F^{\text{SS}} = \int d^4x d^2\theta \, \mathcal{E} W + \text{h.c.} \tag{7.29}$$

から導かれた。この文献 [34] での導出は higher θ ゲージ対称性を $E_\mu{}^\alpha = \delta_\mu{}^\alpha$ および $h_\mu{}^{\mathcal{A}'} = 0$ として固定していたが、最終的な成分場での作用 S_F^{comp} (7.28) 式は、やはりゲージパラメータ超場でゲージ不変である。結局 S_F^{comp} と S_F^{SS} はどちらもゲージパラメータ超場でゲージ不変であり、かつ特定のゲージで一致するため、両者はどのゲージでも等しい。

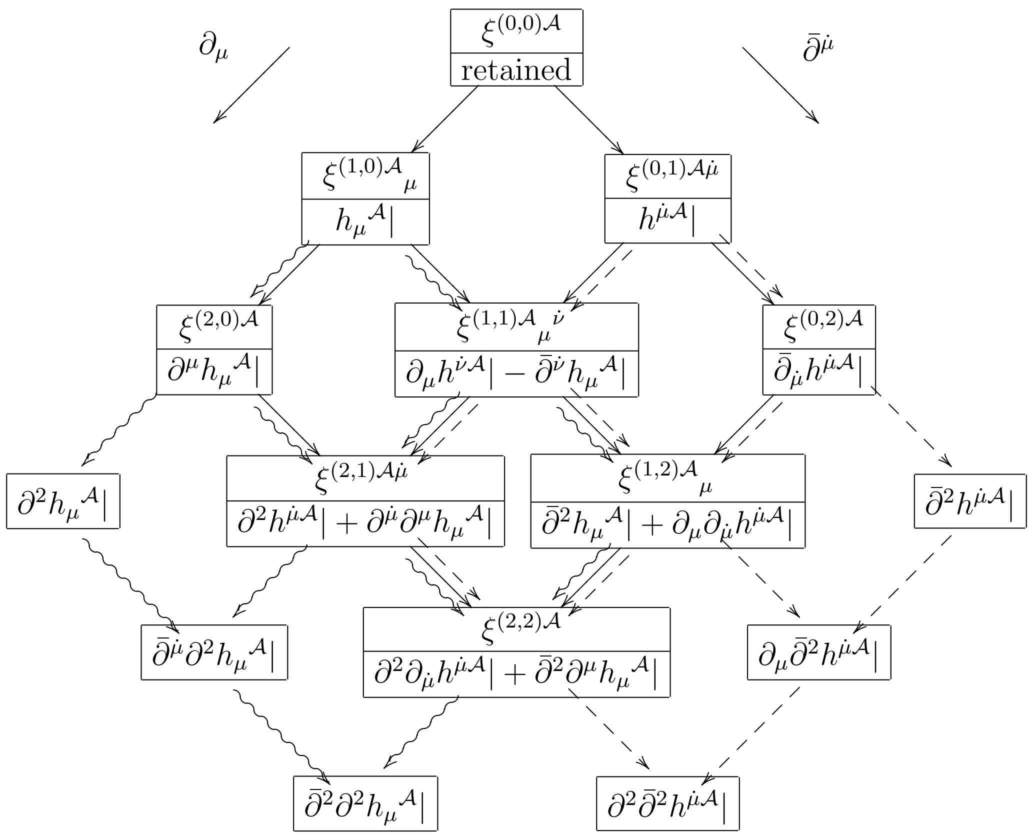

図 7.1: ゲージパラメータ超場 $\xi^{\mathcal{A}}$ の 3×3 個の $\theta^n \bar{\theta}^m$ 成分 $\xi^{(n,m)\mathcal{A}}$ $(n, m = 0, 1, 2)$ を表示したダイヤ図 (実線矢印)。他の 2 つのそれぞれ波線矢印および破線矢印で表示されたダイヤ図はそれぞれスピノルゲージ超場 $h_\mu{}^{\mathcal{A}}$ および $h^{\dot{\mu}\mathcal{A}}$ の $\theta^n \bar{\theta}^m$ 成分を表す。ゲージパラメータのダイヤ図とスピノルゲージ超場のダイヤ図の重なったところは、ゲージ固定されるスピノルゲージ超場とゲージ固定するゲージパラメータの成分の組み合わせを表す。この重なった部分において 0 もしくは定数にゲージ固定されるスピノルゲージ超場の組み合わせを 2 段の枠の下の部分にあらわに書いた。スピノルゲージ超場のダイヤ図でゲージパラメータのダイヤ図の外にある成分はゲージ固定できないが、本文で見るように他のテンソル算法と対応のある場を用いて書くことができる。

第8章　超共形対称性のゲージ固定の対応

ここでは、超共形対称性のゲージ固定の対応をより具体的に明らかにする。そして、共形超空間からポアンカレ超重力理論を得るための2通りのゲージ固定、すなわち、テンソル算法を経由するゲージ固定とポアンカレ超空間を経由するゲージ固定がどのように整合しているかを、具体的なゲージ条件を通じて議論する。テンソル算法では、標準的なEHおよびRS 項を持つゲージ固定はKU によって文献 [12] によって与えられたため、以降はKU ゲージと呼ぶことにする。

8.1　YM ゲージ場の対応

まず、YM ゲージ場と物質場が結合した共形超重力理論において、第4.2章で与えたテンソル算法でのゲージ場などの量と第6.1章で与えた共形超空間形式におけるものの対応を与えておく。

テンソル算法	共形超空間形式
$B_m^{(a)},\quad F_{mn}^{(a)},\quad \hat{F}_{ab}^{(a)}$	$\mathcal{A}_m^{(a)}\|,\quad \mathcal{F}_{mn}^{(a)}\|,\quad \mathcal{F}_{ab}^{(a)}\|$
$W_{\mathrm{R}}^{(a)},\quad W_{\mathrm{L}}^{(a)}$	$\mathcal{W}_\alpha^{(a)}\|,\quad -\mathcal{W}^{(a)\dot{\alpha}}\|$
$D^{(a)},\quad f_{(a)(b)}$	$\frac{i}{2}\nabla^\alpha\mathcal{W}_\alpha^{(a)}\| = \frac{i}{2}\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}\mathcal{W}^{(a)\dot{\alpha}}\|,\quad H_{(a)(b)}\|$
$iT^{(a)}{}_i{}^j z_j,\quad -iz^{*j}T^{(a)}{}_j{}^i$	$V_{(a)}^i\|,\quad \bar{V}_{(a)}^{i*}\|$

(8.1)

この対応において、テンソル算法のゲージ場 $B_m^{(a)}$ およびゲージーノ多重項 $W^{(a)}$ をゲージ結合定数 $\tilde{g}$ でリスケールした：$\tilde{g}B_m^{(a)} \to B_m^{(a)}$。

文献 [12] では、内部対称性は線形な場合、すなわちキリング・ベクトルが表現行列で表される場合について考えていた。より一般のキリング・ベクトルの場合は文献 [25] において構成されている。ケーラーポテンシャルを同じものとした時、本論文の $V_{(a)}^i|, \bar{V}_{(a)}^{i*}|$, $F_{(a)}|$ および $J_{(a)}|$ はそれぞれ文献 [25] の $k_{\alpha i}$, k_α^i, $3r_\alpha$ および $\mathcal{P}_\alpha(z, z^*)$ に対応する。

8.2　スーパーポテンシャルが 0 にならない場合のゲージ固定

共形超空間形式でのゲージ条件 (6.26) は YM ゲージ場がない時と同様に KU ゲージに対応することが次のように従う：

$$
\begin{aligned}
z_0 = \sqrt{3}\phi^{-\frac{1}{2}}(z, z^*) = e^{-\mathcal{G}/6} \quad &\leftrightarrow \quad \Phi^0\big| = e^{G/6}\big|, \\
\chi_{\mathrm{R}0} = -z_0\phi^{-1}\phi^i\chi_{\mathrm{R}i} = -\frac{1}{3}e^{-\mathcal{G}/6}\mathcal{G}^i\chi_{\mathrm{R}i} \quad &\leftrightarrow \quad \nabla_\alpha\Phi^0\big| = \frac{1}{3}e^{G/6}G_i\nabla_\alpha\Phi^i\big|.
\end{aligned}
\tag{8.2}
$$

YM ゲージ場がある場合にも 第 5 章で行った YM ゲージ場がない場合と同様の対応が成立するが、ここでは特にゲージ固定後のポアンカレ超重力理論における Q 変換について議論する。共変スピノル微分は共形超空間においてもポアンカレ超空間においても超対称性変換と同一視されるため、(6.28) 式は超共形対称性を用いて定義されたポアンカレ超重力理論における Q 変換 $Q^{\mathrm{P}}_{\underline{\alpha}}$ を導く：

$$
\delta_G(\eta^{\underline{\alpha}}Q^{\mathrm{P}}_{\underline{\alpha}}) = \delta_G(\eta^{\underline{\alpha}}Q_{\underline{\alpha}}) + \delta_G(\xi(A)'(\eta)A) + \delta_G(\xi(K)'(\eta)^B K_B). \tag{8.3}
$$

ここで、変換パラメータは $\xi(A)'(\eta) = \eta^\alpha A_\alpha + \bar{\eta}_{\dot{\alpha}}A^{\dot{\alpha}}$ および $\xi(K)'(\eta)^A = \eta^\beta f_\beta{}^A + \bar{\eta}_{\dot{\beta}}f^{\dot{\beta}A}$ である。(6.27) 式で得られたスピノルゲージ超場 $A_{\underline{\alpha}}$ のあらわな表式を用いて、 A ゲージ変換のパラメータが

$$
\xi(A)'(\eta)| = \frac{i}{4}G_j\eta^\alpha\mathcal{D}^{\mathrm{P}}_\alpha\Phi^j\big| - \frac{i}{4}G_{j*}\bar{\eta}_{\dot{\alpha}}\bar{\mathcal{D}}^{\mathrm{P}\,\dot{\alpha}}\bar{\Phi}^{j*}\big| \tag{8.4}
$$

となる。これらは YM ゲージ場がない場合の (5.78) 式と同じ形であるが、上記の共変微分 $\mathcal{D}^{\mathrm{P}}$ は YM ゲージ場についても共変であることに注意する。

ゲージ条件 (6.26) 式のもとでのスピノル K_A ゲージ超場 $f_{\underline{\alpha}}{}^A$ についても (6.26) 式および (4.96) 式、そして (4.97) 式をもちいることで、ゲージパラメータ $\xi(K)'(\eta)^B$ が

$$
\begin{aligned}
\xi(K)'(\eta)_\alpha\big| = &-\frac{1}{8}\Big(e^{-G/6}\nabla^2\Phi^0 - \frac{1}{3}G_i\nabla^2\Phi^i\Big)\eta_\alpha\big| \\
&- \frac{1}{12}\bigg(\Big(G_{ij} + \frac{1}{3}G_iG_j\Big)\eta^\gamma\nabla_\gamma\Phi^j + G_{ij^*}\bar{\eta}_{\dot{\beta}}\bar{\nabla}^{\dot{\beta}}\bar{\Phi}^{j^*}\bigg)\nabla_\alpha\Phi^i\big| \\
&- \frac{1}{12}e_c{}^m\left(G_i\nabla_m\Phi^i - G_{i^*}\nabla_m\bar{\Phi}^{i^*}\right)i\sigma^c_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\eta}^{\dot{\beta}}\big| - \frac{i}{3}e_c{}^m A_m i\sigma^c_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\eta}^{\dot{\beta}}\big|,
\end{aligned}
\tag{8.5}
$$

$$
\begin{aligned}
\xi(K)'(\eta)_a\big| = &-e_a{}^m(f_m{}^\beta\eta_\beta + f_{m\dot{\beta}}\bar{\eta}^{\dot{\beta}}) \\
&+ \frac{1}{2}e_a{}^m\psi_m{}^\alpha\big(\eta^\beta f_{\beta\alpha} + \bar{\eta}_{\dot{\beta}}f^{\dot{\beta}}{}_\alpha\big)\big| + \frac{1}{2}e_a{}^m\bar{\psi}_{m\dot{\alpha}}\big(\eta^\beta f_\beta{}^{\dot{\alpha}} + \bar{\eta}_{\dot{\beta}}f^{\dot{\beta}\dot{\alpha}}\big)\big|
\end{aligned}
\tag{8.6}
$$

となることがわかる。これらの形は (5.81) 式および (5.83) 式と形は同じである。これら (8.4) 式から (8.6) 式までより、変換パラメータは YM ゲージ場まで含んだ場合でもテンソル算法における (4.54) 式に対応することがわかった。

8.3 スーパーポテンシャルが 0 になり得る場合のゲージ固定

スーパーポテンシャルが 0 になる場合でも用いることができるゲージ条件 (6.31) 式はテンソル算法での文献 [25] および、等長ケーラー超空間 [32] と関連している。この関連は 第 5.5 章で議論したことと同様に (6.31) 式と (6.37) 式を用いて明らかにできる。特に、(8.3) 式におけるポアンカレ超重力理論の Q 変換を与えるパラメータは

$$\xi(A)'(\eta) = \eta^{\underline{\alpha}}\Big(A_{\underline{\alpha}} - \frac{i}{4}(F_{(a)} - \bar{F}_{(a)})\mathcal{A}_{\underline{\alpha}}\Big) = \frac{i}{4}K_j\eta^{\alpha}\tilde{\mathcal{D}}^{\mathrm{P}}_{\alpha}\Phi^j - \frac{i}{4}K_{j*}\bar{\eta}_{\dot{\alpha}}\bar{\tilde{\mathcal{D}}}^{\mathrm{P}\,\dot{\alpha}}\bar{\Phi}^{j*} \tag{8.7}$$

となる。これは (8.4) 式において $G \to K$ と置き換えたものと同じ形になる。他のパラメータ $\xi(K)'(\eta)^A$ についても (8.5) 式および (8.6) 式において同じ置き換え $G \to K$ をすることで得られる。

8.4 Higher θ ゲージ固定と超共形ゲージ固定の整合性

ここまでで、超共形対称性のゲージ固定と、その固定条件によるスピノルゲージ超場の表式について議論してきた。ここで、ゲージパラメータが固定するスピノルゲージ超場に対して、前章のテンソル算法へのゲージ固定に関連した次のような疑問が一つ存在する。共形超空間形式からテンソル算法にゲージ固定で移る時はスピノルゲージ超場の最低次は四脚場以外は $h_{\underline{\mu}}{}^{\mathcal{A}'}| = 0$ のように 0 に固定していた。これは、ローレンツ添字を持ったスピノルゲージ超場の最低次項もまた 0 に固定していることに等しい。すなわち $h_{\underline{\mu}}{}^{\mathcal{A}'}| = \delta_{\underline{\mu}}{}^{\underline{\alpha}}h_{\underline{\alpha}}{}^{\mathcal{A}'}| = 0$ である。しかし、KU ゲージの共形超空間形式で対応するものを構成した時、ゼロにならないスピノルゲージ超場 $A_{\underline{\alpha}}$ および $f_{\underline{\alpha}}{}^A$ が現れる。そしてそれらは上で見たようにポアンカレ超重力理論の Q 変換を共形超重力理論における Q 変換と関連づけるための A および K_A 変換に対応する。これらのゲージ固定条件はどのように整合しているのか。なぜテンソル算法ではこれらの消えないスピノルゲージ超場に対応するものを導入できたのか。そしてそれらの起源は何か。

これらに対する答えは、ゲージ条件の取り直しに注目することで見いだすことができる。A ゲージ超場を例として考える。共形超空間形式からテンソル算法に移る時には、ゲージパラメータの最低次以外はスピノルゲージ超場 $A_{\underline{\mu}}$ を固定するために用いられる。そして、特にスピノルゲージ超場の最低次項 $A_{\underline{\mu}}| = \delta_{\underline{\mu}}{}^{\underline{\alpha}}A_{\underline{\alpha}}|$ は、ゲージパラメータ超場の θ^1 成分 $\xi^{(1,0)}(A)_\mu = \partial_\mu\xi(A)|$ を用いて固定される。一方で、共形超空間形式からポアンカレ超空間に移る時は、ゲージパラメータ超場 $\xi(A)$, $\xi(D)$ および $\xi(K)$ の全ての成分をテンソル算法へのそれとは異なるゲージ条件を与えるために使う。例えば、第 5.5 章で

行ったように、KU ゲージの共形超空間形式で対応するゲージ条件をおく際には、$\xi(A)$ は $\xi(A) = \frac{3}{4i}\log(\bar{\Phi}^0/\Phi^0)$ ととる。このゲージパラメータ超場の形は、その θ^1 成分 $\partial_\mu \xi(A)|$ をもとの値から異なる値へと再設定する。特に、ポアンカレ超重力理論での Q 変換は一意であるため、スピノル A ゲージ超場はテンソル算法における (4.54) 式の A 変換項 $\theta(\varepsilon)$ に一致するべきである。

この取り直しをよりあらわに示す。A ゲージ変換をゲージパラメータを $\xi(A) = \frac{3}{4i}\log(\bar{\Phi}^0/\Phi^0)$ と選んでおこなった時、スピノルゲージ超場 $A_\mu|$ はテンソル算法に移るためにとったゲージ固定の値 $A_\mu| = 0$ から次のように再設定される：

$$A_\mu| \;=\; 0 + \frac{3}{4i}\partial_\mu \log(\bar{\Phi}^0/\Phi^0)| \;=\; \frac{3i}{4}\frac{1}{\Phi^0}\delta_\mu{}^\alpha \nabla_\alpha \Phi^0\Big|. \tag{8.8}$$

そして、KU ゲージの条件 $\Phi^0| = e^{G/6}|$ および $\nabla_\alpha \Phi^0| = \frac{1}{3}e^{G/6}G_i \mathcal{D}^{\mathrm{P}}_\alpha \Phi^i|$ を用いることで、

$$A_\alpha| = \frac{i}{4}G_i \mathcal{D}^{\mathrm{P}}_\alpha \Phi^i| \tag{8.9}$$

となる。これは共形超空間からポアンカレ超空間へ移ったときのゲージ固定条件における $A_\alpha|$ の条件、すなわち (8.4) 式の $\xi(A)'(\eta)$ に一致する。同じことが K_A ゲージ超場についても言えるが、複雑である。KU が見出したことは、上記のような複雑であからさまなゲージ変換の議論をせずに (4.54) 式を導いたことである。すなわち、ポアンカレ超重力理論にゲージ固定したときのスピノルゲージ超場の表式に対応するものは、ポアンカレ超重力理論の Q 変換を D, A, K_A ゲージ固定条件を変えないように変形した Q 変換と同定することで見いだすことができる。

第9章　結論

本論文では、4次元$\mathcal{N}=1$共形超重力理論の定式化であるテンソル算法と共形超空間形式の等価性を明らかにした。まず、第5章では、テンソル算法と共形超空間形式の両形式間で、作用を構成するために必要な諸量の対応を構築した。具体的には、重力を記述するために用いる超共形対称性に属するゲージ場および曲率とその拘束条件、物質場やYMゲージ場を記述するために用いる超共形多重項、カイラル射影、超共形不変な作用そして$\boldsymbol{u}$-associated 微分の対応を係数まで含めて明らかにした。その中で、KU [30] によって議論された共形超空間の共変スピノル微分への特別な制限は存在しないことを超共形対称性を用いて示した。

第6章では、共形超空間に素粒子標準模型を記述する上で欠かせない YM ゲージ場を導入し、YM ゲージ場と物質場が結合した超重力理論の作用を構成した。そして、超空間において標準的な EH 項を得る超共形ゲージ対称性のゲージ固定を2つ示した。特に、$\Phi^{\mathrm{c}}=e^{K/6}$ というゲージ条件から等長ケーラー超空間が得られることを示した。また、このゲージ条件を変えない変形された YM ゲージ変換も共形超空間の立場から明らかにした。

第7章では、まず共形超空間からテンソル算法を得るためのゲージ固定について論じた。すなわち、共形超空間およびポアンカレ超空間において、テンソル算法では直接表示されないスピノルゲージ超場 $h_{\underline{\mu}}{}^{\mathcal{A}}$ の θ 展開の各項は、テンソル算法に存在する量で表されるか、もしくは同じくテンソル算法では直接現れないゲージパラメータ超場の θ 展開の高次項のゲージ固定で消去されるかのいずれかであることを具体的に示した。そして、このゲージ固定のもとで、ベクトルゲージ超場 $h_m{}^{\mathcal{A}}$ の θ 展開の各項は全てテンソル算法に存在する量で表されることを示した。

第8章では、共形超空間形式における YM ゲージ場と物質場が結合した超重力理論において標準的な EH 項を与えるそれぞれのゲージ固定の対応を調べた。この2種類のゲージ固定、すなわち共形超空間からテンソル算法を得る際に行うスピノルゲージ超場のゲージ固定と、超共形対称性をゲージ固定したときに従うスピノルゲージ超場の固定は異なる値である。この違いは矢印 IV でテンソル算法からポアンカレ超重力理論に行く際に、スピノルゲージ超場がゲージ条件の取り直しを受けることまで考慮すると無矛盾に理解で

きることを確かめた。

本論文の結果より、超重力理論に新たな発展があることが期待される。特に、従来の定式化では構成が困難だった作用の構成を共形超空間で行うことができる。実際、付録 D にまとめたように、共形超空間を用いた反対称テンソルゲージ対称性を持つ理論と超重力理論の結合が Aoki–Higaki–Yamada–Yokokura [44] そして Yokokura [45] によりなされている。また、共形超空間による超重力理論の定式化は 4 次元 $\mathcal{N} = 1$ の場合に限らず、より高い超対称性の場合 [53–58]、高次元の場合 [59, 60]、低次元の場合 [61, 62] についても明らかにされつつある。

さらに、共形超空間で構成される新たな作用を本論文で得られた対応を用いてテンソル算法で表示することで、散乱振幅などの観測量の計算を系統的に行うことや、共形超空間形式を直接用いた観測量の計算が期待される。実際、共形超空間形式を用いた有効作用の計算が文献 [63] によってなされている。

謝辞

本論文を執筆するにあたり、筆者は多くの方のお世話になりました。

まず、檜垣徹太郎専任講師には、本論文の主査として、そして博士課程の指導教員として並ならぬご指導を頂きました。厚く感謝申し上げます。

白濱圭也教授、山本直希准教授、服部広大専任講師そして京都大学の吉岡興一准教授には、本論文の副査を務めていただき、厳しい指摘を頂きました。本研究の共同研究者であり、修士課程１年次の指導教員であった吉岡氏には、転勤されても筆者と頻繁に議論してくださったこと、深く感謝しております。

京都産業大学益川塾の九後太一教授には、吉岡氏とともに本研究の共同研究者として、深く議論してくださったことに厚く御礼を申し上げます。本研究のアイディアは九後氏の集中講義から得たものでした。

最後になりましたが、博士課程の３年間見守ってくださった両親、そして家族に心より感謝申し上げます。

付 録A　記法

ここでは本論文で用いる記法についてまとめる。また、テンソル算法における本論文の先行研究である KU [30] の記法と、その記法と本論文での記法の対応を示す。

A.1　本論文での記法

まず、添字について説明する。超空間を用いる形式では a から始まるローマ小文字 $a, b, ...$ をローレンツ・ベクトル添字、m から始まるローマ小文字 $m, n, ...$ をアインシュタイン・ベクトル添字、α から始まるギリシャ文字 $\alpha, \beta, ...$ をローレンツ・スピノル添字、μ から始まるギリシャ文字 $\mu, \nu, ...$ をアインシュタイン・スピノル添字に用いる。A から始まるローマ大文字 $A, B, \ldots$ でローレンツ・ベクトルおよびスピノルの組を表す。同様に、M から始まるローマ大文字 $M, N, \ldots$ でアインシュタイン・ベクトルおよびスピノルの組を表す。ただし、超空間を用いないテンソル算法では、A は超共形代数の添字を表す。

次にミンコフスキー時空の規約について説明する。本論文ではミンコフスキー計量と完全反対称テンソルを次のように定義する。

$$\eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1), \qquad \epsilon^{0123} = -\epsilon_{0123} = 1. \tag{A.1}$$

2 成分スピノルの標準的な縮約を

$$\xi\psi = \xi^\alpha \psi_\alpha, \qquad \bar{\xi}\bar{\psi} = \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \tag{A.2}$$

とする。スピノル添字の上下は

$$\psi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta, \qquad \psi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}\psi^\beta, \qquad \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\psi}_{\dot{\beta}}, \qquad \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\beta}} \tag{A.3}$$

であるとする。ここで、$\epsilon^{\alpha\beta}$ および $\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ は 2 階の反対称テンソルで、その成分は $\epsilon^{12} = \epsilon_{21} = 1$ であるとする。スピノルのエルミート共役は $(\psi_\alpha)^\dagger = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}$ で定義する。また、スピノルの積のエルミート共役は順番が入れ替わるように次のように定義する：

$$(\xi_\alpha \psi_\beta)^\dagger = \bar{\psi}_{\dot{\beta}} \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}. \tag{A.4}$$

4 次元のパウリ行列 σ_a は

$$(\sigma_0,\,\sigma_1,\,\sigma_2,\,\sigma_3)_{\alpha\dot\beta}=\Bigl(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\Bigr) \tag{A.5}$$

で定義する。これらのエルミート共役は

$$(\bar\sigma_a)^{\dot\alpha\beta}=\varepsilon^{\dot\alpha\dot\gamma}\varepsilon^{\beta\delta}(\sigma_a)_{\delta\dot\gamma}=(\sigma_a)^{\beta\dot\alpha} \tag{A.6}$$

である。パウリ行列を用いることで、任意のローレンツ・ベクトル添字を持ったベクトル V_a は点付き・点無し混合スピノル $V_{\alpha\dot\beta}$ で表すことができる。この変換の記法を次のように定義する。

$$V_{\alpha\dot\beta}:=(\sigma^a)_{\alpha\dot\beta}V_a,\qquad V^a=-\frac{1}{2}\,(\bar\sigma^a)^{\dot\beta\alpha}\,V_{\alpha\dot\beta}\,. \tag{A.7}$$

行列 σ^{ab} および $\bar\sigma^{ab}$ は

$$(\sigma^{ab})_\alpha{}^\beta=\frac{1}{4}(\sigma^a\bar\sigma^b-\sigma^b\bar\sigma^a)_\alpha{}^\beta,\qquad(\bar\sigma^{ab})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}=\frac{1}{4}(\bar\sigma^a\sigma^b-\bar\sigma^b\sigma^a)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} \tag{A.8}$$

で定義され、次の条件を満たす：

$$\varepsilon_{abcd}(\sigma^{cd})_\alpha{}^\beta=-2i(\sigma_{ab})_\alpha{}^\beta,\qquad\varepsilon_{abcd}(\bar\sigma^{cd})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}=2i(\bar\sigma_{ab})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\,. \tag{A.9}$$

ϵ_{abcd} と σ_{ab} の性質を用いることで、2 階の反対称テンソル F_{ab} をカイラル部分と反カイラル部分に分解できる：

$$F_{ab}=-(\epsilon\sigma_{ab})^{\alpha\beta}F^-_{\alpha\beta}+(\bar\sigma_{ab}\epsilon)^{\dot\alpha\dot\beta}F^+_{\dot\alpha\dot\beta}, \tag{A.10}$$

ここで

$$F^-_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(\sigma^{ab}\epsilon)_{\alpha\beta}F_{ab},\qquad F^+_{\dot\alpha\dot\beta}=-\frac{1}{2}(\epsilon\bar\sigma^{ab})_{\dot\alpha\dot\beta}F_{ab} \tag{A.11}$$

とする。2 階の反対称テンソル F_{ab} のホッジ双対を

$$(*F)_{ab}:=\frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}F^{cd}=i(\epsilon\sigma_{ab})^{\alpha\beta}F^-_{\alpha\beta}+i(\bar\sigma_{ab}\epsilon)^{\dot\alpha\dot\beta}F^+_{\dot\alpha\dot\beta} \tag{A.12}$$

で定義する。これより、 F_{ab} の自己双対部分と反自己双対部分は

$$F^\pm_{ab}:=\frac{1}{2}\bigl(F_{ab}\mp i(*F)_{ab}\bigr) \tag{A.13}$$

と書ける。これらはカイラル部分と反カイラル部分にそれぞれ一致する：

$$F^-_{ab}=-(\epsilon\sigma_{ab})^{\alpha\beta}F^-_{\alpha\beta},\qquad F^+_{ab}=(\bar\sigma_{ab}\epsilon)^{\dot\alpha\dot\beta}F^+_{\dot\alpha\dot\beta}. \tag{A.14}$$

最後にテンソル算法で用いた 4 成分スピノルと 2 成分スピノルの関係について説明する。4 成分スピノル Ψ は 2 成分スピノル $\psi_\alpha, \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$ を用いて

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \psi^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{\mathrm{R}} \\ \psi_{\mathrm{L}} \end{pmatrix}, \qquad \bar{\Psi} = \Psi^T C = \begin{pmatrix} \psi^\alpha & \psi_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_{\mathrm{R}} & \bar{\psi}_{\mathrm{L}} \end{pmatrix} \tag{A.15}$$

と書くことにする。ここで

$$C = \begin{pmatrix} -\epsilon^{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & -\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{pmatrix}, \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} -\epsilon_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & -\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{pmatrix} \tag{A.16}$$

である。

A.2　テンソル算法の記法

ここではテンソル算法における KU [30] の記法を参照のためまとめておく。

まず添字について説明する。テンソル算法では、ローマ字をローレンツ添字に、μ から始まるギリシャ文字 $\mu, \nu, \ldots$ をアインシュタイン添字に、α から始まるギリシャ文字 $\alpha, \beta, \ldots$ を 2 成分スピノルに用いる。ローマ大文字 $A, B, ...$ は超共形代数の添字に用いる。

次にミンコフスキー時空の記法の規約について説明する。KU ではテンソル算法では、ミンコフスキー計量 $\eta_{ab} = (-1, 1, 1, 1)$ の負符号を時間座標を虚数に $t \to -ix^4$ とすることで形式的に計量の符号を全て正にとる記法を用いる。このとき、計量と完全反対称テンソルは

$$\delta_{ab} = \mathrm{diag}(1, 1, 1, 1), \qquad \varepsilon^{1234} = 1 \tag{A.17}$$

で与えられる。ここで、$a, b = 1, 2, 3, 4$ である。計量の符号に関する利便性のため、超重力理論の文献、特にテンソル算法を用いた文献ではこの記法がしばしば用いられている。ここで、この記法はミンコフスキー空間を扱うためのものであり、ユークリッド的な空間を考えてはいないことに注意する。

ガンマ行列は次の反交換関係を満たすものとして導入する：

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} = 2\delta_{ab}. \tag{A.18}$$

また、γ_5 および σ_{ab} は次のように定義される：

$$\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_{ab} = \frac{1}{4}(\gamma_a\gamma_b - \gamma_b\gamma_a) = \begin{pmatrix} (\sigma_{ab})_\alpha{}^\beta & 0 \\ 0 & (\bar{\sigma}_{ab})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \end{pmatrix}. \tag{A.19}$$

また、テンソル算法では、荷電共役行列は

$$C = \begin{pmatrix} -\epsilon^{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{pmatrix}, \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & -\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{pmatrix} \tag{A.20}$$

である。ここで $\epsilon^{\alpha\beta}$ はその成分が $\epsilon^{12} = \epsilon_{12} = 1$ である反対称テンソルである。添字の上下は

$$\psi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta, \qquad \psi_\alpha = \psi^\beta \epsilon_{\beta\alpha} \tag{A.21}$$

によって定義する。

2 階の反対称テンソル F_{ab} のホッジ双対および自己双対、反自己双対部分を

$$\tilde{F}_{ab} := \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}F^{cd}, \qquad F^{\pm}_{ab} := \frac{1}{2}(F_{ab} \pm \tilde{F}_{ab}) \tag{A.22}$$

で定義する。特に σ_{ab} についての関係式 $\tilde{\sigma}_{ab} = -\gamma_5\sigma_{ab}$ を用いると、

$$\sigma_{ab}\psi_{\mathrm{R}} = \sigma^-_{ab}\psi_{\mathrm{R}}, \qquad \sigma_{ab}\psi_{\mathrm{L}} = \sigma^+_{ab}\psi_{\mathrm{L}}, \qquad \sigma^{ab}F^{\pm}_{ab} = \frac{1 \mp \gamma_5}{2}\sigma^{ab}F_{ab} \tag{A.23}$$

を得る。

A.3 記法の対応

以下にテンソル算法と本論文の記法の対応をまとめる。

テンソル算法	本論文
δ_{ab}	η_{ab}
$\epsilon^{\alpha\beta},\quad \epsilon_{\alpha\beta}$	$\epsilon^{\alpha\beta},\quad -\epsilon_{\alpha\beta}$
$\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}},\quad \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$	$\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}},\quad -\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$
$\begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \psi^\alpha & \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \psi^\alpha & \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$
γ_a	$i\gamma_a = i\begin{pmatrix} 0 & (\sigma_a)_{\alpha\dot{\beta}} \\ (\bar{\sigma}_a)^{\dot{\alpha}\beta} & 0 \end{pmatrix}$
γ_5	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
σ_{ab}	$-\begin{pmatrix} (\sigma_{ab})_\alpha{}^\beta & 0 \\ 0 & (\bar{\sigma}_{ab})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \end{pmatrix}$
ε_{abcd}	$-i\varepsilon_{abcd}$
$\tilde{F}_{ab}$	$-i(*F)_{ab}$
$F^{\pm}_{ab}$	$F^{\pm}_{ab}$

(A.24)

A.4 Implicit Grading

文献 [34,64] において導入された、大文字の添字を用いている限りは交換関係などに現れる統計因子はあらわに書かずに扱うことができるという約束 “ implicit grading” について説明する。ボソン的量の間には自然に交換関係が定義されていたのに対し、フェルミオン的量の間に自然に定義されるのは反交換関係である。超対称性理論、とくに超場形式においては例えば共変微分を ∇_A と書き、ボソンとフェルミオンを大文字のローレンツ添字でひとまとまりにして扱っている。例えば共変微分の交換関係について、ボソンとフェルミオン両方を同時に記述するには、

$$-R_{AB} = \nabla_A\nabla_B - (-)^{AB}\nabla_B\nabla_A = [\nabla_A, \nabla_B\} \tag{A.25}$$

と統計因子をあらわにつけなければならない。さらには、

$$R_{MN} = (-)^{A(N+B)}E_M{}^A E_N{}^B R_{AB}, \tag{A.26}$$

$$X = (-)^B Y_B{}^B \tag{A.27}$$

となる。しかし、これらの因子は大文字の添字の順番が基準となる量に対して入れ替わったとき、他の添字を超えて和をとるとき、そして下から上に和をとった時にのみ現われる。そして、それらはフェルミオン的添字に対してのみ現れるので、大文字の添字を使っているときには常にボソン的な量として扱い、特にフェルミオンの添字を扱うときに grading を復活すれば良い。従って、大文字の添字を用いる範囲では、これは

$$-R_{AB} = [\nabla_A, \nabla_B], \quad R_{MN} = E_M{}^A E_N{}^B R_{AB}, \quad X = Y_B{}^B \tag{A.28}$$

と書けばよい。

付 録B　超共形多重項のQ 変換則

一般の超共形多重項 $[\mathcal{C}_\Gamma, \mathcal{Z}_\Gamma, \mathcal{H}_\Gamma, \mathcal{K}_\Gamma, \mathcal{B}_{a\Gamma}, \Lambda_\Gamma, \mathcal{D}_\Gamma]$ の Q 変換則 [30] を以下にまとめる：

$$
\begin{aligned}
\delta_Q(\varepsilon)\mathcal{C}_\Gamma &= \frac{1}{2} i\bar{\varepsilon}\gamma_5 \mathcal{Z}_\Gamma, \\
\delta_Q(\varepsilon)\mathcal{Z}_\Gamma &= (-)^\Gamma \frac{1}{2}(i\gamma_5 \mathcal{H}_\Gamma - \mathcal{K}_\Gamma - \gamma^a \mathcal{B}_{a\Gamma} - \gamma^a D_a \mathcal{C}_\Gamma \gamma_5)\varepsilon, \\
\delta_Q(\varepsilon)\mathcal{H}_\Gamma &= \frac{1}{2} i\bar{\varepsilon}\gamma_5 (i\gamma^a D_a \mathcal{Z}_\Gamma + \Lambda_\Gamma), \\
\delta_Q(\varepsilon)\mathcal{K}_\Gamma &= -\frac{1}{2}\bar{\varepsilon}(i\gamma^a D_a \mathcal{Z}_\Gamma + \Lambda_\Gamma), \\
\delta_Q(\varepsilon)\mathcal{B}_{a\Gamma} &= -\frac{1}{2}\bar{\varepsilon}(D_a \mathcal{Z}_\Gamma + i\gamma_a \Lambda_\Gamma) + \frac{1}{4} R_{bc}(Q)\gamma_5 \gamma_a \varepsilon (\Sigma^{bc}\mathcal{C})_\Gamma, \\
\delta_Q(\varepsilon)\Lambda_\Gamma &= (-)^\Gamma \frac{1}{2}(-\sigma^{ab}\mathcal{F}_{ab\,\Gamma} + i\gamma_5 \mathcal{D}_\Gamma)\varepsilon \\
&\quad + \frac{1}{8}\left(-\gamma_c \varepsilon R_{ab}(Q)\gamma^c (\Sigma^{ab}\mathcal{Z})_\Gamma - \gamma_5 \gamma_c \varepsilon R_{ab}(Q)\gamma_5 \gamma^c (\Sigma^{ab}\mathcal{Z})_\Gamma\right), \\
\delta_Q(\varepsilon)\mathcal{D}_\Gamma &= -\frac{1}{2}\bar{\varepsilon}\gamma_5 \gamma^a D_a \Lambda_\Gamma - \frac{1}{4}\bar{\varepsilon}(R_{ab}(A) - i\gamma_5 (*R)_{ab}(A))(\Sigma^{ab}\mathcal{Z})_\Gamma \\
&\quad + (-)^\Gamma \frac{1}{4}\bar{\varepsilon}\big(i\gamma_5 (\Sigma^{ab}\gamma^c \mathcal{B}_c)_\Gamma - (\Sigma^{ab}\gamma^c D_c \mathcal{C})_\Gamma\big)(R_{ab}(Q)C^{-1})^T.
\end{aligned}
\tag{B.1}
$$

ここで、$\mathcal{D}_\Gamma$ の Q 変換則における C は荷電共役行列

$$
C = \begin{pmatrix} -\epsilon^{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & -\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{pmatrix} \tag{B.2}
$$

である。この変換則を「標準形」と呼ぶ。ここで、Λ_Γ の Q 変換における $\mathcal{F}_{ab\,\Gamma}$ の定義は

$$
\mathcal{F}_{ab\,\Gamma} = D_a \mathcal{B}_{b\Gamma} - D_b \mathcal{B}_{a\Gamma} + \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}[D^c, D^d]\mathcal{C}_\Gamma \tag{B.3}
$$

である。

付 録C　対応の導出

ここでは、任意のローレンツ添字を持った超共形多重項の対応 (5.24) と、カイラル射影の対応 (5.33) の導出を詳細に議論する。

C.1　任意のローレンツ添字を持った超共形多重項

ここでは、テンソル算法における (4.42) 式の超共形多重項 $\mathcal{V}_\Gamma$ と、共形超空間形式における (4.84) 式のプライマリー超場 Φ_Γ の対応を調べる。

まず、最低次の対応は、それぞれの超共形変換則から従う。ここで、最低次の対応には全体にかかる係数の不定性があるが、それを次の対応で固定する

$$\mathcal{C}_\Gamma \quad \leftrightarrow \quad \Phi_\Gamma|. \tag{C.1}$$

超共形多重項の高次項の対応は、Q 変換を順に行うことで得られる。共形超空間形式においてはプライマリー超場に対する Q 変換は超共形共変スピノル微分で与えられる: $\delta_G(\xi^{\underline{\alpha}}Q_{\underline{\alpha}}) = \xi^{\underline{\alpha}}\nabla_{\underline{\alpha}}$。なぜならプライマリー超場の添字はローレンツ添字しか持っていないからである。(5.2) 式にあるように、Q 変換のパラメータの対応は $\bar{\varepsilon} \leftrightarrow 2\begin{pmatrix}\xi^\alpha & \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\end{pmatrix}|$ であることに注意して、以下のように変換則から対応を決める。

まず、第 2 項 $\mathcal{Z}_{\alpha\Gamma}$ の対応は初項 $\mathcal{C}_\Gamma$ の Q 変換の対応から得られる。すなわち、

$$\delta_Q(\varepsilon)\mathcal{C}_\Gamma \quad \leftrightarrow \quad (\xi^\alpha\nabla_\alpha + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}})\Phi_\Gamma = \frac{1}{2}i\begin{pmatrix}2\xi^\alpha & 2\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i\nabla_\alpha\Phi_\Gamma\\ +i\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}}\Phi_\Gamma\end{pmatrix}. \tag{C.2}$$

(B.1) 式の $\mathcal{C}_\Gamma$ の変換則 $\delta_Q(\varepsilon)\mathcal{C}_\Gamma$ および (A.24) 式の γ_5 の対応を用いて第 2 項の対応を得る：

$$\mathcal{Z}_\Gamma \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}-i\nabla_\alpha\Phi_\Gamma\\ +i\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}}\Phi_\Gamma\end{pmatrix}\Bigg|. \tag{C.3}$$

他の成分場の対応も同様である。第 2 項の Q 変換から

$$
\begin{aligned}
\delta_Q(\varepsilon)\mathcal{Z}_\Gamma \quad &\leftrightarrow \quad (\xi^\alpha\nabla_\alpha + \bar{\xi}_{\dot\alpha}\bar{\nabla}^{\dot\alpha}) \begin{pmatrix} -i\nabla_\beta\Phi_\Gamma \\ +i\bar{\nabla}^{\dot\beta}\Phi_\Gamma \end{pmatrix} \\
&= (-)^\Gamma \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}(\nabla^2\Phi_\Gamma + \bar{\nabla}^2\Phi_\Gamma)\, i \begin{pmatrix} \delta_\beta{}^\alpha & 0 \\ 0 & -\delta^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha} \end{pmatrix} \right. \\
&\qquad - \frac{1}{4}(-i)(\nabla^2\Phi_\Gamma - \bar{\nabla}^2\Phi_\Gamma) \begin{pmatrix} \delta_\beta{}^\alpha & 0 \\ 0 & \delta^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha} \end{pmatrix} \\
&\qquad - \Big(-\frac{1}{4}(\bar{\sigma}_c)^{\gamma\dot\gamma}[\nabla_\gamma, \bar{\nabla}_{\dot\gamma}]\Phi_\Gamma \Big)\, i \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^c)_{\beta\dot\alpha} \\ (\bar{\sigma}^c)^{\dot\beta\alpha} & 0 \end{pmatrix} \\
&\qquad \left. + i \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^c)_{\beta\dot\gamma} \\ (\bar{\sigma}^c)^{\dot\beta\gamma} & 0 \end{pmatrix} \nabla_c\Phi_\Gamma\, i \begin{pmatrix} \delta_\gamma{}^\alpha & 0 \\ 0 & -\delta^{\dot\gamma}{}_{\dot\alpha} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 2\xi_\alpha \\ 2\bar{\xi}^{\dot\alpha} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{C.4}
$$

が従う。(B.1) 式の $\delta_Q(\varepsilon)\mathcal{Z}_\Gamma$ および (A.24) 式の γ 行列の対応を用いると、$\mathcal{H}_\Gamma, \mathcal{K}_\Gamma, \mathcal{B}_{a\Gamma}$ の対応が以下のように定まる：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_\Gamma \quad &\leftrightarrow \quad \frac{1}{4}(\nabla^2\Phi_\Gamma + \bar{\nabla}^2\Phi_\Gamma)|, \qquad \mathcal{K}_\Gamma \quad \leftrightarrow \quad -\frac{1}{4}i(\nabla^2\Phi_\Gamma - \bar{\nabla}^2\Phi_\Gamma)|, \\
\mathcal{B}_{a\Gamma} \quad &\leftrightarrow \quad -\frac{1}{4}(\bar{\sigma}_a)^{\dot\beta\beta}[\nabla_\beta, \bar{\nabla}_{\dot\beta}]\Phi_\Gamma|.
\end{aligned}
\tag{C.5}
$$

さらに $\mathcal{H}_\Gamma$ の Q 変換は

$$
\begin{aligned}
\delta_Q(\varepsilon)\mathcal{H}_\Gamma \quad &\leftrightarrow \quad (\xi^\alpha\nabla_\alpha + \bar{\xi}_{\dot\alpha}\bar{\nabla}^{\dot\alpha}) \left(\frac{1}{4}(\nabla^2\Phi_\Gamma + \bar{\nabla}^2\Phi_\Gamma) \right) \\
&= \frac{1}{2} i \begin{pmatrix} 2\xi^\alpha & 2\bar{\xi}_{\dot\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left(i \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^c)_{\alpha\dot\beta} \\ (\bar{\sigma}^c)^{\dot\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} \nabla_c \begin{pmatrix} -i\nabla_\beta\Phi_\Gamma \\ +i\bar{\nabla}^{\dot\beta}\Phi_\Gamma \end{pmatrix} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{4} i \begin{pmatrix} -\bar{\nabla}^2\nabla_\alpha\Phi_\Gamma + 8\mathcal{W}_\alpha\Phi_\Gamma \\ +\nabla^2\bar{\nabla}^{\dot\alpha}\Phi_\Gamma + 8\mathcal{W}^{\dot\alpha}\Phi_\Gamma \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}
\tag{C.6}
$$

である。ここで、次の恒等式を用いた：

$$
\begin{aligned}
\nabla_\alpha\bar{\nabla}^2 - \bar{\nabla}^2\nabla_\alpha + 4i\nabla_{\alpha\dot\beta}\bar{\nabla}^{\dot\beta} + 8\mathcal{W}_\alpha = 0, \\
\bar{\nabla}^{\dot\alpha}\nabla^2 - \nabla^2\bar{\nabla}^{\dot\alpha} + 4i\nabla^{\dot\alpha\beta}\nabla_\beta - 8\mathcal{W}^{\dot\alpha} = 0.
\end{aligned}
\tag{C.7}
$$

これらの恒等式は、単に超共形共変スピノル微分の反交換関係より従う。(B.1) 式の $\delta_Q(\varepsilon)\mathcal{H}_\Gamma$ を用いることで Λ_Γ の対応が

$$
\Lambda_\Gamma \quad \leftrightarrow \quad \frac{i}{4} \begin{pmatrix} -\bar{\nabla}^2\nabla_\alpha\Phi_\Gamma \\ +\nabla^2\bar{\nabla}^{\dot\alpha}\Phi_\Gamma \end{pmatrix} \Bigg| + 2i \begin{pmatrix} \mathcal{W}_\alpha \\ \mathcal{W}^{\dot\alpha} \end{pmatrix} \Phi_\Gamma| \tag{C.8}
$$

と求まる。Λ_Γ の対応は $\mathcal{K}_\Gamma$ もしくは $\mathcal{B}_{a\Gamma}$ の Q 変換の対応によっても求めることができ、それらは (C.8) 式と一致することを確かめることができる。

最後に $\mathcal{D}_\Gamma$ の対応を Λ_Γ の Q 変換則から求める。(C.8) 式の Q 変換は次のようになる。まず Λ_Γ の点無しスピノル成分について、

$$\begin{aligned}\delta_Q(\varepsilon)\Lambda_{\Gamma\alpha} \leftrightarrow (\xi^\beta\nabla_\beta + \bar{\xi}_{\dot\beta}\bar{\nabla}^{\dot\beta})\left(\frac{-i}{4}\bar{\nabla}^2\nabla_\alpha\Phi_\Gamma + 2i\mathcal{W}_\alpha\Phi_\Gamma\right)&\\ = \xi^\beta(\sigma^{ab})_{\beta\alpha}\left(\nabla_a B_{b\Gamma} - \nabla_b B_{a\Gamma} - i[\nabla_a, \nabla_b]\Phi_\Gamma\right)&\\ + i\xi_\alpha\left(\frac{1}{8}\nabla^\beta\bar{\nabla}^2\nabla_\beta\Phi_\Gamma - \mathcal{W}^\beta\nabla_\beta\Phi_\Gamma\right)&\\ + 2i\bar{\xi}_{\dot\beta}(R(P)_{cd})_\alpha M^{dc}\bar{\nabla}^{\dot\beta}\Phi_\Gamma.&\end{aligned} \tag{C.9}$$

ここで、2 行目において $B_{a\Gamma}$ を元の Φ_Γ を用いて

$$B_{a\Gamma} = -\frac{1}{4}(\bar{\sigma}_a)^{\dot\beta\beta}[\nabla_\beta, \bar{\nabla}_{\dot\beta}]\Phi_\Gamma \tag{C.10}$$

と定義した。この最低次項はテンソル算法における (C.5) 式の $\mathcal{B}_{a\Gamma}$ に一致する。Λ_Γ の点付きスピノル部分についても同様のことを行うことができる。これらより、Λ_Γ の Q 変換の対応は次のようになる：

$$\begin{aligned}&\delta_Q(\varepsilon)\Lambda_\Gamma\\ &\leftrightarrow (\xi^\beta\nabla_\beta + \bar{\xi}_{\dot\beta}\bar{\nabla}^{\dot\beta})\left(\frac{i}{4}\begin{pmatrix}-\bar{\nabla}^2\nabla_\alpha\Phi_\Gamma\\ +\nabla^2\bar{\nabla}^{\dot\alpha}\Phi_\Gamma\end{pmatrix} + 2i\begin{pmatrix}\mathcal{W}_\alpha\\ \mathcal{W}^{\dot\alpha}\end{pmatrix}\Phi_\Gamma\right)\\ &= (-)^\Gamma\frac{1}{2}(-1)\begin{pmatrix}(\sigma^{ab})_\alpha{}^\gamma & 0\\ 0 & (\bar{\sigma}^{ab})^{\dot\alpha}{}_{\dot\gamma}\end{pmatrix}\left(\nabla_a B_{b\Gamma} - \nabla_b B_{a\Gamma} + \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}[\nabla^c, \nabla^d]\Phi_\Gamma\right)\begin{pmatrix}2\xi_\gamma\\ 2\bar{\xi}^{\dot\gamma}\end{pmatrix}\\ &\quad + (-)^\Gamma\frac{1}{2}i\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\left(\frac{1}{8}\bar{\nabla}_{\dot\beta}\nabla^2\bar{\nabla}^{\dot\beta}\Phi_\Gamma + \mathcal{W}_{\dot\beta}\bar{\nabla}^{\dot\beta}\Phi_\Gamma\right)\begin{pmatrix}2\xi_\alpha\\ 2\bar{\xi}^{\dot\alpha}\end{pmatrix}\\ &\quad + \frac{1}{8}i\begin{pmatrix}0 & (\sigma_c)_{\alpha\dot\beta}\\ (\bar{\sigma}_c)^{\dot\alpha\beta} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\xi_\beta\\ 2\bar{\xi}^{\dot\beta}\end{pmatrix}\\ &\qquad \times(-2)\begin{pmatrix}(R(P)_{ab})^\delta & (R(P)_{ab})_{\dot\delta}\end{pmatrix} i\begin{pmatrix}0 & (\sigma^c)_{\delta\dot\gamma}\\ (\bar{\sigma}^c)^{\dot\delta\gamma} & 0\end{pmatrix}(-M^{ab})\begin{pmatrix}-i\nabla_\gamma\Phi_\Gamma\\ +i\bar{\nabla}^{\dot\gamma}\Phi_\Gamma\end{pmatrix}\\ &\quad + \frac{1}{8}i\begin{pmatrix}0 & (\sigma_c)_{\alpha\dot\beta}\\ -(\bar{\sigma}_c)^{\dot\alpha\beta} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\xi_\beta\\ 2\bar{\xi}^{\dot\beta}\end{pmatrix}\\ &\qquad \times(-2)\begin{pmatrix}(R(P)_{ab})^\delta & (R(P)_{ab})_{\dot\delta}\end{pmatrix} i\begin{pmatrix}0 & (\sigma^c)_{\delta\dot\gamma}\\ -(\bar{\sigma}^c)^{\dot\delta\gamma} & 0\end{pmatrix}(-M^{ab})\begin{pmatrix}-i\nabla_\gamma\Phi_\Gamma\\ +i\bar{\nabla}^{\dot\gamma}\Phi_\Gamma\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{C.11}$$

となる。この変形において、σ_{ab} と完全反対称テンソルの関係 (A.9) 式, および超共形共変スピノル微分の恒等式 (5.25) を用いた。また、任意のプライマリー超場 Φ_Γ に対して成立する $\{\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}, \mathcal{W}^{\dot{\alpha}}\}\Phi_\Gamma = -\frac{1}{2}\nabla^\alpha\nabla^{\beta\dot{\gamma}}W_{\beta\alpha}{}^\gamma K_{\gamma\dot{\gamma}}\Phi_\Gamma = 0$ を用いた。テンソル算法における (B.1) 式の $\delta_Q(\varepsilon)\Lambda_\Gamma$ および $\mathcal{F}_{ab\Gamma}$ の定義 (B.3) 式を用いると $\mathcal{D}_\Gamma$ の対応および $\mathcal{F}_{ab\Gamma}$ の対応がそれぞれ

$$\mathcal{D}_\Gamma \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{8}\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}\nabla^2\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}}\Phi_\Gamma| + \mathcal{W}_{\dot{\alpha}}\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}}\Phi_\Gamma| = \frac{1}{8}\nabla^\alpha\bar{\nabla}^2\nabla_\alpha\Phi_\Gamma| - \mathcal{W}^\alpha\nabla_\alpha\Phi_\Gamma|, \tag{C.12}$$

および

$$\mathcal{F}_{ab\Gamma} \quad \leftrightarrow \quad (\nabla_a B_{b\Gamma} - \nabla_b B_{a\Gamma})| + \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}[\nabla^c, \nabla^d]\Phi_\Gamma| \tag{C.13}$$

と求まる。これで超共形多重項の対応が完成した。この対応は (5.24) 式にまとめられている。

最後に、$\mathcal{D}_\Gamma$ の Q 変換の対応を確認する。これは $\mathcal{D}_\Gamma$ の対応を用いて次のように計算できる：

$$\begin{aligned}
&\delta_Q(\varepsilon)\mathcal{D}_\Gamma \\
&\leftrightarrow (\xi^\alpha\nabla_\alpha + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}})\left(\frac{1}{8}\bar{\nabla}_{\dot{\beta}}\nabla^2\bar{\nabla}^{\dot{\beta}}\Phi_\Gamma + \mathcal{W}_{\dot{\beta}}\bar{\nabla}^{\dot{\beta}}\Phi_\Gamma\right) \\
&= \frac{1}{2}i\begin{pmatrix} 2\xi^\alpha & 2\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix} i\begin{pmatrix} 0 & (\sigma^a)_{\alpha\dot{\beta}} \\ (\bar{\sigma}^a)^{\dot{\alpha}\beta} & 0\end{pmatrix}\nabla_a\left(\frac{i}{4}\begin{pmatrix} -\bar{\nabla}^2\nabla_\beta\Phi_\Gamma \\ +\nabla^2\bar{\nabla}^{\dot{\beta}}\Phi_\Gamma\end{pmatrix} + 2i\begin{pmatrix}\mathcal{W}_\beta \\ \mathcal{W}^{\dot{\beta}}\end{pmatrix}\Phi_\Gamma\right) \\
&\qquad -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2\xi^\alpha & 2\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\end{pmatrix}\left(-\frac{4}{3}\right)\left(R(A)_{ab} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}(-i)(*R(A))_{ab}\right)(-M^{ab})\begin{pmatrix} -i\nabla_\alpha\Phi_\Gamma \\ +i\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}}\Phi_\Gamma\end{pmatrix} \\
&\qquad +\frac{1}{4}(-)^\Gamma\begin{pmatrix} 2\xi^\alpha & 2\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\end{pmatrix} i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}\left(-M^{ab}\, i\begin{pmatrix} 0 & (\sigma^c)_{\alpha\dot{\beta}} \\ (\bar{\sigma}^c)^{\dot{\alpha}\beta} & 0\end{pmatrix} B_{c\Gamma}\right)(-2)\begin{pmatrix} (R(P)_{ab})_\beta \\ (R(P)_{ab})^{\dot{\beta}}\end{pmatrix} \\
&\qquad -\frac{1}{4}(-)^\Gamma\begin{pmatrix} 2\xi^\alpha & 2\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\end{pmatrix}\left(-M^{ab}\, i\begin{pmatrix} 0 & (\sigma^c)_{\alpha\dot{\beta}} \\ (\bar{\sigma}^c)^{\dot{\alpha}\beta} & 0\end{pmatrix}\nabla_c\Phi_\Gamma\right)(-2)\begin{pmatrix} (R(P)_{ab})_\beta \\ (R(P)_{ab})^{\dot{\beta}}\end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{C.14}$$

この変形で、$\{\bar{\nabla}_{\dot{\beta}}, \mathcal{W}^{\dot{\beta}}\}\nabla_\alpha\Phi_\Gamma = \frac{-1}{2}\nabla^\beta\nabla^{\gamma\dot{\gamma}}W_{\gamma\beta}{}^\delta K_{\delta\dot{\gamma}}\nabla_\alpha\Phi_\Gamma = 0$ および $\mathcal{W}(K)_{\dot{\beta}}{}^c K_c\bar{\nabla}^{\dot{\beta}}\nabla_\alpha\Phi_\Gamma = 0$ を用いた。第 5 章で得られた対応を用いると、上記の変換則は (B.1) 式の $\delta_Q(\varepsilon)\mathcal{D}_\Gamma$ に対応していることがわかる。

C.2　カイラル射影

ここでは、テンソル算法および共形超空間形式それぞれにおけるカイラル射影の対応を求める。テンソル算法では超共形多重項 $\mathcal{V}_\Gamma$ に対するカイラル射影 $\Pi\mathcal{V}_\Gamma$ は特別な共形ウェイトとローレンツ添字をもったものに対してのみ定義できていた。そのあらわな成分は (4.48) 式に示されている。一方、共形超空間形式では、カイラル射影 $\mathcal{P} = \frac{-1}{4}\bar{\nabla}^2$ はテンソル算法と同様の条件を満たすプライマリー超場 Φ_Γ に対してのみ定義でき、作用の結果、プライマリーカイラル超場 $\mathcal{P}\Phi_\Gamma$ を与えた。テンソル算法の $\mathcal{V}_\Gamma$ に共形超空間形式の Φ_Γ を対応させると、カイラル射影の対応は

$$\Pi\mathcal{V}_\Gamma \quad \leftrightarrow \quad -\mathcal{P}\Phi_\Gamma = \frac{1}{4}\bar{\nabla}^2\Phi_\Gamma \tag{C.15}$$

となる。以下では、この対応を具体的に $\Pi\mathcal{V}_\Gamma$ の各成分場の対応を調べることで示す。すなわち、プライマリーカイラル超場 $\frac{1}{4}\bar{\nabla}^2\Phi_\Gamma$ の各成分がテンソル算法における (4.48) 式に一致していることを確かめる。

共形超空間形式におけるプライマリーカイラル超場の各成分は、テンソル算法における超共形カイラル多重項 (5.31) 式の各成分に対応することに注意する。まず初項 $\frac{1}{4}\bar{\nabla}^2\Phi_\Gamma|$ は

$$\frac{1}{4}\bar{\nabla}^2\Phi_\Gamma| = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}(\nabla^2\Phi_\Gamma + \bar{\nabla}^2\Phi_\Gamma)| - i\Big(-\frac{1}{4}i(\nabla^2\Phi_\Gamma - \bar{\nabla}^2\Phi_\Gamma)|\Big)\right) \tag{C.16}$$

と書き直すことができる。右辺は $\mathcal{H}_\Gamma$ および $\mathcal{K}_\Gamma$ の対応 (C.5) 式より、テンソル算法における $\frac{1}{2}(\mathcal{H}_\Gamma - i\mathcal{K}_\Gamma)$ が対応する。これは (4.48) 式に示された $\Pi\mathcal{V}_\Gamma$ の初項に他ならない。

プライマリーカイラル超場の第 2 項は 1 階の超共形共変スピノル微分で与えられる。$\frac{1}{4}\bar{\nabla}^2\Phi_\Gamma$ に対しては

$$\nabla_\alpha\Big(\frac{1}{4}\bar{\nabla}^2\Phi_\Gamma\Big)\Big| = i\Big(i(\sigma^a)_{\alpha\dot{\beta}}\nabla_a(i\bar{\nabla}^{\dot{\beta}}\Phi_\Gamma)| - \frac{i}{4}\bar{\nabla}^2\nabla_\alpha\Phi_\Gamma| + 2i\mathcal{W}_\alpha\Phi_\Gamma|\Big) \tag{C.17}$$

となる。ここで、恒等式 (C.7) を用いた。右辺は超共形多重項の $\mathcal{Z}_\Gamma$ の対応 (C.3) 式および Λ_Γ の対応 (C.8) 式を用いることで、テンソル算法の $i\mathcal{P}_{\mathrm{R}}(i\gamma^a D_a\mathcal{Z}_\Gamma + \Lambda_\Gamma)$ に対応することがわかる。これは (4.48) 式における $\Pi\mathcal{V}_\Gamma$ の第 2 項に等しい。

最後に、プライマリーカイラル超場の最高次項 $\frac{1}{4}\bar{\nabla}^2\Phi_\Gamma$ は

$$-\frac{1}{4}\nabla^2\Big(\frac{1}{4}\bar{\nabla}^2\Phi_\Gamma\Big)\Big| = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}\nabla^2\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}}\Phi_\Gamma| + \nabla^a\nabla_a\Phi_\Gamma| + i\nabla_a\Big(-\frac{1}{4}(\bar{\sigma}^a)^{\dot{\alpha}\alpha}[\nabla_\alpha, \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}]\Phi_\Gamma\Big)|\right) \tag{C.18}$$

と書くことができる。ここで、恒等式 (5.34) 式および、点付きローレンツ添字を持たないプライマリー超場 Φ_Γ について成立する等式 $\mathcal{W}_{\dot{\alpha}}\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}}\Phi_\Gamma = 0$ を用いた。この等式はこ

のようなプライマリー超場に対して $\mathcal{W}_{\dot{\alpha}}\Phi_\Gamma = 0$ が成立することより従う $\mathcal{W}_{\dot{\alpha}}\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}}\Phi_\Gamma = \{\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}}, \mathcal{W}_{\dot{\alpha}}\}\Phi_\Gamma = \frac{1}{2}\nabla^\alpha\nabla^{\beta\dot{\gamma}}W_{\beta\alpha}{}^\gamma K_{\gamma\dot{\gamma}}\Phi_\Gamma = 0$ より導かれる。(C.5) 式の $\mathcal{B}_{a\Gamma}$ の対応と (C.12) 式で $\mathcal{W}_{\dot{\alpha}}\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}}\Phi_\Gamma = 0$ を用いた $\mathcal{D}_\Gamma$ 式の対応を用いると、(C.18) 式の右辺はテンソル算法の $-\frac{1}{2}(\mathcal{D}_\Gamma + D^a D_a \mathcal{C}_\Gamma + iD^a\mathcal{B}_{a\Gamma})$ に対応する。従って (4.48) における $\Pi\mathcal{V}_\Gamma$ の最高次も対応することがわかった。

付 録D　テンソル階層性を持つテンソルゲージ理論への応用

ここでは、共形超空間を用いた応用として、4 次元超重力理論でのテンソル階層性を持つテンソルゲージ理論の構成を考える [44, 45]。テンソルゲージ理論とは、ベクトルゲージ場を用いた通常のゲージ理論を、反対称テンソル場を用いて拡張したゲージ理論である。特に通常の $U(1)$ ゲージ理論は、1 階の反対称テンソル (ベクトル) のゲージ理論とみなすことができる。テンソル階層性とは、第 D.1 章で詳しく説明するが、p 階の反対称テンソルが、1 階上の $(p+1)$ 階の反対称テンソルのゲージ変換でシフトする構造のことを指す。これは $U(1)$ ゲージ理論の Higgs 模型において、ベクトルゲージ場 (1 階の反対称テンソル) A_m のゲージ変換 $A_m \to A_m + \partial_m\theta$ で、南部–Goldstone 場 (0 階の反対称テンソル) f が $f \to f + \theta$ とシフトすることの拡張である。

テンソルゲージ理論の作用では、テンソル場の運動項に加えて Chern–Simons (CS) 作用と呼ばれる相互作用項を構成することができる。ここでは、CS 作用とは計量と結合しないトポロジカルな項 (CS 項と呼ばれる[*1]) によって構成される作用を指す。具体的には、運動項は

$$S_{\text{kin.}} = \int d^4x(-\tfrac{1}{2}\partial^m f\partial_m f - \tfrac{1}{2\cdot 2!}F^{mn}F_{mn} - \tfrac{1}{2\cdot 3!}H^{mnp}H_{mnp} - \tfrac{1}{2\cdot 4!}\Sigma^{mnpq}\Sigma_{mnpq}), \qquad \text{(D.1)}$$

であり、CS 作用は例えば

$$S_{\text{CS}} = \int d^4x\epsilon^{mnpq}(\tfrac{1}{4!}\alpha_0 f\Sigma_{mnpq} + \tfrac{1}{3!}\alpha_1 A_m H_{mpq} + \tfrac{1}{2!\cdot 2!}\alpha_2 B_{mn}F_{pq} + \tfrac{1}{3!}\alpha_3 C_{mnp}\partial_q f). \qquad \text{(D.2)}$$

である (後述の Σ_{mnpq} に関する表面項は省略した)。ここで、f, A_m, B_{mn}, C_{mnp} はそれぞれ $0,1,2,3$ 階の反対称テンソルゲージ場であり、$\partial_m f,\ F_{mn} = \partial_{[m}A_{n]},\ H_{mnp} = \partial_{[m}B_{np]}$, $\Sigma_{mnpq} = \partial_{[m}C_{npq]}$ はそれぞれ $0,1,2,3$ 階の反対称テンソルゲージ場の場の強さである。ここで、添字の大括弧 [ ] は添字に対する完全反対称化を意味する。また、$\alpha_0, ..., \alpha_3$ は実定数で、

[*1] 通常、CS 項はベクトル場による項を指す。例えば 3 次元では $\epsilon^{mnp}A_m F_{np}$ がある (ϵ^{mnp} は 3 次元の完全反対称テンソルである)。4 次元ではベクトル場のみによる CS 項は存在しないが、テンソル場を用いれば計量によらない項を構成することができることに注意する。このテンソル場の作用もここでは CS 作用と呼ぶことにする。

超空間での作用 (D.74) 式の $\alpha_{I_pI_q}$ に対応するものである。場の強さはテンソル階層性が存在する場合には、シフトゲージ変換で不変な形 $\partial_m f \to \partial_m f - q^{(0)}A_m$、$F_{mn} \to F_{mn} - q^{(1)}B_{mn}$ などと変形される。ここで、$q^{(0)}$、$q^{(1)}$ は実定数で、後述の (D.8) 式の $q^{(p)}$ に当たるものである。

このようなゲージ化されたシフト対称性や CS 作用を考える動機として、まず超弦理論との関連がある。超弦理論では D ブレーンと呼ばれる開弦の端点が結合する空間的な広がりを持つ物体がある。D ブレーンは 4 次元のカイラル・フェルミオンを持つ現実的な模型を超弦理論から構成する際に重要な役割を果たす [65]。ベクトルゲージ場が点電荷に結合したものと同様に、テンソルゲージ場は広がりを持つ D ブレーンに結合するため、超弦理論の有効理論でテンソルゲージ場を考えることは自然である。実際、このブレーンに結合したテンソルゲージ場によって、4 次元のカイラル・フェルミオンを導出した際に生ずるアノマリーを相殺することができる。

もう一つの動機に、量子重力および超弦理論と大域的対称性の関係がある。4 次元では 2 階以上の反対称テンソル場の持ち得る大域的シフト対称性は自発的に破れない[*2]ことが Coleman–Mermin–Wagner–Hohenberg の定理 [68–70] の拡張として知られている [67]。ここで大域的シフト対称性とは、例えば 2 階の反対称テンソルゲージ場の場合は、$\partial_{[m}\lambda_{np]} = 0$ を満たすパラメータ λ_{mn} によるシフト変換 $B_{mn} \to B_{mn} + \lambda_{mn}$ の元での対称性である。実際、この 2 階の反対称テンソルゲージ場の大域的シフト対称性を持つブラックホール (アクシオン的ブラックホールと呼ばれる) [71] は量子論的には無限に縮退した状態を持つ病的なものであると考えられている [72]。一方で、量子重力や超弦理論の 4 次元有効理論にはそのような大域的対称性が存在しないと予想されている [73]。この大域的対称性の問題はテンソル階層性によるゲージ化や CS 作用で破ることで解決できると考えられている。実際、上記のブラックホールの大域的対称性をゲージ化することで、縮退した状態を解くことができる [72]。

上記の例に限らず、宇宙論的な応用においてもテンソルゲージ理論は注目されている。例えば、超弦理論と関連した初期宇宙のインフレーション模型 [74–76] などでこのテンソル階層性と CS 作用が用いられている。この例ではインフレーションを引き起こすためのスカラー場であるインフラトンに質量を与える機構として、上記の CS 作用 (D.2) 式のうちの 0 階の反対称テンソルゲージ場と 3 階の反対称テンソルゲージ場の結合を用いている。この機構を文献 [74] に従って簡単に説明する。以下では議論を単純にするために重

[*2] ベクトルゲージ場の大域的シフト対称性は 4 次元では自発的に破れる。そしてこの自発的破れに対する南部–Goldstone ボソンは無質量ゲージ場の横波成分に同定される [66,67]。

力を含まない場合で考える。重力を含む場合も同様に行える。

まず次の作用を考える：

$$\begin{aligned} S = &\int d^4x \left(-\frac{1}{2}\partial^m f \partial_m f - \frac{1}{2\cdot 4!}\Sigma^{mnpq}\Sigma_{mnpq} - \frac{m}{4!} f \epsilon^{mnpq}\Sigma_{mnpq}\right) \\ &+ \frac{1}{3!}\int d^4x \partial_m(\Sigma^{mnpq}C_{npq} + mf\epsilon^{mnpq}C_{npq}). \end{aligned} \tag{D.3}$$

ここで、第 3 項が前述の CS 作用にあたる。また、m は f の質量に同定されるもので、(D.2) 式の α_0 に対応するものである。第 2 行の全微分項 $\partial_m(...)$ は、(D.3) 式から導かれるエネルギー・運動量テンソルにおける Σ_{mnpq} の寄与が、Σ_{mnpq} の運動方程式の解に関して一意に定まるように導入した表面項である[*3] [77–79]。通常の場の理論では表面項は効かない場合が多い。しかし、のちの (D.5) 式で示すように、Σ_{mnpq} に対する運動方程式の解は 4 次元時空では定数項を持ち得るため、表面項が無視できない。ここでは触れないが、超対称性理論および超重力理論でもこのような表面項を自然に導入することができる [80]。超空間上での作用では、時空微分が反可換数による積分として表されるからである。

この作用はラグランジュの未定乗数にあたる補助場 s と、C_{mnp} とは独立な (空間微分を含まない) 4 階の反対称テンソル場 Σ'_{mnpq} を用いて、

$$\begin{aligned} S' = &\int d^4x \left(-\frac{1}{2}\partial^m f \partial_m f - \frac{1}{2\cdot 4!}\Sigma'^{mnpq}\Sigma'_{mnpq} - \frac{m}{4!} f \epsilon^{mnpq}\Sigma'_{mnpq}\right) \\ &+ \frac{1}{3!}\int d^4x \partial_m(\Sigma'^{mnpq}C_{npq} + mf\epsilon^{mnpq}C_{npq}) + \frac{1}{4!}\int d^4x s\epsilon^{mnpq}(\Sigma'_{mnpq} - 4\partial_{[m}C_{npq]}) \end{aligned} \tag{D.4}$$

と等価に変形することができる。そして、代数的に解くことができる Σ'_{mnpq} の運動方程式の解

$$\Sigma'_{mnpq} = \epsilon_{mnpq}(s - mf) \tag{D.5}$$

を作用 S' に代入することで、f の質量項が作用に現れる：

$$S' = \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\partial^m f \partial_m f - \frac{1}{2}(s - mf)^2 + \frac{1}{3!}\epsilon^{mnpq}(\partial_m s)C_{npq}\right) \tag{D.6}$$

*3 表面項がない場合、エネルギー・運動量テンソルにおける定数項 や f の質量項の符号が逆転するという不一致が起きる。作用 (D.3) 式から導いたエネルギー・運動量テンソルの Σ_{mnpq} 部分は $T_{mn} = -\frac{1}{2\cdot 4!}\eta_{mn}\Sigma^{pqrs}\Sigma_{pqrs}$ である。ここに Σ_{mnpq} の運動方程式の解 (D.5) 式を代入すると、$T_{mn} = +\frac{1}{2}\eta_{mn}(s - mf)^2$ が得られる。一方で、Σ_{mnpq} の運動方程式の解を作用 (D.3) 式の表面項を除いた部分に代入すると、作用の質量項が $+\frac{1}{2}(s-mf)^2$ となる。この作用から導かれるエネルギー・運動量テンソルの Σ_{mnpq} 部分は $T_{mn} = -\frac{1}{2}\eta_{mn}(s-mf)^2$ となり、運動方程式を用いる前に作用から求めたエネルギー・運動量テンソルを用いた表式に一致しない。作用の表面項はこの不一致を解決するために必要である。具体的な表面項の表式は、C_{mnp} の表面における変分が消えるように与える。

また、C_{mnp} の運動方程式から、s は定数であることがわかる (s の具体的な値は Σ_{mnpq} の境界条件から定まるが、ここでは詳細に立ち入らない)。

この模型の利点は、インフレーション模型をテンソルゲージ理論のゲージ対称性でコントロールしているという点である。ここで、作用 (D.3) 式はテンソル階層性を用いた作用に等価に書き直すこともできることに注意しておく [75, 81]。

ただし、いま扱った作用を用いた単純な模型は現在の観測からは排除されていると考えられている [82, 83]。一方で、強結合効果としての高階微分まで含めた模型は観測と整合している [76]。

このように、量子重力や超弦理論と関連する 4 次元理論でこのテンソル階層性を持つテンソルゲージ理論および CS 作用は重要な役割を果たす。4 次元超重力理論は超弦理論の安定な有効理論の一つであるので、テンソル階層性やその CS 作用を 4 次元超重力理論で構成することは重要であると考えられる。この構成を行うことで、上記のアノマリー相殺や、ブラックホール、そしてインフレーション模型への応用を、超弦理論の有効理論としての超重力理論での枠組みで行うことができると期待される。実際、上記のインフレーション模型の中の単純な場合 (2 次のインフラトン・ポテンシャルを持つ場合) [74] は超重力理論の枠内で拡張されている [84]。ここでは主題としないが、今後の課題として高階微分を含む模型 [76] を超重力理論の枠組みで構成することが観測との整合性から望まれる。

超重力理論での作用の構成は一般には複雑であるが、本論文で詳しく議論した共形超空間を用いることで、重力を含まない場合の理論 [85] の構成を自然に拡張することで構成できる。ここでは、テンソル階層性の中でも 可換 (Abelian) な対称性に対してテンソルゲージ理論の構成を行う。ここで Abelian な場合に注目する理由は、構成が単純であるのみならず、上記のアノマリー相殺、アクシオン的ブラックホール、インフレーション模型などへ直接応用できるからである。

D.1　共形超空間における Abelian テンソル階層性

ここでは、テンソル階層性を持つ Abelian テンソルゲージ理論を共形超空間に導入する。反対称テンソルゲージ場は微分幾何の言葉で p 形式として表される。p 形式ゲージ場は、$(p-1)$ 形式ゲージパラメータで変換することに加えて、$(p+1)$ 形式をゲージ変換する p 形式ゲージパラメータのシフトを受け得る。このシフトを含むテンソルゲージ場のゲージ変換の階層性構造をテンソル階層性と言う。

この階層性について以下でより詳しく述べる。まず、p 形式ゲージ超場 $C^{I_p}_{[p]}$ $(p \geq -1)$

[*4]を

$$C_{[p]}^{I_p} := \frac{1}{p!} dz^{M_1} \wedge \cdots \wedge dz^{M_p} C_{M_p \dots M_1}^{I_p} = \frac{1}{p!} E^{A_1} \wedge \cdots \wedge E^{A_p} C_{A_p \dots A_1}^{I_p}. \tag{D.7}$$

と書く。ここで、微分形式 dz^M は通常の時空上の微分形式 dx^m を超空間上に拡張したものである [18]：$dz^M = (dx^m, d\theta^\mu, d\bar{\theta}_{\dot{\mu}})$。この微分形式の間のウェッジ積 $\wedge$ は、通常の微分幾何の場合と同様に微分形式の間の反対称な積を与える：$dz^N \wedge dz^M = -dz^M \wedge dz^N$。ただし、implicit grading を用いているため、$d\theta^\nu \wedge d\theta^\mu = +d\theta^\mu \wedge d\theta^\nu$ であることに注意する。1 形式 E^A は dz^M を四脚場で変換したものである：$E^A = dz^M E_M{}^A$。添字 I_p は n_p 個の p 形式の内部空間 V_p の添字を表す。ここで V_p は線形空間であり、添字 I_p は $1, ..., \dim V_p$ であるとする。いま、p 形式ゲージ超場に対する微小ゲージ変換を $\delta_T(\Lambda)$ で表す。ここで、Λ は p 形式ゲージパラメータ実超場 $\Lambda_{[p]}^{I_{p+1}}$ の集合を表す：$\Lambda = (\Lambda_{[0]}^{I_1}, ..., \Lambda_{[3]}^{I_4})$。$p$ 形式ゲージ超場 $C_{[p]}^{I_p}$ の $\delta_T(\Lambda)$ によるゲージ変換則を

$$\delta_T(\Lambda) C_{[p]}^{I_p} = d\Lambda_{[p-1]}^{I_p} + (q^{(p)} \cdot \Lambda_{[p]})^{I_p} \tag{D.8}$$

で与える。ここで、$q^{(p)}$ は $(p+1)$ 形式の内部空間 V_{p+1} から p 形式の内部空間 V_p への線形写像であるとする。$(q^{(p)} \cdot \Lambda_{[p]})^{I_p}$ をあらわに書くと

$$(q^{(p)} \cdot \Lambda_{[p]})^{I_p} = (q^{(p)})^{I_p}_{I_{p+1}} \Lambda_{[p]}{}^{I_{p+1}}. \tag{D.9}$$

である。ここで、添字 I_p についての和の記号を省略している。

p 形式ゲージ超場 $C_{[p]}^{I_p}$ に対する超共形対称性の演算子 $X_{\mathcal{A}'}$ による変換則は、

$$\delta_G(\xi^{\mathcal{C}'} X_{\mathcal{C}'}) C_{M_p \dots M_1}^{I_p} = 0 \tag{D.10}$$

であるとする。これは p 形式ゲージ超場は内部対称性に対するゲージ超場であるからである。これより、$C_{[p]}^{I_p}$ をローレンツ添字で表した場合の超共形変換則は、四脚場 $E_A{}^M$ の超共形変換則に帰着する：

$$\begin{aligned} \delta_G(\xi^{\mathcal{A}'} X_{\mathcal{A}'}) C_{A_p \dots A_1}^{I_p} = & -E_{A_p}{}^N (\delta_G(\xi^{\mathcal{A}'} X_{\mathcal{A}'}) E_N{}^B) C_{B A_{p-1} \dots A_1}^{I_p} \\ & - \cdots - E_{A_1}{}^N (\delta_G(\xi^{\mathcal{A}'} X_{\mathcal{A}'}) E_N{}^B) C_{A_p \dots A_2 B}^{I_p}. \end{aligned} \tag{D.11}$$

この式は、のちに行うゲージ超場を一つの超場で表す「プレポテンシャル」の超共形変換則を導く際に用いる。

[*4] (-1) 形式は通常の微分幾何学と同様に 0 であるとする。

p 形式ゲージ超場に対する場の強さを

$$
\begin{aligned}
F^{I_p}_{[p+1]} &:= dC^{I_p}_{[p]} - (q^{(p)} \cdot C_{[p+1]})^{I_p} \\
&= \frac{1}{p!} dz^{M_1} \wedge \cdots \wedge dz^{M_p} \wedge dz^N \partial_N C^{I_p}_{M_p \dots M_1} \\
&\quad - \frac{1}{(p+1)!} dz^{M_1} \wedge \cdots \wedge dz^{M_{p+1}} (q^{(p)} \cdot C_{M_{p+1} \dots M_1})^{I_p}
\end{aligned}
\tag{D.12}
$$

と定義する。場の強さの $\delta_T(\Lambda)$ によるゲージ変換則は

$$
\delta_T(\Lambda_{[p]}) F^{I_p}_{[p+1]} = -(q^{(p)} \cdot q^{(p+1)} \cdot \Lambda_{[p+1]})^{I_p} \tag{D.13}
$$

である。ここで、場の強さに対するゲージ不変性を仮定すると、行列 $q^{(p)}$ に対する条件

$$
q^{(p-1)} \cdot q^{(p)} = 0 \tag{D.14}
$$

が従う。以降は $q^{(p)}$ がこの性質を持つとする。

この内部対称性の元では、超対称性変換と時空並進は δ_T についても共変であるように定義し直される。この再定義は、テンソル階層性が存在しない場合と同様である [32]。具体的には以下の通りである。P_A 変換を次のように δ_T を含んだ形で

$$
\delta_G(\xi^A P_A) = \mathcal{L}(\xi^M \partial_M) - \delta_G(\xi^M h_M{}^{\mathcal{A}'} X_{\mathcal{A}'}) - \delta_T(\Lambda(\xi)) \tag{D.15}
$$

と定義し直す。ここで、 $\Lambda(\xi)$ は

$$
\Lambda(\xi) = (\iota_\xi C^{I_1}_{[1]}, \dots, \iota_\xi C^{I_4}_{[4]}) \tag{D.16}
$$

であり、 ι_ξ は微分形式に対する内部積

$$
\iota_\xi C^{I_p}_{[p]} = \frac{1}{(p-1)!} dz^{M_1} \wedge \cdots \wedge dz^{M_{p-1}} \xi^{M_p} C^{I_p}_{M_p \dots M_1} \tag{D.17}
$$

である。この P_A 変換で、特に $C^{I_p}_{[p]}$ は次のように変換される：

$$
\delta_G(\xi^A P_A) C^{I_p}_{[p]} = \mathcal{L}(\xi^M \partial_M) C^{I_p}_{[p]} - \delta_T(\Lambda(\xi)) C^{I_p}_{[p]} = \iota_\xi F^{I_p}_{[p+1]}. \tag{D.18}
$$

一方で、超共形ゲージ超場などの δ_T で不変な量の P_A 変換には変更は無い。ここで、p 形式ゲージ超場の超対称性変換は $\xi^A = \xi^{\underline{\alpha}}$ と選ぶことで得られることに注意する。

場の強さは次のビアンキ恒等式に従う：

$$
dF^{I_p}_{[p+1]} = -(q^{(p)} \cdot F_{[p+2]})^{I_p}. \tag{D.19}
$$

形式	ゲージ超場	場の強さ	ビアンキ恒等式
4 形式	U^{I_4}	$G^{I_4} = dU^{I_4} = 0$	$-$
3 形式	C^{I_3}	$\Sigma^{I_3} = dC^{I_3} - (q^{(3)} \cdot U)^{I_3}$	$d\Sigma^{I_3} = 0$
2 形式	B^{I_2}	$H^{I_2} = dB^{I_2} - (q^{(2)} \cdot C)^{I_2}$	$dH = -(q^{(2)} \cdot \Sigma)^{I_2}$
1 形式	A^{I_1}	$F^{I_1} = dA^{I_1} - (q^{(1)} \cdot B)^{I_1}$	$dF^{I_1} = -(q^{(1)} \cdot H)^{I_1}$
0 形式	f^{I_0}	$g^{I_0} = df^{I_0} - (q^{(0)} \cdot A)^{I_0}$	$dg^{I_0} = -(q^{(0)} \cdot F)^{I_0}$
-1 形式	0	$\omega^{I_{-1}} = -(q^{(-1)} \cdot f)^{I_{-1}}$	$d\omega^{I_{-1}} = -(q^{(-1)} \cdot g)^{I_{-1}}$

表 D.1: p 形式ゲージ超場とその場の強さ、およびビアンキ恒等式。

テンソル階層性が存在する場合は、ビアンキ恒等式が上式右辺のように変形される。すなわち、テンソル階層性によって $(p+1)$ 形式の場の強さが $(p+2)$ 形式の場の強さと結びつく。このビアンキ恒等式は、以下で行う p 形式の場の強さを含む既約多重項を導く際に用いられる。

p 形式ゲージ超場と場の強さ、そしてビアンキ恒等式のあらわな表式を表 D.1 にまとめておく。表 D.1 において、ゲージ超場 4 形式がある。ゲージ超場のボソン項 $U^{I_4}_{qpnm}$ は存在し得るが、これに対する場の強さのボソン項は 0 である：$G^{I_4}_{rqpnm} = 0$。これは、4 次元では 5 階の完全反対称テンソルは恒等的に 0 であるからである。従って、場の強さ 5 形式に対する超対称な組も 0 である。これより、場の強さ 5 形式に G^{I_4} は全て 0 であるとする拘束条件をおく。これはテンソル階層性が存在しない時の文献 [17] における拘束条件と同じものである。

さらにこの表には、0 形式場の強さが存在する。しかし、(-1) 形式ゲージ超場は存在しないため、0 形式場の強さは単にテンソル階層性による項のみで $\omega^{I_{-1}} = -(q^{(-1)} \cdot f)^{I_{-1}}$ と書かれる。

ここで、文献 [85] のように高次元の立場からみると、V_p は余剰次元空間 (高次元時空から 4 次元時空を除いたもの) 上の微分形式の空間を表しており、行列 $q^{(p)}$ は余剰次元方向の外微分を表す。

場の強さ	拘束条件
4 形式	$G^{I_4}_{EDCBA} = 0$
3 形式	$\Sigma^{I_3}_{\underline{\delta}\,\underline{\gamma}\,\underline{\beta}A} = \Sigma^{I_3}_{\delta\dot{\gamma}ba} = 0$
2 形式	$H^{I_2}_{\underline{\gamma}\,\underline{\beta}\,\underline{\alpha}} = H^{I_2}_{\gamma\beta a} = H^{I_2}_{\dot{\gamma}\dot{\beta}a} = 0, \quad H^{I_2}_{\gamma\dot{\beta}a} = +i(\sigma_a)_{\gamma\dot{\beta}} L^{I_2}$
1 形式	$F^{I_1}_{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}} = 0$
0 形式	$g^{I_0}_{\alpha} = i\nabla_{\alpha}\Psi^{I_0}, \quad g^{I_0}_{\dot{\beta}} = -i\bar{\nabla}_{\dot{\beta}}\Psi^{I_0}, \quad K_A\Psi^{I_0} = 0$

表 D.2: 場の強さへの拘束条件。

D.2　場の強さを含む既約超場とプレポテンシャルおよびそのゲージ変換則

ここでは、ボソン的なゲージ場および場の強さを含む超場、およびそのゲージ変換則を導く。これらは CS 作用を得るために必要である。

まず、超空間上の場の強さはボソン的場の強さを含む既約な成分以外の余分な自由度を持っている。従って、そのような既約な超場を得るために場の強さ超場 $F^{I_p}_{[p+1]}$ に対して拘束条件をおく。この拘束条件のもとで、ビアンキ恒等式を解くことで、ボソン的な場の強さを含む超場が得られる。次に、拘束条件それ自体を解くことで、ゲージ場を含む超場が得られる。このゲージ場を含む超場を「プレポテンシャル」と呼ぶ。拘束条件はゲージ共変に定義されているので、この拘束条件を解くために便利なゲージ固定条件を置くことができる。プレポテンシャルはゲージ場を含むため、それ自身もゲージ変換をする。このプレポテンシャルのゲージ変換則は、拘束条件を解く際に要請したゲージ固定条件を変えない制限されたゲージ変換として与えられる。以下でこれらについて詳しく述べる。

D.2.1　拘束条件の元でのビアンキ恒等式

まず、前節で導入したゲージ超場 p 形式の場の強さに対する拘束条件をおく。この拘束条件は場の強さを超空間上で定義したことで生じた余分な自由度を消去するために導入する。この拘束条件として、文献 [32, 86] のようにテンソル階層性が存在しない場合と同じ形の条件を用いる。ただし、場の強さの定義はテンソル階層性がある場合のものである。この拘束条件を表 D.2 にまとめた。ここで、表 D.2 において L^{I_2} と Ψ^{I_0} は実超場である。また、 Ψ^{I_0} はプライマリー超場であるとする。

この拘束条件のもとで、ビアンキ恒等式を解く。いま、場の強さへの拘束条件を置いたので、拘束条件とビアンキ恒等式との整合性から、新たな関係式が導かれる。拘束条件はローレンツ共変に要請されているため、ビアンキ恒等式 (D.19) をローレンツ添字で表しておくと便利である：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(p+1)!}E^{A_1}\wedge\cdots\wedge E^{A_{p+1}}\wedge E^B\nabla_B F^{I_p}_{A_p\ldots A_{p+1}} \\
&+\frac{1}{p!2!}E^{A_1}\wedge\cdots E^{A_p}\wedge E^B\wedge E^C R(P)_{CB}{}^{A_{p+1}}F^{I_p}_{A_{p+1}\ldots A_1} \\
&=-\frac{1}{(p+2)!}E^{A_1}\wedge\cdots\wedge E^{A_{p+2}}(q^{(p)}\cdot F_{A_{p+2}\ldots A_1})^{I_p}.
\end{aligned} \tag{D.20}$$

この等式は (D.10) 式から従う。この式は捩率テンソルの微分形式を用いた表式

$$R(P)^A=\frac{1}{2}E^B\wedge E^C R(P)_{CB}{}^A = dE^A - E^C\wedge h^{\mathcal{B}'}f_{\mathcal{B}'C}{}^A \tag{D.21}$$

を用いると簡潔に得ることができる。(D.21) 式は四脚場の外微分 dE^A を捩率テンソルで表示するために用いられる。また、ゲージ超場に対する外微分は (D.10) 式を用いることで場の強さの共変微分で表されている。

ここで、共形超空間を用いたことによる利点について述べる。共形超空間では捩率テンソルのスピノルを含む成分 $R(P)_{\underline{\alpha}B}{}^C$ に対して重力を含まない場合と同じ拘束条件をおくことができる：

$$R(P)_{\gamma\beta}{}^A=0,\quad R(P)_{\dot\gamma\dot\beta}{}^A=0,\quad R(P)_{\gamma\dot\beta}{}^a=2i(\sigma^a)_{\gamma\dot\beta},\quad R(P)_{\gamma\dot\beta}{}^{\underline{\alpha}}=0,\quad R(P)_{\underline{\gamma}b}{}^A=0. \tag{D.22}$$

次に、共形超空間ではスピノル共変微分の反交換関係が

$$\{\nabla_\alpha,\nabla_\beta\}=0,\quad \{\bar\nabla_{\dot\alpha},\bar\nabla_{\dot\beta}\}=0,\quad \{\nabla_\alpha,\bar\nabla_{\dot\beta}\}=-2i\nabla_{\alpha\dot\beta}. \tag{D.23}$$

であり、これは重力を含まない超対称性理論と同じものである。従ってビアンキ恒等式を重力の複雑さ無しに解くことができる。p 形式ゲージ超場のビアンキ恒等式の具体的な解はプレポテンシャルとそのゲージ変換の導出について説明した後にそれらの解と共に提示する。

D.2.2 プレポテンシャル：ゲージ固定条件の元での拘束条件の解

ここでは、テンソル階層性がある場合の p 形式ゲージ超場のプレポテンシャルを構成について説明する。プレポテンシャルとそのゲージ変換則はゲージ不変な CS 作用の構成に

用いられる。プレポテンシャルは場の強さに対する拘束条件を以下で述べるゲージ固定条件の元で解くことで得られる。プレポテンシャルのゲージ変換則は、ゲージ超場のゲージ固定条件を不変にするゲージ変換で与えられる。

まず、場の強さに対する拘束条件を解く。場の強さはゲージ共変 (超共形変換について共変で、内部ゲージ変換について不変) であるので、表 D.2 にある拘束条件もゲージ共変である。従って、この拘束条件を特定のゲージ固定条件の元で解くことができる。これは、場の強さの定義

$$\begin{aligned} F^{I_p}_{[p+1]} &= \frac{1}{p!} E^{A_1} \wedge \cdots \wedge E^{A_p} \wedge E^B \nabla_B C^{I_p}_{A_p \ldots A_1} \\ &\quad + \frac{1}{p!2!} E^{A_1} \wedge \cdots E^{A_{p-2}} \wedge E^B \wedge E^C R(P)_{CB}{}^{A_p} C^{I_p}_{A_p \ldots A_1} \\ &\quad + \frac{1}{(p+1)!} E^{A_1} \wedge \cdots \wedge E^{A_{p+1}} (q^{(p)} \cdot C_{A_{p+1} \ldots A_1})^{I_p}, \end{aligned} \tag{D.24}$$

および、δ_T ゲージ変換の定義

$$\begin{aligned} \delta_T(\Lambda) C^{I_p}_{[p]} &= \frac{1}{(p-1)!} E^{A_1} \wedge \cdots \wedge E^{A_{p-1}} \wedge E^B \nabla_B \Lambda^{I_p}_{A_{p-1} \ldots A_1} \\ &\quad + \frac{1}{(p-1)!2!} E^{A_1} \wedge \cdots E^{A_{p-2}} \wedge E^B \wedge E^C R(P)_{CB}{}^{A_{p-1}} \Lambda^{I_p}_{A_{p-1} \ldots A_1} \\ &\quad + \frac{1}{p!} E^{A_1} \wedge \cdots \wedge E^{A_p} (q^{(p)} \cdot \Lambda_{A_p \ldots A_1})^{I_p} \end{aligned} \tag{D.25}$$

を用いることでできる。

ゲージ固定条件はテンソル階層性が存在しない場合と同じものを使うことができる。これは p 形式のゲージ超場のゲージ固定により、$(p-1)$ 形式の場の強さのテンソル階層性による変形が消去されるからである。例として、3 形式ゲージ超場 $C^{I_3}_{\gamma\beta\alpha}$ のゲージ固定条件を考える。テンソル階層性が存在しない場合、3 形式ゲージ超場 $C^{I_3}_{\gamma\beta\alpha}$ のゲージ条件は $C^{I_3}_{\gamma\beta\alpha} = 0$ と置くことができる [87]。テンソル階層性が存在する場合、3 形式ゲージ超場の場の強さは、4 形式ゲージ超場からのシフトを受けている。ここで、4 形式ゲージ超場のゲージ固定はテンソル階層性がない場合 [87] と同じで $U^{I_4}_{\delta\gamma\beta\alpha} = 0$ とおけることに注意すると、3 形式ゲージ超場の場の強さ $\Sigma^{I_3}_{\delta\gamma\beta\alpha}$ に対する拘束条件は $0 = \Sigma^{I_3}_{\delta\gamma\beta\alpha} = \nabla_\delta C^{I_3}_{\gamma\beta\alpha} + \nabla_\gamma C^{I_3}_{\delta\beta\alpha} + \nabla_\beta C^{I_3}_{\gamma\delta\alpha} + \nabla_\alpha C^{I_3}_{\delta\gamma\beta}$ となる。ここで、 この場の強さにおけるテンソル階層性によるシフト $(q^{(3)} \cdot U_{\delta\gamma\beta\alpha})^{I_3}$ がこの 4 形式のゲージ固定条件の元では現れないことが重要である。従って、3 形式ゲージ超場のゲージ固定条件はテンソル階層性が存在しない時と同じで $C^{I_3}_{\gamma\beta\alpha} = 0$ と置くことができる。

従って、ゲージ固定条件は、テンソル階層性が存在しない場合 [87] と同じものを採用することができる。あらわなゲージ固定条件は表 D.3 にまとめた。この表における X^{I_3} および V^{I_1} は、それぞれ 3 形式および 1 形式ゲージ超場を表す実超場である。

ゲージ超場	ゲージ固定条件
4 形式	$U^{I_4}_{\underline{\delta}\,\underline{\gamma}\,\underline{\beta}\,A} = U^{I_4}_{\delta\dot{\gamma}ba} = 0$
3 形式	$C^{I_3}_{\underline{\gamma}\,\underline{\beta}\,\underline{\alpha}} = C^{I_3}_{\gamma\beta a} = C^{I_3}_{\dot{\gamma}\dot{\beta}a} = 0, \quad C^{I_3}_{\gamma\dot{\beta}a} = i(\sigma_a)_{\gamma\dot{\beta}}X^{I_3}$
2 形式	$B^{I_2}_{\underline{\beta}\,\underline{\alpha}} = 0$
1 形式	$A^{I_1}_{\alpha} = i\nabla_\alpha V^{I_1}, \quad A^{I_1}_{\dot{\alpha}} = -i\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}V^{I_1}$

表 D.3: ゲージ超場に対するゲージ固定条件。ゲージ固定条件は 4 形式ゲージ超場から 1 形式ゲージ超場の順に要請する。

このゲージ固定条件の元での拘束条件の解は、拘束条件の元でのビアンキ恒等式の解と同じ方法で解くことができる。なぜなら、ビアンキ恒等式 $0 = dF^{I_p}_{[p+1]} + (q^{(p)} \cdot F_{[p+2]})^{I_p}$ と場の強さの定義 $F^{I_p}_{[p+1]} = dC^{I_p}_{[p]} - (q^{(p)} \cdot C_{[p+1]})^{I_p}$ が同じ構造をしているからである。具体的な拘束条件の解はプレポテンシャルのゲージ変換則について説明した後に提示する。

D.2.3 プレポテンシャルのゲージ変換則

ここでは、プレポテンシャルのゲージ変換則について説明する。このゲージ変換則は CS 作用のゲージ不変性を議論するために用いられる。

場の強さに対する拘束条件を解く際に、表 D.3 であらわされるゲージ超場に対するゲージ固定を行なった。このゲージ固定でゲージ自由度を使い切ったように見えるが、このゲージ固定条件を変えないゲージ変換の自由度が存在し、それがプレポテンシャルのゲージ変換を与えることを以下で説明する。一般にゲージ変換パラメータ超場 $\Lambda^{I_{p+1}}_{[p]}$ は実 (マヨラナ) 超場であったが、ゲージ固定条件を変えないゲージパラメータは、その中の限定された超場で与えられる。その限定を与える式が、表 D.3 のゲージ固定条件を変えない条件

$$0 = \delta_T(\Lambda)C^{I_p}_{[p]} = d\Lambda^{I_p}_{[p-1]} + (q^{(p)} \cdot \Lambda_{[p]})^{I_p} \tag{D.26}$$

である。この条件式は、ゲージパラメータ Λ に対する拘束条件を与え、この拘束条件の解がゲージ固定条件を変えないゲージパラメータの組である。以下ではこのゲージパラメータの組を $\Theta = (\Theta^{I_1}, \Theta^{I_2}, \Theta^{I_3}_{\underline{\alpha}}, \Theta^{I_4})$ と書くことにする。このゲージパラメータの導出は拘束条件の解 (およびビアンキ恒等式の解) と同様に行うことができる。なぜなら、場の強さの定義 $F^{I_p}_{[p+1]} = dC^{I_p}_{[p]} - (q^{(p)} \cdot C_{[p+1]})^{I_p}$ とゲージ変換則 $\delta_T(\Lambda)C^{I_p}_{[p]} = d\Lambda^{I_p}_{[p-1]} + (q^{(p)} \cdot \Lambda_{[p]})^{I_p}$ が同じ構造をしているからである。

D.2.4 ビアンキ恒等式の解、プレポテンシャルおよびそのゲージ変換則

ここではビアンキ恒等式の解とプレポテンシャル、そしてプレポテンシャルのゲージ変換則を具体的にまとめる。3,2,1,0 形式ゲージ超場の場の強さはそれぞれゲージ不変な超場 $(Y^{I_3}, L^{I_2}, W_\alpha^{I_1}, \Psi^{I_0})$ で表される。一方で、4,3,2,1,0 形式のプレポテンシャルはそれぞれ $(\Gamma^{I_4}, X^{I_3}, \Sigma_\alpha^{I_2}, V^{I_1}, \Phi^{I_0})$ で表される。これらプレポテンシャルの共形ウェイト (Δ, w) も示す。さらに、プレポテンシャルがプライマリーであることも示す。共形ウェイトと K_A 不変性は超共形不変な作用を構成する際に用いられる。

以下では CS 作用を導くために最小限必要なもののみをまとめる。

4 形式ゲージ超場

4 形式ゲージ超場の場の強さ超場は拘束条件で全て落としているので、プレポテンシャルおよびそのゲージ変換則についてのみ議論する。まず、4 形式ゲージ超場のプレポテンシャル Γ^{I_4} が $U^{I_4\dot{\delta}\dot{\gamma}}{}_{ba}$ から得られることが表 D.3 のゲージ固定条件と場の強さの拘束条件より従う：

$$U^{I_4\dot{\delta}\dot{\gamma}}{}_{ba} = 4(\bar{\sigma}_{ba}\epsilon)^{\dot{\delta}\dot{\gamma}}\Gamma^{I_4}, \quad U^{I_4}_{\delta\gamma ba} = 4(\sigma_{ba}\epsilon)_{\delta\gamma}\bar{\Gamma}^{I_4}. \tag{D.27}$$

このプレポテンシャル Γ^{I_4} はプライマリー超場であり、共形ウェイト $(\Delta, w) = (3, 2)$ を持つ。この性質は $U^{I_4}_{\dot{\delta}\dot{\gamma}ba}$ の超共形変換則 (D.11) 式から従う。プレポテンシャル Γ^{I_4} および $\bar{\Gamma}^{I_4}$ は、それぞれカイラルおよび反カイラルである：

$$\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}\Gamma^{I_4} = 0, \quad \nabla_\alpha\bar{\Gamma}^{I_4} = 0. \tag{D.28}$$

ボソン的な 4 形式ゲージ超場はプレポテンシャルを用いて次のように表される：

$$U^{I_4}_{dcba} = \frac{i}{8}\epsilon_{dcba}(\nabla^2\Gamma^{I_4} - \bar{\nabla}^2\bar{\Gamma}^{I_4}). \tag{D.29}$$

このプレポテンシャルに対するゲージ変換は

$$\Lambda^{I_4}_{\gamma\dot{\beta}a} = i(\sigma_a)_{\gamma\dot{\beta}}\Theta^{I_4} \tag{D.30}$$

で与えられる実超場 Θ^{I_4} によって

$$\delta_T(\Lambda^{I_1}, \Lambda^{I_2}, \Lambda^{I_3}, \Theta^{I_4})\Gamma^{I_4} = -\frac{1}{4}\bar{\nabla}^2\Theta^{I_4}, \quad \delta_T(\Lambda^{I_1}, \Lambda^{I_2}, \Lambda^{I_3}, \Theta^{I_4})\bar{\Gamma}^{I_4} = -\frac{1}{4}\nabla^2\Theta^{I_4} \tag{D.31}$$

となる。

3 形式ゲージ超場

3 形式ゲージ超場の既約場の強さ超場はカイラル超場 Y^{I_3} とそのエルミート共役 $\bar{Y}^{I_3}$ で表される。この超場は場の強さ超場の $\Sigma^{I_3\dot{\delta}\dot{\gamma}}{}_{ba}$ および $\Sigma^{I_3}_{\delta\gamma ba}$ 成分に現れる：

$$\Sigma^{I_3\dot{\delta}\dot{\gamma}}{}_{ba} = 4(\bar{\sigma}_{ba}\epsilon)^{\dot{\delta}\dot{\gamma}}Y^{I_3}, \quad \Sigma^{I_3}_{\delta\gamma ba} = 4(\sigma_{ba}\epsilon)_{\delta\gamma}\bar{Y}^{I_3}. \tag{D.32}$$

Y^{I_3} の D, A, K_A 変換則は、$\Sigma^{I_3}_{MNPQ}$ が超共形不変であることと四脚場 $E_A{}^M$ の D, A, K_A 変換則から次のようになる：

$$DY^{I_3} = 3Y^{I_3}, \quad AY^{I_3} = 2iY^{I_3}, \quad K_AY^{I_3} = 0. \tag{D.33}$$

この性質は Y^{I_3} がプライマリー超場で共形ウェイトが

$$(\Delta, w) = (3, 2) \tag{D.34}$$

であることを意味している。同様に $\bar{Y}^{I_3}$ の D, A, K_A 変換則は以下のようになる：

$$D\bar{Y}^{I_3} = 3\bar{Y}^{I_3}, \quad A\bar{Y}^{I_3} = -2i\bar{Y}^{I_3}, \quad K_A\bar{Y}^{I_3} = 0. \tag{D.35}$$

また、Y^{I_3} および $\bar{Y}^{I_3}$ がそれぞれカイラルおよび反カイラルである：

$$\nabla_\alpha\bar{Y}^{I_3} = 0, \quad \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}Y^{I_3} = 0. \tag{D.36}$$

ボソン的な場の強さ $\Sigma^{I_3}_{dcba}$ は、$\nabla^2Y^{I_3}$ に同定される：

$$\Sigma^{I_3}_{dcba} = \frac{i}{8}\epsilon_{dcba}(\nabla^2Y^{I_3} - \bar{\nabla}^2\bar{Y}^{I_3}). \tag{D.37}$$

場の強さ 4 形式がカイラル超場の補助場の項に (D.37) のように埋め込まれることはここで、ゲージ場 3 形式が力学的な自由度を持たないことと辻褄があっていることに注意する。また、これらの 3 形式ゲージ超場のビアンキ恒等式の解はテンソル階層性を持たない場合 [32, 88] と同じ形であることに注意する。

次に 3 形式ゲージ超場のプレポテンシャルを導く。3 形式のプレポテンシャルは表 D.3 におけるゲージ固定条件に現れた X^{I_3} である。X^{I_3} は プライマリー実超場で共形ウェイトは $(\Delta, w) = (2, 0)$ である。ボソン的な 3 形式ゲージ超場はプレポテンシャルを用いて

$$C^{I_3}_{cba} = \frac{1}{8}\epsilon_{cbad}(\bar{\sigma}^d)^{\dot{\delta}\delta}[\nabla_\delta, \bar{\nabla}_{\dot{\delta}}]X^{I_3} \tag{D.38}$$

と表される。

3 形式ゲージ超場のプレポテンシャルのゲージ変換則を求める。表 D.3 にあるゲージ固定条件を変えないゲージパラメータ $\Theta^{I_3}_\alpha$ は

$$\Lambda^{I_3}_{\dot\beta,\alpha\dot\alpha} = -2\epsilon_{\dot\beta\dot\alpha}\Theta^{I_3}_\alpha, \quad \Lambda^{I_3}_{\beta,\alpha\dot\alpha} = -2\epsilon_{\beta\alpha}\bar\Theta^{I_3}_{\dot\alpha} \tag{D.39}$$

で与えられる。ここで、 $\Theta^{I_3}_\alpha$ と $\bar\Theta^{I_3}_{\dot\alpha}$ はカイラルおよび反カイラル超場である：

$$\bar\nabla_{\dot\beta}\Theta^{I_3}_\alpha = 0, \quad \nabla_\beta\bar\Theta^{I_3}_{\dot\alpha} = 0. \tag{D.40}$$

プレポテンシャル X^{I_3} のゲージ変換は $C^{I_3}_{\gamma\dot\beta a}$ のゲージ変換を Θ^{I_3} に制限したもので決まる：

$$\delta_T(\Lambda^{I_1}, \Lambda^{I_2}, \Theta^{I_3}_{\underline{\beta}}, \Theta^{I_4})X^{I_3} = \frac{1}{2i}(\nabla^\alpha\Theta^{I_3}_\alpha - \bar\nabla_{\dot\alpha}\bar\Theta^{I_3\dot\alpha}) + (q^{(3)}\cdot\Theta)^{I_3}. \tag{D.41}$$

ここで、 X^{I_3} はテンソル階層性が存在する場合は、4 形式ゲージ超場のゲージパラメータ Θ^{I_4} でも変換を受けることに注意する。

2 形式ゲージ超場

2 形式ゲージ超場の既約場の強さ超場は、ビアンキ恒等式を解くことで実超場 L^{I_2} で表される。この実超場によってボソン的な場の強さ超場は

$$H^{I_2}_{fba} = \frac{1}{8}\epsilon_{fbag}(\bar\sigma^g)^{\dot\epsilon\epsilon}[\nabla_\epsilon, \bar\nabla_{\dot\epsilon}]L^{I_2} \tag{D.42}$$

と表される。この既約場の強さ超場は変形された線形実超場 (real linear superfield) 条件

$$\frac{1}{4}\nabla^2 L^{I_2} = (q^{(2)}\cdot\bar Y)^{I_2}, \quad = \frac{1}{4}\bar\nabla^2 L^{I_2} = (q^{(2)}\cdot Y)^{I_2} \tag{D.43}$$

に従う。ここで、線形実超場とは $\nabla^2 V = \bar\nabla^2 V = 0$ を満たす実超場 V を意味する。L^{I_2} に対する変形された線形超場条件はテンソル階層性による $q^{(2)}$ によって引き起こされることに注意する[*5]。もしもテンソル階層性が存在しない場合は、変形された線形超場条件は通常のものになる：$\nabla^2 L^{I_2} = \bar\nabla^2 L^{I_2} = 0$。さらに、$D$, A, K_A 変換則は (D.11) 式より、

$$DL^{I_2} = 2L^{I_2}, \quad AL^{I_2} = 0, \quad K_A L^{I_2} = 0. \tag{D.44}$$

これらより、L^{I_2} の共形ウェイトは

$$(\Delta, w) = (2, 0) \tag{D.45}$$

[*5] 4 次元 $\mathcal{N} = 1$ 超重力理論における変形された線形超場は文献 [89] で議論されている。

である。

2 形式ゲージ超場のプレポテンシャルはプライマリーカイラル超場 $\Sigma_\alpha^{I_2}$ とそのエルミート共役 $\bar{\Sigma}_{\dot\alpha}^{I_2}$ である。このプレポテンシャルは 2 形式のスピノル・ベクトル成分に現れる：

$$B_{\beta,\alpha\dot\alpha}^{I_2} = -2\epsilon_{\beta\alpha}\bar{\Sigma}_{\dot\alpha}^{I_2}, \quad B_{\dot\beta,\alpha\dot\alpha}^{I_2} = -2\epsilon_{\dot\beta\dot\alpha}\Sigma_\alpha^{I_2}. \tag{D.46}$$

この式から $\Sigma_\alpha^{I_2}$ がプライマリー超場で共形ウェイトが $(\Delta, w) = (3/2, 1)$ であることが従う。また、 $\Sigma_\alpha^{I_2}$ および $\bar{\Sigma}_{\dot\alpha}^{I_2}$ はそれぞれカイラルおよび反カイラル超場である：

$$\bar{\nabla}_{\dot\beta}\Sigma_\alpha^{I_2} = 0, \quad \nabla_\beta\bar{\Sigma}_{\dot\alpha}^{I_2} = 0. \tag{D.47}$$

ボソン的な 2 形式ゲージ超場はプレポテンシャルを用いて次のように表される：

$$B_{ba}^{I_2} = \frac{1}{2i}\left((\sigma_{ba})_\beta{}^\alpha\nabla^\beta\Sigma_\alpha^{I_2} - (\bar{\sigma}_{ba})^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha}\bar{\nabla}_{\dot\beta}\bar{\Sigma}^{I_2\dot\alpha}\right). \tag{D.48}$$

2 形式ゲージ超場のプレポテンシャルのゲージ変換則は、以下で定義されるゲージパラメータ Θ^{I_2} で引き起こされる。

$$\Lambda_\alpha^{I_2} = i\nabla_\alpha\Theta^{I_2}, \quad \Lambda_{\dot\alpha}^{I_2} = -i\bar{\nabla}_{\dot\alpha}\Theta^{I_2}, \quad \Lambda_{\alpha\dot\alpha}^{I_2} = \frac{1}{2}[\nabla_\alpha, \bar{\nabla}_{\dot\alpha}]\Theta^{I_2}. \tag{D.49}$$

ここで Θ^{I_2} は実超場である。$\Sigma_{\underline{\alpha}}^{I_2}$ のゲージ変換は具体的には

$$\begin{aligned}
\delta_T(\Lambda^{I_1}, \Theta^{I_2}, \Theta_{\underline{\beta}}^{I_3}, \Theta^{I_4})\Sigma_\alpha^{I_2} &= -\frac{1}{4}\bar{\nabla}^2\nabla_\alpha\Theta^{I_2} + (q^{(2)}\cdot\Theta_\alpha)^{I_2}, \\
\delta_T(\Lambda^{I_1}, \Theta^{I_2}, \Theta_{\underline{\beta}}^{I_3}, \Theta^{I_4})\bar{\Sigma}_{\dot\alpha}^{I_2} &= -\frac{1}{4}\nabla^2\bar{\nabla}_{\dot\alpha}\Theta^{I_2} + (q^{(2)}\cdot\bar{\Theta}_{\dot\alpha})^{I_2}
\end{aligned} \tag{D.50}$$

で与えられる。

1 形式ゲージ超場

1 形式ゲージ超場の解はテンソル階層性があることを除けば通常のゲージ理論と同じである。場の強さはゲージーノ超場 $W_\alpha^{I_1}$ とそのエルミート共役で表される。ビアンキ恒等式の解はあらわに書くと次のようになる。

- 1 スピノル・2 ベクトル成分

$$F_{\dot\beta,\alpha\dot\alpha}^{I_1} = -2\epsilon_{\dot\beta\dot\alpha}W_\alpha^{I_1}, \quad F_{\beta,\alpha\dot\alpha}^{I_1} = -2\epsilon_{\beta\alpha}\bar{W}_{\dot\alpha}^{I_1}. \tag{D.51}$$

- カイラル条件

$$\bar{\nabla}_{\dot\beta}W_\alpha^{I_1} = 0, \quad \nabla_\alpha\bar{W}_{\dot\beta}^{I_1} = 0. \tag{D.52}$$

- 2 ベクトル成分

$$F_{ba}^{I_1} = -\frac{i}{2}\left((\sigma_{ba})_\beta{}^\alpha \nabla^\beta W_\alpha^{I_1} - (\bar{\sigma}_{ba})^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} \bar{\nabla}_{\dot{\beta}} \bar{W}^{I_1 \dot{\alpha}}\right). \tag{D.53}$$

- 変形された実条件

$$\nabla^\alpha W_\alpha^{I_1} - \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{I_1 \dot{\alpha}} = -2i(q^{(1)} \cdot L)^{I_1}. \tag{D.54}$$

- D, A, K_A 変換則

$$\begin{aligned} DW_\alpha^{I_1} &= \frac{3}{2} W_\alpha^{I_1}, \quad AW_\alpha^{I_1} = iW_\alpha^{I_1}, \quad K_A W_\alpha^{I_1} = 0, \\ D\bar{W}^{I_1\dot{\alpha}} &= \frac{3}{2} \bar{W}^{I_1\dot{\alpha}}, \quad A\bar{W}^{I_1\dot{\alpha}} = -i\bar{W}^{I_1\dot{\alpha}}, \quad K_A \bar{W}^{I_1\dot{\alpha}} = 0. \end{aligned} \tag{D.55}$$

これらの式から $W_\alpha^{I_1}$ の共形ウェイトは次のようになる:

$$(\Delta, w) = (3/2, 1). \tag{D.56}$$

ここで、$W_\alpha^{I_1}$ の実条件はテンソル階層性による $q^{(1)}$ の存在によって変形されている。2 形式ゲージ場の場の強さを含む超場 L^{I_2} はテンソル階層性があるときには $\nabla^\alpha W_\alpha^{I_1}$ の虚部に現れることに注意する。仮にテンソル階層性がない場合、変形された実条件は通常のゲージーノ超場の実条件 $\nabla^\alpha W_\alpha^{I_1} = \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{I_1\dot{\alpha}}$ に帰着する。

また、1 形式ゲージ超場のプレポテンシャルは、表 D.3 のゲージ固定条件におけるプライマリー実超場 V^{I_1} である。ここで、V^{I_1} の共形ウェイトは $(\Delta, w) = (0, 0)$ である。ボソン的な 1 形式ゲージ超場は

$$A_{\alpha\dot{\alpha}}^{I_1} = \frac{1}{2}[\nabla_\alpha, \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}] V^{I_1} \tag{D.57}$$

とプレポテンシャルを用いて表される。

ここで、V^{I_1} はプライマリー超場であると仮定する： $K_A V^{I_1} = 0$。この仮定は $A_{\underline{\alpha}}^{I_1}$ の K_A 不変性と整合している [30]。

1 形式ゲージ超場のプレポテンシャルのゲージ変換は次で導入されるゲージパラメータ超場 Θ^{I_1} で行われる：

$$\Lambda^{I_1} = \frac{1}{2}(\Theta^{I_1} + \bar{\Theta}^{I_1}). \tag{D.58}$$

ここで、 Θ^{I_1} および $\bar{\Theta}^{I_1}$ はそれぞれカイラルおよび反カイラル超場である：

$$\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} \Theta^{I_1} = 0, \quad \nabla_\alpha \bar{\Theta}^{I_1} = 0. \tag{D.59}$$

具体的なプレポテンシャルのゲージ変換則は、Θ^{I_1} の虚部と 2 形式ゲージパラメータ超場 Θ^{I_2} によるシフトで与えられる：

$$\delta_T(\Theta^{I_1}, \Theta^{I_2}, \Theta_{\underline{\alpha}}^{I_3}, \Theta^{I_4}) V^{I_1} = \frac{1}{2i}(\Theta^{I_1} - \bar{\Theta}^{I_1}) + (q^{(1)} \cdot \Theta)^{I_1}. \tag{D.60}$$

0 形式ゲージ超場

0 形式ゲージ超場の場の強さは、プライマリー実超場 Ψ^{I_0} によって表される。ビアンキ恒等式の解は次のようになる。

- ベクトル成分

$$g_a^{I_0} = \frac{1}{4i}(\bar{\sigma}_a)^{\dot{\alpha}\beta}(\nabla_\beta g_{\dot{\alpha}}^{I_0} + \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} g_\beta^{I_0}) = -\frac{1}{4}(\bar{\sigma}_a)^{\dot{\alpha}\beta}[\nabla_\beta, \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}]\Psi^{I_0}. \tag{D.61}$$

- 変形された高次項条件

$$\frac{1}{4}\bar{\nabla}^2\nabla_\alpha\Psi^{I_0} = (q^{(0)}\cdot W_\alpha)^{I_0}, \quad \frac{1}{4}\nabla^2\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}\Psi^{I_0} = (q^{(0)}\cdot \bar{W}_{\dot{\alpha}})^{I_0}. \tag{D.62}$$

- D, A 変換則

$$D\Psi^{I_0} = 0, \quad A\Psi^{I_0} = 0. \tag{D.63}$$

これより、Ψ^{I_0} の共形ウェイトは次のようになる：

$$(\Delta, w) = (0, 0). \tag{D.64}$$

0 形式ゲージ超場にはゲージ固定するゲージ自由度はないが、拘束条件を満たすプレポテンシャルを見つけることはできる。ゲージ超場 f^{I_0} がカイラル超場 Φ^{I_0} を用いて

$$f^{I_0} = \frac{1}{2}(\Phi^{I_0} + \bar{\Phi}^{I_0}). \tag{D.65}$$

と表されている時、この f^{I_0} は場の強さに対する拘束条件を満たす。ここで、Φ^{I_0} の共形ウェイトは $(\Delta, w) = (0, 0)$ であり、また Φ^{I_0} はプライマリー超場である。

テンソル階層性が存在する時には、0 形式ゲージ超場のプレポテンシャルは 1 形式ゲージ超場のゲージ変換パラメータ Θ^{I_1} によるシフトを受ける：

$$\delta_T(\Theta^{I_1}, \Theta^{I_2}, \Theta^{I_3}_{\underline{\alpha}}, \Theta^{I_4})\Phi^{I_0} = (q^{(0)}\cdot\Theta)^{I_0}. \tag{D.66}$$

既約場の強さ超場とプレポテンシャルの関係

ここまでで、既約場の強さ超場とプレポテンシャルをそれぞれ求めてきた。一方で、場の強さ超場はゲージ超場で (D.24) 式として表される。従って、場の強さ超場に含まれる既約場の強さ超場はプレポテンシャルで表されることになる。この関係を表 D.4 にまとめた。

ゲージ場	既約場の強さ超場とプレポテンシャルの関係
3 形式	$Y^{I_3} = -\frac{1}{4}\bar{\nabla}^2 X^{I_3} - (q^{(3)} \cdot \Gamma)^{I_3}, \quad \bar{Y}^{I_3} = -\frac{1}{4}\nabla^2 X^{I_3} - (q^{(3)} \cdot \bar{\Gamma})^{I_3}$
2 形式	$L^{I_2} = \frac{1}{2i}(\nabla^\alpha \Sigma^{I_2}_\alpha - \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} \bar{\Sigma}^{I_2 \dot{\alpha}}) - (q^{(2)} \cdot X)^{I_2}$
1 形式	$W^{I_1}_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{\nabla}^2 \nabla_\alpha V^{I_1} - (q^{(1)} \cdot \Sigma_\alpha)^{I_1}, \quad \bar{W}^{I_1}_{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{4}\nabla^2 \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} V^{I_1} - (q^{(1)} \cdot \bar{\Sigma}_{\dot{\alpha}})^{I_1}$
0 形式	$\Psi^{I_0} = \frac{1}{2i}(\Phi^{I_0} - \bar{\Phi}^{I_0}) - (q^{(0)} \cdot V)^{I_0}$
(-1) 形式	$J^{I_{-1}} = -(q^{(-1)} \cdot \Phi)^{I_{-1}}$

表 D.4: 既約場の強さ超場とプレポテンシャルの関係。

ここで、表 D.4 における (-1) 形式ゲージ超場の既約場の強さ超場についてコメントする。(-1) 形式ゲージ超場は 0 に等しいが、テンソル階層性が存在する時には、(-1) 形式ゲージ超場の場の強さ超場を表 D.1 で提示したように 0 形式ゲージ超場のシフト $\omega^{I_{-1}} = -(q^{(-1)} \cdot f)^{I_{-1}}$ として構成することができる。0 形式ゲージ超場はプレポテンシャル Φ^{I_0} を用いてかけるため、(-1) 形式の既約場の強さ超場は 0 形式のプレポテンシャルで $J^{I_{-1}} = -(q^{(-1)} \cdot \Phi)^{I_{-1}}$ と書ける。また、既約場の強さ超場 $J^{I_{-1}}$ と元の場の強さ超場 $\omega^{I_{-1}}$ の関係は

$$\omega^{I_{-1}} = \frac{1}{2}(J^{I_{-1}} + \bar{J}^{I_{-1}}) \tag{D.67}$$

である。

D.3　Chern–Simons 作用

ここでは CS 作用を共形超空間で構成する。共形超空間形式を用いることで、CS 作用の構成は重力を含まない場合と同じ操作で構成することができる。CS 作用はプレポテンシャルと既約場の強さ超場の線形結合で構成することができる。

CS 作用では、場の強さの多項式が被積分関数に存在する。本章の最初に述べた作用 (D.2) 式は場の強さについて 1 次の CS 作用である。様々な次数の多項式を持つ CS 項を系統的に導出するために降下形式 (descent formalism) と呼ばれる方法を用いる。降下形式とは、のちに説明するように、4 形式ゲージ超場のプレポテンシャルに結合する場の強さの多項式を与えて、そこから順に低い階数のゲージ超場のプレポテンシャルに結合する多項式を決める方法である。この形式を用いることで CS 作用を系統的に構成することがで

きる。まず、重力を含まない超対称性理論での降下形式 [85] について説明したのち、この降下形式が共形超空間形式で同じ構造で拡張できることを示す。

重力を含まない超対称性理論における降下形式

ここでは、重力を含まない超対称性理論における降下形式について文献 [85] に従って説明する。降下形式においては CS 作用は次のようにプレポテンシャルに関する 1 次項で与えられる：

$$S_{\mathrm{CS}} = \int d^4x d^4\theta (V^{I_1} c_{I_1} - X^{I_3} c_{I_3}) + \mathrm{Re}\left(i \int d^4x d^2\theta (\Phi^{I_0} c_{I_0} + \Sigma^{I_2\alpha} c_{I_2\alpha} + \Gamma^{I_4} c_{I_4}) \right). \tag{D.68}$$

ここで、超場の関数 c_{I_p} は既約場の強さ超場の多項式である。ここで、c_{I_1} および c_{I_3} は実超場であり、$c_{I_0}, c_{I_2\alpha}, c_{I_4}$ はカイラル超場である。超空間上の積分で書かれているため、上記の CS 作用は超対称不変である。一方で、ゲージ不変性は被積分関数がプレポテンシャルにあらわに依存しているため非自明である。プレポテンシャルのゲージ変換による作用の不変性より、c_{I_p} が次のようにテンソル階層性を特徴付ける行列 $q^{(p)}$ によって関連づけられる：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i}(c_{I_4} - \bar{c}_{I_4}) &= -(q^{(3)})_{I_4}^{I_3} c_{I_3}, \\
-\frac{1}{4}\bar{D}^2 D_\alpha c_{I_3} &= (q^{(2)})_{I_3}^{I_2} c_{I_2\alpha}, \\
\frac{1}{2i}\left(D^\alpha c_{I_2\alpha} - \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{c}_{I_2}^{\dot{\alpha}}\right) &= -(q^{(1)})_{I_2}^{I_1} c_{I_1}, \\
-\frac{1}{4}\bar{D}^2 c_{I_1} &= (q^{(0)})_{I_1}^{I_0} c_{I_0}.
\end{aligned} \tag{D.69}$$

ここで、 D_α および $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ は重力を導入していない場合の超対称共変微分である。このように各 c_{I_p} が階数の高いゲージ超場のプレポテンシャルに結合するものから階数の低いものへと順に関連していくため、降下形式と呼ばれる。この c_{I_p} の関係式は、プレポテンシャルのゲージ変換と超空間の積分公式

$$\int d^4x d^4\theta V = -\frac{1}{4}\int d^4x d^2\theta \bar{D}^2 V = -\frac{1}{4}\int d^4x d^2\bar{\theta} D^2 V \tag{D.70}$$

から従う。ここで V は実超場である。

共形超空間での降下形式

ここでは共形超空間で CS 作用を構成するための降下形式を与える [45]。共形超空間における降下形式は重力を含まない超対称性理論における降下形式を次のように自然に拡

張することで得られる：

$$S_{\mathrm{CS}} = \int d^4xd^4\theta E(V^{I_1}c_{I_1} - X^{I_3}c_{I_3}) + \mathrm{Re}\left(i\int d^4xd^2\theta\mathcal{E}(\Phi^{I_0}c_{I_0} + \Sigma^{I_2\alpha}c_{I_2\alpha} + \Gamma^{I_4}c_{I_4})\right). \tag{D.71}$$

ここで、c_{I_p} は既約場の強さ超場の多項式である。ここでも c_{I_1} および c_{I_3} は実超場で、c_{I_0}, $c_{I_2\alpha}$, c_{I_4} はカイラル超場である。いま、CS 作用の対称性変換での不変性を議論する。共形超空間においては、c_{I_p} には超共形不変性が要求される。D-type および F-type 作用の超共形不変性とプレポテンシャルの共形ウェイトから、c_{I_p} は次の共形ウェイトを持つことが要求される：

$$\begin{aligned}
c_{I_0} &: (\Delta, w) = (3, 2),\\
c_{I_1} &: (\Delta, w) = (2, 0),\\
c_{I_2\alpha} &: (\Delta, w) = (3/2, 1),\\
c_{I_3} &: (\Delta, w) = (0, 0),\\
c_{I_4} &: (\Delta, w) = (0, 0).
\end{aligned} \tag{D.72}$$

共形ウェイト以外にも c_{I_p} には K_A 不変性が要求されるが、これは c_{I_p} が K_A 不変である既約場の強さ超場の多項式であることから従う。もう一つの条件が、テンソル階層性が存在する時の内部ゲージ変換に対する不変性である。降下形式では、この不変性は各 c_{I_p} の関係が超共形スピノル微分によって与えられる：

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}\bar{\nabla}^2 c_{I_1} &= (q^{(0)})_{I_1}^{I_0} c_{I_0},\\
\frac{1}{2i}\left(\nabla^\alpha c_{I_2\alpha} - \bar{\nabla}_{\dot\alpha}\bar{c}_{I_2}^{\dot\alpha}\right) &= -(q^{(1)})_{I_2}^{I_1} c_{I_1},\\
-\frac{1}{4}\bar{\nabla}^2\nabla_\alpha c_{I_3} &= (q^{(2)})_{I_3}^{I_2} c_{I_2\alpha},\\
\frac{1}{2i}(c_{I_4} - \bar{c}_{I_4}) &= -(q^{(3)})_{I_4}^{I_3} c_{I_3}.
\end{aligned} \tag{D.73}$$

この条件は共形超空間におけるプレポテンシャルのゲージ変換則と共形超空間におけるD-type 作用と F-type 作用の関係 (4.91) 式から従う。ここで、共形超空間形式を用いた利点がこの降下関係式にも現れていることに注意する。この降下関係式は、重力を含まない超対称性理論における降下関係式のスピノル微分 $D_{\underline{\alpha}}$ を、単に超共形共変スピノル微分 $\nabla_{\underline{\alpha}}$ に置き換えたものに過ぎない。すなわち、共形超空間を用いたことで、重力を含まない超対称性理論の議論を直接拡張できた。

最終的に得たい物理的な理論であるポアンカレ超重力理論は、共形超空間において超共形対称性をゲージ固定することで得られる。この際には compensator に対してゲージ条

件を要請する。しかし、この CS 作用を含んだ作用は compensator なしに超共形不変であるので、超共形対称性のゲージ固定の前後で作用の形は変わらないため、この作用をそのままポアンカレ超重力理論に用いることができる。

最後に、この降下形式を用いた CS 作用の例として、テンソル階層性が存在する場合の 2 次の CS 作用を提示する。2 次の CS 作用はアノマリー相殺において重要であるのみならず、トポロジカルな相互作用によるインフレーションモデルにおいても用いられている。

2 次の CS 作用は次のように与えられる：

$$\begin{aligned} S_{2\mathrm{CS}} := &\int d^4x d^4\theta E(\alpha_{I_1I_2}V^{I_1}L^{I_2} - \alpha_{I_3I_0}X^{I_3}\Psi^{I_0}) \\ &+ \mathrm{Re}\left(i\int d^4x d^2\theta \mathcal{E}(\alpha_{I_0I_3}\Phi^{I_0}Y^{I_3} + \alpha_{I_2I_1}\Sigma^{I_2\alpha}W_\alpha^{I_1} + \alpha_{I_4I_{-1}}\Gamma^{I_4}J^{I_{-1}})\right). \end{aligned} \tag{D.74}$$

α は定数である。この作用は c_{I_p} として次の特別な場合をとったものである：

$$c_{I_0} = \alpha_{I_0I_3}Y^{I_3}, \quad c_{I_1} = \alpha_{I_1I_2}L^{I_2}, \quad c_{I_2\alpha} = \alpha_{I_2I_1}W_\alpha^{I_1}, \quad c_{I_3} = \alpha_{I_3I_0}\Psi^{I_0}, \quad c_{I_4} = \alpha_{I_4I_{-1}}J^{I_{-1}}. \tag{D.75}$$

これらの c_{I_p} は既約場の強さ超場の共形ウェイトから超共形不変性を守っている。一方で、c_{I_p} にはテンソル階層性が存在する時のゲージ不変性が要求される。このゲージ不変性は降下関係式で与えられるが、2 次の CS 作用の場合、定数 α とテンソル階層性を特徴付ける行列 $q^{(p)}$ の関係式として以下のように与えられる：

$$\begin{aligned} \alpha_{I_1I_2}(q^{(2)})^{I_2}_{I_3} &= -\alpha_{I_0I_3}(q^{(0)})^{I_0}_{I_1}, \\ \alpha_{I_2I_1}(q^{(1)})^{I_1}_{J_2} &= \alpha_{I_1J_2}(q^{(1)})^{I_1}_{I_2}, \\ \alpha_{I_3I_0}(q^{(0)})^{I_0}_{I_1} &= -\alpha_{I_2I_1}(q^{(2)})^{I_2}_{I_3}, \\ \alpha_{I_4I_{-1}}(q^{(-1)})^{I_{-1}}_{I_0} &= \alpha_{I_3I_0}(q^{(3)})^{I_3}_{I_4}. \end{aligned} \tag{D.76}$$

この関係式は重力を含まない超対称性理論における関係式 [85] と一致する。

以上のように、4 次元超重力理論でテンソル階層性をもつテンソルゲージ理論とその CS 作用を構成することができた。共形超空間を用いることで重力を含まない場合と同じ形の振率テンソルの拘束条件 (D.22) 式を採用することができ、結果として既約場の強さ超場、プレポテンシャルとそのゲージ変換、CS 作用を重力を含まない場合と同様に簡潔に構成することができた。

参考文献

[1] D. Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen, and S. Ferrara, “Progress Toward a Theory of Supergravity,” Phys. Rev. **D13** (1976) 3214–3218.

[2] S. Deser and B. Zumino, “Consistent Supergravity,” Phys. Lett. **62B** (1976) 335.

[3] J. Wess and B. Zumino, “Supergauge Transformations in Four-Dimensions,” Nucl. Phys. **B70** (1974) 39–50.

[4] G. Jungman, M. Kamionkowski, and K. Griest, “Supersymmetric dark matter,” Phys. Rep. **267** (1996) 195–373, [arXiv:hep-ph/9506380 [hep-ph]].

[5] U. Amaldi, W. de Boer, and H. Furstenau, “Comparison of grand unified theories with electroweak and strong coupling constants measured at LEP,” Phys. Lett. **B260** (1991) 447–455.

[6] K. A. Intriligator and N. Seiberg, “Lectures on supersymmetric gauge theories and electric-magnetic duality,” Nucl. Phys. Proc. Suppl. **45BC** (1996) 1–28, [arXiv:hep-th/9509066 [hep-th]]. [Subnucl. Ser. **34** (1997) 237].

[7] S. Ferrara, R. Kallosh, and A. Strominger, “N=2 extremal black holes,” Phys. Rev. **D52** (1995) R5412–R5416, [arXiv:hep-th/9508072 [hep-th]].

[8] S. Ferrara and R. Kallosh, “Supersymmetry and attractors,” Phys. Rev. **D54** (1996) 1514–1524, [arXiv:hep-th/9602136 [hep-th]].

[9] A. Strominger, “Macroscopic entropy of N=2 extremal black holes,” Phys. Lett. **B383** (1996) 39–43, [arXiv:hep-th/9602111 [hep-th]].

[10] E. Cremmer, B. Julia, J. Scherk, P. van Nieuwenhuizen, S. Ferrara, and L. Girardello, “Super-higgs effect in supergravity with general scalar interactions,” Phys. Lett. **79B** (1978) 231–234.

[11] E. Cremmer, S. Ferrara, L. Girardello, and A. Van Proeyen, “Yang-Mills Theories with Local Supersymmetry: Lagrangian, Transformation Laws and SuperHiggs Effect,” Nucl. Phys. **B212** (1983) 413.

[12] T. Kugo and S. Uehara, “Improved Superconformal Gauge Conditions in the $N = 1$ Supergravity Yang-Mills Matter System,” Nucl. Phys. **B222** (1983) 125–138.

[13] J. A. Bagger, “Coupling the Gauge Invariant Supersymmetric Nonlinear Sigma Model to Supergravity,” Nucl. Phys. **B211** (1983) 302.

[14] J. Wess and B. Zumino, “Superspace Formulation of Supergravity,” Phys. Lett. **66B** (1977) 361–364.

[15] R. Grimm, J. Wess, and B. Zumino, “Consistency Checks on the Superspace Formulation of Supergravity,” Phys. Lett. **73B** (1978) 415–417.

[16] J. Wess and B. Zumino, “The Component Formalism Follows From the Superspace Formulation of Supergravity,” Phys. Lett. **79B** (1978) 394–398.

[17] S. J. Gates, M. T. Grisaru, M. Rocek, and W. Siegel, “Superspace Or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry,” Front. Phys. **58** (1983) 1–548, [arXiv:hep-th/0108200 [hep-th]].

[18] J. Wess and J. Bagger, “Supersymmetry and supergravity,” Princeton, USA: Univ. Pr. (1992).

[19] I. L. Buchbinder and S. M. Kuzenko, Ideas and methods of supersymmetry and supergravity: Or a walk through superspace. 1998.

[20] M. Kaku, P. K. Townsend, and P. van Nieuwenhuizen, “Properties of Conformal Supergravity,” Phys. Rev. **D17** (1978) 3179.

[21] M. Kaku and P. K. Townsend, “POINCARE SUPERGRAVITY AS BROKEN SUPERCONFORMAL GRAVITY,” Phys. Lett. **76B** (1978) 54–58.

[22] S. Ferrara and P. van Nieuwenhuizen, “Tensor Calculus for Supergravity,” Phys. Lett. **76B** (1978) 404.

[23] S. Ferrara and P. Van Nieuwenhuizen, “Structure of Supergravity,” Phys. Lett. **78B** (1978) 573–576.

[24] T. Kugo and S. Uehara, “Conformal and Poincare Tensor Calculi in $N = 1$ Supergravity,” Nucl. Phys. **B226** (1983) 49–92.

[25] R. Kallosh, L. Kofman, A. D. Linde, and A. Van Proeyen, “Superconformal symmetry, supergravity and cosmology,” Class. Quant. Grav. **17** (2000) 4269–4338, [arXiv:hep-th/0006179 [hep-th]]. [Erratum: Class. Quant. Grav.21,5017(2004)].

[26] P. Van Nieuwenhuizen, “Supergravity,” Phys. Rep. **68** (1981) 189–398.

[27] A. Van Proeyen, “SUPERCONFORMAL TENSOR CALCULUS IN N=1 AND N=2 SUPERGRAVITY,” in 19th Winter School and Workshop on Theoretical Physics: Supersymmetry and Supergravity Karpacz, Poland, February 14-26, 1983, 1983.

[28] E. S. Fradkin and A. A. Tseytlin, “CONFORMAL SUPERGRAVITY,” Phys. Rep. **119** (1985) 233–362.

[29] D. Z. Freedman and A. Van Proeyen, Supergravity. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 2012.

[30] T. Kugo and S. Uehara, “$N = 1$ Superconformal Tensor Calculus: Multiplets With External Lorentz Indices and Spinor Derivative Operators,” Prog. Theor. Phys. **73** (1985) 235.

[31] P. Binetruy, G. Girardi, R. Grimm, and M. Muller, “Kahler Transformations and the Coupling of Matter and Yang-Mills Fields to Supergravity,” Phys. Lett. **B189** (1987) 83–88.

[32] P. Binetruy, G. Girardi, and R. Grimm, “Supergravity couplings: A Geometric formulation,” Phys. Rep. **343** (2001) 255–462, [arXiv:hep-th/0005225 [hep-th]].

[33] P. S. Howe and R. W. Tucker, “Scale Invariance in Superspace,” Phys. Lett. **80B** (1978) 138–140.

[34] D. Butter, “N=1 Conformal Superspace in Four Dimensions,” Annals Phys. **325** (2010) 1026–1080, [arXiv:0906.4399 [hep-th]].

[35] S. Ferrara, L. Girardello, T. Kugo, and A. Van Proeyen, “Relation Between Different Auxiliary Field Formulations of $N = 1$ Supergravity Coupled to Matter,” Nucl. Phys. **B223** (1983) 191–217.

[36] D. Butter, “Background field formalism for chiral matter and gauge fields conformally coupled to supergravity,” Nucl. Phys. **B828** (2010) 233–272, [arXiv:0909.4901 [hep-th]].

[37] D. Butter, “Conserved supercurrents and Fayet-Iliopoulos terms in supergravity,” arXiv:1003.0249 [hep-th].

[38] K. S. Stelle and P. C. West, “Minimal Auxiliary Fields for Supergravity,” Phys. Lett. **74B** (1978) 330–332.

[39] K. S. Stelle and P. C. West, “Tensor Calculus for the Vector Multiplet Coupled to Supergravity,” Phys. Lett. **77B** (1978) 376.

[40] M. F. Sohnius and P. C. West, “An Alternative Minimal Off-Shell Version of N=1 Supergravity,” Phys. Lett. **105B** (1981) 353–357.

[41] S. Aoki and Y. Yamada, “DBI action of real linear superfield in 4D $\mathcal{N} = 1$ conformal supergravity,” JHEP **06** (2016) 168, [arXiv:1603.06770 [hep-th]].

[42] T. Kugo, R. Yokokura, and K. Yoshioka, “Component versus superspace approaches to D = 4, N = 1 conformal supergravity,” PTEP **2016** (2016), no. 7 073B07, [arXiv:1602.04441 [hep-th]].

[43] T. Kugo, R. Yokokura, and K. Yoshioka, “Superspace gauge fixing in Yang–Mills matter-coupled conformal supergravity,” PTEP **2016** (2016), no. 9 093B03, [arXiv:1606.06515 [hep-th]].

[44] S. Aoki, T. Higaki, Y. Yamada, and R. Yokokura, “Abelian tensor hierarchy in 4D $\mathcal{N} = 1$ conformal supergravity,” JHEP **09** (2016) 148, [arXiv:1606.04448 [hep-th]].

[45] R. Yokokura, “Abelian tensor hierarchy and Chern-Simons actions in 4D $\mathcal{N} = 1$ conformal supergravity,” JHEP **12** (2016) 092, [arXiv:1609.01111 [hep-th]].

[46] J. M. Luttinger, “Theory of Thermal Transport Coefficients,” Phys. Rev. **135** (1964) A1505–A1514.

[47] M. Geracie, D. T. Son, C. Wu, and S.-F. Wu, "Spacetime Symmetries of the Quantum Hall Effect," Phys. Rev. **D91** (2015) 045030, [arXiv:1407.1252 [cond-mat.mes-hall]].

[48] D. T. Son, "Newton-Cartan Geometry and the Quantum Hall Effect," arXiv:1306.0638 [cond-mat.mes-hall].

[49] A. Shitade, "Heat transport as torsional responses and Keldysh formalism in a curved spacetime," PTEP **2014** (2014), no. 12 123I01, [arXiv:1310.8043 [cond-mat.mes-hall]].

[50] A. Shitade and T. Kimura, "Bulk angular momentum and Hall viscosity in chiral superconductors," Phys. Rev. **B90** (2014), no. 13 134510, [arXiv:1407.1877 [cond-mat.supr-con]].

[51] A. Shitade, "Anomalous thermal Hall effect in a disordered Weyl ferromagnet," J. Phys. Soc. Jpn. **86** (2017), no. 5 054601, [arXiv:1610.00390 [cond-mat.mes-hall]].

[52] Y. Ohnuki and T. Kashiwa, "Coherent States of Fermi Operators and the Path Integral," Prog. Theor. Phys. **60** (1978) 548.

[53] D. Butter, "N=2 Conformal Superspace in Four Dimensions," JHEP **10** (2011) 030, [arXiv:1103.5914 [hep-th]].

[54] D. Butter, F. Ciceri, B. de Wit, and B. Sahoo, "All N=4 Conformal Supergravities," Phys. Rev. Lett. **118** (2017), no. 8 081602, [arXiv:1609.09083 [hep-th]].

[55] D. Butter, "New approach to curved projective superspace," Phys. Rev. **D92** (2015), no. 8 085004, [arXiv:1406.6235 [hep-th]].

[56] D. Butter, "Projective multiplets and hyperkähler cones in conformal supergravity," JHEP **06** (2015) 161, [arXiv:1410.3604 [hep-th]].

[57] D. Butter, "The $\mathcal{N} = 2$ Gauss-Bonnet from conformal supergravity," Phys. Part. Nucl. Lett. **11** (2014), no. 7 941–943.

[58] D. Butter, "On conformal supergravity and harmonic superspace," JHEP **03** (2016) 107, [arXiv:1508.07718 [hep-th]].

[59] D. Butter, S. M. Kuzenko, J. Novak, and G. Tartaglino-Mazzucchelli, "Conformal supergravity in five dimensions: New approach and applications," JHEP **02** (2015) 111, [arXiv:1410.8682 [hep-th]].

[60] D. Butter, S. M. Kuzenko, J. Novak, and S. Theisen, "Invariants for minimal conformal supergravity in six dimensions," JHEP **12** (2016) 072, [arXiv:1606.02921 [hep-th]].

[61] D. Butter, S. M. Kuzenko, J. Novak, and G. Tartaglino-Mazzucchelli, "Conformal supergravity in three dimensions: Off-shell actions," JHEP **10** (2013) 073, [arXiv:1306.1205 [hep-th]].

[62] D. Butter, S. M. Kuzenko, J. Novak, and G. Tartaglino-Mazzucchelli, "Conformal supergravity in three dimensions: New off-shell formulation," JHEP **09** (2013) 072, [arXiv:1305.3132 [hep-th]].

[63] D. Butter, "One loop divergences and anomalies from chiral superfields in supergravity," arXiv:0911.5426 [hep-th].

[64] N. Dragon, "Torsion and Curvature in Extended Supergravity," Z. Phys. **C2** (1979) 29–32.

[65] R. Blumenhagen, B. Kors, D. Lust, and S. Stieberger, "Four-dimensional String Compactifications with D-Branes, Orientifolds and Fluxes," Phys. Rept. **445** (2007) 1–193, [arXiv:hep-th/0610327 [hep-th]].

[66] T. Kugo, H. Terao, and S. Uehara, "DYNAMICAL GAUGE BOSONS AND HIDDEN LOCAL SYMMETRIES,". [Prog. Theor. Phys. Suppl.85,122(1985)].

[67] D. Gaiotto, A. Kapustin, N. Seiberg, and B. Willett, "Generalized Global Symmetries," JHEP **02** (2015) 172, [arXiv:1412.5148 [hep-th]].

[68] S. R. Coleman, "There are no Goldstone bosons in two-dimensions," Commun. Math. Phys. **31** (1973) 259–264.

[69] N. D. Mermin and H. Wagner, "Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one-dimensional or two-dimensional isotropic Heisenberg models," Phys. Rev. Lett. **17** (1966) 1133–1136.

[70] P. C. Hohenberg, "Existence of Long-Range Order in One and Two Dimensions," Phys. Rev. **158** (1967) 383–386.

[71] M. J. Bowick, S. B. Giddings, J. A. Harvey, G. T. Horowitz, and A. Strominger, "Axionic Black Holes and a Bohm-Aharonov Effect for Strings," Phys. Rev. Lett. **61** (1988) 2823.

[72] M. Montero, A. M. Uranga, and I. Valenzuela, "A Chern-Simons Pandemic," JHEP **07** (2017) 123, [arXiv:1702.06147 [hep-th]].

[73] T. Banks and N. Seiberg, "Symmetries and Strings in Field Theory and Gravity," Phys. Rev. **D83** (2011) 084019, [arXiv:1011.5120 [hep-th]].

[74] N. Kaloper and L. Sorbo, "A Natural Framework for Chaotic Inflation," Phys. Rev. Lett. **102** (2009) 121301, [arXiv:0811.1989 [hep-th]].

[75] N. Kaloper, A. Lawrence, and L. Sorbo, "An Ignoble Approach to Large Field Inflation," JCAP **1103** (2011) 023, [arXiv:1101.0026 [hep-th]].

[76] G. D'Amico, N. Kaloper, and A. Lawrence, "Monodromy inflation at strong coupling: 4π in the sky," arXiv:1709.07014 [hep-th].

[77] S. W. Hawking, "The Cosmological Constant Is Probably Zero," Phys. Lett. **134B** (1984) 403.

[78] M. J. Duff, "The Cosmological Constant Is Possibly Zero, but the Proof Is Probably Wrong," Phys. Lett. **B226** (1989) 36. [Conf. Proc.C8903131,403(1989)].

[79] N. Kaloper and L. Sorbo, "Where in the String Landscape is Quintessence," Phys. Rev. **D79** (2009) 043528, [arXiv:0810.5346 [hep-th]].

[80] F. Farakos, S. Lanza, L. Martucci, and D. Sorokin, "Three-forms in Supergravity and Flux Compactifications," Eur. Phys. J. **C77** (2017), no. 9 602, [arXiv:1706.09422 [hep-th]].

[81] G. Dvali, "Three-form gauging of axion symmetries and gravity," arXiv:hep-th/0507215 [hep-th].

[82] Planck Collaboration, P. A. R. Ade et al., “Planck 2015 results. XVII. Constraints on primordial non-Gaussianity,” Astron. Astrophys. **594** (2016) A17, [arXiv:1502.01592 [astro-ph.CO]].

[83] BICEP2, Keck Array Collaboration, P. A. R. Ade et al., “Improved Constraints on Cosmology and Foregrounds from BICEP2 and Keck Array Cosmic Microwave Background Data with Inclusion of 95 GHz Band,” Phys. Rev. Lett. **116** (2016) 031302, [arXiv:1510.09217 [astro-ph.CO]].

[84] E. Dudas, “Three-form multiplet and Inflation,” JHEP **12** (2014) 014, [arXiv:1407.5688 [hep-th]].

[85] K. Becker, M. Becker, W. D. Linch, and D. Robbins, “Abelian tensor hierarchy in 4D, N = 1 superspace,” JHEP **03** (2016) 052, [arXiv:1601.03066 [hep-th]].

[86] M. Muller, “Supergravity in U(1) Superspace With a Two Form Gauge Potential,” Nucl. Phys. **B264** (1986) 292–316.

[87] S. J. Gates, Jr., “SUPER P FORM GAUGE SUPERFIELDS,” Nucl. Phys. **B184** (1981) 381–390.

[88] P. Binetruy, F. Pillon, G. Girardi, and R. Grimm, “The Three form multiplet in supergravity,” Nucl. Phys. **B477** (1996) 175–202, [arXiv:hep-th/9603181 [hep-th]].

[89] I. Antoniadis and R. Knoops, “Gauge R-symmetry and de Sitter vacua in supergravity and string theory,” Nucl. Phys. **B886** (2014) 43–62, [arXiv:1403.1534 [hep-th]].