

可変な引力相互作用を有する  
2次元極低温フェルミ原子気体における  
対形成揺らぎの効果

2017 年度

松本 杜青

可変な引力相互作用を有する2次元極低温フェルミ原子気体における対形成揺らぎの効果

2017年度

松本 杜青

学位論文 博士(理学)

可変な引力相互作用を有する  
2次元極低温フェルミ原子気体における  
対形成揺らぎの効果

2017 年度

慶應義塾大学大学院理工学研究科

松本 杜青

# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>序論: 研究の背景と動機</b>	<b>3</b>
1.1	2 次元フェルミ超流動 (BKT 転移) . . . . .	3
1.2	極低温フェルミ原子気体の実験手法と BCS-BEC クロスオーバー . . . . .	6
1.2.1	光学トラップによる原子の捕獲と 2 次元フェルミ原子気体の作成 . . . . .	7
1.2.2	フェッシュバッハ共鳴による原子間の相互作用の制御 . . . . .	8
1.2.3	フェッシュバッハ共鳴を利用した 3 次元フェルミ原子気体における BCS-BEC クロスオーバーの実現 . . . . .	12
1.3	$^6\text{Li}$ 2 次元フェルミ原子気体で報告された BKT 転移及びこの系に対する BKT 理論 . . . . .	14
1.4	擬ギャップ現象と対形成揺らぎ . . . . .	20
1.5	2 次元フェルミ原子気体における熱力学量の観測 . . . . .	26
1.6	本論文の目的と構成 . . . . .	29
<b>第 2 章</b>	<b>クーパー対の重心運動量分布 <math>n_Q</math> の解析と BKT 転移観測実験との比較</b>	<b>33</b>
2.1	非自己無撞着 $T$ 行列近似 (TMA) . . . . .	33
2.2	クーパー対の重心運動量分布と 1 次相関関数 . . . . .	38
2.3	実験との比較 I: 重心運動量 0 のクーパー対の数 $n_{Q=0}$ . . . . .	44
2.4	実験との比較 II: クーパー対の 1 次相関関数 $g_1(r)$ . . . . .	47
<b>第 3 章</b>	<b>擬ギャップ現象と対形成揺らぎの効果</b>	<b>51</b>
3.1	1 粒子状態密度とスペクトル強度の定義 . . . . .	52
3.2	非自己無撞着 $T$ 行列近似 (TMA) で計算された 1 粒子状態密度と擬ギャップ現象 . . . . .	53
3.3	自己無撞着 $T$ 行列近似 (SCTMA) . . . . .	60
3.4	自己無撞着 $T$ 行列近似 (SCTMA) による擬ギャップ領域の特定 . . . . .	65
3.5	自己無撞着 $T$ 行列近似 (SCTMA) による熱力学量の計算と実験との比較 . . . . .	73

第 4 章	まとめ	81
付録 A	2 次元フェルミ原子気体におけるクーパー対相関関数 $C_{2D}(\mathbf{r})$ の表式 (1.10) の導出	85
付録 B	2 次元フェルミ原子気体のトラップ周波数に対する条件式 (1.19) の導出	87
付録 C	位相揺らぎのみを考慮した 2 次元フェルミ原子気体における BKT 理論	89
C.1	超流動平均場近似の経路積分表示	89
C.2	平均場近似まわりの超流動秩序パラメータの位相揺らぎを考慮した BKT 理論	91
付録 D	本論文で用いた数値計算の環境	95
付録 E	強結合領域における非自己無撞着 $T$ 行列近似 (TMA)	97
付録 F	強結合理論に対する静的近似における諸計算	99
F.1	非自己無撞着 $T$ 行列近似 (TMA) の低温領域の解析	99
F.2	自己無撞着 $T$ 行列近似 (SCTMA) におけるグリーン関数 (式 (3.31)) の 導出	100
付録 G	静的近似のもとでのクーパー対の重心運動量分布 $n_Q$ の表式	103
付録 H	SCTMA における式 (3.40) と式 (3.27) が等価であることの証明	105
参考文献		107

## 第1章

# 序論: 研究の背景と動機

本章では、まず本論文が対象とする2次元極低温フェルミ原子気体において近年注目を集めているBerezinskii-Kosterlitz-Thouless (BKT) 転移について概説する。2004年に3次元極低温フェルミ原子気体の超流動化が<sup>40</sup>K、<sup>6</sup>Li原子種を用い達成されて以来、この2次元系特有の超流動現象は当該研究分野のさらなる発展につながるものとしてその実現が期待されている。BKT転移の説明に続き2次元系を実現させるため、光学トラップによる次元操作の方法、及びフェッシュバッハ共鳴を用いた相互作用の制御技術を説明、後者の応用例として3次元フェルミ原子気体超流動で実現しているBCS-BECクロスオーバーについて述べる。その後、<sup>6</sup>Li 2次元フェルミ原子気体で近年報告されたBKT転移の実験と、この系のBKT転移に対する理論を説明し、現状、実験と理論共に検討の余地があることを指摘する。そして、強い引力相互作用に起因する量子多体現象の1つである擬ギャップ現象から対形成揺らぎの影響を完全には考慮していない従来のBKT理論の妥当性が評価できることを述べる。また、本研究で用いる強結合理論の検証に利用する近年2次元フェルミ原子気体で観測された熱力学量を概観する。本章の最後に本論文の目的について説明する。

### 1.1 2次元フェルミ超流動 (BKT転移)

ここでは、2次元フェルミ粒子系[1]での超流動転移のBKT転移[2–5]について、3次元フェルミ超流動転移と比較しつつ概説する。

2次元系では、系の低次元性により超流動揺らぎが増強されるため、3次元系での超流動(超伝導)転移のような、長距離秩序を有する2次相転移が実現しないことが知られている[6,7]。一般に、フェルミ粒子超流動は、フェルミ粒子間に働く引力相互作用により、フェルミ粒子がクーパー対とよばれる対を形成、その対が凝縮することにより生じる。こ

の際、超流動相は、超流動秩序パラメータ

$$\Delta(\mathbf{r}) \equiv \langle \Psi(\mathbf{r}) \rangle, \quad (1.1)$$

が有限になる相として定義される ( $\Psi(\mathbf{r})$  はフェルミ粒子対 (クーパー対) の場の演算子)。ここで、超流動転移を Ginzburg-Landau(GL) 理論の自由エネルギー [8, 9]

$$F = \int d^D \mathbf{r} \left[ a_0 |\Delta(\mathbf{r})|^2 + \frac{b_0}{2} |\Delta(\mathbf{r})|^4 + c_0 |\nabla \Delta(\mathbf{r})|^2 \right], \quad (1.2)$$

を用いて議論する (ここでは、3次元系の超流動転移温度近傍で  $|\Delta(\mathbf{r})|$  は小さいため、6次以降は無視し、また、BKT 転移を記述する際に必要な超流動秩序パラメータの位置依存する寄与の2次までを考慮している)。式 (1.2) において、 $D$  は系の次元、また  $a_0$ 、 $b_0$ 、 $c_0$  は定数とする。3次元フェルミ超流動 (超伝導) の場合、その基礎理論である BCS (Bardeen-Cooper-Schrieffer) 理論では、超流動秩序パラメータ  $\Delta(\mathbf{r})$  は

$$\Delta(\mathbf{r}) = \Delta_0 e^{i\phi}, \quad (1.3)$$

のように空間依存性を持たない量として扱われる。この時、自由エネルギー (1.2) は

$$F = \int d^3 \mathbf{r} \left[ a_0 \Delta_0^2 + \frac{b_0}{2} \Delta_0^4 \right], \quad (1.4)$$

となる。GL 理論では超流動相で、 $a_0 < 0$ 、 $b_0 > 0$  となり、秩序パラメータの振幅  $\Delta_0$  はこの自由エネルギーを最小化する条件で決まる。また、式 (1.3) の3次元系の超流動状態ではクーパー対の相関関数  $C_{3D}(\mathbf{r})$  は

$$C_{3D}(\mathbf{r}) = \langle \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{0}) \rangle \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} \Delta_0^2, \quad (1.5)$$

となる。このことは、超流動状態ではクーパー対同士の相関が無限遠まで発達しており、系に長距離秩序が存在していることを示している。このような秩序を有する相転移は、式 (1.2) の自由エネルギーの2階微分が超流動転移温度  $T_c$  で不連続となる2次相転移であり、比熱が  $T_c$  で不連続になるなどの特異な現象が現れる。一方、2次元系では、有限温度で式 (1.5) で表現される長距離秩序相が存在しないことが理論的に示されている (Mermin-Wagner-Hohenberg の定理) [6, 7]。そのため、2次元系は3次元系の BCS 超流動のような長距離秩序を有する状態は有限温度で実現しない。

2次元における超流動転移は、Berezinskii、Kosterlitz、Thouless らにより、3次元系の BCS 状態のような長距離秩序を有する2次相転移とは異なる BKT 転移 (これは準長距離秩序を有する相転移で後述する式 (1.13) の幕指数で特徴付けられる) によって実現することが提唱されている [2–5]。BKT 転移では秩序パラメータとして、3次元の式 (1.3) とは異なる

$$\Delta(\mathbf{r}) = \Delta_0 e^{i\theta(\mathbf{r})}, \quad (1.6)$$

を考える。これは式 (1.3) の秩序パラメータに対し、位相  $\theta(\mathbf{r})$  の揺らぎを考慮していることに相当する。このとき式 (1.2) の自由エネルギーは

$$F = \int d^2\mathbf{r} \left[ a_0 \Delta_0^2 + \frac{b_0}{2} \Delta_0^4 + c_0 \Delta_0^2 |\nabla \theta(\mathbf{r})|^2 \right]. \quad (1.7)$$

式 (1.7) の第3項 ( $\equiv F_{\text{FL}}$ ) は超流動速度  $\mathbf{v}_s = \hbar \nabla \theta(\mathbf{r}) / M$  (ここで、 $M$  はクーパー対の質量、 $\hbar$  はプランク定数  $h$  を  $2\pi$  で割った定数) を用いると、

$$F_{\text{FL}} = \int d^2\mathbf{r} \frac{1}{2} \rho_s |\mathbf{v}_s(\mathbf{r})|^2, \quad (1.8)$$

と書けることから、質量密度

$$\rho_s = 2M^2 c_0 \Delta_0^2 / \hbar^2, \quad (1.9)$$

を有する超流動体の運動エネルギーと解釈することができる。このとき 2 次元系でのクーパー対の相関関数  $C_{\text{2D}}(\mathbf{r})$  は

$$\begin{aligned} C_{\text{2D}}(\mathbf{r}) &= \langle \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{0}) \rangle \\ &= \Delta_0^2 \langle e^{-i[\theta(\mathbf{r}) - \theta(\mathbf{0})]} \rangle \\ &\xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} \alpha r^{-\eta(T)}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

となる (式 (1.10) の 2 行目から 3 行目の導出の詳細は付録 A 参照)。ここで、 $\alpha$  は定数、

$$\eta(T) = \frac{M^2 k_B T}{2\pi \hbar^2 \rho_s}, \quad (1.11)$$

である ( $k_B$  はボルツマン定数)。3 次元系での超流動状態は長距離秩序を有し、クーパー対の相関関数は式 (1.5) のように  $r \rightarrow \infty$  で一定であったが、式 (1.10) の相関関数  $C_{\text{2D}}(\mathbf{r})$  は  $r \rightarrow \infty$  で幕的に減衰する。このような幕相関が見られる秩序は準長距離秩序と呼ばれる。

このような 2 次元系と 3 次元系での超流動転移の違いは超流動転移温度における物理量の振る舞いに大きな影響を与える (詳細は [1–5, 10–12] を参照)。例えば、比熱は 3 次元の場合、超流動転移点において不連続な飛びを示すが、2 次元系の BKT 転移でそのような不連続性は見られない。一方、2 次元系では図 1.1 (a) のように超流動密度  $\rho_s$  が “BKT 転移温度”  $T_{\text{BKT}}$  において有限の飛び

$$\delta \rho_s = \frac{2k_B M^2 T_{\text{BKT}}}{\pi \hbar^2}, \quad (1.12)$$

を示すことが知られており [10]、実際、超流動  ${}^4\text{He}$  薄膜において観測されている [13]。3 次元系では図 1.1 (b) のように超流動密度は超流動転移温度  $T_c$  以下で 0 から連続的に増

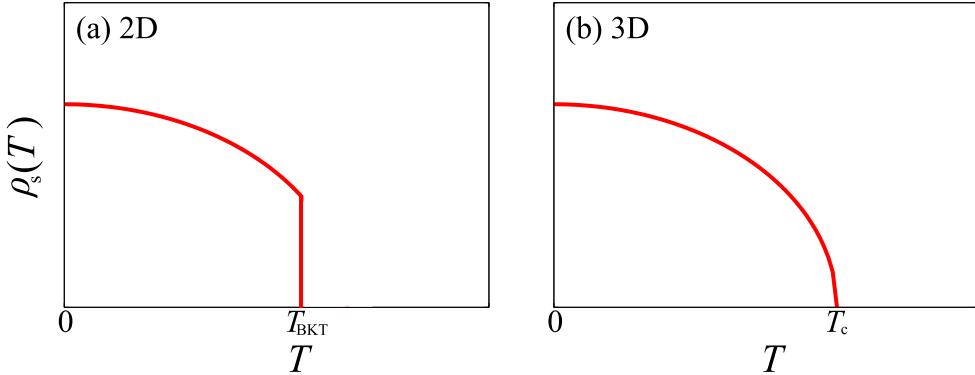


図 1.1 (a) 2 次元系における超流動密度  $\rho_s$  の温度依存性の模式図。BKT 転移温度  $T_{\text{BKT}}$  で飛びが見られる。(b) 3 次元系における超流動密度  $\rho_s$  の温度依存性の模式図。超流動転移温度  $T_c$  以下で連続的に有限の値となる。

表 1.1 BKT 転移温度における幕指数  $\eta_{\text{BKT}}$  の報告例

物質名	幕指数 $\eta_{\text{BKT}}$
励起子ポラリトン系 [14]	0.25
急冷凝縮 Hg-Xe 薄膜超伝導体 [15]	0.25
In-In 酸化物複合薄膜超伝導体 [16]	0.23
Pb 薄膜超伝導体 [17]	0.25
FeSe <sub>0.3</sub> Te <sub>0.7</sub> 薄膜超伝導体 [18]	0.25

加する。従って、 $T_{\text{BKT}}$  での  $\rho_s$  の飛びは BKT 転移特有の現象である。また BKT 転移温度において、式 (1.11) で与えられる  $\eta(T)$  は

$$\eta(T = T_{\text{BKT}}) = \eta_{\text{BKT}} = 0.25, \quad (1.13)$$

となる。式 (1.10) の幕相関とその幕指数  $\eta$  が式 (1.13) のようになることは BKT 転移の特徴である。BKT 転移は励起子ポラリトン系 [14] や超伝導状態の薄膜金属超伝導体 [15–18] においても観測されており、表 1.1 でまとめたように幕指数  $\eta_{\text{BKT}} \simeq 0.25$  が測定されている。

## 1.2 極低温フェルミ原子気体の実験手法と BCS-BEC クロスオーバー

本論文が対象とする極低温フェルミ原子気体は、2 次元フェルミ超流動を調べる新たな舞台として、実験 [19–32]、理論 [33–45] 共に注目を集めている。一般に系の次元が下がる

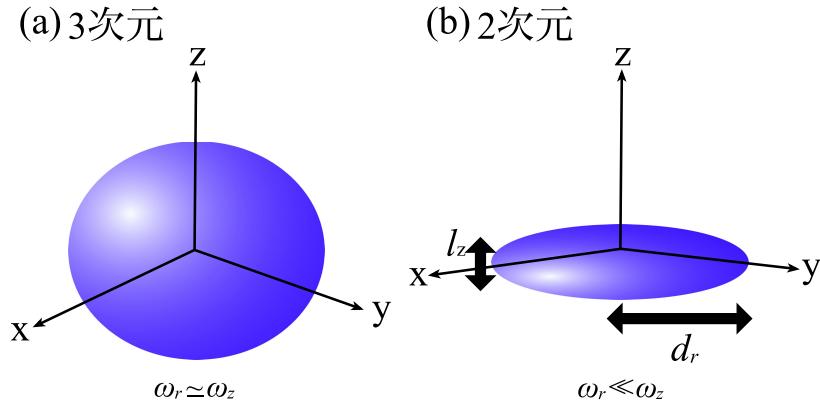


図 1.2 式 (1.18) の調和ポテンシャル中に捕獲されたフェルミ原子気体 (青色) の模式図。(a) 3 次元系。(b) 2 次元系。 $d_r$  は 2 次元フェルミ原子気体の 2 次元平面 (円盤) の半径、 $l_z$  は 2 次元フェルミ原子気体の 2 次元平面に垂直方向の厚みである。

と超流動搖らぎが強くなり、1.1 節で述べたように長距離秩序は実現できなくなる。このため、3 次元フェルミ原子気体で議論されてきた BCS (Bardeen-Cooper-Schrieffer)-BEC (Bose-Einstein condensation) クロスオーバー [46–58] が準長距離秩序である BKT 転移が実現する 2 次元系ではどのようになるかは興味深い問題である。極低温フェルミ原子気体では、人工的に 2 次元系を作成することが可能で [20, 59]、かつ、フェルミ原子間に働く引力相互作用の強さを実験的に操作できる。これにより、この系では弱結合から強結合に至る幅広い相互作用領域における 2 次元フェルミ超流動の性質を系統的に調べることが可能である。このような可変な引力相互作用を有する 2 次元極低温フェルミ原子気体は不純物や格子欠陥などを含まないクリーンなシステムであるため、励起子ポラリトン系などの(強く相互作用する) 2 次元強相関フェルミ粒子系の理解に役立つと期待されている。ここでは、2 次元フェルミ超流動現象の研究に重要なこれら 2 つの実験技術と引力相互作用強度を制御することで 3 次元フェルミ原子気体で実現された BCS-BEC クロスオーバーについて説明する。

### 1.2.1 光学トラップによる原子の捕獲と 2 次元フェルミ原子気体の作成

冷却原子物理 (cold atom physics) の分野では、レーザー技術を駆使することにより、多数の原子を空間的に閉じ込めることができ可能となっている (光学トラップ)。原子気体は高温の原子源 (600 K) から供給され、レーザー光の輻射圧により数  $100 \mu\text{K}$  まで冷却された後、レーザーを用いて光学的に捕獲される [20, 60–63]。レーザーにより印加される電場を

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\hat{\mathbf{e}} + \text{c.c.}, \quad (1.14)$$

とした時、原子が感じるポテンシャル  $V(\mathbf{r})$  は分極率を  $\alpha(\omega)$  とすると、

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}\alpha(\omega)|\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2, \quad (1.15)$$

で与えられる [60]。式 (1.14) において  $E_0(\mathbf{r})$  は電場の振幅、 $\omega$  はレーザー光の周波数、 $t$  は時間、 $\hat{\mathbf{e}}$  は電場方向の単位ベクトルである。簡単のため、2 準位系 (基底状態  $|g\rangle$ 、励起状態  $|e\rangle$  でエネルギーの差は  $\hbar\omega_0$ ) で分極率  $\alpha(\omega)$  を評価すると [60]

$$\alpha(\omega) = \frac{2\hbar\omega_0 \left| \langle e | \hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{e}} | g \rangle \right|^2}{(\hbar\omega_0)^2 - (\hbar\omega)^2}, \quad (1.16)$$

となる。 $\hat{\mathbf{d}}$  は電場により生じた電気双極子の演算子である。印加するレーザーの周波数  $\omega$  が  $\omega < \omega_0$  の時、式 (1.16) において  $\alpha(\omega) > 0$  となり、このトラップポテンシャルはレーザー中の原子を閉じ込める役割を果たし、原子を捕獲することが可能となる。特に、 $z$  方向に伝搬するガウシアンレーザー

$$E_0(\mathbf{r}) \propto \exp(-(x^2 + y^2)/r_0^2) \cos^2(k_z z), \quad (1.17)$$

を印加した場合を考えると ( $k_z$  は  $z$  軸方向の波数、 $r_0$  はレーザー半径である)、 $\mathbf{r} = 0$  付近の原子が感じるポテンシャルは異方的な調和ポテンシャル

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega_r^2(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}m\omega_z^2z^2, \quad (1.18)$$

で近似できる。ここで、 $\omega_r$ 、 $\omega_z$  はトラップ周波数である。原子気体はこの調和ポテンシャル中のみ運動が可能であり、 $\omega_r \simeq \omega_z$  の場合が 3 次元系に対応する (図 1.2 (a))。 $\omega_r$  と  $\omega_z$  を、レーザーの形状を変化させることで操作し、 $\omega_r \ll \omega_z$  とすることにより、 $z$  軸方向の原子気体の運動を制限し、2 次元系を実現することができる (図 1.2 (b))。系が十分 2 次元的であるための条件は次のように見積もることができる (付録 B 参照)。

$$\sqrt{\frac{2N}{\pi}} \frac{\omega_r}{\omega_z} < 1. \quad (1.19)$$

ここで、 $N$  は全フェルミ原子数である。実際の実験では全フェルミ原子数  $N \simeq 100000$  に対し、 $\omega_r : \omega_z \simeq 1 : 300$  が実現しており [29, 30]、これは式 (1.19) を満たしていることから原子の  $z$  方向の運動はほとんど抑制され、それと垂直の方向にしか動けず、系は 2 次元系と見なせる。

### 1.2.2 フェッシュバッハ共鳴による原子間の相互作用の制御

フェルミ原子気体では、フェッシュバッハ共鳴と呼ばれる機構 [64] を用いることで、原子間に働く相互作用強度を実験的に変えることができる。以下、その方法について概説す

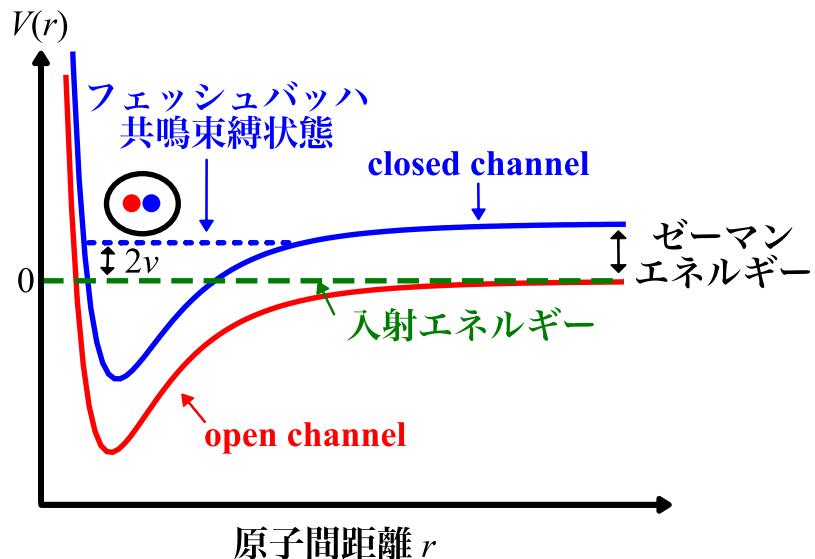


図 1.3 スピン 3 重項の open channel (赤線) とスピン 1 重項の closed channel (青線) の原子間ポテンシャルエネルギーの模式図。縦軸は相互作用ポテンシャル  $V(r)$ 、横軸は 2 原子間距離  $r$  を表す。緑の破線は原子の入射エネルギーであり、open channel の 2 原子間の距離が無限の時のエネルギーに相当する。図では、2 つの原子が無限にはなれたときのエネルギーをエネルギーの原点にとっている。 $2\nu$  は入射エネルギーと束縛エネルギー準位 (青の点線) とのエネルギー差で、これは束縛エネルギーに加え、open channel と closed channel のエネルギー差は外部磁場  $B$  で操作でき、closed channel の束縛エネルギー準位と原子の入射エネルギーが一致するときの磁場が共鳴磁場  $B_0$  ( $2\nu = 0$ ) となり、フェッシュバッハ共鳴点に相当する。束縛エネルギー準位では、共鳴束縛状態であるフェッシュバッハ分子が形成される (図中の赤丸と青丸はそれぞれ異なる超微細構造状態の原子を表し、それを囲う黒丸はフェッシュバッハ分子を表す)。

る。ここでは例として、フェルミ原子気体超流動の研究でよく用いられる  ${}^6\text{Li}$  フェルミ原子をガス化した場合を取り上げる。 ${}^6\text{Li}$  を用いた研究では  $|1\rangle \equiv |F = 1/2, F_z = 1/2\rangle$  と  $|2\rangle \equiv |F = 1/2, F_z = -1/2\rangle$  の 2 つの原子状態にある原子を捕獲、実験が行われる。ここで、 $F$ 、 $F_z$  は原子の超微細構造状態 (hyper-fine state) とその  $z$  成分で、核スピン  $\mathbf{I}$  と電子スピン  $\mathbf{S}$  の和  $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{S}$  である。 ${}^6\text{Li}$  はアルカリ金属原子であるため、最外殻に電子を 1 つ有しているが、今 2 原子を考え、2 つの原子の最外殻電子のスピンがスピン 1 重項状態のものを closed channel、スピン 3 重項状態のものは open channel と呼ぶ (後述するように、open channel は散乱前後の原子状態、closed channel はフェッシュバッハ共鳴状態にある 2 原子の状態である)。各チャンネルのポテンシャルエネルギーは図 1.3 のように、原子間の近距離では斥力相互作用、遠距離では引力相互作用のレナードジョーン

ズポテンシャルとなる。この2つのチャンネルが結合するような相互作用が働くことにより、原子間に有効相互作用  $U_{\text{eff}}$  が働くことが知られている。この両者を結びつける相互作用として、次式で与えられる超微細相互作用  $H_{\text{hf}}$  がある [59–61]。

$$\begin{aligned} H_{\text{hf}} &= A_{\text{hf}} \mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{S}_1 + A_{\text{hf}} \mathbf{I}_2 \cdot \mathbf{S}_2 \\ &= \frac{A_{\text{hf}}}{2} (\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2) \cdot (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2) + \frac{A_{\text{hf}}}{2} (\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) \cdot (\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2). \end{aligned} \quad (1.20)$$

式(1.20)において、 $A_{\text{hf}}$  は結合定数である。 $H_{\text{hf}}$  において、open channel (電子スピン3重項) と closed channel (電子スピン1重項) の結合を調べると、式(1.20) 2行目の1項目は両者を結合させることはないが、2項目は結合させることが可能である。系は外部磁場  $\mathbf{B}$  を印加するとゼーマンエネルギーにより、open channel のエネルギーは低くなり、2つの原子が十分はなれている時(図1.3で  $r \rightarrow \infty$  の時)、2原子の状態は open channel になる。一方、2つの原子が接近し、図1.3に模式的に描かれたポテンシャル  $V(r)$  のくぼみ部分に生じた共鳴束縛状態に遷移する際、同時に式(1.20)の超微細相互作用により open channel と closed channel が結合、電子スピン状態が変化することでゼーマンエネルギーも変化する。その後再び、2原子が解離し、open channel の状態に戻るという過程が生じる。このclosed channelに遷移する際の、図1.3中の束縛状態はフェッシュバッハ共鳴分子と呼ばれる。原子の解離状態とフェッシュバッハ分子への遷移振幅を  $g$  とすると、入射原子のエネルギーとフェッシュバッハ共鳴分子状態のエネルギーの差を  $2\nu$  と書いて、この過程は2次摂動の範囲で

$$U_{\text{eff}} = -\frac{g^2}{2\nu}. \quad (1.21)$$

ここで、上の説明から分かるように  $2\nu$  には電子スピン状態の違い(1重項と3重項)に起因するゼーマンエネルギーの差が含まれているため、外部磁場により値を変えることが可能であり、それにより式(1.21)で与えられる有効相互作用も外部磁場で制御可能となる。これがフェルミ原子気体で原子間相互作用を制御する際に用いられるフェッシュバッハ共鳴機構である。実際には、原子間相互作用にはフェッシュバッハ共鳴以外によるものもあり、それを  $U_{\text{bg}}$  と書き、さらにフェッシュバッハ共鳴準位  $2\nu$  が 0 となる外部磁場を共鳴磁場  $B_0$  とすると、 $B \simeq B_0$  近傍で  $2\nu = \alpha_B(B - B_0)$  と書けることから、原子間相互作用は

$$U_{\text{eff}} = U_{\text{bg}} - \frac{g^2}{\alpha_B(B - B_0)}, \quad (1.22)$$

となる [59, 65]。式(1.22)において、 $\alpha_B > 0$  は定数である。

冷却原子物理の分野では式(1.22)の相互作用は  $s$  波散乱長  $a$  を用いて表されることが多く、その場合は

$$a(B) = a_{\text{bg}} \left[ 1 - \frac{W_B}{B - B_0} \right], \quad (1.23)$$

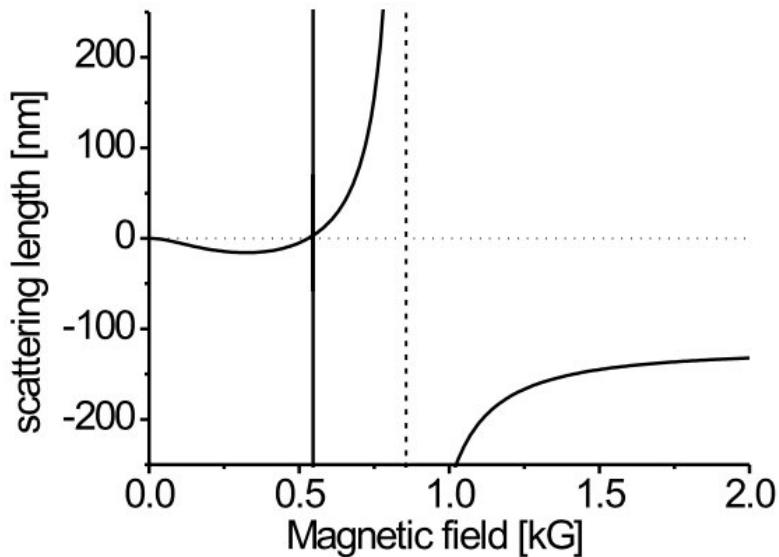


図 1.4  ${}^6\text{Li}$  フェルミ原子の  $|1\rangle = |F = 1/2, F_z = 1/2\rangle$  と  $|2\rangle = |F = 1/2, F_z = -1/2\rangle$  間の  $s$  波散乱長  $a$  の外部磁場依存性 [66]。横軸は外部磁場  $B$ 、破線はフェッショバッハ共鳴点  $B_0 \simeq 832$  G。実線の  $B = 543.2$  G 近傍にも共鳴幅が狭いフェッショバッハ共鳴点が存在する [67]。 $B_0 < B$  の  $a < 0$  となる領域が弱結合領域、 $B < B_0$  の  $a > 0$  となる領域が強結合領域に相当する。[Reprinted figure with permission from T. Bourdel, J. Cubizolles, L. Khaykovich, K. M. F. Magalhães, S. J. J. M. F. Kokkelmans, G. V. Shlyapnikov, and C. Salomon, Phys. Rev. Lett. **91**, 020402 (2003). Copyright (2003) by the American Physical Society. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.020402>.]

と書かれる [59, 65]。ここで、 $a_{\text{bg}}$  はフェッショバッハ共鳴と関係のない散乱長、 $W_B$  は共鳴幅である。図 1.4 は  ${}^6\text{Li}$  フェルミ原子気体における可変な散乱長の例である [66]。共鳴磁場  $B_0 = 832.18$  G、 $W_B = 262.3$  G、 $a_{\text{bg}} = -1582a_B$  ( $a_B$  はボーア半径) である [68]。 $a(B) < 0$  となる  $B > B_0$  の磁場領域が原子間の引力相互作用が弱い領域(弱結合領域)、 $a(B) > 0$  となる  $B < B_0$  の磁場領域は原子間の引力相互作用が強い領域(強結合領域)に相当する。弱結合領域では、図 1.5 のように、弱く結合した大きなサイズのフェルミ原子対(クーパー対)が重なり合うように形成される。引力相互作用強度が強くなると対の重なりはなくなり、強結合領域になると原子対は 1 つの分子ボゾンとみなせる領域になる。このように、原子間の引力相互作用強度を制御できるため、3 次元フェルミ原子気体において、幅広い引力相互作用強度に対し、クーパー対形成に伴う超流動現象を系統的に研究することが可能となっている [59, 65]。なお、ここでは  ${}^6\text{Li}$  フェルミ原子気体を例にフェッショバッハ共鳴を説明したが、フェッショバッハ共鳴を利用してフェルミ原子気体超流動の研究は  ${}^{40}\text{K}$  フェルミ原子気体でも可能となっている [69, 70]。

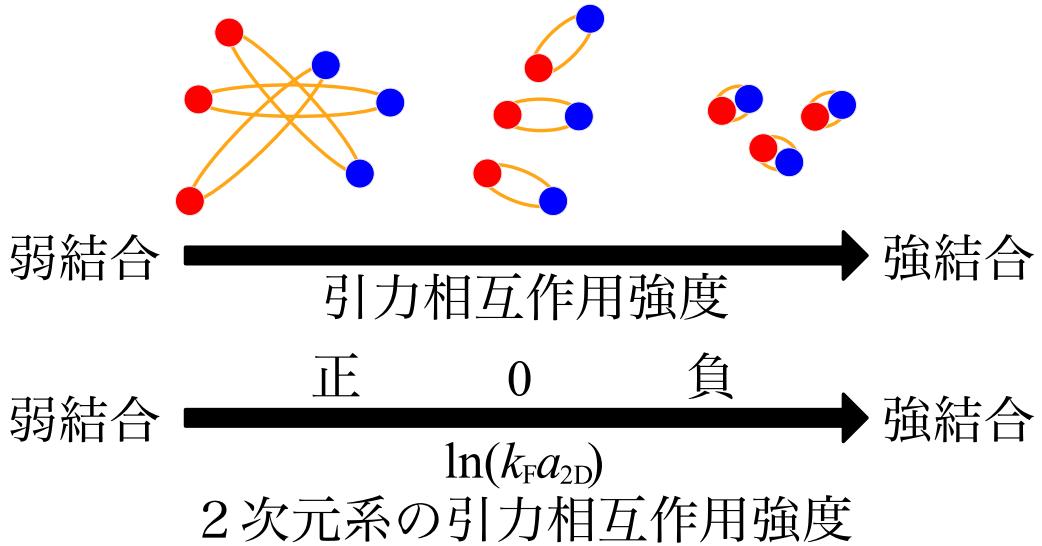


図 1.5 引力相互作用強度に対するフェルミ原子対(クーパー対)の形成の様子。2種類の丸(赤、青)は異なる原子状態にある原子を表す。弱結合領域から強結合領域へと引力相互作用が強くなるにつれ、クーパー対が重なり合った状態から分子ボソンの気体とみなせる領域に連続的に移り変わる。引力相互作用強度と2次元系の散乱長 $a_{2D}$ (式(1.25))の関係も示している。ここで、 $k_F$ はフェルミ波数。

### 1.2.3 フェッシュバッハ共鳴を利用した3次元フェルミ原子気体におけるBCS-BECクロスオーバーの実現

光学トラップで捕獲された<sup>40</sup>K 3次元フェルミ原子気体、及び<sup>6</sup>Li 3次元フェルミ原子気体において、BCS-BEC クロスオーバー [46–53] が実現された [54–58]。これは超流動において、クーパー対の構造が図 1.5 のように連続的に変化するという現象である。実験では、クーパー対の重心運動量 0 に凝縮する粒子数  $N_0$  を見積もるため、クーパー対の重心運動量分布が測定されている。図 1.6 に示す<sup>40</sup>K 3次元フェルミ原子気体の実現 [54] では、 $N_0$  と全原子数  $N$  との比  $N_0/N$  が有限になる領域を超流動状態としている。この図では、底面の水色あたりが  $N_0/N = 0$  と  $N_0/N > 0$  の境目であり、超流動転移温度  $T_c$  と考えられる。また、この図の  $\Delta B$  はフェッシュバッハ共鳴磁場から測った外部磁場であり、物理的には原子間相互作用の強さを表している。すなわち、 $\Delta B > 0$  が弱結合領域、 $\Delta B < 0$  が強結合領域に対応する。弱結合領域では、引力相互作用が弱くなるにつれ ( $\Delta B$  が大きくなるにつれ)、図 1.6 の水色の領域が現れる温度(すなわち  $T_c$ ) が下がる。これは、BCS 理論で知られているような引力が弱くなると  $T_c$  が下がる状況が実現してい

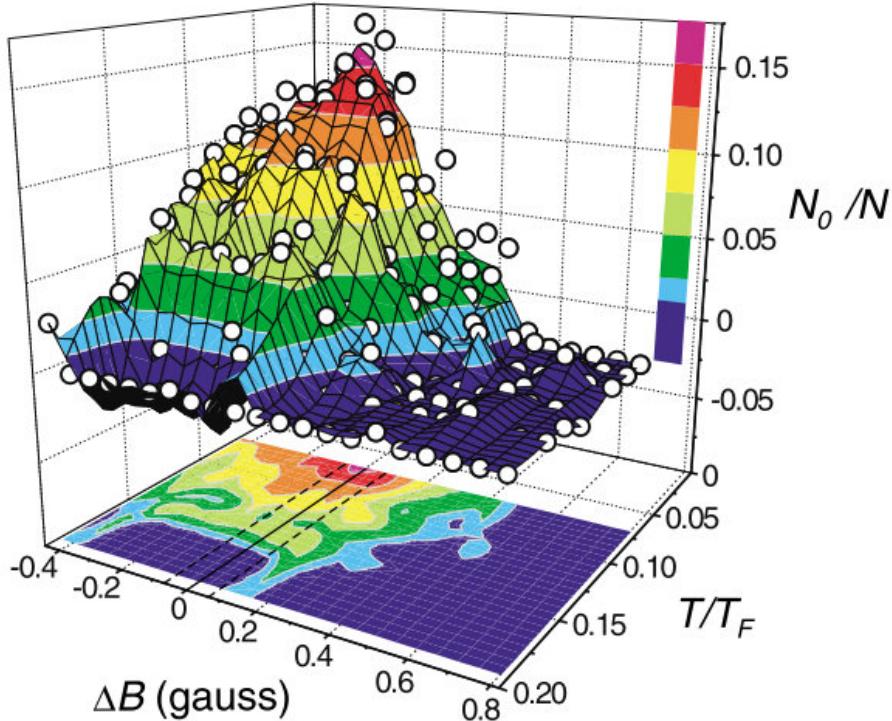


図 1.6  ${}^{40}\text{K}$  3 次元フェルミ原子気体で観測された凝縮粒子数  $N_0$  の温度、相互作用依存性 [54]。 $N$  は全フェルミ原子数、 $T_F$  はフェルミ温度、 $\Delta B$  はフェッシュバッハ共鳴磁場  $B_0 = 202\text{ G}$  から測った外部磁場。 $\Delta B < 0$  が強結合領域、 $\Delta B > 0$  が弱結合領域に相当する。この実験では  $N_0 > 0$  の領域が超流動相と判定されている、すなわち底面の水色と青色の境界がこの実験における超流動転移温度  $T_c$  である。[Reprinted figure with permission from C. Regal, M. Greiner, and D. S. Jin, Phys. Rev. Lett. **92**, 040403 (2004). Copyright (2004) by the American Physical Society. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.040403>.]

ると考えられる。他方、強結合領域では水色の領域が現れる温度は  $\Delta B$  に対し、ほぼ一定となっている。この領域では、強い引力相互作用によりフェルミ原子全てが  $N_B = N/2$  個の分子ボゾンを形成、超流動転移温度  $T_c$  はこの理想分子ボーズ気体の BEC 転移温度

$$T_{\text{BEC}} = \frac{2\pi\hbar^2}{k_B\zeta^{\frac{2}{3}}(3/2)} \frac{N_B^{\frac{2}{3}}}{MV^{\frac{2}{3}}} \simeq 0.218T_F, \quad (1.24)$$

で決まっている。ここで、 $T_F$  はフェルミ温度、 $V$  は体積、 $M = 2m$  は分子ボゾンの質量 ( $m$  はフェルミ原子の質量)、 $\zeta(x)$  はリーマンのゼータ関数である。実際図 1.6において、 $\Delta B < 0$  での  $T_c$  (水色部分) は  $0.17T_F$  程度であり、式 (1.24) の値に近い。

図 1.6 に示す  ${}^{40}\text{K}$  3 次元フェルミ原子気体の実験 [54]、及び、その直後に  ${}^6\text{Li}$  3 次元フェルミ原子気体での BCS-BEC クロスオーバー現象の観測 [55] が行われた。その後、

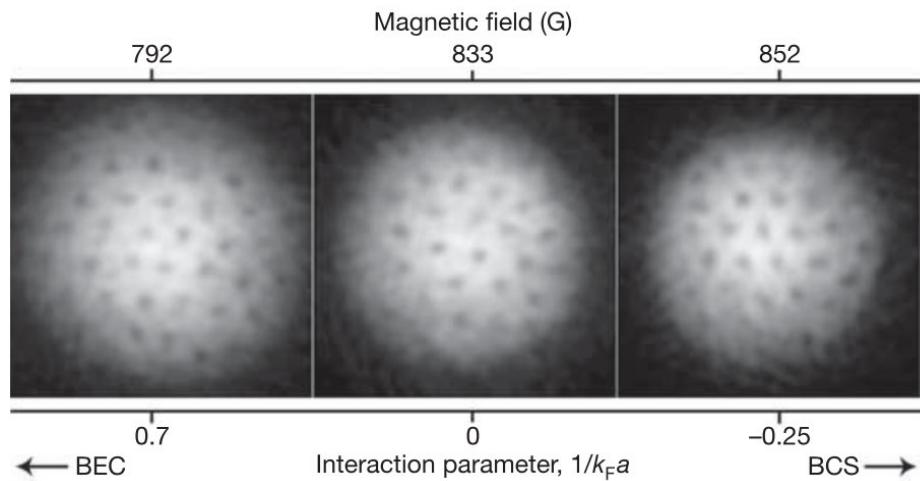


図 1.7 回転させた  ${}^6\text{Li}$  フェルミ原子気体の凝縮相 ( $N_0 > 0$ ) で観測された量子渦 [58]。この図はクーパー対の密度分布であり、明るい部分が高密度である。超流動状態で現れる量子渦の欠陥が黒点のように現れている。[Reprinted by permission from Macmillan Publishers Ltd: Nature, M. W. Zwierlein, J. R. Abo-Shaeer, A. Schirotzek, C. H. Schunck, and W. Ketterle, 435, 1047 (2005), copyright (2005). doi:10.1038/nature03858.]

実際に系が超流動状態になっていることを検証するため、超流動現象特有の量子渦の観測が行われた [58]。Zwierlein らは  ${}^6\text{Li}$  3 次元フェルミ原子気体において、 $N_0/N$  が有限になっている状況 [55] で原子気体を回転させたところ図 1.7 のように、弱結合領域から強結合領域でクーパー対密度の空間分布に黒い丸状の量子渦を多数観測した [58]。同様の現象は磁場中の第 2 種超伝導体 [71] や、回転させた超流動  ${}^4\text{He}$  [9] でも知られている。各渦はそのまわりを超流動体が巡回しており、このような状態が安定に存在していることは散逸のない流れ(超流動)が実現していることの傍証である。

### 1.3 ${}^6\text{Li}$ 2次元フェルミ原子気体で報告された BKT 転移及びこの系に対する BKT 理論

Ries と Murthy らは、前節で述べた 3 次元フェルミ原子気体の実験技術を 2 次元系に適用、 ${}^6\text{Li}$  2 次元極低温フェルミ原子気体において、3 次元超流動現象 [54, 55] で見られたようなクーパー対の凝縮に加え、BKT 転移の特徴的な振る舞いのクーパー対の幕相関を観測し、BKT 転移が実現したと主張している [29, 30]。しかし、報告されている BKT 転移の幕指数は、BKT 転移で予想されている幕指数  $\eta_{\text{BKT}} = 0.25$  (式 (1.13)) と桁が異なっている。ここでは、これらの実験 [29, 30] の詳細について述べる。

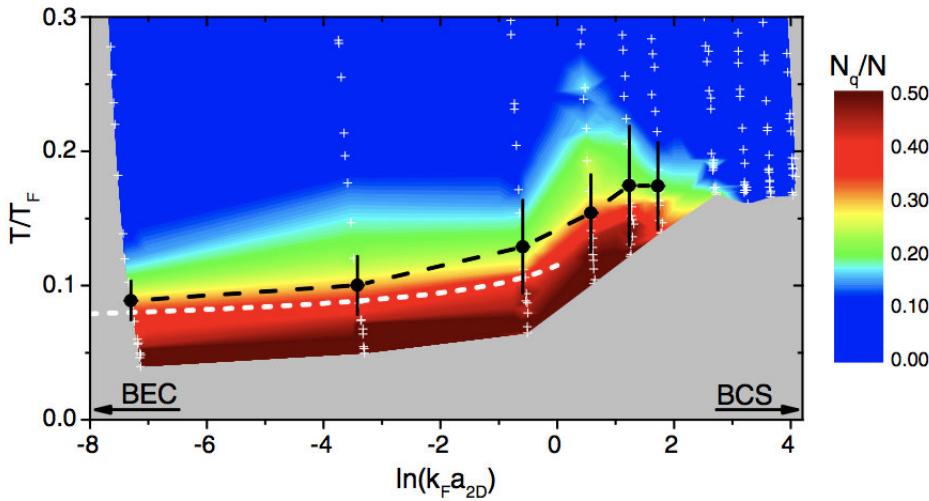


図 1.8  ${}^6\text{Li}$  2次元フェルミ原子気体での BKT 転移の観測実験 [29]。横軸は相互作用強度  $\ln(k_F a_{2D})$ 、黒破線は図 1.9 (c) のクーパー対の重心運動量 0 の分布の急増が始まる温度から決定された BKT 転移温度  $T_{\text{BKT}}^{\text{exp}}$ 、図に塗られた青～赤は図 1.9 (a) で決定されている低運動量のクーパー対の分子数  $N_q$  を全フェルミ原子数  $N$  で規格化したものである。白破線は 2 次元ボーズ原子気体に対するモンテカルロ計算で得られた BKT 転移温度 [72, 73] をフェルミ原子気体に適用した結果 [74]。[Reprinted figure with permission from M. G. Ries, A. N. Wenz, G. Zürn, L. Bayha, I. Boettcher, D. Kedar, P. A. Murthy, M. Neidig, T. Lompe, and S. Jochim, Phys. Rev. Lett. **114**, 230401 (2015). Copyright (2015) by the American Physical Society. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.230401>.]

Ries と Murthy らにより報告された BKT 転移温度  $T_{\text{BKT}}^{\text{exp}}$ (図 1.8 中の黒破線) [29] は 3 次元フェルミ超流動現象 [54, 55] の観測の時同様、クーパー対の重心運動量分布の温度依存性から決定された。図 1.8 の横軸は相互作用強度を表しており、 $\ln(k_F a_{2D}) \lesssim -1$  は強結合領域、 $-1 \lesssim \ln(k_F a_{2D}) \lesssim 1$  はクロスオーバー領域、 $\ln(k_F a_{2D}) \gtrsim 1$  は弱結合領域に相当している。 $k_F$  はフェルミ波数、 $a_{2D}$  は 2 次元系の散乱長であり、3 次元での  $s$  波散乱長  $a_{3D}$  との関係は [75]

$$a_{2D} = l_z \sqrt{\frac{\pi}{A}} \exp\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{l_z}{a_{3D}}\right). \quad (1.25)$$

ここで  $l_z$  は 2 次元フェルミ原子気体の  $z$  方向の厚み(図 1.2 (b) 参照)、また、 $A = 0.905$  である [59, 75, 76]。

図 1.8 の実験 [29] における  $T_{\text{BKT}}^{\text{exp}}$  の詳細は次の通りである：図 1.9 (a) はこの実験で観測されたクーパー対の重心運動量分布で  $\tilde{n}(k)$  である ( $k$  は重心運動量)。このデータからクーパー対以外の部分を古典的なボルツマン分布と仮定し除去(図 1.9 (a) の点線及び実線)し、図中灰色部分をクーパー対の数  $N_q$  として評価している。図 1.9 (b) は  $N_q/N$  の

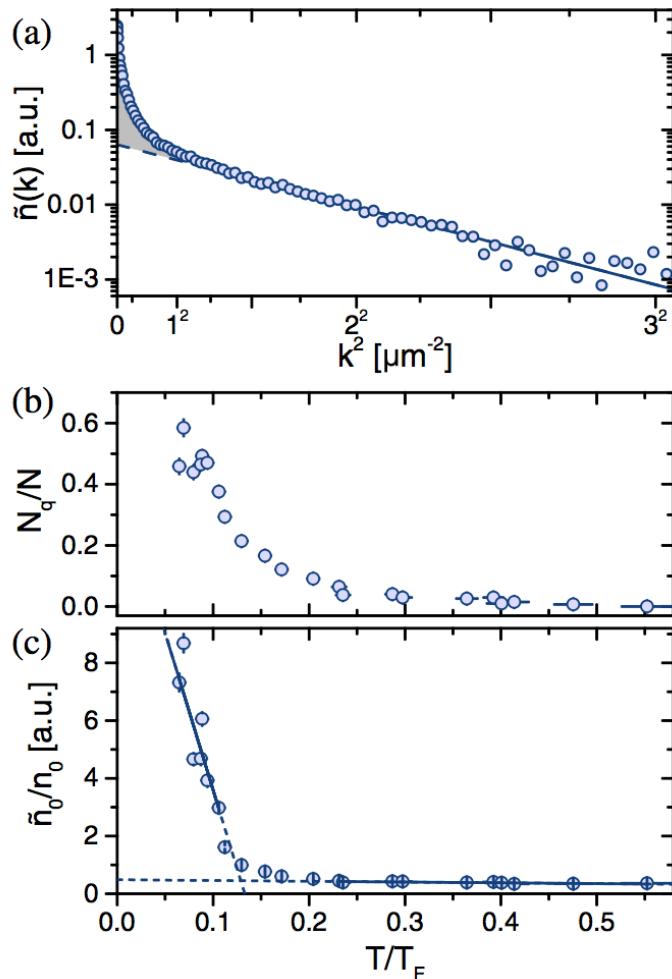


図 1.9 (a)  ${}^6\text{Li}$  2次元フェルミ原子気体におけるクーパー対の重心運動量分布  $\tilde{n}(k)$  [29]。相互作用は  $\ln(k_{\text{F}}a_{2\text{D}}) \sim -0.5$ 、温度は実験で到達した最低温度。横軸はクーパー対の重心運動量  $k$  の2乗。実線は高運動量領域に対しボルツマン分布でフィッティングした結果で、灰色部分はそのフィッティングの線と  $\tilde{n}(k)$  の差。(b) (a) の灰色部分から評価されたクーパー対の数  $N_q$  の温度依存性。フェルミ原子気体の全粒子数  $N$  で規格化している。(c) クーパー対の重心運動量分布  $\tilde{n}(k)$  の重心運動量  $k = 0$  の値  $\tilde{n}_0$  の温度依存性。BKT 転移温度  $T_{\text{BKT}}^{\text{exp}}$ において 1 となるように密度  $n_0$  で規格化している。この実験では低温側の  $\tilde{n}_0/n_0$  と高温側の  $\tilde{n}_0/n_0$  を直線フィッティングし、その直線の交点から  $T_{\text{BKT}}^{\text{exp}}$  が決定されている。[Reprinted figure with permission from M. G. Ries, A. N. Wenz, G. Zürn, L. Bayha, I. Boettcher, D. Kedar, P. A. Murthy, M. Neidig, T. Lompe, and S. Jochim, Phys. Rev. Lett. **114**, 230401 (2015). Copyright (2015) by the American Physical Society. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.230401>.]

温度依存性である ( $N$  は全フェルミ原子数)。低温になるにつれクーパー対の数が増加している。この相互作用依存性は図 1.8 のカラープロットで表されている。Ries と Murthy

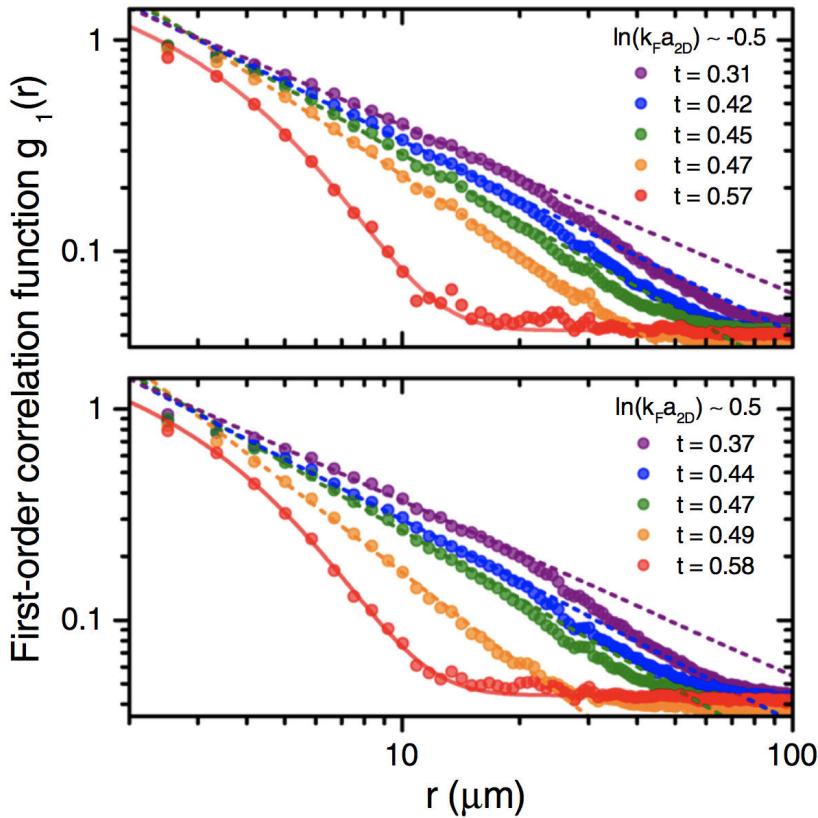


図 1.10  ${}^6\text{Li}$  2次元フェルミ原子気体におけるクーパー対の1次相関関数  $g_1(r)$  [30]。横軸は対間距離  $r$ 。上図は  $\ln(k_F a_{2D}) \simeq -0.5$  (強結合側)、下図は  $\ln(k_F a_{2D}) \simeq 0.5$  (弱結合側) の結果。温度  $t = T/T_{\text{BEC}}^{\text{trap}}$  は全粒子数  $N$  が分子ボソンを組んだと仮定した場合のトラップされた2次元理想ボーズ原子気体の BEC 転移温度  $T_{\text{BEC}}^{\text{trap}} \approx 140$  nK で規格化された温度。実験 [29] で観測された BKT 転移温度  $T_{\text{BKT}}^{\text{exp}}$  は、 $\ln(k_F a_{2D}) \simeq -0.5$  では  $t = 0.483$ 、 $\ln(k_F a_{2D}) \simeq 0.5$  では  $t = 0.485$  である。直線は  $5 \mu\text{m} \leq r \leq 25 \mu\text{m}$  で幕関数  $C_r r^{-\eta}$  でフィッティングした結果 ( $C_r$  は定数)。[Reprinted figure with permission from P. A. Murthy, I. Boettcher, L. Bayha, M. Holzmann, D. Kedar, M. Neidig, M. G. Ries, A. N. Wenz, G. Zurn, and S. Jochim, Phys. Rev. Lett. **115**, 010401 (2015). Copyright (2015) by the American Physical Society. [https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.010401.](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.010401)]

らはクーパー対の重心運動量 0 の凝縮の根拠として、図 1.9 (a) 中のクーパー対の重心運動量分布  $\tilde{n}_0 \equiv \tilde{n}(k = 0)$  の温度依存性を提示している [29]。彼らは図 1.9 (c) のように  $\tilde{n}_0$  が急増し始める温度をクーパー対の凝縮が始まる温度とみなし、BKT 転移温度  $T_{\text{BKT}}^{\text{exp}}$  としている。

この実験を行った Ries と Murthy らは BKT 転移の追加検証として、クーパー対の1次相関関数  $g_1(r)$  の分析も行っている [30]。 $g_1(r)$  は、観測されたクーパー対の重心運動

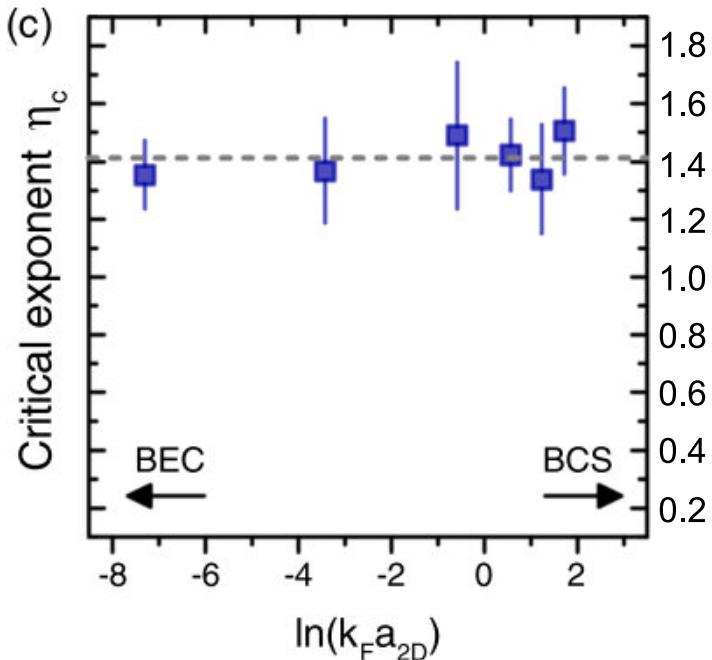


図 1.11  ${}^6\text{Li}$  2 次元フェルミ原子気体における  $T_{\text{BKT}}^{\text{exp}}$  での  $g_1(r)$  の幕指数  $\eta_c$  の相互作用依存性 [30]。破線は  $\eta_c \simeq 1.4$ 。[Reprinted figure with permission from P. A. Murthy, I. Boettcher, L. Bayha, M. Holzmann, D. Kedar, M. Neidig, M. G. Ries, A. N. Wenz, G. Zürn, and S. Jochim, Phys. Rev. Lett. **115**, 010401 (2015). Copyright (2015) by the American Physical Society. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.010401>.]

量分布  $\tilde{n}(\mathbf{k})$  と次のような関係式でつながっている。

$$g_1(r) = \int d^2k \tilde{n}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (1.26)$$

図 1.10 は Ries と Murthy らにより報告された  $g_1(r)$  の振る舞いの測定結果である。横軸  $r$  はクーパー対の対間距離、温度  $t$  はトラップポテンシャルを考慮した場合の、2次元理想ボーズ原子気体の BEC 転移温度  $T_{\text{BEC}}^{\text{trap}} \approx 140$  nK で規格化した温度である。図 1.8 に示された BKT 転移温度  $T_{\text{BKT}}^{\text{exp}}$ (黒破線) は、図 1.10 の  $\ln(k_F a_{2D}) = -0.5$  では  $t = 0.483$ 、 $\ln(k_F a_{2D}) = 0.5$  では  $t = 0.485$  に対応しており、 $T_{\text{BKT}}^{\text{exp}}$  温度以下の  $g_1(r)$  において、 $5 \mu\text{m} \leq r \leq 25 \mu\text{m}$  の対間領域で幕的振る舞いが見られると報告、これも“BKT 転移特有の幕的振る舞い”(式 (1.10)) を観測したものであると主張している。

しかし、前述したように、 $T_{\text{BKT}}^{\text{exp}}$  において観測された幕指数は弱結合領域から強結合領域まで BKT 理論で予想される幕指数 0.25 と桁が異なっている。すなわち図 1.11 は報告

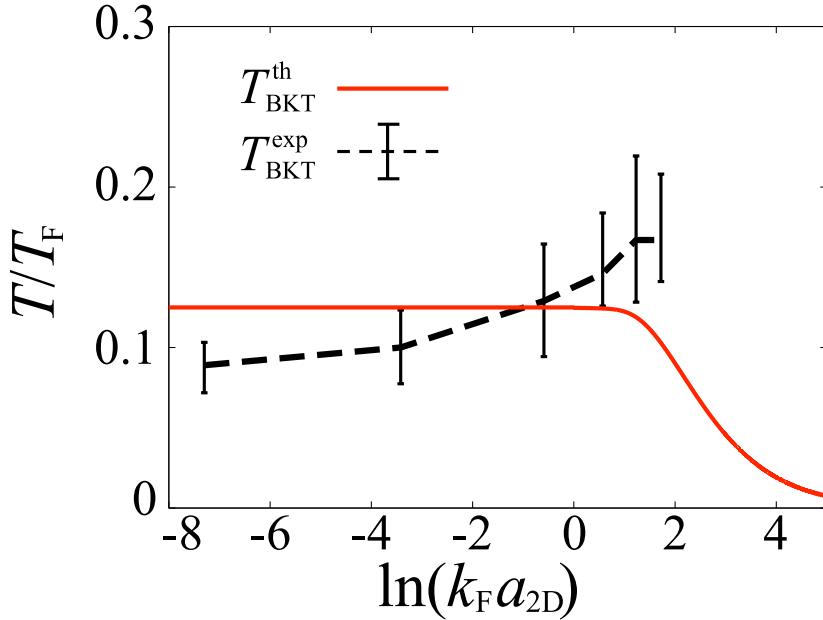


図 1.12 超流動秩序パラメータの位相揺らぎのみを考慮した理論で計算された BKT 転移温度  $T_{\text{BKT}}^{\text{th}}$  の相互作用依存性 [33–37]。 ${}^6\text{Li}$  2次元フェルミ原子気体で観測された  $T_{\text{BKT}}^{\text{exp}}$ (破線) [29] も比較のため示している。

された BKT 転移温度  $T_{\text{BKT}}^{\text{exp}}$  での幕指数であるが、弱結合領域から強結合領域まで、

$$\eta_{\text{exp}}(T_{\text{BKT}}^{\text{exp}}) \simeq 1.4, \quad (1.27)$$

であり、BKT 理論で予想される値  $\eta_{\text{BKT}} = 0.25$  と大きく異なっている。BKT 転移温度における幕指数 0.25 は、節 1.1 で述べたように、励起子ポラリトン系 [14] の他に、薄膜超伝導体 [15–18] など (In-In 酸化物複合薄膜超伝導体 [16] では幕指数は 0.23) においても観測されている (表 1.1 参照)。また、2 次元ボーズ原子気体でも BKT 転移温度において幕指数 0.25 が得られている [77]。 ${}^6\text{Li}$  2次元フェルミ原子気体の場合だけがなぜ BKT 転移温度で式 (1.27) のような大きな値となっているのかは未解決の問題であった。本研究では、上述の実験結果 ( $\tilde{n}_0$  の増大と  $g_1(r)$  の幕構造) が本当に BKT 転移の証拠となるのかについて理論的に研究する (2 章)。

さらに、上述の  ${}^6\text{Li}$  2次元フェルミ原子気体で得られた BKT 転移温度  $T_{\text{BKT}}^{\text{exp}}$  の相互作用依存性は、この系に対し提案された BKT 理論 [33–37] による予想 ( $T_{\text{BKT}}^{\text{th}}$ ) と定性的に異なる振る舞いを示す。図 1.12 に示すように、 $T_{\text{BKT}}^{\text{exp}}$  は強結合側 ( $\ln(k_F a_{2D}) < 0$ ) から弱結合側 ( $\ln(k_F a_{2D}) > 0$ ) へと引力相互作用が弱くなるにつれ高くなっているが、理論的に予想された  $T_{\text{BKT}}^{\text{th}}$  は弱結合領域で減少している。この不一致についても未解決のままであった。

ただし、 $T_{\text{BKT}}^{\text{th}}$  を与える理論側にも課題がある。図 1.12 に示した BKT 転移温度  $T_{\text{BKT}}^{\text{th}}$

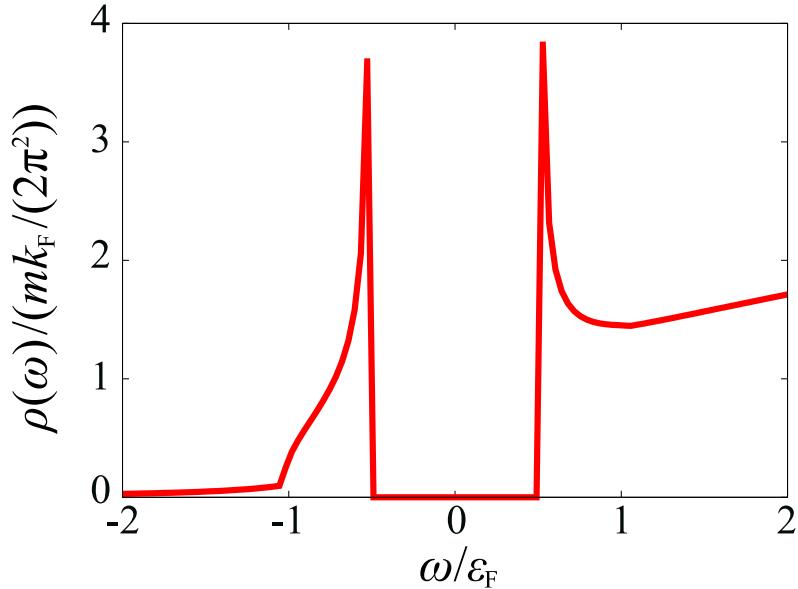


図 1.13 3 次元フェルミ原子気体の平均場 BCS 超流動状態における 1 粒子状態密度  $\rho(\omega)$ 。横軸はエネルギー  $\omega$ 、縦軸は自由フェルミ気体のフェルミ面での状態密度  $\rho_0 = mk_F/(2\pi^2)$  で規格化している ( $m$  はフェルミ原子の質量、 $k_F$  はフェルミ波数)。図中の励起ギャップ端は  $\omega = \pm|\Delta_0|$  にある ( $\Delta_0$  は超流動秩序パラメータ)。

を与える理論 [33–37] は、超流動秩序パラメータの振幅が BKT 転移より高温ですでに十分発達、その揺らぎはないとし、秩序パラメータの位相揺らぎのみが残っているという仮定に基づいている (この理論の枠組みについては付録 C にまとめてある)。しかし、現時点でのこの仮定は議論があり、特に振幅揺らぎが BKT 転移近傍で本当に無視して良いか否かは、2 次元フェルミ原子気体超流動 (BKT 転移) に対する強結合効果を理解する上で重要な問題である。こうした状況のため、現時点で図 1.12 に示した  $T_{\text{BKT}}^{\text{exp}}$  と  $T_{\text{BKT}}^{\text{th}}$  の相互作用依存性の不一致の原因が実験にあるのか理論にあるのか (あるいは両方なのか) について明瞭になっていない。

## 1.4 擬ギャップ現象と対形成揺らぎ

上述した BKT 理論 [33–37] が前提としているような「超流動秩序パラメータの振幅が BKT 転移温度以上ですでに十分発達し、BKT 転移近傍では秩序パラメータの振幅揺らぎはない」状況が本当に実現しているのであれば、超流動秩序パラメータの大きさ (の 2 倍) は (少なくとも弱結合領域では) クーパー対の結合エネルギーを意味することから、1 粒子励起を表す状態密度  $\rho(\omega)$  には図 1.13 に示した超流動状態密度のような励起ギャップが BKT 転移温度近傍の正常相で開くであろう。他方、もし、BKT 転移温度近傍の正常

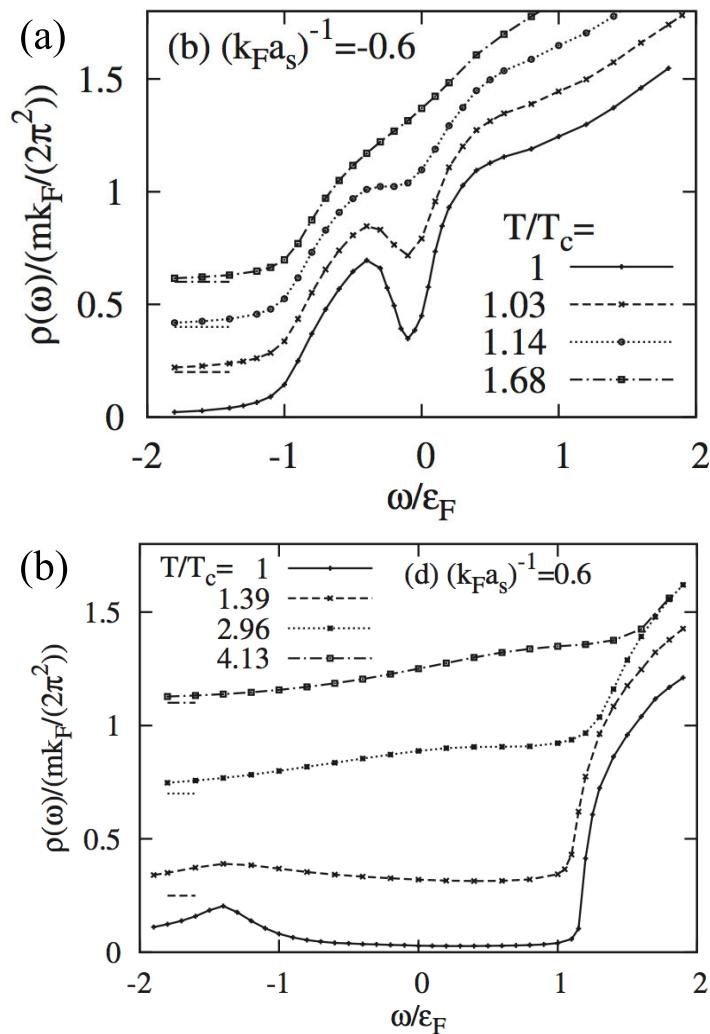


図 1.14 3 次元フェルミ原子気体の正常相に対し計算された 1 粒子状態密度 [81]。計算は 2 章で説明する対形成揺らぎを考慮した非自己無撞着  $T$  行列近似 (TMA) を用いている。(a) 弱結合領域  $(k_F a_s)^{-1} = -0.6$  ( $a_s$  は 3 次元系での  $s$  波散乱長)。(b) 強結合領域  $(k_F a_s)^{-1} = 0.6$ 。図は見やすいように、各温度のデータに対しオフセットがかけられている。各線左端に見られる横線が  $y$  軸の原点である。[Reprinted figure with permission from S. Tsuchiya, R. Watanabe, and Y. Ohashi, Phys. Rev. A **80**, 033613 (2009). Copyright (2009) by the American Physical Society. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.80.033613>.]

相において“秩序パラメータの振幅揺らぎ”が存在しているならば、このギャップ構造は図 1.13 のような明確なものではなくなるであろう。従って、BKT 転移近傍の 1 粒子励起を理解することは、現在の 2 次元フェルミ原子気体に対する BKT 理論 [33–37] の妥当性を検証する上で重要である。

原子間に働く引力相互作用が正常相の 1 粒子励起に与える影響は 3 次元フェルミ原子

気体で近年精力的に研究が行われており [78–90]、BCS-BEC クロスオーバー領域において擬ギャップと呼ばれる現象が起きると期待されている。それは強い引力相互作用により、クーパー対の形成と解離で特徴づけられる対形成揺らぎが超流動転移近傍の正常相で発達、図 1.13 程明確ではないもののフェルミ面近傍の状態密度にくぼみ構造(擬ギャップ)が現れる多体現象である。図 1.14 は 2 章で説明する非自己無撞着  $T$  行列近似( $T$ -matrix approximation: TMA)とよばれる強結合理論を用い、3 次元フェルミ原子気体の BCS-BEC クロスオーバー領域で計算された 1 粒子状態密度  $\rho(\omega)$  [81] であるが、(a) の  $1 \leq T/T_c \leq 1.14$  ( $T_c$  は 3 次元フェルミ原子気体の超流動転移温度)において、 $\omega = 0$  近傍に擬ギャップ(くぼみ)が現れることが分かる。また、(a) より引力相互作用が強い(b) では  $T/T_c = 1$  において超流動秩序パラメータは存在しないにも関わらず、 $-1 \leq \omega/\varepsilon_F \leq 1$  に大きなギャップが開いていることが見てとれる。TMA はクーパー対形成の揺らぎを考慮しており、これらの図に見られる擬ギャップはまさにこの効果によるものである。

図 1.14 に示した状態密度の温度変化を BCS-BEC クロスオーバー全領域で調べ、擬ギャップ構造が現れ始める温度(擬ギャップ温度)  $T^*$  を決定、この現象が現れる領域を特定した結果が図 1.15 である(この図を与える論文 [81] では 1 粒子スペクトル強度からも別の擬ギャップ温度  $T^{**}$  を決定しているが、ここではそれについて議論しない)。この図において、 $T^*$  と超流動転移温度  $T_c$ 、及び、2 体束縛状態形成の目安となる温度  $T = 2|\mu|$  ( $\mu < 0$ 、 $\mu$  は化学ポテンシャル) で囲まれた領域が擬ギャップ領域(PG)である。また、この領域の右側(NB)は強い引力相互作用による 2 体束縛状態としての分子ボゾンが系の性質を支配しており、そこでは 1 粒子励起に 2 体分子の結合エネルギー程度の大きなギャップが開いている。

現在、極低温フェルミ原子気体の状態密度  $\rho(\omega)$  を直接観測し、擬ギャップ構造の詳細を知る実験手段は存在しないが、光電子分光(photoemission spectroscopy)スペクトルとよばれる、物性物理学における光電子分光に類似の手法を用い、ある程度の情報を得ることは可能である。この実験では、クーパー対形成に寄与する 2 つの原子状態(擬スピニン  $\sigma = \uparrow, \downarrow$  状態)の片方の原子状態を  $\sigma = \uparrow, \downarrow$  いずれとも異なる“第 3 の状態  $|3\rangle$ ”に光により遷移させ、光のエネルギーとそれにより  $|3\rangle$  へ遷移した原子数を測定することにより、元のフェルミ原子気体の 1 粒子励起スペクトルに関する情報を得る。結果として得られる情報は光電子分光スペクトル強度とよばれる量であり、次式で与えられる。

$$S(\mathbf{k}, E_S) = \langle n_F(E_S) A(\mathbf{k}, E_S, \mathbf{r}) \rangle_{\mathbf{r}}. \quad (1.28)$$

ここで、 $\langle \dots \rangle_{\mathbf{r}}$  はトラップ中心を原点とした  $\mathbf{r}$  の空間平均を表し、 $E_S$  は 1 粒子エネルギー、 $\mathbf{k}$  は波数、 $n_F(\varepsilon) = 1/(e^{\varepsilon/T} + 1)$  はフェルミ分布関数、 $A(\mathbf{k}, E_S, \mathbf{r})$  はトラップの位置  $\mathbf{r}$  に依存した 1 粒子励起スペクトルである。ここで、1 粒子スペクトル強度は位置  $\mathbf{r}$

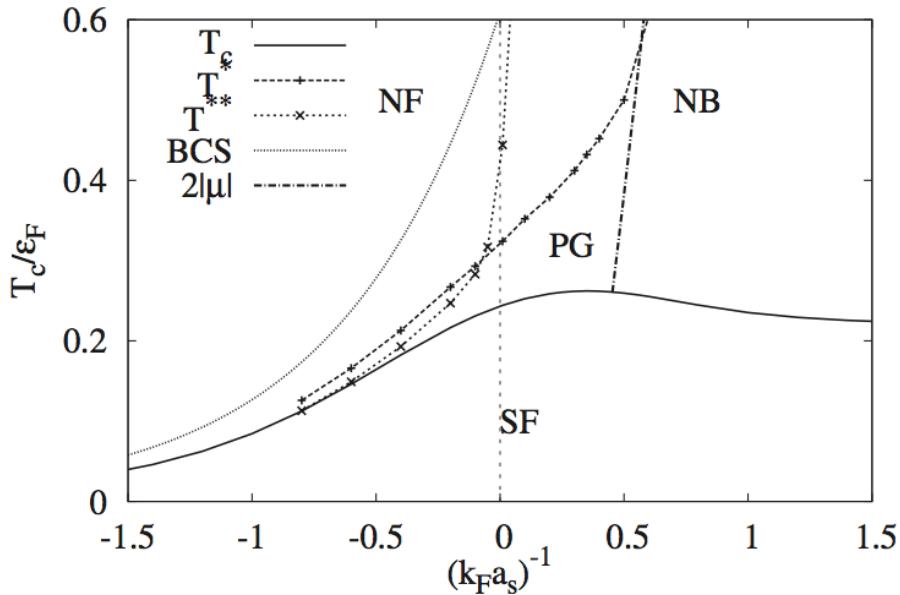


図 1.15 3 次元フェルミ原子気体における相図 [81]。縦軸はフェルミエネルギー  $\epsilon_F$  で規格化された温度、横軸は引力相互作用強度を表す。 $T_c$  は非自己無撞着  $T$  行列近似で決定された超流動転移温度、 $T^*$  は 1 粒子状態密度にくぼみ構造が現れ始める擬ギャップ温度、 $T^{**}$  は 1 粒子励起スペクトルに擬ギャップ構造が現れる温度、BCS は対形成揺らぎを考慮していない平均場近似の超流動転移温度である。強結合領域では、1 粒子状態密度に開く擬ギャップサイズが  $2|\mu| = E_{\text{bind}}$  となるため ( $\mu$  は化学ポテンシャル、 $E_{\text{bind}}$  は 2 体の束縛エネルギー)、強く結合した分子ボソンが熱解離する温度は  $T \geq 2|\mu|$  となる。これを用い、強結合領域で形成される分子ボソンが熱解離する温度の目安として  $T = 2|\mu|$  の線が引かれている ( $\mu < 0$ )。図中の Normal Fermi gas (NF) は擬ギャップ現象が現れない常流動相のフェルミ原子気体を表す。Pseudogap (PG) は  $T^*$ (または  $T^{**}$ ) と  $T = 2|\mu|$ 、 $T_c$  に挟まれた擬ギャップ領域。Normal Bose gas (NB) は  $T \leq 2|\mu|$  と  $T_c$  に挟まれた領域で 2 体束縛状態としての分子ボソンの気体として考えられる領域。Superfluid (SF) は超流動相。[Reprinted figure with permission from S. Tsuchiya, R. Watanabe, and Y. Ohashi, Phys. Rev. A **80**, 033613 (2009). Copyright (2009) by the American Physical Society. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.80.033613>.]

における局所状態密度と次のように関係している。

$$\rho(E_S, \mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} A(\mathbf{k}, E_S, \mathbf{r}). \quad (1.29)$$

図 1.16 a は  ${}^{40}\text{K}$  3 次元フェルミ原子気体の超流動状態で観測された光電子分光スペクトル  $S(\mathbf{k}, E_S)$  である。BCS 理論によると、超流動状態での 1 粒子励起は

$$E_{\mathbf{k}} = \pm \sqrt{\left( \frac{k^2}{2m} - \mu \right)^2 + |\Delta_0|^2}, \quad (1.30)$$

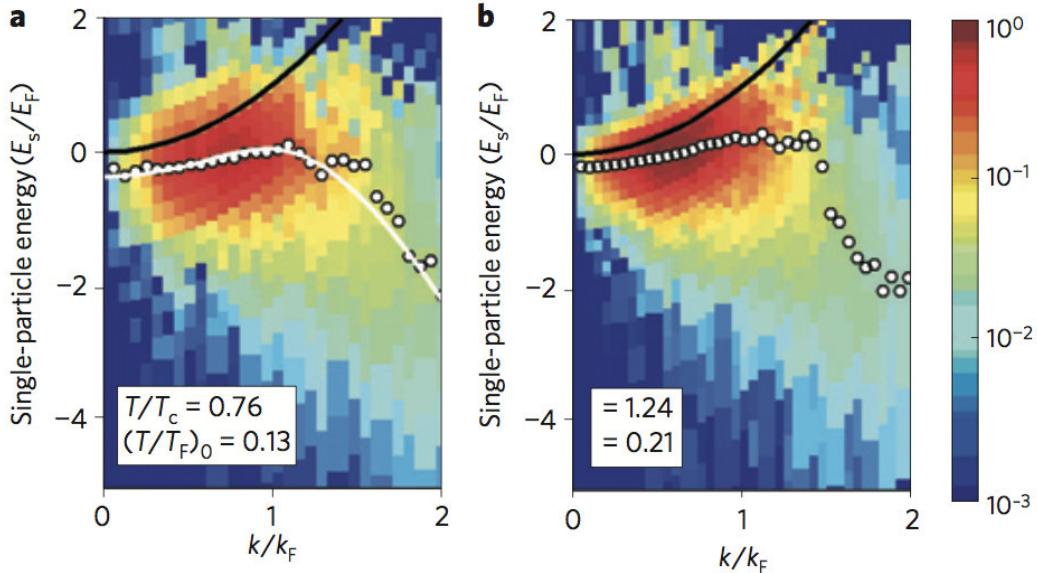


図 1.16  ${}^{40}\text{K}$  3 次元フェルミ原子気体で観測された光電子分光型実験の光電子分光スペクトル  $S(\mathbf{k}, E_S)$  [79]。縦軸は 1 粒子励起エネルギー  $E_S$ 、横軸はフェルミ原子の波数  $k$  である。縦軸はフェルミエネルギー  $E_F$  で規格化している。a は超流動相  $T = 0.76T_c$  ( $T_c$  はこの系の超流動転移温度)、b は常流動相  $T = 1.24T_c$ 。原子間相互作用強度は  $(k_F a_s)^{-1} = 0.15$ 。黒線は自由フェルミ原子気体の分散。白点はスペクトルのピーク位置である。図 a 中の白線はボゴリューボフ分散(式 (1.30))でフィッティングした結果。[Reprinted by permission from Macmillan Publishers Ltd: Nature Physics, J. P. Gaebler, J. T. Stewart, T. E. Drake, D. S. Jin, A. Perali, P. Pieri, and G. C. Strinati, 6, 569 (2010), copyright (2010). doi:10.1038/nphys1709.]

という分散を有するボゴリューボフ準粒子励起で表される。また、 $\Delta_0$  は超流動秩序パラメータである(負の分散は正孔の励起を表し、粒子描像ではこの分散は  $T = 0$  において、ボゴロンと呼ばれる準粒子により完全に占有されていると解釈する)。このうち、負の分散( $E_{\mathbf{k}} = -\sqrt{\left(\frac{k^2}{2m} - \mu\right)^2 + |\Delta_0|^2}$ , ( $\mu > 0$ ))がスペクトル中にピーク構造として現れている(図 1.16 中の白丸)。

この実験 [79] で重要なことは同様のピーク構造が図 1.16 b に示すように  $T > T_c$  の常流動相でも観測されている、という点である。これはこの領域でも秩序パラメータ  $\Delta_0$  のような“何か”が存在し、1 粒子励起スペクトルが式 (1.30) のようになっていることを示唆している。

もし  $T > T_c$  の 1 粒子励起スペクトルが BCS 状態同様に式 (1.30) で与えられるのであれば、状態密度は  $T > T_c$  であっても、図 1.13 のように完全なギャップが開くはずである。これは上述した 2 次元フェルミ原子気体に対する BKT 理論 [33–37] が仮定している状況である。しかし、少なくとも 3 次元フェルミ原子気体の弱結合側では、図 1.14

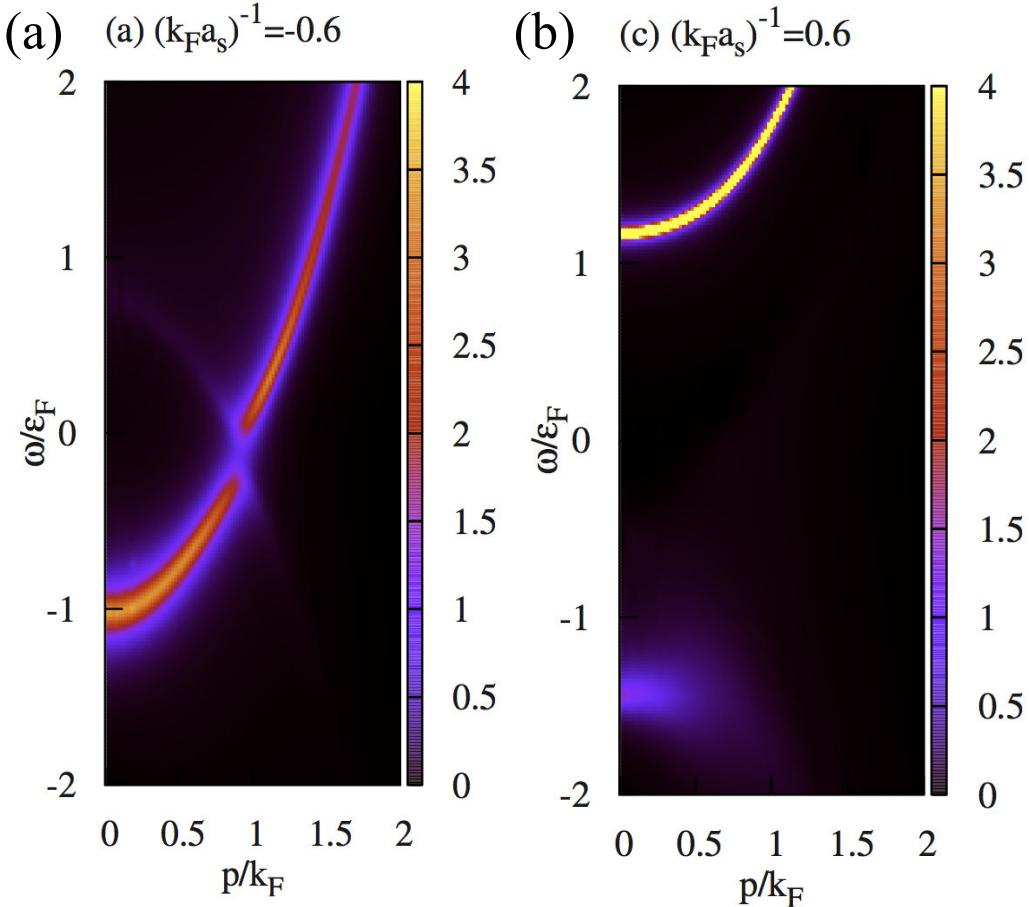


図 1.17 3 次元フェルミ原子気体における 1 粒子スペクトル強度 ( $\epsilon_F^{-1}$  で規格化している) [81]。 (a) 弱結合領域  $(k_F a_s)^{-1} = -0.6$ 。 (b) 強結合領域  $(k_F a_s)^{-1} = 0.6$ 。それぞれ図 1.14 (a)、(b) の  $T_c$  に対応している。[Reprinted figure with permission from S. Tsuchiya, R. Watanabe, and Y. Ohashi, Phys. Rev. A **80**, 033613 (2009). Copyright (2009) by the American Physical Society. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.80.033613>.]

(a) に示したように完全なギャップは  $T_c$  直上でも得られない。この点を理解するために式 (1.30) が次の方程式の解として得られることに注意する。

$$\left[ \omega - \left[ \frac{k^2}{2m} - \mu \right] \right] \left[ \omega + \left[ \frac{k^2}{2m} - \mu \right] \right] = |\Delta_0|^2. \quad (1.31)$$

これは BCS 状態における 1 粒子励起ギャップの起源として「粒子分散  $\omega = k^2/(2m) - \mu$  と正孔分散  $\omega = -(k^2/(2m) - \mu)$  が  $\mu > 0$  の場合  $|\Delta_0|^2$  により  $\omega = 0$  で結合、準位反発とバンドの再構成が起こった結果ギャップが生じる」とも解釈できることを示している。この解釈を用いると、図 1.14 (a) の  $T_c$  に対応する 1 粒子スペクトル強度は図 1.17 (a) に示すように確かに (秩序パラメータは 0 であるにも関わらず) 粒子・正孔分散が  $\omega = 0$  で

結合している。しかし、それぞれの分散は粒子間相互作用の影響で  $\delta$  関数的ピークではなく、幅を持っており、このぼやけの結果、 $\omega = 0$  でのギャップ構造もぼやけてしまうと考えられる。

他方強結合領域では、2体束縛状態の形状を反映し、化学ポテンシャルは負となる。この時粒子分散  $\omega = (k^2/(2m) + |\mu|)$  と正孔分散  $\omega = -(k^2/(2m) + |\mu|)$  はもはや  $\omega = 0$  で交錯せず、両者には  $\Delta_0 = 0$  であっても  $2|\mu|$  のギャップが存在する。実際、BCS-Leggett 理論 [47] で示されているように、強結合極限において  $2|\mu|$  は2体分子の束縛エネルギーに等しくなる。図 1.17 (b) に示すように、図 1.14 (b) の場合 ( $(k_F a_s)^{-1} = 0.6$ ) の  $T_c$  ではこうした“分かれた分散”が  $\omega > 0$ ,  $\omega < 0$  にそれぞれ存在し、これが図 1.14 (b) の  $T_c$  における大きなギャップ構造を与えることになる。

以上のように、3次元フェルミ原子気体においても正常相近傍でどのような擬ギャップ構造が現れるかは引力相互作用の強さに依存しており、前述した2次元フェルミ原子気体におけるBKT理論が仮定する状況が実現するか否かは、対形成揺らぎが一般に低次元性で増大するとしても自明な問題ではない。

## 1.5 2次元フェルミ原子気体における熱力学量の観測

本論文では、3章において、擬ギャップ現象の観点から2次元フェルミ原子気体のBKT転移近傍における「超流動秩序パラメータの振幅揺らぎの重要性」を理論的に研究する。この際、「振幅揺らぎ」と「位相揺らぎ」の両方の効果を含む「対形成揺らぎ」を自己無撞着  $T$  行列近似 (Self-consistent  $T$ -matrix approximation: SCTMA) で扱うが、現状、この系の状態密度を直接観測する手段がないので、SCTMA の計算結果を実験的に検証することができない。また、BKT 転移が報告された実験状況での光電子分光スペクトルの実験もまだ行われていない。そこで本論文では、最近2次元フェルミ原子気体で観測可能となった熱力学量をこの理論の枠組みで計算、実験データとの比較から間接的ではあるもののSCTMAの妥当性について検証する。本節では、比較を行う熱力学量についての実験結果をまとめておく。

図 1.18 は  $^{40}\text{K}$  2次元フェルミ原子気体で観測された Tan's contact  $C$  [91–93] (定義は後述の式 (1.32)) である [24]。この物理量は3章で述べるように、対形成揺らぎの効果を強く受ける。図中の“Luttinger-Ward”は3章で用いるSCTMAによる結果 [41] で、実験結果とよく一致していることが分かる。

図 1.19、図 1.20 は  $^{6}\text{Li}$  2次元フェルミ原子気体で観測された、ヘルムホルツの自由エネルギー  $F$ 、内部エネルギー  $U$  (ただし、本論文では2章以降にこの量は  $E$  と表す)、圧力  $P$ 、及び化学ポテンシャル  $\mu$ 、エントロピー  $S$  である [31, 32]。これらの一連の実験ではまず、 $P$  (図 1.19 (c))、化学ポテンシャル  $\mu$  (図 1.20 (a)) を測定、次にヘルムホルツの

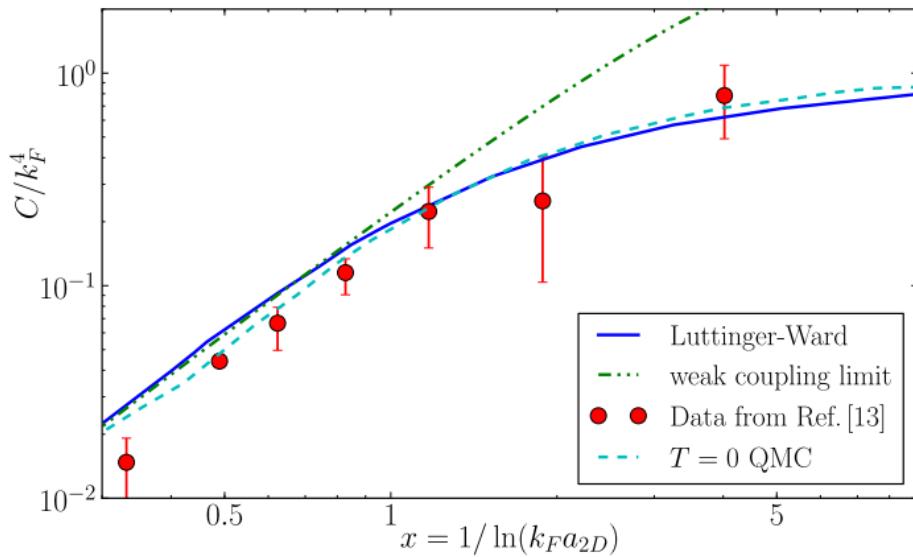


図 1.18  $^{40}\text{K}$  2次元フェルミ原子気体の  $T = 0.27T_{\text{F}}$  における Tan's contact  $C$  (エラーバーつきの丸) [24]。横軸は引力相互作用強度の逆数  $x = 1/\ln(k_{\text{F}}a_{2\text{D}})$ 、縦軸は Tan's contact  $C$  を  $k_{\text{F}}^4$  で規格化している。実線は Luttinger-Ward の手法が適用可能な自己無撞着  $T$  行列近似 (SCTMA) [41]。2点鎖線は弱結合極限の  $T = 0$  の結果 ( $C/k_{\text{F}}^4 = [x^2 - (3/2 - 2\ln 2)x^3]/4$ )。水色の破線は  $T = 0$  の量子モンテカルロ計算の結果 [38]。[Reprinted figure with permission from M. Bauer, M. M. Parish, and T. Enss, Phys. Rev. Lett. **112**, 135302 (2014). Copyright (2014) by the American Physical Society. [https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.135302.](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.135302)]

自由エネルギー  $F = \mu N - PV$  ( $N$  は全粒子数、 $V$  はシステムサイズ) を図 1.19 (a) のように決定し、Tan の関係式 [93]

$$C = 2\pi m \left. \frac{\partial F}{\partial \ln a_{2\text{D}}} \right|_{T,N}, \quad (1.32)$$

から Tan's contact  $C$  を得ている。さらに、Tan の圧力関係式 [92, 94–96]

$$PV = U + \frac{\hbar^2 C}{4\pi m}, \quad (1.33)$$

と熱力学関係式 ( $\Omega$  は熱力学ポテンシャル)

$$\Omega = -PV = U - TS - \mu N, \quad (1.34)$$

から  $U$  (図 1.19 (b)) と  $S$  (図 1.20 (b)) を得ている。これらの熱力学量のうち、圧力  $P$  については、既に SCTMA による理論研究が行われており [42]、図 1.21 (a)~(c) に示すように実験結果とのよい一致を得ている。本論文では、 $C$  や  $P$  だけでなく、 $U$ 、 $S$ 、 $\mu$ についても計算、実験との比較を行う。

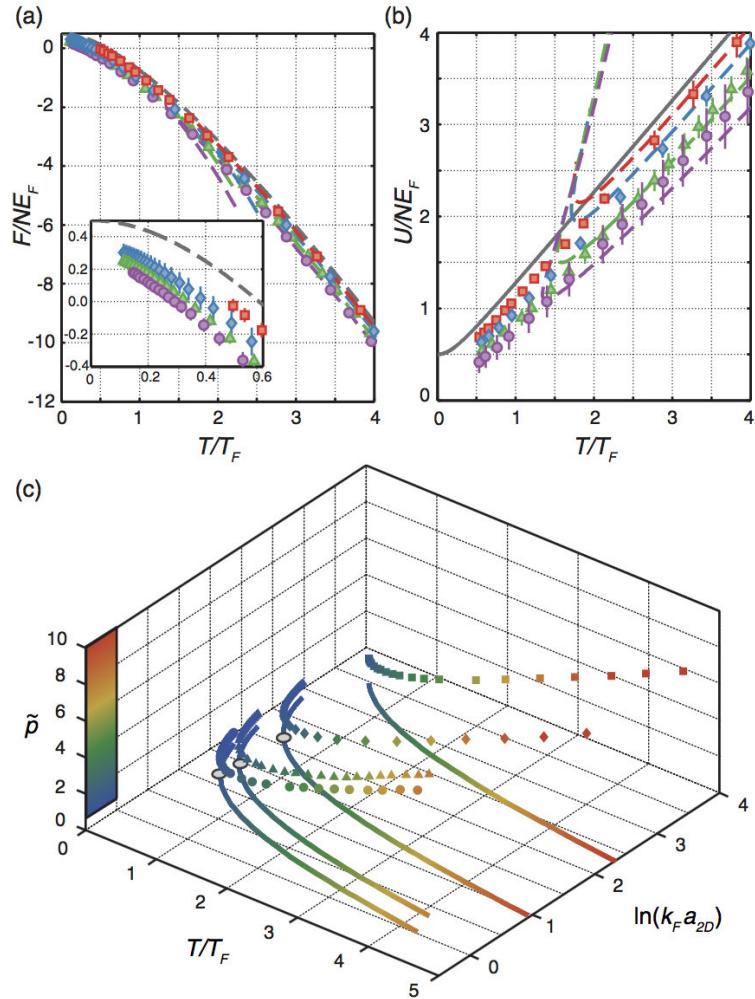


図 1.19  ${}^6\text{Li}$  2 次元フェルミ原子気体で観測された熱力学量の温度、相互作用依存性 [31]。(a)、(b) の赤、青、緑、紫は  $\beta E_b = 0.005, 0.06, 0.26, 0.47$  の結果。 $E_b = \hbar^2/(ma_{2D}^2)$  は 2 体分子の束縛エネルギーで、 $\beta = 1/(k_B T)$  である。(a) ヘルムホルツの自由エネルギー  $F$ 。全粒子数  $N$  とフェルミエネルギー  $E_F$  の積  $NE_F$  で規格化している。各色の破線は各  $\beta E_b$  に対しひずり展開を用いた結果。挿入図は低温領域の  $F$ 。黒い破線はフェルミ原子気体の  $F$ 。(b) 内部エネルギー  $U$  の結果。黒線は自由フェルミ原子気体の内部エネルギー。各色の破線は各  $\beta E_b$  に対しひずり展開を用いた結果。(c) 圧力  $P$  の実験結果。カラーバー  $\tilde{p}$  は、図中の点の値を色で表した圧力の値であり、自由フェルミ原子気体の絶対零度の圧力  $P_0 = NE_F/2$  で規格化している。曲線は観測した相互作用強度を表している。灰色の丸は各  $\beta E_b$  における原子密度のピーク位置の温度と相互作用強度を表す。[Reprinted figure with permission from K. Fenech, P. Dyke, T. Peppler, M. G. Lingham, S. Hoinka, H. Hu, and C. J. Vale, Phys. Rev. Lett. **116**, 045302 (2016). Copyright (2016) by the American Physical Society. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.045302>.]

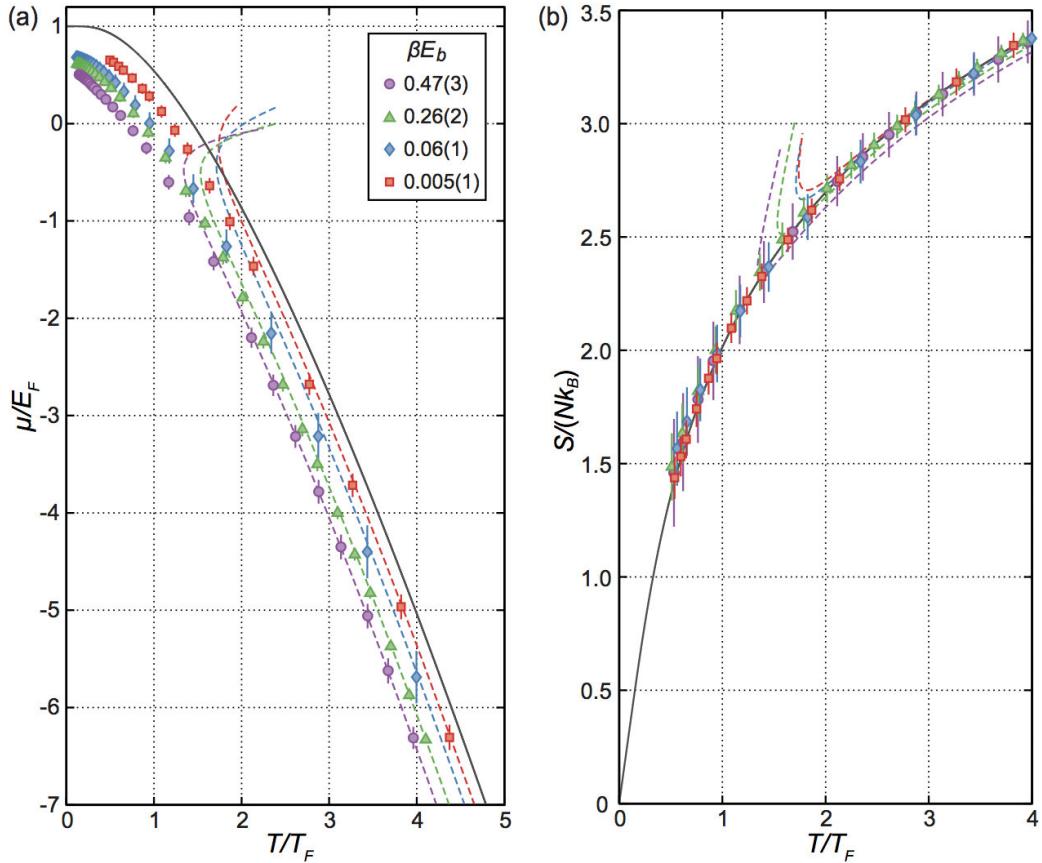


図 1.20  ${}^6\text{Li}$  2 次元フェルミ原子気体で観測された熱力学量の温度、相互作用依存性 [32]。(a)、(b) の赤、青、緑、紫は  $\beta E_b = 0.005, 0.06, 0.26, 0.47$  の結果。 $E_b = \hbar^2/(ma_{2\text{D}}^2)$  は 2 体分子の束縛エネルギーで、 $\beta = 1/(k_B T)$  である。(a) 化学ポテンシャル  $\mu$ 。各色の破線は各  $\beta E_b$  に対しふィリアル展開を用いた結果。黒線は自由フェルミ原子気体の化学ポテンシャル。(b) エントロピー  $S$ 。各色の破線は各  $\beta E_b$  に対しふィリアル展開を用いた結果。黒線は自由フェルミ原子気体のエントロピー。[Reprinted figure with permission from K. Fenech, P. Dyke, T. Peppler, M. G. Lingham, S. Hoinka, H. Hu, and C. J. Vale, Phys. Rev. Lett. **116**, 045302 (2016). Copyright (2016) by the American Physical Society. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.045302>.]

## 1.6 本論文の目的と構成

本論文では、可変な引力相互作用を有する 2 次元極低温フェルミ原子気体において、対形成揺らぎを考慮した強結合理論を用い、近年、実験理論ともに注目を集めている Berezinskii-Kosterlitz-Thouless(BKT) 転移温度近傍で対形成揺らぎの重要性を弱結合領域から強結合領域まで明らかにする。

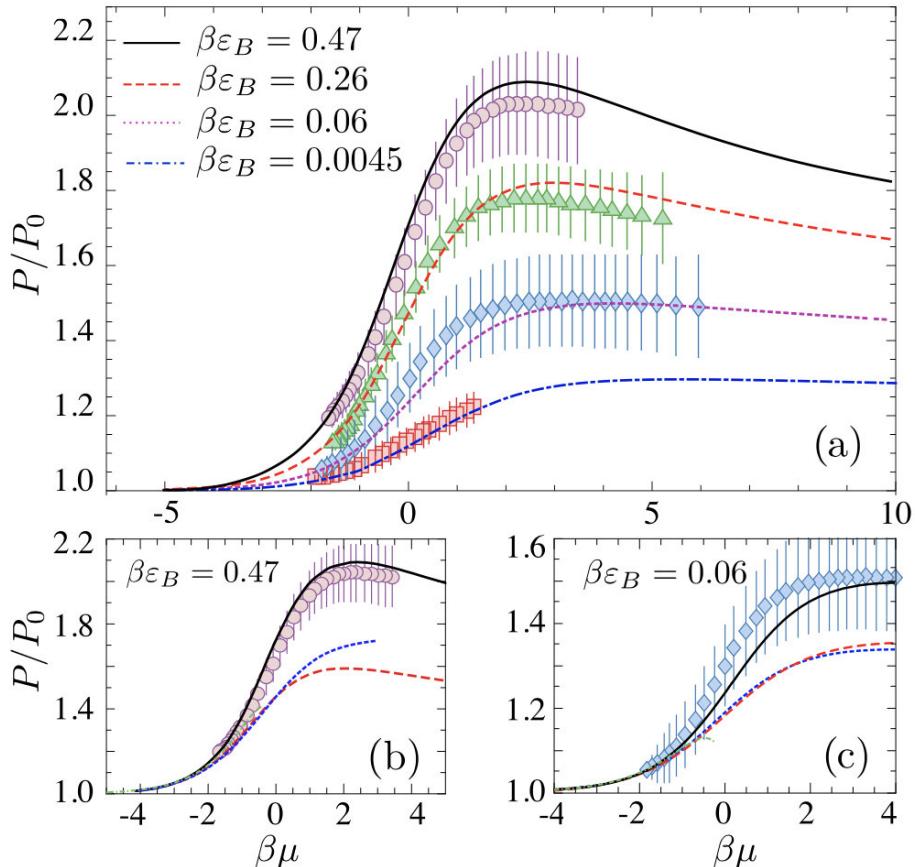


図 1.21  ${}^6\text{Li}$  2次元フェルミ原子気体で観測された圧力  $P$  [31] と自己無撞着  $T$  行列近似 (SCTMA) での計算結果の比較 [42]。黒、赤、紫、青は  $\beta\epsilon_B = 0.47, 0.26, 0.06, 0.0045$  の結果。 $\epsilon_B = \hbar^2/(ma_{2\text{D}}^2)$  は分子2体の束縛エネルギーで、紫、緑、青、赤の点は観測データ。 $P_0$  は各温度、各化学ポテンシャルにおける自由フェルミ原子気体の圧力。(a)  $\beta\epsilon_B = 0.47, 0.26, 0.06, 0.0045$  の圧力の理論と実験の比較。(b)  $\beta\epsilon_B = 0.47$  の各種理論との比較：黒線は自己無撞着  $T$  行列近似、青の点線は Nozières-Schmitt-Rink (NSR) 理論 [42, 97]、赤の破線は強結合理論 (GG<sub>0</sub> 理論) [42]。紫の点は実験結果。(c)  $\beta\epsilon_B = 0.06$  の各種理論との比較。理論は (b) と同じ線種、青の点は実験結果。[Reprinted figure with permission from B. C. Mulkerin, K. Fenech, P. Dyke, C. J. Vale, X.-J. Liu, and H. Hu, Phys. Rev. A **92**, 063636 (2015). Copyright (2015) by the American Physical Society. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.92.063636>.]

2章では、 ${}^6\text{Li}$  2次元フェルミ原子気体で近年報告されたBKT転移の実験結果と対形成搖らぎを非自己無撞着  $T$  行列近似 (TMA) の枠組みで扱い研究する。この実験では、次の2点からBKT転移を観測したという報告をしている：

- (1) 重心運動量0のクーパー対の数のある温度  $T_{\text{BKT}}^{\text{exp}}$  以下の急増(この急増をBKT転移に伴うクーパー対の凝縮とみなしている)。
- (2) この  $T_{\text{BKT}}^{\text{exp}}$  温度近傍でクーパー対の1次相関関数にBKT転移に特徴的な幂的振る舞

いを観測。

本論文では、これらの実験結果が、いずれも常流動相の対形成揺らぎの効果のみ考慮すれば BKT 転移を仮定せずとも理論的に説明できることを示す。それに基づき、現在の観測結果だけでは BKT 転移の実験的根拠として不十分であることを指摘する。

3 章では、擬ギャップ現象を幅広い相互作用領域で研究し、2 次元フェルミ原子気体に対する従来の BKT 理論では考慮されていない対形成揺らぎの重要性を明らかにする。自己無撞着  $T$  行列近似 (SCTMA) を用い、状態密度に現れる擬ギャップの温度変化を幅広い相互作用領域で研究、その結果から擬ギャップ現象が現れる領域 (擬ギャップ領域) を 2 次元フェルミ原子気体の温度と相互作用を軸とした相図中で明らかにする。さらに、対形成揺らぎのうち超流動秩序パラメータの位相揺らぎのみを考慮し振幅揺らぎは無視している従来の BKT 理論で得られる BKT 転移温度  $T_{\text{BKT}}^{\text{th}}$  近傍において、弱結合領域では状態密度に完全なギャップは開かないことを示す。この結果から、少なくとも弱結合領域では、位相揺らぎだけでなく、振幅揺らぎも加えた“対形成揺らぎ”を BKT 転移近傍で考える必要があることを指摘する。最後に、ここで用いた SCTMA の妥当性を検証するため、近年観測された熱力学量を SCTMA の枠組みで計算、実験結果と定量的比較を行う。

本論文に用いる非自己無撞着  $T$  行列近似 (TMA) [81] と自己無撞着  $T$  行列近似 (SCTMA) [49] の違いについて述べておく。2 章で説明する相互作用の影響を受けたグリーン関数を計算する際に、TMA は相互作用の影響がない自由フェルミ原子気体のグリーン関数で決定し、SCTMA は相互作用の影響を受けたグリーン関数を用い決定する。TMA は  $T$  行列近似と記述されることがあるが、フェルミ原子気体の理論研究において、SCTMA との違いから TMA は“非自己無撞着” $T$  行列近似と記述されることもある。本論文においても SCTMA との違いを明確にするため、TMA を非自己無撞着  $T$  行列近似と記述する。

本論文では、 $\hbar = k_B = 1$  とし、系のサイズ  $V = 1$  とする。なお、本論文の数値計算の環境は付録 D 参照。



## 第 2 章

# クーパー対の重心運動量分布 $n_Q$ の 解析と BKT 転移観測実験との比較

${}^6\text{Li}$  2 次元フェルミ原子気体で近年報告された Berezinskii-Kosterlitz-Thouless (BKT) 転移温度  $T_{\text{BKT}}^{\text{exp}}$  は、(1) クーパー対の重心運動量  $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$  の  $n_{\mathbf{Q}=\mathbf{0}}$  が  $T_{\text{BKT}}^{\text{exp}}$  以下で急増すること、及び、(2)  $n_Q$  をフーリエ変換することで得られる 1 次相関関数  $g_1(r)$  が幕相関を示す領域を観測することで決定された。本章では、常流動相の対形成揺らぎを考慮した非自己無撞着  $T$  行列近似 ( $T$ -matrix approximation: TMA) を用い、クーパー対の重心運動量分布  $n_Q$  を理論的に解析、実験結果との比較を行う。そして、この実験で観測された(1)、(2) が必ずしも BKT 転移特有の現象ではなく、常流動相で発達した対形成揺らぎの効果としても説明できることを示す。

2.1 節では、本章で用いる非自己無撞着  $T$  行列近似 (TMA) について説明する。2.2 節では、クーパー対の重心運動量分布  $n_Q$  と相関関数を導出する。2.3 節では、計算で得られた  $n_{\mathbf{Q}=\mathbf{0}}$  の温度依存性を  ${}^6\text{Li}$  2 次元フェルミ原子気体で得られた実験結果と比較する。2.4 節では、 $n_Q$  からクーパー対の相関関数  $g_1(\mathbf{r})$  を導き、実験で測定された幕指数の温度依存性と比較する。

## 2.1 非自己無撞着 $T$ 行列近似 (TMA)

ここでは、 $s$  波の接触型引力相互作用が働く、2 成分 2 次元一様フェルミ原子気体の常流動相を考える。ハミルトニアンは、

$$H = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \xi_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}, \sigma}^\dagger c_{\mathbf{p}, \sigma} - U \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{Q}} c_{\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2, \uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2, \downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{p}' + \mathbf{Q}/2, \downarrow} c_{\mathbf{p}' + \mathbf{Q}/2, \uparrow}. \quad (2.1)$$

ここで、 $c_{\mathbf{p}, \sigma}^\dagger, c_{\mathbf{p}, \sigma}$  はフェルミ原子の生成・消滅演算子、 $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$  は 2 次元運動量、そして擬スピン  $\sigma = \uparrow, \downarrow$  は対形成に関わる 2 種類の原子状態を表す。 $\xi_{\mathbf{p}} = \varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu$  は、質量

$m$  を持ったフェルミ原子の運動エネルギー  $\varepsilon_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^2/(2m)$  をフェルミ原子の化学ポテンシャル  $\mu$  から測ったものである。式 (2.1) 中の  $-U(< 0)$  は擬スピン↑、↓間に働く引力相互作用を表し、フェッシュバッハ共鳴により可変であるとする。相互作用の結合定数  $U$  は実験で観測可能な2次元散乱長  $a_{2D}$  と

$$\frac{1}{U} = \frac{m}{2\pi} \ln(k_F a_{2D}) + \sum_{|\mathbf{p}| \geq k_F} \frac{m}{\mathbf{p}^2}, \quad (2.2)$$

のように関係している [98]。ただし、 $k_F = \sqrt{2\pi N}$  はフェルミ波数であり、 $N$  はフェルミ原子の粒子数である。この散乱長  $a_{2D}$  を用いる場合、 $\ln(k_F a_{2D}) \lesssim -1$  は強結合領域、 $\ln(k_F a_{2D}) \gtrsim 1$  は弱結合領域を表す。両者の間、 $-1 \lesssim \ln(k_F a_{2D}) \lesssim 1$  はクロスオーバー領域である。

ここでは、引力相互作用  $-U$  に起因する対形成揺らぎの効果を、3次元系におけるBCS-BEC クロスオーバー現象をよく記述することが知られている [81] 非自己無撞着  $T$  行列近似 (TMA) の枠組みで扱う。これを説明するために以下のフェルミ原子の1粒子温度グリーン関数を導入する。

$$G_{\sigma}(\mathbf{p}, \tau) = -\langle T_{\tau} [c_{\mathbf{p}, \sigma}(\tau) c_{\mathbf{p}, \sigma}^{\dagger}(0)] \rangle. \quad (2.3)$$

式 (2.3) において、

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{1}{Z} \text{Tr} \left[ e^{-\beta H} \hat{A} \right], \quad (2.4)$$

は演算子  $\hat{A}$  の統計平均であり、 $T_{\tau}$  は虚時間  $\tau$  に対する時間順序積、 $\beta = 1/T$  ( $T$  は温度) である。また、

$$c_{\mathbf{p}, \sigma}(\tau) = e^{H\tau} c_{\mathbf{p}, \sigma} e^{-H\tau}, \quad (2.5)$$

である。式 (2.3) を次のように、 $\tau$  に関してフーリエ変換する。

$$G_{\sigma}(\mathbf{p}, i\omega_n) = \int_0^{\beta} d\tau G_{\sigma}(\mathbf{p}, \tau) e^{i\omega_n \tau}. \quad (2.6)$$

ここで、 $\omega_n = \pi T(2n + 1)$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) はフェルミオンの松原周波数である。TMA は

$$G(\mathbf{p}, i\omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}} - \Sigma_{\text{TMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n)}, \quad (2.7)$$

のよう  $G(\mathbf{p}, i\omega_n)$  中に現れる自己エネルギー  $\Sigma_{\text{TMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n)$  で特徴付けられる ( $\sigma$  依存性は現れないため、以降  $\sigma$  は省略する)。具体的には、図 2.1 (a) で与えられるファインマンダイアグラムで表現され、表式としては

$$\Sigma_{\text{TMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n) = T \sum_{\mathbf{Q}, i\nu_m} \Gamma_0(\mathbf{Q}, i\nu_m) G_0(\mathbf{Q} - \mathbf{p}, i\nu_m - i\omega_n), \quad (2.8)$$

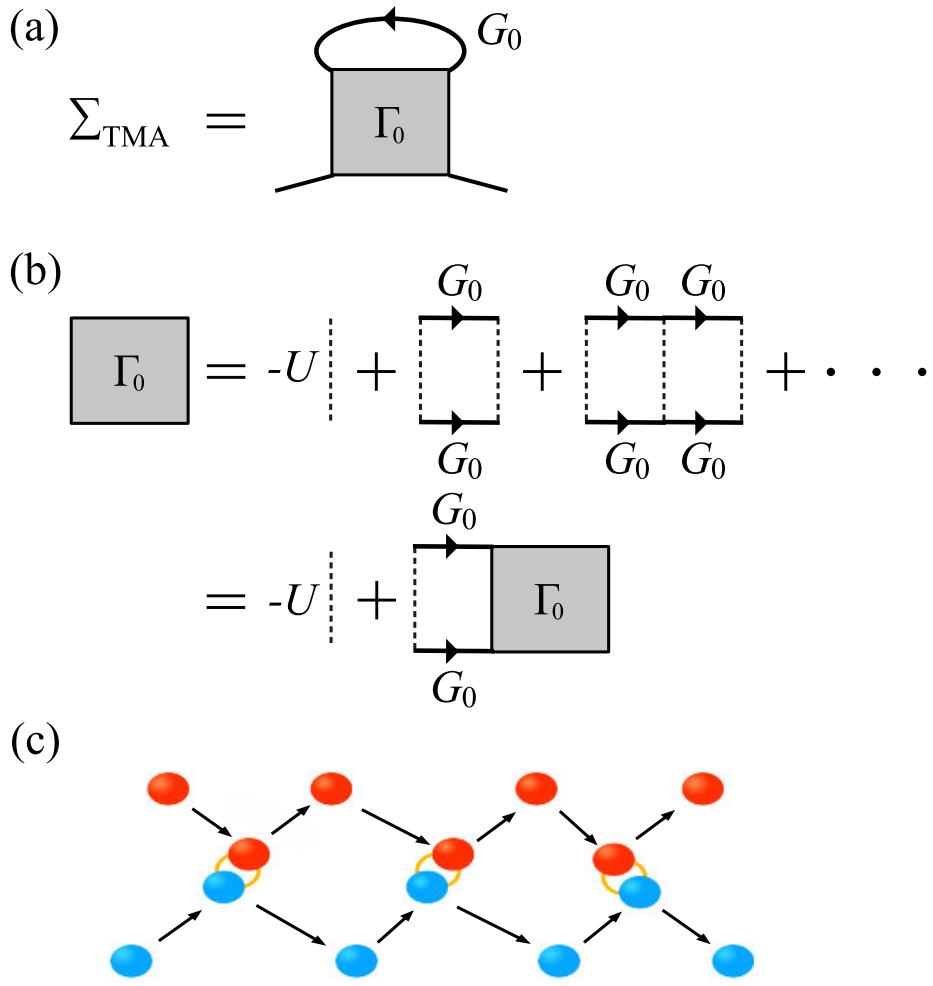


図 2.1 非自己無撞着  $T$  行列近似 (TMA) における (a) 自己エネルギー  $\Sigma_{\text{TMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n)$  (式 (2.8)) と、(b) 対形成揺らぎを表す多体散乱行列  $\Gamma_0(\mathbf{Q}, i\nu_m)$  (式 (2.10)) のファインマンダイアグラム。 $-U (< 0)$  は接触型の引力相互作用、 $G_0$  は式 (2.9) で与えられる自由フェルミ原子気体における 1 粒子温度グリーン関数。相互作用は  $\sigma = \uparrow$  と  $\downarrow$  の原子間にのみ働くため、(b) の上下の  $G_0$  線の擬スピンは逆向きである。(c) 対の形成と解離で特徴付けられる対形成揺らぎの模式図。赤、青色の球はそれぞれ異なる原子状態 (擬スピン  $\sigma = \uparrow, \downarrow$ ) のフェルミ原子を表す。

となる。ここで、

$$G_0(\mathbf{p}, i\omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}}}, \quad (2.9)$$

は自由フェルミ原子気体における 1 粒子温度グリーン関数であり、 $\nu_m = 2\pi m$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) はボゾン松原周波数である。 $\Gamma_0(\mathbf{Q}, i\nu_m)$  (図 2.1 (b)) は対形成揺らぎ (図

2.1 (c)) を表す多体散乱行列であり、図 2.1 (b) の和をとると、

$$\begin{aligned}\Gamma_0(\mathbf{Q}, i\nu_m) &= -U - U^2 \Pi_0(\mathbf{Q}, i\nu_m) - U^3 \Pi_0^2(\mathbf{Q}, i\nu_m) - \dots \\ &= -U + U \Pi_0(\mathbf{Q}, i\nu_m) \Gamma_0(\mathbf{Q}, i\nu_m) \\ &= \frac{-U}{1 - U \Pi_0(\mathbf{Q}, i\nu_m)}.\end{aligned}\quad (2.10)$$

式 (2.10) において、

$$\begin{aligned}\Pi_0(\mathbf{Q}, i\nu_m) &= T \sum_{\mathbf{p}, i\omega_n} G_0(\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2, i\omega_n + i\nu_m) G_0(-\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2, -i\omega_n) \\ &= - \sum_{\mathbf{p}} \frac{1 - n_F(\xi_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2}) - n_F(\xi_{-\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2})}{i\nu_m - \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2} - \xi_{-\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2}},\end{aligned}\quad (2.11)$$

は最低次の対相関関数であり、

$$n_F(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} + 1}\quad (2.12)$$

はフェルミ分布関数である。

粒子数方程式は 1 粒子グリーン関数から

$$N = 2T \sum_{\mathbf{p}, i\omega_n} G(\mathbf{p}, i\omega_n) e^{i\omega_n \delta},\quad (2.13)$$

のように計算される ( $\delta$  は無限小の正の定数)。係数 2 は擬スピン ( $\sigma = \uparrow, \downarrow$ ) に対応する。この粒子数方程式から化学ポテンシャル  $\mu$  を決定する。

図 2.2 は TMA で計算された弱結合領域 ( $\ln(k_F a_{2D}) \gtrsim 1$ ) から強結合領域 ( $\ln(k_F a_{2D}) \lesssim -1$ ) までのフェルミ原子の化学ポテンシャル  $\mu$  の温度依存性の結果である。本論文では、この結果を用い、次節で説明するクーパー対の重心運動量分布や 1 次相関関数を計算する。

ここで、2 次元一様系において、上で説明した TMA は超流動転移を記述できないことを述べる。3 次元系では、超流動転移温度  $T_c$  は Thouless の判定条件 [99]

$$\Gamma_0^{-1}(\mathbf{Q} = \mathbf{0}, i\nu_m = 0) = 1 - U \Pi_0(\mathbf{Q} = \mathbf{0}, i\nu_m = 0) = 0,\quad (2.14)$$

で決定することができる。式 (2.14) は TMA では

$$1 = U \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{2\xi_{\mathbf{p}}} \tanh\left(\frac{\xi_{\mathbf{p}}}{2T}\right)\quad (2.15)$$

となるが、これは平均場 BCS 理論におけるギャップ方程式 [33–37, 75, 100]

$$1 = U \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{2\sqrt{\xi_{\mathbf{p}}^2 + \Delta^2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{\xi_{\mathbf{p}}^2 + \Delta^2}}{2T}\right)\quad (2.16)$$

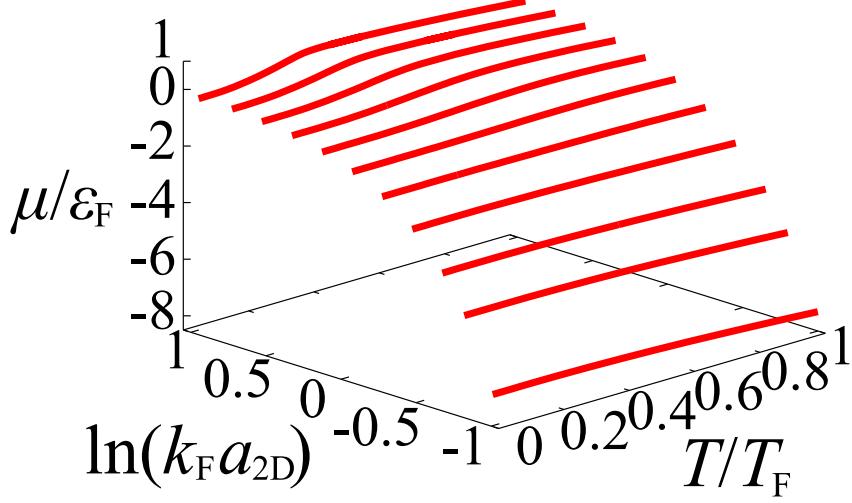


図 2.2 TMA で計算された化学ポテンシャル  $\mu$  の温度、相互作用依存性。相互作用は  $\ln(k_F a_{2D})$  で測っている。 $T_F$ 、 $\epsilon_F$  はそれぞれフェルミ温度、フェルミエネルギーである。

で  $\Delta = 0$  としたものと同じである。3 次元フェルミ原子気体ではギャップ方程式 (2.15) と粒子数方程式 (2.13) を自己無撞着に解き、超流動転移温度  $T_c$  と  $\mu$  を決定する [81]。しかし、2 次元系では、もし式 (2.14) の Thouless 判定条件が満たされると、 $\mathbf{Q} = 0$  近傍で

$$\Gamma_0(\mathbf{Q}, i\nu_m = 0) \simeq 2 \left( \frac{\partial^2 \Pi_0(\mathbf{Q}, 0)}{\partial Q^2} \right)_{\mathbf{Q}=\mathbf{0}}^{-1} \frac{1}{Q^2} = \frac{\gamma}{Q^2}, \quad (2.17)$$

となるが、このとき TMA の自己エネルギー式 (2.8) は

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{TMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n) &= T \sum_{\mathbf{Q}} \Gamma_0(\mathbf{Q}, 0) G_0(\mathbf{Q} - \mathbf{p}, -i\omega_n) \\ &\quad + T \sum_{\mathbf{Q}, i\nu_m \neq 0} \Gamma_0(\mathbf{Q}, i\nu_m) G_0(\mathbf{Q} - \mathbf{p}, i\nu_m - i\omega_n) \\ &\simeq T\gamma G_0(-\mathbf{p}, -i\omega_n) \sum_{\mathbf{Q}} \frac{1}{Q^2} \\ &\quad + T \sum_{\mathbf{Q}, i\nu_m \neq 0} \Gamma_0(\mathbf{Q}, i\nu_m) G_0(\mathbf{Q} - \mathbf{p}, i\nu_m - i\omega_n), \end{aligned} \quad (2.18)$$

となるため、 $\sum_{\mathbf{Q}} 1/Q^2$  の部分が2次元系であるため赤外発散してしまう (3次元系の場合はこの和は赤外発散を含まない)。これは2次元系において、ギャップ方程式 (2.15) (または Thouless 判定条件) と粒子数方程式 (2.13) とを同時に満たすことができないことを意味している。Mermin-Wagner-Hohenberg の定理 [6, 7] において厳密に示されているよ

うに、2次元系では長距離秩序を有する(BCS型の)超流動状態は実現しないが、上述の結果はこれをTMAの範囲で示したことに相当する。

現在、準長距離秩序であるBKT転移を記述するようにTMAを改良する方法は存在しない。本研究でもこの点を考慮し、以下では常流動相のみを扱い、そこでクーパー対形成を議論する。

## 2.2 クーパー対の重心運動量分布と1次相関関数

ここでは<sup>6</sup>Li 2次元フェルミ原子気体で最近観測されたクーパー対の重心運動量分布、及び、それをフーリエ変換して得られる1次相関関数[29,30]を理論的にどのように扱うか、を説明する。前節で説明したTMAにおいて、粒子数方程式(2.13)を $N = N_0 + \delta N$ のように、自由フェルミ原子気体の寄与 $N_0$ と対形成揺らぎの寄与 $\delta N$ に分ける。ここで $N_0$ は自由粒子のグリーン関数を用い、

$$N_0 = 2T \sum_{\mathbf{p}, i\omega_n} G_0(\mathbf{p}, i\omega_n) e^{i\omega_n \delta} = 2 \sum_{\mathbf{p}} n_F(\xi_{\mathbf{p}}), \quad (2.19)$$

と計算される( $n_F(\xi_{\mathbf{p}})$ はフェルミ分布関数)。他方、対形成揺らぎの補正項 $\delta N$ は

$$\begin{aligned} \delta N &= 2T \sum_{\mathbf{p}, i\omega_n} [G(\mathbf{p}, i\omega_n) - G_0(\mathbf{p}, i\omega_n)] \\ &= 2T \sum_{\mathbf{p}, i\omega_n} \Sigma_{\text{TMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n) G(\mathbf{p}, i\omega_n) G_0(\mathbf{p}, i\omega_n), \end{aligned} \quad (2.20)$$

となるが、式(2.8)で与えられるTMAの自己エネルギーの表式を代入して、

$$\delta N = 2T \sum_{\mathbf{Q}, i\nu_m} \Gamma_0(\mathbf{Q}, i\nu_m) \times T \sum_{\mathbf{p}, i\omega_n} G_0(\mathbf{Q} - \mathbf{p}, i\nu_m - i\omega_n) G_0(\mathbf{p}, i\omega_n) G(\mathbf{p}, i\omega_n). \quad (2.21)$$

対形成揺らぎの項 $\delta N$ を単純に“分子ボゾンになったフェルミ原子の寄与”とみなすと、 $\delta N/2$ はそのように単純化された分子数を与える。このことに留意し、

$$\frac{\delta N}{2} = \sum_{\mathbf{Q}} n_Q, \quad (2.22)$$

とおいて、クーパー対の重心運動量分布 $n_Q$ を定義する。式(2.21)より、 $n_Q$ はTMAの範囲で

$$n_Q = T \sum_{i\nu_m} \Gamma_0(\mathbf{Q}, i\nu_m) \times T \sum_{\mathbf{p}, i\omega_n} G_0(\mathbf{Q} - \mathbf{p}, i\nu_m - i\omega_n) G_0(\mathbf{p}, i\omega_n) G(\mathbf{p}, i\omega_n), \quad (2.23)$$

となる。

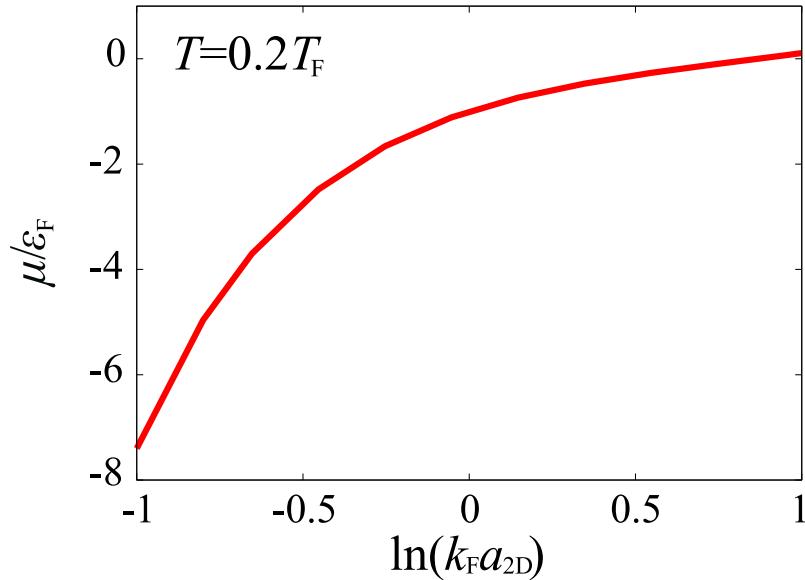


図 2.3 非自己無撞着  $T$  行列近似 (TMA) での化学ポテンシャル  $\mu$  の相互作用依存性。  
 $T = 0.2T_F$  とおいている ( $T_F$  はフェルミ温度)。この図において相互作用は  $\ln(k_F a_{2D})$  で測られており、図の左側が引力が強い強結合側 ( $\ln(k_F a_{2D}) \lesssim 0$ )、右側が弱結合側 ( $\ln(k_F a_{2D}) \gtrsim 0$ ) に対応する。 $\varepsilon_F$  はフェルミエネルギー。

式 (2.22) で定義された  $n_Q$  が実際に引力相互作用が強い強結合側 ( $\ln(k_F a_{2D}) \lesssim 0$ ) で、“クーパー対の重心運動量分布”という描写を与えることを述べる。式 (2.23) 中に現れる多体散行列  $\Gamma_0(Q, i\nu_m)$  のスペクトル表示

$$\Gamma_0(Q, i\nu_m) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{1}{i\nu_m - z} \text{Im}\Gamma_0(i\nu_m \rightarrow z + i\delta), \quad (2.24)$$

を用いて、 $n_Q$  を

$$\begin{aligned} n_Q &= -T \sum_{i\nu_m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\pi} \frac{\text{Im}\Gamma_0(Q, i\nu_m \rightarrow z + i\delta)}{i\nu_m - z} \\ &\times T \sum_{\mathbf{p}, i\omega_n} G_0(Q - \mathbf{p}, i\nu_m - i\omega_n) G_0(\mathbf{p}, i\omega_n) G(\mathbf{p}, i\omega_n), \end{aligned} \quad (2.25)$$

と書く。松原周波数  $\nu_m$  の和を実行すると、

$$\begin{aligned} n_{\mathbf{Q}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\pi} \text{Im}\Gamma_0(\mathbf{Q}, i\nu_m \rightarrow z + i\delta) \\ &\times T \sum_{\mathbf{p}, i\omega_n} G_0(\mathbf{Q} - \mathbf{p}, z - i\omega_n) G_0(\mathbf{p}, i\omega_n) G(\mathbf{p}, i\omega_n) n_B(z) \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\pi} T \sum_{\mathbf{p}, i\omega_n} \frac{\text{Im}\Gamma_0(\mathbf{Q}, i\nu_m \rightarrow z + i\delta)}{i\omega_n + \xi_{\mathbf{Q}-\mathbf{p}} - z} G_0(\mathbf{p}, i\omega_n) G(\mathbf{p}, i\omega_n) n_F(\xi_{\mathbf{Q}-\mathbf{p}}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

ここで、

$$n_B(z) = \frac{1}{e^{\beta z} - 1}, \quad (2.27)$$

はボーズ分布関数、また  $n_F(\xi_{\mathbf{Q}-\mathbf{p}})$  は式 (2.12) で与えられるフェルミ分布関数である。

図 2.3 に示すように強結合側 ( $\ln(k_F a_{2D}) \lesssim 0$ ) では  $\mu < 0$  となり、その極限では  $\mu/\varepsilon_F \ll -1$  となることから、この領域ではフェルミ分布関数  $n_F(\xi_{\mathbf{Q}-\mathbf{p}})$  を含む式 (2.26) 2 項目は重要ではなくなる。そこで 1 項目のみを残すと付録 E で示すように、強結合領域で多体散乱行列  $\Gamma_0(\mathbf{Q}, i\nu_m)$  がボゾンのグリーン関数の形、

$$\Gamma_0(\mathbf{Q}, i\nu_m) = -\frac{8\pi\mu}{m} \frac{1}{i\nu_m - \frac{Q^2}{2M} + \mu_B}, \quad (2.28)$$

に近似できることから、 $n_{\mathbf{Q}}$  は質量  $M = 2m$ 、化学ポテンシャル

$$\mu_B = -2|\mu| \ln \left( \frac{2|\mu|}{E_{\text{bind}}} \right) (< 0), \quad (2.29)$$

の分子ボゾンの運動量分布

$$n_{\mathbf{Q}} = Z n_B \left( \frac{Q^2}{2M} - \mu_B \right), \quad (2.30)$$

に帰着する (式 (2.30) において、 $(Q^2/(2M) - \mu_B)$  はボーズ分布関数の引数である)。なお、式 (2.29) において、

$$E_{\text{bind}} = \frac{1}{ma_{2D}^2}, \quad (2.31)$$

は分子ボゾンの結合エネルギーであり、式 (2.30) の導出は付録 F.1 及び G にまとめてある。式 (2.30) 中の  $Z (> 0)$  はくり込み因子

$$Z = \frac{|\mu|}{|\mu| + \varepsilon_F}, \quad (2.32)$$

である。強結合極限  $\ln(k_F a_{2D}) \ll -1$  では、

$$\frac{\mu}{\varepsilon_F} \simeq -\frac{E_{\text{bind}}}{2\varepsilon_F} = \frac{-1}{(k_F a_{2D})^2} \ll -1, \quad (2.33)$$

より、 $Z \rightarrow 1$  となる。この極限で式 (2.30) は

$$n_Q \xrightarrow{E_{\text{bind}} \rightarrow \infty} n_B \left( \frac{Q^2}{2M} - \mu_B \right) \quad (\mu_B < 0), \quad (2.34)$$

に帰着する。

上述の議論は  $\mu < 0$  で式 (2.26) の2項目の寄与が1項目に比べて無視できる強結合側 ( $\ln(k_F a_{2D}) \lesssim 0$ ) で有効であるが、 $\mu \sim 0$  (または  $\mu/\varepsilon_F \gtrsim -1$ ) のような弱結合側 ( $\ln(k_F a_{2D}) \gtrsim 0$ ) では2項目の寄与が無視できないため、 $n_Q$  にクーパー対を形成していないフェルミ原子の性質が現れる。そこで本論文では、 $n_Q$  をクーパー対の重心運動量分布とみなせる強結合側 ( $\ln(k_F a_{2D}) \lesssim 0$ ) に限って議論することにする。

図 2.4 は強結合側 ( $\ln(k_F a_{2D}) \lesssim 0$ ) におけるクーパー対の重心運動量分布  $n_Q$  の  $Q$  (重心運動量) 依存性をいくつかの温度に対しプロットしたものである。中間結合領域 ( $-1 < \ln(k_F a_{2D}) = -0.59 < 0$ ) でも  $T/T_F \lesssim 0.5$  では式 (2.23) で定義された  $n_Q$  はボーズ分布関数による近似式 (2.30) でよく表されることが分かる (図 2.4 (a1)、(a2))。また、強結合領域 (図 2.4 (b1)~(b3)) では、 $T/T_F = 1$  でも  $n_Q$  はボーズ分布関数でよく表され、これらの温度-相互作用領域では系の性質が分子ボーズ気体の性質に近いことを示している。<sup>6</sup>Li 2次元フェルミ原子気体における BKT 転移は  $T/T_F \lesssim 0.2$  で観測されているので、図 2.4 で考えている相互作用領域では  $n_Q$  を実験で観測している“クーパー対の重心運動量分布”と比較できる量と見なすことができる。

図 2.5 (a) は式 (2.30) に現れているくり込み因子  $Z$  の温度依存性である。 $\ln(k_F a_{2D}) = -0.59$  の場合、図 2.4 (a1)~(a3) は確かに  $T/T_F \lesssim 0.5$  の低温領域であれば  $n_Q$  の  $Q$  依存性はボーズ分布関数で与えられることを示しているが、図 2.5 (a) に示すように、このときの  $Z \simeq 0.77 < 1$  はこの相互作用領域ではまだ“完全な理想ボーズ原子気体”にはなっておらず、フェルミ原子間相互作用による多体効果が、くり込み因子が 1 からずれるという形でクーパー対の重心運動量分布  $n_Q$  に影響を及ぼしていることを示している。この相互作用効果は式 (2.30) 中に現れている“分子ボゾンの化学ポテンシャル  $\mu_B$ ”が  $N/2$  個の理想分子ボーズ気体のそれとは、 $\ln(k_F a_{2D}) = -0.59$  の場合は完全に一致しないことからも見てとれる (図 2.6 参照)。

これに対し、 $\ln(k_F a_{2D}) = -2$  でのくり込み因子は図 2.5 (a) に示す通り 1 に近く、この相互作用領域では、 $n_Q$  はほぼ理想分子ボーズ気体に近いと考えられる。実際、この時の  $\mu_B$  は図 2.6 に示すように理想分子ボーズ気体の化学ポテンシャルに非常に近い値をとる。なお、図 2.5 (b) に示すように、くり込み因子は  $\ln(k_F a_{2D}) \lesssim -2$  でほとんど 1 に近い値となる。

低温の強結合側で有効な近似式 (2.30) でくり込み因子  $Z$  の温度依存性が顕著ではない (図 2.5 (a) 参照) ことから、 $n_Q$  の温度依存性はボーズ分布関数部分から得られることが

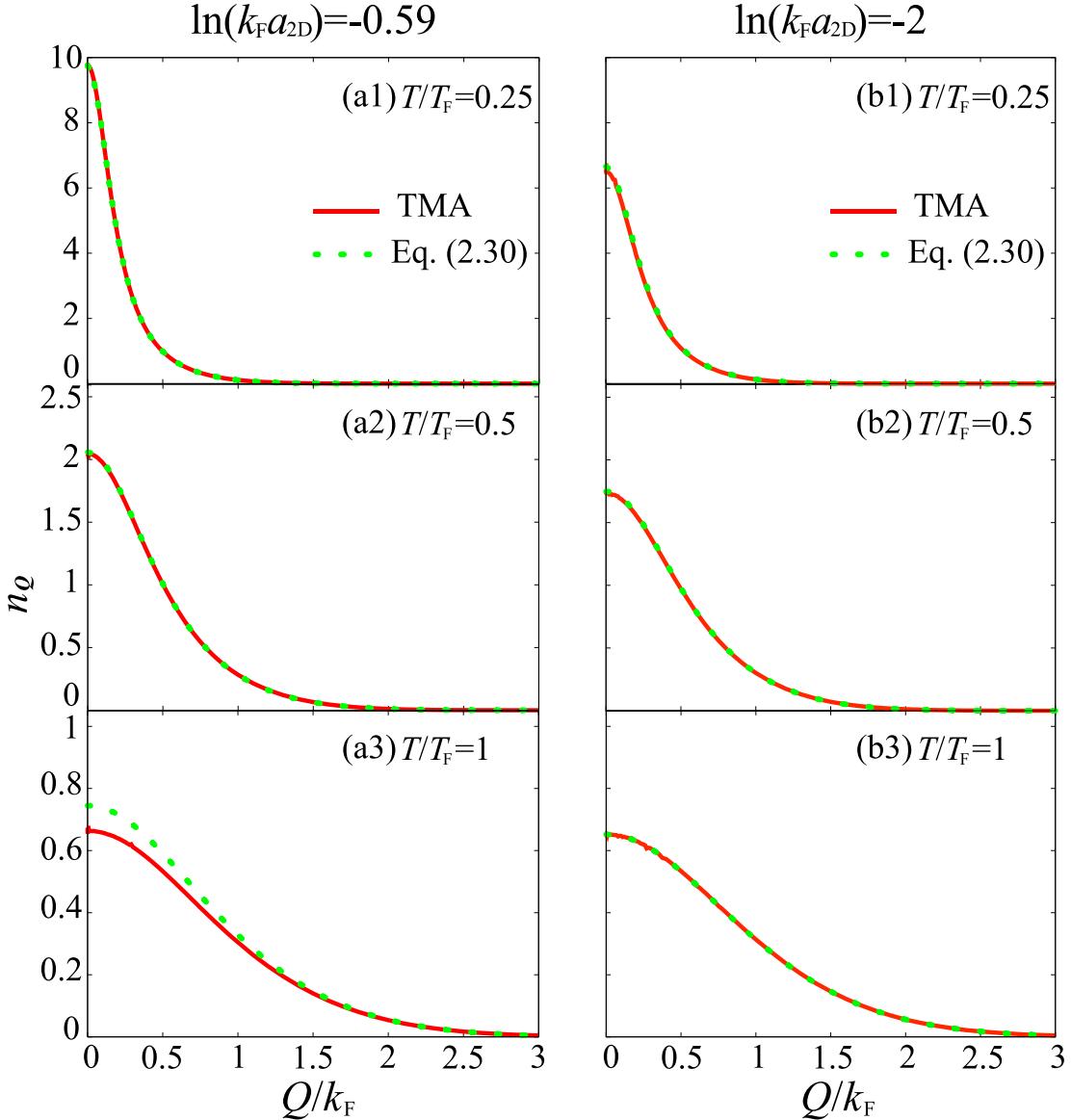


図 2.4 強結合側 ( $\ln(k_F a_{2D}) \lesssim 0$ ) におけるクーパー対の重心運動量分布  $n_Q$  の温度依存性。横軸は重心運動量  $Q$ 。実線は式 (2.23)、点線は近似式 (2.30) の結果。(a1)～(a3) は引力相互作用が中間結合領域の  $\ln(k_F a_{2D}) = -0.59$  の結果。(b1)～(b3) は強結合領域  $\ln(k_F a_{2D}) = -2 (< -1)$  での結果。

分かる。さらに、図 2.6 に示すように低温での  $\mu_B$  の振る舞いは  $T^\alpha$  ( $\alpha > 1$ ) であることから、 $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$  における式 (2.30) は十分低温で

$$n_{\mathbf{Q}=\mathbf{0}} = \frac{Z}{e^{|\mu_B|/T} - 1} \simeq Z \frac{T}{|\mu_B|} \gg 1. \quad (2.35)$$

つまり、図 2.4 では、 $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$  近傍の  $n_Q$  が低温で増大しているが、それは  $\mu_B$  の温度変化に起因する。実際、理想ボーズ気体に対し、 $T/|\mu_B|$  をプロットすると図 2.7 に示すよう

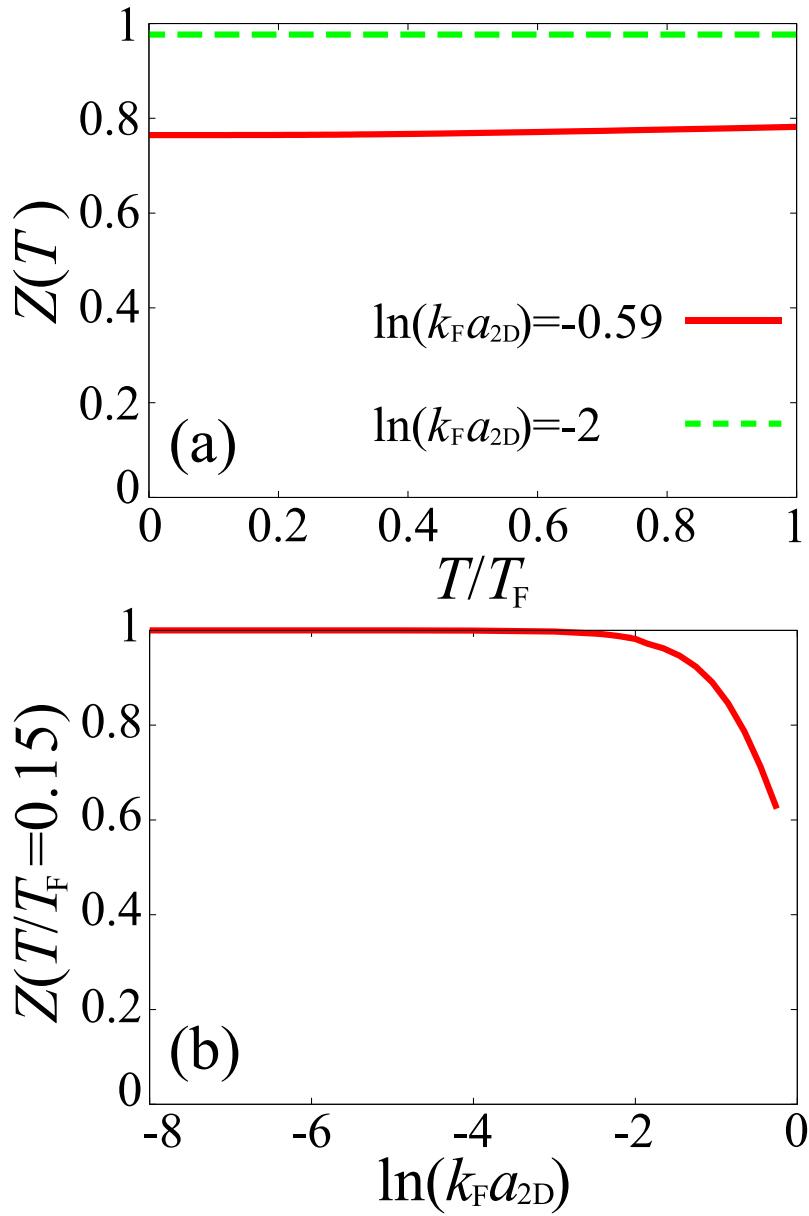


図 2.5 (a) くり込み因子  $Z$  (式 (2.32)) の温度依存性。実線は  $\ln(k_F a_{2D}) = -0.59$  (図 2.4 の左図 (a1)～(a3) の場合)、破線は  $\ln(k_F a_{2D}) = -2$  (図 2.4 の右図 (b1)～(b3) の場合) の結果。(b)  $T/T_F = 0.15$  における  $Z$  の相互作用依存性。

に、 $T \rightarrow 0$  で  $\mu_B$  が 0 に近づくことにより、 $n_{Q=0}$  が急増する。

ただし、図 2.6 から分かるように、 $\ln(k_F a_{2D}) = -0.59$  では、まだ  $\mu_B$  は理想ボーズ気体のそれとは一致せず、フェルミ原子間相互作用による多体効果の影響が残っているため、 $Q = \mathbf{0}$  近傍の  $n_Q$  の振る舞いにも相互作用依存性が残ることになる。この点を使い、2.3 節では TMA の枠組みで計算された  $n_Q$  の  $Q = \mathbf{0}$  での温度依存性を  ${}^6\text{Li}$  2 次元フェ

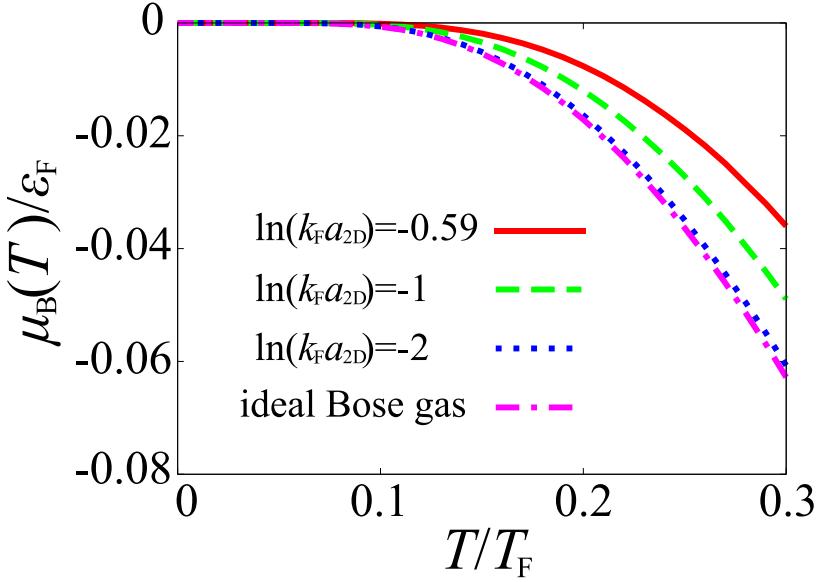


図 2.6 式 (2.30) に現れる分子ボゾンの化学ポテンシャル  $\mu_B$  の温度依存性。1 点鎖線は  $N/2$  個、質量  $M = 2m$  での理想(分子)ボーズ気体(2次元)の化学ポテンシャル。

ルミ原子気体で行われた実験 [29] と比較する。

本節の終わりに実験 [30] で BKT 転移の観測の際に議論されたクーパー対の1次相関関数  $g_1(r)$  を導入する。この量はクーパー対を分子ボゾンと考え、クーパー対の重心運動量分布  $n_Q$  から次のように計算される。

$$\begin{aligned} g_1(r) &= \int d^2\mathbf{r}' \langle \Psi^\dagger(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \rangle \\ &= \sum_Q \langle a_Q^\dagger a_Q \rangle e^{iQ \cdot r} \\ &= \sum_Q n_Q e^{iQ \cdot r}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

ここで  $\Psi(\mathbf{r})$  はボゾン場の演算子、また、 $a_Q^\dagger, a_Q$  はボゾンの生成消滅演算子である。また、 $n_Q = \langle a_Q^\dagger a_Q \rangle$  である。

## 2.3 実験との比較 I: 重心運動量 0 のクーパー対の数 $n_{Q=0}$

本節、及び、2.4 節では、TMA(非自己無撞着  $T$  行列近似)の枠組みで計算されたクーパー対の重心運動量分布  $n_Q$ (特に  $Q = 0$ ) や式 (2.36) で与えられるクーパー対の相関関数  $g_1(r)$  を近年  ${}^6\text{Li}$  2次元フェルミ原子気体で行われた実験結果 [29, 30] と比較する。ここで、注意すべき点は前述したように TMA は BKT 転移を含む超流動転移を記述でき

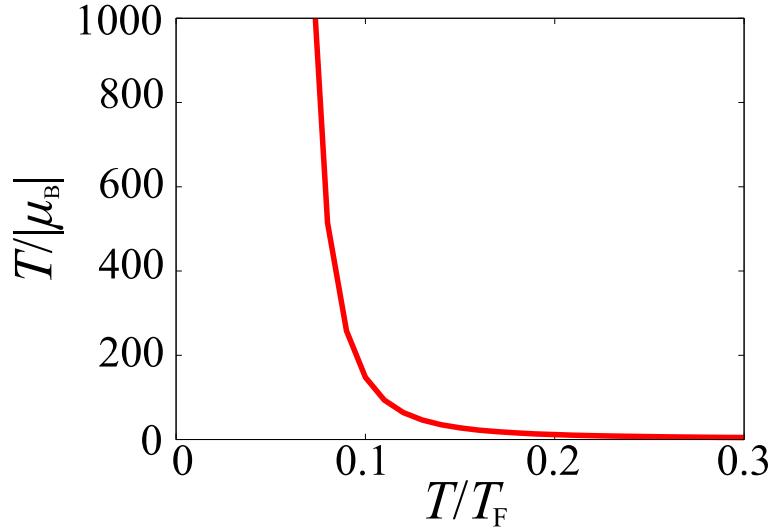


図 2.7  $T/|\mu_B|$  の温度依存性。ここでは例として、 $N/2$  個の理想(分子)ボーズ気体の場合の化学ポテンシャル  $\mu_B$  を考えている( $N$  はフェルミ原子数であり、横軸の  $T_F$  とは  $T_F = \pi N/m$  ( $m$  はフェルミ原子の質量)で結ばれている)。

ず、結果、 $n_{\mathbf{Q}}$  や  $g_1(r)$  は「正常相」での計算結果であるということである。対形成搖らぎ(及びその強結合極限としての分子形成)のみを考慮したこの強結合理論が、BKT 転移を観測したとする実験結果をどこまで説明できるかを調べることで、この実験で主張されているこれら特徴的な「BKT 転移の振る舞い」が実際にどの程度 BKT 転移特有の現象であるかを検証する。

まず本節では、 $n_{\mathbf{Q}=\mathbf{0}}$  を考える。図 2.8 は TMA で計算された重心運動量  $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$  のクーパー対の数  $n_{\mathbf{Q}=\mathbf{0}}$ (式(2.23))である。図 2.8 (a) では強結合側( $\ln(k_F a_{2D}) = -0.59$ )での $^6\text{Li}$  2 次元フェルミ原子気体の実験結果(黒丸)[29]と比較しているが、観測された低温での  $n_{\mathbf{Q}=\mathbf{0}}$  の上昇が理論的によく再現されていることが分かる。この実験[29]では低温側の  $n_{\mathbf{Q}=\mathbf{0}}$  の振る舞いと高温側の  $n_{\mathbf{Q}=\mathbf{0}}$  の振る舞いをそれぞれ直線フィットし(図 2.8 (a) 中の 2 本の点線)、この交点を BKT 転移温度  $T_{\text{BKT}}^{\text{exp}}$  と同定している(つまり、この実験では低温での  $n_{\mathbf{Q}=\mathbf{0}}$  の急増を 3 次元系における BEC と同じ考え方で凝縮粒子数とみなしている)。なお、図 2.8 (a) では  $T_{\text{BKT}}^{\text{exp}}$  での  $n_{\mathbf{Q}=\mathbf{0}}$  を  $\tilde{n}_{\mathbf{Q}=\mathbf{0}}$  とし、縦軸を規格化している。

前節の議論から分かるように、理論計算の結果(図 2.8 (a) の“TMA”)が低温で急増するのはクーパー対の化学ポテンシャルとみなせる  $\mu_B$  が 0 に近づくことによるものである。つまり、BKT 転移を仮定しなくても実験で観測された  $n_{\mathbf{Q}=\mathbf{0}}$  の“ $T_{\text{BKT}}^{\text{exp}}$  以下の振る舞い”は定量的に説明することができ、BKT 転移特有の現象とは見なせないことが分かる。

図 2.8 (b) には  $\ln(k_F a_{2D}) = -0.59$  以外の相互作用(ただし強結合側  $\ln(k_F a_{2D}) \leq 0$ )

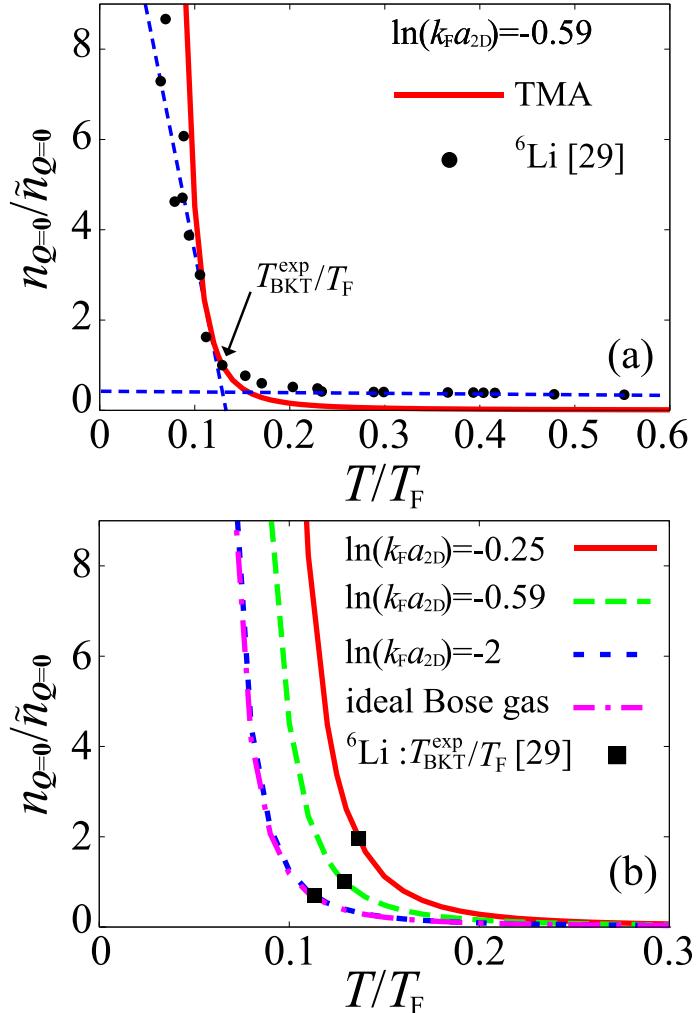


図 2.8 (a) TMA で計算された  $\ln(k_F a_{2D}) = -0.59$  における  $n_{Q=0}$  の温度依存性 (実線)。 ${}^6\text{Li}$  2 次元フェルミ原子気体の実験で報告された BKT 転移温度  $T_{\text{BKT}}^{\text{exp}} = 0.129T_F$  での  $n_{Q=0}$  の値 ( $\equiv \tilde{n}_{Q=0}$ ) で規格化されている。黒丸は実験で観測された  $n_{Q=0}$  [29]。この実験では高温と低温領域のデータを直線フィッティングし (図中の 2 本の点線)、その交点を BKT 転移温度  $T_{\text{BKT}}^{\text{exp}}$  と決定している。(b) いくつかの相互作用での  $n_{Q=0}$  の温度依存性。 $\ln(k_F a_{2D}) = -0.59$  での BKT 転移温度  $T_{\text{BKT}}^{\text{exp}}$  での  $n_{Q=0}$  ( $\equiv \tilde{n}_{Q=0}$ ) で規格化している。黒四角は各相互作用の強度において、 ${}^6\text{Li}$  2 次元フェルミ原子気体で報告された BKT 転移温度  $T_{\text{BKT}}^{\text{exp}}$  [29]。

で  $n_{Q=0}$  の温度変化の計算結果を示しているが、いずれも低温で急増し、急増し始める温度は各相互作用で BKT 転移温度  $T_{\text{BKT}}^{\text{exp}}$  と判定された温度 (図中黒四角) あたりから起き始めている。従って図 2.8 (a) での議論同様、 $\ln(k_F a_{2D}) = -0.25$  や  $-2$  での実験結果に対しても BKT 転移特有の現象を観測したものとは必ずしも言えないことが分かる。

図 2.8 (b) に見られる  $n_{Q=0}$  の振る舞いの相互作用依存性は近似式 (2.30) におけるボゾ

ンの化学ポテンシャル  $\mu_B$  (図 2.6)、及び、くり込み因子  $Z$  (図 2.5 (b)) の相互作用依存性に起因するものであるが、これら 2 つの効果は以下のように考えると 1 つの効果にまとめて理解することができる。式 (2.30) を用いてボーズ粒子数を計算すると  $N$  個のフェルミ原子が全て分子ボゾンになっているとして、

$$\begin{aligned} \frac{N}{2} &= Z \sum_Q n_B \left( \frac{Q^2}{2M} - \mu_B \right) \\ &= \int_0^\infty \frac{Q dQ}{2\pi} n_B \left( \frac{Q^2}{2(ZM)} - \mu_B \right), \end{aligned} \quad (2.37)$$

と書ける。ここで 2 行目を導く際、 $\sqrt{Z}Q \rightarrow Q$  と変数変換した。式 (2.37) は “有効質量  $M^* = ZM$ ” の  $N/2$  個の分子ボゾンからなる理想ボーズ原子気体の粒子数方程式である。強結合極限 ( $\ln(k_F a_{2D}) \ll -1$ ) から引力を弱くしていくと図 2.5 (b) に示すように  $\ln(k_F a_{2D}) \simeq -2$ あたりから  $Z$  が 1 より小さくなるが、このように有効質量  $M^*$  が “軽く”なると  $\mu_B$  はボーズ分布関数  $n_B(z)$  の構造からも分かるように、より高温から 0 に近づくようになる (例えば 3 次元理想ボーズ気体において  $\mu_B = 0$  となる BEC 転移温度はボゾンの質量に反比例する)。結果、図 2.8 (b) に示すように  $n_{Q=0}$  が急増し始める温度は高くなり、実験で観測したと主張されている  $T_{BKT}^{\text{exp}}$  の相互作用が弱くなるにつれての上昇が (BKT 転移を仮定せずに) 説明される。

以上のように、 ${}^6\text{Li}$  2 次元フェルミ原子気体で BKT 転移を観測したとする実験 [29] の根拠の 1 つである “ $T_{BKT}^{\text{exp}}$ ” 以下の重心運動量 0 のクーパー対分子数の急増はフェルミ原子間に働く強い引力相互作用の分子形成と、強結合極限以外で残っている多体効果を TMA の範囲で考慮すると BKT 転移を仮定しなくとも説明できることが分かった。

## 2.4 実験との比較 II: クーパー対の 1 次相関関数 $g_1(r)$

次に  ${}^6\text{Li}$  2 次元フェルミ原子気体での BKT 転移観測の実験的根拠となっているクーパー対の 1 次相関関数  $g_1(r)$  (式 (2.36)) の幕的振る舞い [30] を考える。

図 2.9 (a)~(c) に計算で得られたクーパー対の 1 次相関関数  $g_1(r)$  の対間距離依存性を示す ( $\ln(k_F a_{2D}) = -0.59$ )。ここで、[30] の実験と同じように  $5 \mu\text{m} \leq r \leq 25 \mu\text{m}$  で  $g_1(r)$  を

$$g_1^{\text{fit}}(r) = \frac{C}{r^\eta}, \quad (2.38)$$

でフィットすると図中の破線のようになる。このフィッティングから幕指数  $\eta$  を決定、その温度依存性を示したものが図 2.10 である。 $\ln(k_F a_{2D}) = -0.59$  の結果は同じ相互作用強度での実験結果とよく一致している。この実験ではこのような幕指数が ( $5 \mu\text{m} \leq r \leq$

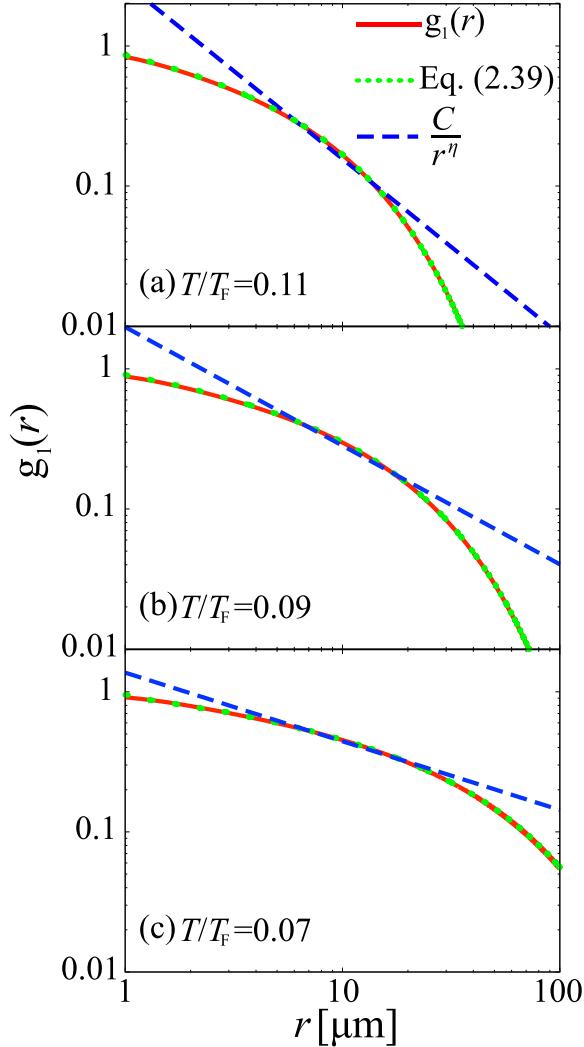


図 2.9 クーパー対の 1 次相関関数  $g_1(r)$  の対間距離  $r$  依存性。相互作用強度は  $\ln(k_F a_{2D}) = -0.59$ 。(a)  $T/T_F = 0.11$ 。(b)  $T/T_F = 0.09$ 。(c)  $T/T_F = 0.07$ 。実線は TMA の枠組みで解析された式 (2.36) の結果、緑点線は式 (2.39)。青破線は文献 [30] の実験と同じように幕関数  $Cr^{-\eta}$  でのフィッティングを  $5 \mu\text{m} \leq r \leq 25 \mu\text{m}$  で行った結果。解析では  $T_{\text{BKT}}^{\exp}$  での  $k_F$  の値  $k_F = 3.77 \mu\text{m}^{-1}$  を用いた。

25  $\mu\text{m}$  で) 得られたことを BKT 転移実現の根拠の 1 つとしているが、この結果は  $n_{Q=0}$  に対する前節の議論同様、BKT 転移特有の現象ではないことが分かる。

[30] の実験では  $\ln(k_F a_{2D}) = -0.59$  より強結合側 ( $\ln(k_F a_{2D}) = -3.4, -7.3$ ) でほとんど相互作用強度に依存しない幕指数の温度依存性が得られている (図 2.10 の菱形と四角) が、これについても (BKT 転移を仮定しない) TMA の枠組みで理解することができる :  $\ln(k_F a_{2D}) = -3.4, -7.3$  のような強結合領域では系はほとんど分子ボーズ気体と

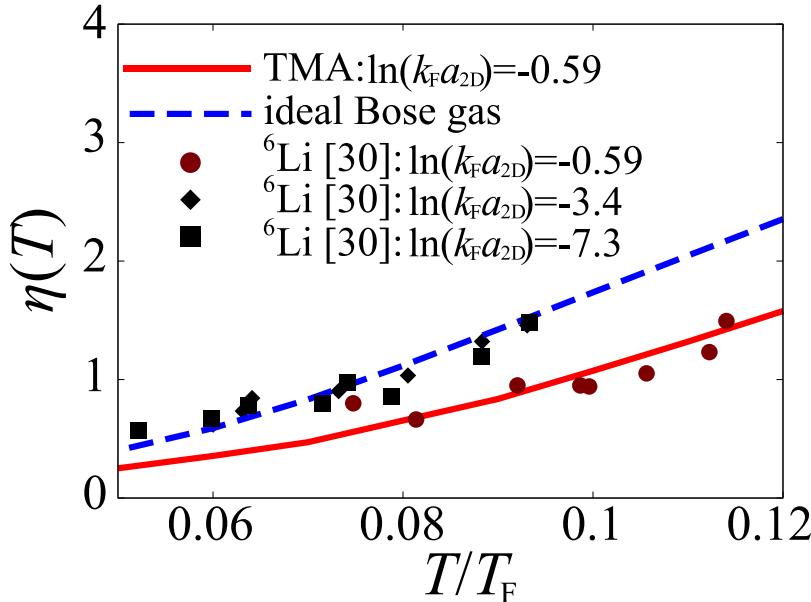


図 2.10 TMA で計算されたクーパー対の 1 次相関関数  $g_1(r)$  を実験 [30] と同じ相関距離  $5 \mu\text{m} \leq r \leq 25 \mu\text{m}$  で幕関数  $Cr^{-\eta}$  でフィットして決めた幕指数  $\eta$  の温度依存性 (“TMA”)。破線 (ideal Bose gas) は式 (2.30) で  $Z = 1$  とした強結合極限の式を用いた場合。ideal Bose gas は  $\ln(k_F a_{2D}) = -7.3$  の  $k_F = 4.87 \mu\text{m}^{-1}$  を用い解析した。赤丸、黒菱形、黒四角は  $^6\text{Li}$  2 次元フェルミ原子気体での実験結果。

なっており、かつ図 2.5 (b) に示すように  $Z \simeq 1$  となっていることから、 $n_Q$  はほとんど理想分子ボーズ気体のボーズ分布関数で与えられると考えられる。それをフーリエ変換して得られる  $g_1(r)$  (式 (2.36)) も相互作用依存性がほとんどなくなる。実際に、 $n_Q$  としてボーズ分布関数を用い  $g_1(r)$  を計算、式 (2.38) でフィットして幕指数  $\eta$  を求めると図 2.10 の “ideal Bose gas” の結果となり、 $\ln(k_F a_{2D}) = -3.4, -7.3$  の実験結果をよく説明する。実験では  $\ln(k_F a_{2D}) \lesssim -3.4$  において  $\eta(T/T_F \simeq 0.1) \simeq 1.4$  が得られているが、この相互作用に依存しない結果は系がほとんど理想分子ボーズ気体になっているためとして理解することができる。

最後に、理論計算において、BKT 転移を仮定していないのある対間領域で幕的振る舞いが現れた理由について説明する。近似式 (2.30) を用いて  $g_1(r)$  を計算すると  $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$

近傍が重要であるとして

$$\begin{aligned}
 g_1(r) &\simeq Z \sum_{\mathbf{Q}} n_B \left( \frac{Q^2}{2M} - \mu_B \right) e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}} \\
 &\simeq ZT \int \frac{d^2\mathbf{Q}}{4\pi^2} \frac{1}{\frac{Q^2}{2M} - \mu_B} e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}} \\
 &= \frac{MTZ}{\pi} K_0(r\sqrt{2M|\mu_B|}). \tag{2.39}
 \end{aligned}$$

ここで  $K_0(x)$  は変形ベッセル関数である。図 2.9 には、式 (2.39) の結果を載せているが、TMA の結果とよく一致していることが分かる。式 (2.38) でのフィッティングをする領域は  $x = r\sqrt{2M|\mu_B|} \gg 1$  であり、この領域では式 (2.39) は  $K_0(x)$  の漸近式 [101] を用い次のように書くことができる。

$$g_1(r) \simeq \frac{MTZ}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{r\sqrt{2M|\mu_B|}}} e^{-r\sqrt{2M|\mu_B|}}. \tag{2.40}$$

幂領域は温度が下がるにつれ、 $|\mu_B|$  は 0 に近づくため (図 2.6 参照)、式 (2.40) 中の指數関数的減衰の寄与が重要になるのは  $r$  が大きな領域になる。そのため、低温になるにつれ、幂的振る舞いが近似的に見られる領域が広くなる。

以上まとめると、本章前半で示したように、 ${}^6\text{Li}$  2 次元フェルミ原子気体において BKT 転移を観測したとする最近の実験 [29, 30] がその根拠としている 2 つの実験結果はいずれも BKT 転移を仮定しない理論により定量的に説明することができる。

## 第 3 章

# 擬ギャップ現象と対形成揺らぎの効果

2 章では、近年  ${}^6\text{Li}$  2 次元フェルミ原子気体で報告された BKT 転移について、その根拠とされた 2 つの実験結果 (重心運動量  $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$  のクーパー対の重心運動量分布  $n_{\mathbf{Q}=\mathbf{0}}$ 、及び、クーパー対の 1 次相関関数の幕指数) が BKT 転移を仮定せずとも対形成揺らぎの効果を取り入れた非自己無撞着  $T$  行列近似 (TMA) により常流動相の現象として理解できることを示した。本章では、2 次元フェルミ原子気体の理論研究に用いられる「超流動秩序パラメータの位相揺らぎのみを考慮した BKT 理論」の妥当性を擬ギャップ現象の視点から議論する。そして、その結果から従来の BKT 理論で無視していた超流動秩序パラメータの振幅揺らぎの重要性を指摘する。また、擬ギャップの研究から、前章で用いた TMA は弱結合領域においてこの現象を過大評価することを明らかにし、それを解決する手段として自己無撞着  $T$  行列近似 (Self-consistent  $T$ -matrix approximation: SCTMA) が有効であることを示す。

3.1 節では擬ギャップを研究する上で重要な物理量である 1 粒子状態密度と 1 粒子スペクトル強度について説明する。3.2 節では前章で用いた TMA の枠組みで 1 粒子状態密度を計算、対形成揺らぎにより現れる擬ギャップを議論する。そして、TMA の弱結合領域における擬ギャップサイズが過大評価されることを擬ギャップサイズと実験で観測された Tan's contact とよばれる量との比較から明らかにする。3.3 節では、TMA の問題点を克服する理論である SCTMA について説明する。3.4 節では、SCTMA で擬ギャップ現象を研究し、状態密度に擬ギャップが現れる温度領域 (擬ギャップ領域) を弱結合領域から強結合領域まで明らかにする。3.5 節では、最近 2 次元フェルミ原子気体で観測された内部エネルギーや圧力、エントロピーといった熱力学量を SCTMA の枠組みで計算、実験との比較からこの強結合理論の妥当性を議論する。

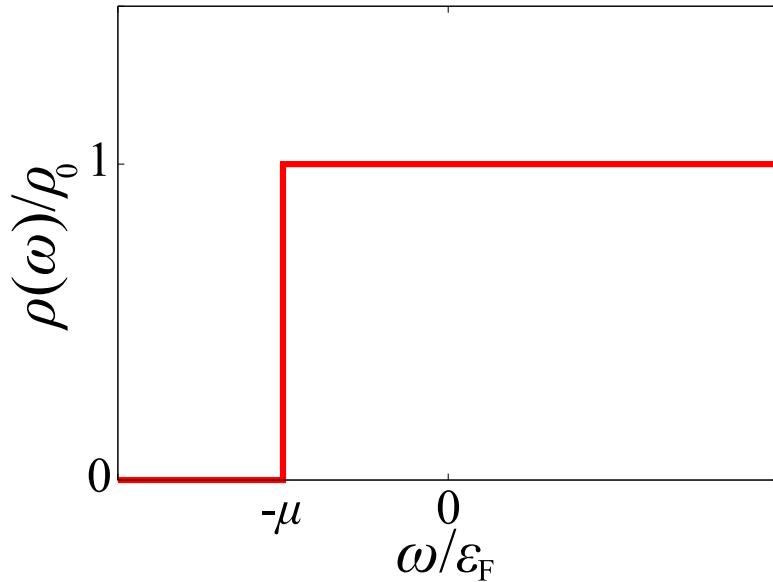


図 3.1 2次元自由フェルミ原子気体の1粒子状態密度  $\rho(\omega)$  のエネルギー依存性。 $\mu$  はフェルミ原子の化学ポテンシャル。横軸はフェルミエネルギー  $\varepsilon_F$ 、縦軸は  $\rho_0$  (式 (3.4) 参照) で規格化している。

### 3.1 1粒子状態密度とスペクトル強度の定義

1粒子状態密度  $\rho(\omega)$  は次式で与えられる。

$$\rho(\omega) = \sum_{\mathbf{p}} A(\mathbf{p}, \omega). \quad (3.1)$$

ここで、 $A(\mathbf{p}, \omega)$  は1粒子スペクトル強度であり、1粒子温度グリーン関数  $G(\mathbf{p}, i\omega_n)$  を解析接続 ( $i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta$ ) したものと次のように関係している。

$$A(\mathbf{p}, \omega) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} G(\mathbf{p}, i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta). \quad (3.2)$$

1粒子温度グリーン関数は例えば、前章で説明した TMA の場合、式 (2.7) で与えられる。他方、自由フェルミ原子気体の場合、グリーン関数は式 (2.9) で与えられ、その場合1粒子スペクトル強度は

$$A(\mathbf{p}, \omega) = \delta(\omega - \xi_{\mathbf{p}}), \quad (3.3)$$

となる。これを式 (3.1) に代入すると、1粒子状態密度は

$$\rho(\omega) = \frac{m}{2\pi} \Theta(\omega + \mu) \equiv \rho_0 \Theta(\omega + \mu). \quad (3.4)$$

ここで、 $\Theta(x)$  は階段関数である。この時、状態密度は  $\omega \geq -\mu$  で一定値  $\rho_0$  となる (図 3.1)。

## 3.2 非自己無撞着 $T$ 行列近似 (TMA) で計算された 1 粒子状態密度と擬ギャップ現象

式 (3.2) 中の 1 粒子グリーン関数として、TMA での表式 (2.7) を用いた場合の 1 粒子状態密度  $\rho(\omega)$  を図 3.2 に示す。弱結合領域 ( $\ln(k_F a_{2D}) = +1$ ) の場合、図 3.2 (a) から分かるように、 $T/T_F = 1$  ではフェルミ面 ( $\omega = 0$ ) 付近に特別な構造は見られないが、 $T/T_F = 0.4$  ではくぼみ構造 (擬ギャップ構造) が現れる。そしてより温度を下げ、位相揺らぎのみを考慮した BKT 理論 [33–37] (付録 C 参照) が与える BKT 転移温度 ( $T_{BKT}^{\text{th}}$ ) では BCS 理論でよく知られた超伝導状態密度と同じような明確なギャップ構造を有する状態密度が得られる。ただし、今用いている TMA は超流動相を記述できないので、ここで得られた “BCS 理論的状態密度” は超流動秩序パラメータによるものではなく、対形成揺らぎに起因するものである (擬ギャップ現象)。

図 3.2 (a) (弱結合領域  $\ln(k_F a_{2D}) = 1$ ) に見られる擬ギャップ現象は引力相互作用が強くなるとより顕著になる。図 3.2 (b) ( $\ln(k_F a_{2D}) = 0$ ) では、 $T/T_F = 1$  において、すでに  $\omega = 0$  付近に擬ギャップが現れており、図 3.2 (c) ( $\ln(k_F a_{2D}) = -1$ ) に示す強結合領域の場合には  $T/T_F = 1$  の時点で既に大きなギャップが開いている。

擬ギャップ現象は相転移現象ではなく、また生じる構造も図 3.2 (a) の  $T/T_F = 0.4$  の場合のように、完全なギャップ ( $\omega \sim 0$  で  $\rho(\omega) \simeq 0$  となるギャップ) が開くとは限らない。しかし、ここではこの現象を考えるための目安として  $\omega = 0$  付近に “くぼみ” が生じた場合を擬ギャップ現象が現れたとし、その時の擬ギャップサイズ  $E_{\text{gap}}$  を図 3.3 のように「擬ギャップの低エネルギー側のピークの位置と、くぼみの底の位置の差」として導入する。図 3.2 (c) の強結合領域の場合、低温領域 ( $T = T_{BKT}^{\text{th}}$ ) での擬ギャップサイズは

$$\frac{E_{\text{gap}}}{\varepsilon_F} \simeq 9 \quad (3.5)$$

であるが、一方、式 (2.31) の 2 体分子の束縛エネルギー  $E_{\text{bind}}$  はこの相互作用において

$$\frac{E_{\text{bind}}}{\varepsilon_F} = \frac{1}{\varepsilon_F m a_{2D}^2} = \frac{2}{(k_F a_{2D})^2} = 2e^2 = 14.8 \quad (3.6)$$

となり、状態密度に現れるギャップが分子の解離と関係すると考えると、 $2E_{\text{gap}} \simeq 18\varepsilon_F$  が式 (3.6) と同程度の大きさとなる。

他方、図 3.2 (a) に示した弱結合領域の場合、結合エネルギーは

$$\frac{E_{\text{bind}}}{\varepsilon_F} = 0.27 \quad (3.7)$$

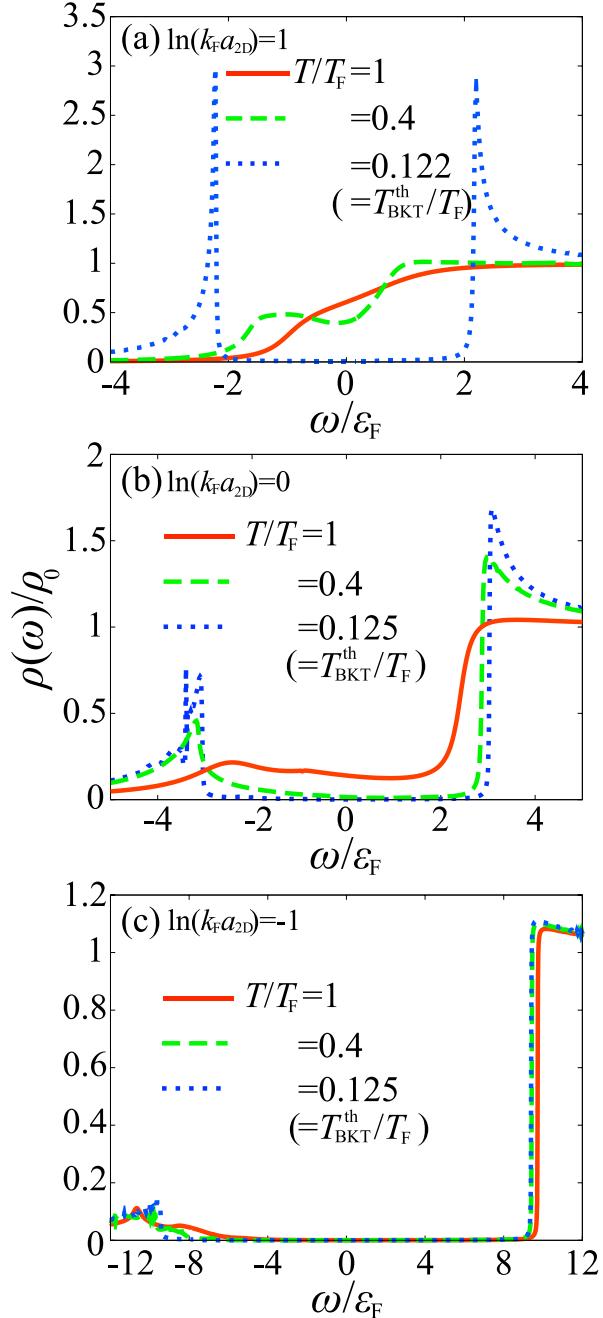


図 3.2 非自己無撞着  $T$  行列近似 (TMA) の枠組みで計算された 1 粒子状態密度  $\rho(\omega)$ 。横軸はフェルミエネルギー  $\epsilon_F$  で規格化されたエネルギー  $\omega$ 。縦軸は自由フェルミ原子気体の 1 粒子状態密度  $\rho_0 = m/(2\pi)$  で規格化されている。(a)  $\ln(k_F a_{2D}) = 1$ 。(b)  $\ln(k_F a_{2D}) = 0$ 。(c)  $\ln(k_F a_{2D}) = -1$ 。 $T = T_{BKT}^{\text{th}}$  は位相揺らぎのみを考慮した理論 [33–37] で計算された BKT 転移温度。

であるのに対し、 $T = T_{BKT}^{\text{th}}$  でのギャップサイズは

$$\frac{E_{\text{gap}}}{\epsilon_F} \simeq 2, \quad (3.8)$$

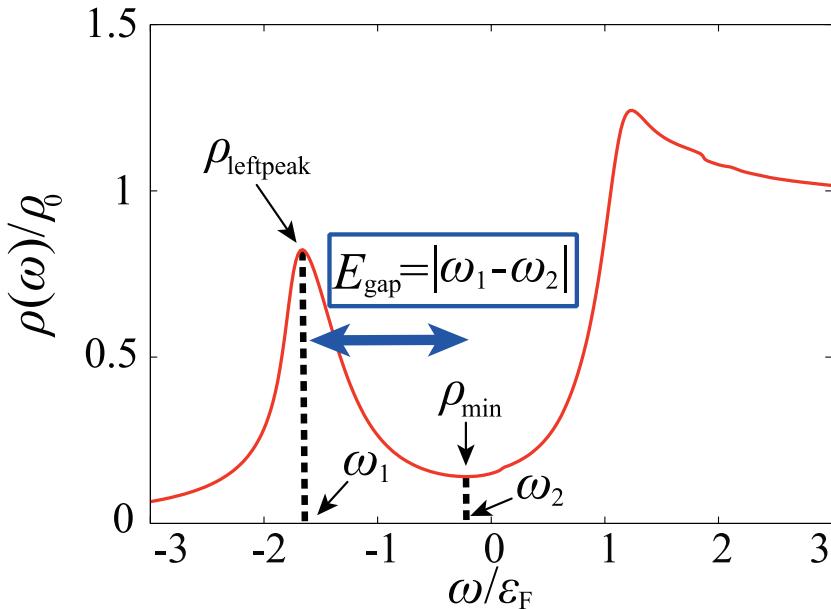


図 3.3 本論文で用いる 1 粒子状態密度  $\rho(\omega)$  に関する擬ギャップのサイズ  $E_{\text{gap}}$  の評価方法。 $\omega < 0$  で  $\rho(\omega)$  がピークとなるエネルギー  $\omega_1$  と、擬ギャップ中の  $\rho(\omega)$  が最小となるエネルギー  $\omega_2$  から、擬ギャップサイズを  $E_{\text{gap}} = |\omega_1 - \omega_2|$  のように決定する。

となり両者は非常に大きな差がある。後述するように、弱結合側に生じるこの“大きな擬ギャップ”はここで用いている TMA の問題点であり、次節で説明する SCTMA (自己無撞着  $T$  行列近似) を用いるとこのような大きなギャップ構造は弱結合側で現れなくなる (後述するように、3 次元系に対し TMA を適用する場合このような問題は生じない)。

TMA が弱結合領域でも、低温で 2 体分子の結合エネルギー  $E_{\text{bind}}$  に比べ非常に大きな BCS 理論的ギャップを与える原因を説明するために、この近似で計算された化学ポテンシャル  $\mu$  の温度変化を図 3.4 に示す。2 章で説明したように、2 次元系では BCS 的な超流動転移は起こらないことを反映し、式 (2.14) で与えられる Thouless の判定条件が有限温度 ( $T > 0$ ) で満たされることはない。しかし、この図から分かるように、低温では  $\mu(T)$  は Thouless の判定条件を満たす化学ポテンシャル ( $\equiv \mu_{\text{Th}}(T)$ ) に (わずかにそれよりは小さいものの) 非常に近い値をとる。また、引力相互作用がある程度強い図 3.4 (b), (c) の場合は分子ボソンの形成を反映し、 $\mu < 0$  となっているが、図 3.4 (a) は  $\ln(k_{\text{F}}a_{2D}) = 1$  の“弱結合領域”でも  $T/T_{\text{F}} \lesssim 0.2$  で  $\mu < 0$  となり、(TMA の範囲では) フェルミ面が消失することを示している。

低温で  $\mu \simeq \mu_{\text{Th}}$  であることはこの領域で低エネルギーの対形成揺らぎが強くなっていることを示している。これを利用し、対形成揺らぎを表す式 (2.10) の  $\Gamma_0(\mathbf{Q}, i\nu_m)$  が  $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ ,  $\nu_m = 0$  で大きな値をとるとして、式 (2.8) の TMA の自己エネルギー

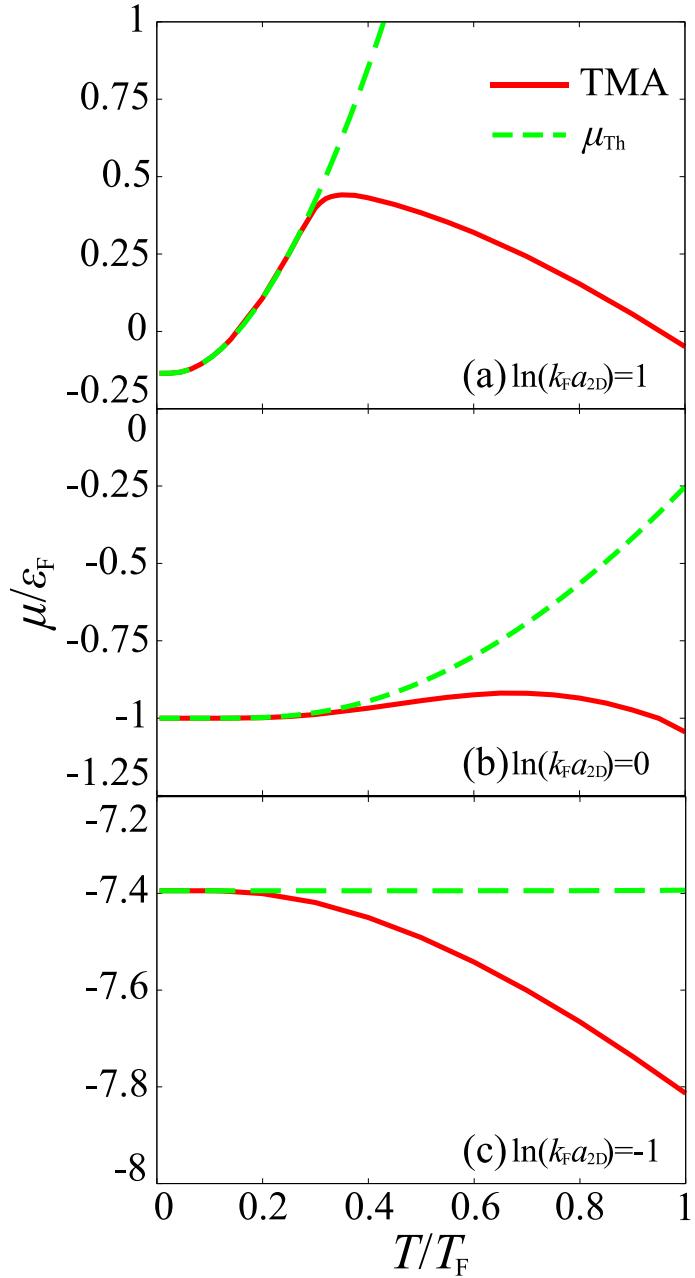


図 3.4 TMA で計算された化学ポテンシャルの温度依存性 (実線)。破線は式 (2.14) で与えられる Thouless の判定条件を満たす化学ポテンシャル  $\mu_{\text{Th}}$ 。図では、低温で両者が一致しているように見えるが、 $T > 0$  では常に  $\mu < \mu_{\text{Th}}$  となっている。

$\Sigma_{\text{TMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n)$  を次のように近似する。

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{\text{TMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n) &= T \sum_{\mathbf{Q}, i\nu_m} \Gamma_0(\mathbf{Q}, i\nu_m) G_0(\mathbf{Q} - \mathbf{p}, i\nu_m - i\omega_n) \\
 &\simeq G_0(-\mathbf{p}, -i\omega_n) \times T \sum_{\mathbf{Q}, i\nu_m} \Gamma_0(\mathbf{Q}, i\nu_m) \\
 &\simeq -G_0(-\mathbf{p}, -i\omega_n) \Delta_{\text{PG}}^2. \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

ここで、

$$\Delta_{\text{PG}} = \sqrt{-T \sum_{\mathbf{Q}, i\nu_m} \Gamma_0(\mathbf{Q}, i\nu_m)}, \quad (3.10)$$

は擬ギャップパラメータとよばれる [81, 82]。式 (3.9) の近似では対形成揺らぎを表す  $\Gamma_0(\mathbf{Q}, i\nu_m)$  は  $\Delta_{\text{PG}}$  という“定数”になるため、この近似は(対形成揺らぎに対する) 静的 (static) 近似とよばれる。この静的近似の自己エネルギーを式 (2.7) の 1 粒子グリーン関数の自己エネルギーとして用いると

$$G_{\text{TMA}}^{\text{static}}(\mathbf{p}, i\omega_n) = -\frac{i\omega_n + \xi_{\mathbf{p}}}{\omega_n^2 + \xi_{\mathbf{p}}^2 + \Delta_{\text{PG}}^2}. \quad (3.11)$$

ここで、式 (3.11) は  $\Delta_{\text{PG}}$  を超流動秩序パラメータ  $\Delta$  で置き換えると BCS 平均場理論における 1 粒子グリーン関数(の対角成分) [102] と同じになり、結果得られる状態密度もギャップサイズ  $E_{\text{gap}} = \Delta_{\text{PG}}$  で完全にギャップが開いたものになる。さらに、付録 F.1 に示すように、図 3.4 で見られるような  $\mu < 0$  となる低温領域では式 (3.10) で与えられる擬ギャップパラメータは

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{PG}} &= 2\sqrt{\varepsilon_F \left( \varepsilon_F + \frac{E_{\text{bind}}}{2} \right)} \\ &= 2\varepsilon_F \sqrt{1 + \frac{1}{(k_F a_{2D})^2}}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

となるため、弱結合極限 ( $\ln(k_F a_{2D}) \rightarrow \infty$ 、または  $(k_F a_{2D}) \rightarrow \infty$ ) で

$$\Delta_{\text{PG}} \rightarrow 2\varepsilon_F, \quad (3.13)$$

となる。また、化学ポテンシャルはこの極限で

$$\mu \rightarrow -\frac{1}{2}E_{\text{bind}} \rightarrow -0, \quad (3.14)$$

となる。これらの結果は、TMA ではこの極限で期待される自由フェルミ原子気体 ( $\Delta_{\text{PG}} \rightarrow 0$ ,  $\mu \rightarrow \varepsilon_F$ ) が得られず、 $2\varepsilon_F$  という非物理的な大きな 1 粒子励起ギャップが開いてしまうことを示している。なお、図 3.2 (a) (弱結合領域  $\ln(k_F a_{2D}) = 1$ ) の  $T = T_{\text{BKT}}^{\text{th}}$  でのギャップサイズは  $E_{\text{gap}} \simeq 2\varepsilon_F$  であり、上の静的近似での結果とよく一致している。

現在、フェルミ原子気体の 1 粒子状態密度  $\rho(\omega)$  を直接観測する実験手段は存在しないものの、弱結合領域での擬ギャップが TMA では過大評価されていることは、観測可能量である Tan's contact  $C$  から実験的にもある程度理解することができる。これを説明するために、まず  ${}^{40}\text{K}$  2 次元フェルミ原子気体で Tan's contact が観測された

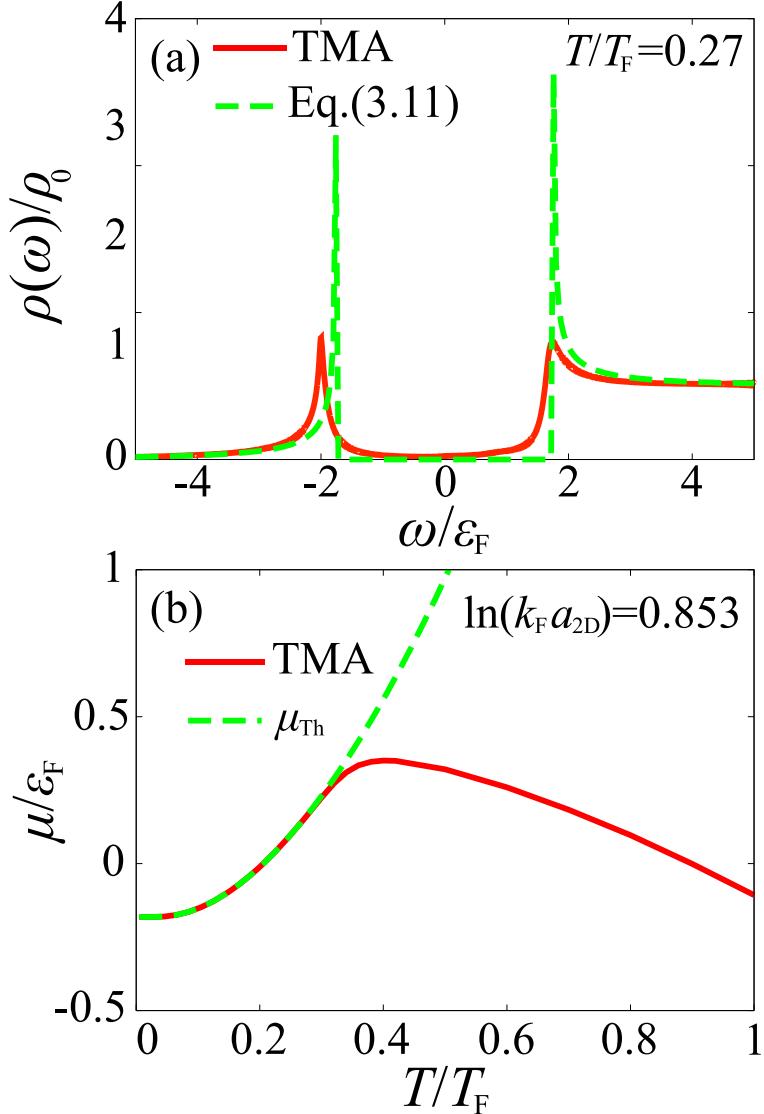


図 3.5 (a) Tan's contact が観測されている弱結合領域  $\ln(k_F a_{2D}) = 0.853$ 、温度  $T/T_F = 0.27$  における TMA の枠組みで計算された 1 粒子状態密度  $\rho(\omega)$ 。破線は静的近似でのグリーン関数 (式 (3.11)) を用いて計算された  $\rho(\omega)$ 。(b)  $\ln(k_F a_{2D}) = 0.853$  における化学ポテンシャル  $\mu(T)$ 、及び、 $\mu_{\text{Th}}$  の温度依存性。(a) での温度 ( $T/T_F = 0.27$ ) では  $\mu \simeq \mu_{\text{Th}}$  となっている。

$\ln(k_F a_{2D}) = 0.853$  ( $> 0$  : 弱結合側)、 $T/T_F = 0.27$  [24] では、TMA で計算された状態密度  $\rho(\omega)$  において図 3.5 (a) に示すように大きな擬ギャップが開いていることに着目する。この相互作用、温度領域では図 3.5 (b) に示すように  $\mu \simeq \mu_{\text{Th}}$  となっていることから、前述した静的近似が有効であり、実際、静的近似でのグリーン関数 (式 (3.11)) を用いて計算された  $\rho(\omega)$  は TMA の結果とほぼ同じ大きさの擬ギャップが開く (図 3.5 (a) 参照 : こ

の図において TMA の結果は  $E_{\text{gap}} = 1.686\varepsilon_F$  を与え、他方静的近似における擬ギャップパラメータも  $\Delta_{\text{PG}} = 1.75\varepsilon_F$  と  $E_{\text{gap}}$  に近い値となっている)。

以上の点を踏まえ、Tan's contact  $C$  が [103]

$$C = m^2 U^2 \int \langle \Psi_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_\downarrow(\mathbf{r}) \Psi_\uparrow(\mathbf{r}) \rangle d^2\mathbf{r} \quad (3.15)$$

で与えられることに注意すると ( $\Psi(\mathbf{r})$  はフェルミ原子の場の演算子)、TMA の枠組みではこの量は

$$C_{\text{TMA}} = -m^2 T \sum_{\mathbf{Q}, i\nu_m} \Gamma_0(\mathbf{Q}, i\nu_m), \quad (3.16)$$

のように多体散乱行列と関係し [104, 105]、かつ式 (3.10) より次のように擬ギャップパラメータとも関係付けられることが分かる。

$$C = m^2 \Delta_{\text{PG}}^2. \quad (3.17)$$

のことと、図 3.5 (a) の状況では  $E_{\text{gap}} \simeq \Delta_{\text{PG}}$  であることから、もし TMA の結果のように大きな擬ギャップが開いているとすると、そこから見積もられる Tan's contact は

$$C_{\text{TMA}} \simeq m^2 E_{\text{gap}}^2 = 0.711 k_F^4, \quad (3.18)$$

となるはずであるが、 ${}^{40}\text{K}$  2 次元フェルミ原子気体で観測された値は

$$C_{\text{exp}} = 0.223 k_F^4 \quad (\ln(k_F a_{2D}) = 0.853, T/T_F = 0.27), \quad (3.19)$$

であり [24]、 $C_{\text{TMA}}$  より小さな値である。 $C_{\text{exp}}$  を再現するには  $E_{\text{gap}}$  の値は

$$E_{\text{gap}} = \sqrt{0.223} \frac{k_F^2}{m} = 0.944 \varepsilon_F, \quad (3.20)$$

であり、図 3.5 (a) のギャップサイズはこの図の半分程度でなくてはならない。

ここで、3 次元系の場合、TMA では弱結合領域において大きな擬ギャップが開かないことについて述べる。3 次元系では、 $T > 0$  で Thouless の判定条件 (式 (2.14)) が満たされるため、 $\mu = \mu_{\text{Th}}$  となる温度で系は超流動転移する。そのため、2 次元系の弱結合領域  $\ln(k_F a_{2D}) = 1$  (図 3.4 (a)) で見られる「低温 ( $T \simeq 0.3T_F$ ) で  $\mu \simeq \mu_{\text{Th}}$  となり、さらに  $T \lesssim 0.2T_F$  でフェルミ面が消失 ( $\mu < 0$ ) する振る舞い」は 3 次元系の弱結合側では見られない (弱結合領域では  $\mu \simeq \varepsilon_F > 0$  となる) [81]。2 次元系では  $\mu \simeq \mu_{\text{Th}}$  となり、化学ポテンシャルが減少する領域で対形成揺らぎが強くなり、擬ギャップパラメータ (式 (3.10)) が成長するが、3 次元系ではこのような温度領域は存在しないため、弱結合側の 1 粒子状態密度に大きな擬ギャップは開かず、弱結合極限で自由フェルミ原子気体の状態密度に帰着する [81]。

### 3.3 自己無撞着 $T$ 行列近似 (SCTMA)

前節で述べたように、2次元系の対形成揺らぎの理論的取扱いは TMA では弱結合側で不十分である。そこで、本節では以降 TMA より高次の対形成揺らぎを扱える自己無撞着  $T$  行列近似 (SCTMA) を用い、2次元フェルミ原子気体の擬ギャップ現象を調べる。

SCTMA では、1粒子温度グリーン関数

$$G(\mathbf{p}, i\omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}} - \Sigma_{\text{SCTMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n)}, \quad (3.21)$$

の中の自己エネルギーは図 3.6 に示すファインマンダイアグラムで表されるものを用いる。具体的表式は

$$\Sigma_{\text{SCTMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n) = T \sum_{\mathbf{Q}, i\nu_m} \Gamma(\mathbf{Q}, i\nu_m) G(\mathbf{Q} - \mathbf{p}, i\nu_m - i\omega_n). \quad (3.22)$$

TMA との違いは、図 3.6 (a) の自己エネルギーの上のループや図 3.6 (b) の多体散乱行列  $\Gamma$  中のグリーン関数は式 (3.21) で与えられる“くり込まれたグリーン関数”であるという点である (TMA では自由粒子のグリーン関数  $G_0$  が用いられている)。対形成揺らぎ (図 3.6 (c)) を表す多体散乱行列  $\Gamma(\mathbf{Q}, i\nu_m)$  は

$$\Gamma(\mathbf{Q}, i\nu_m) = \frac{-U}{1 - U\Pi(\mathbf{Q}, i\nu_m)}, \quad (3.23)$$

であり、最低次の対相関関数  $\Pi(\mathbf{Q}, i\nu_m)$  は

$$\Pi(\mathbf{Q}, i\nu_m) = T \sum_{\mathbf{p}, i\omega_n} G(\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2, i\omega_n + i\nu_m) G(-\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2, -i\omega_n), \quad (3.24)$$

である。この式 (3.24) は TMA とは異なり、くり込まれたグリーン関数が用いられる。このため、SCTMA では式 (3.21) のグリーン関数を決定する際に、自己エネルギーのダイアグラムの上のループ (図 3.6 (a) 参照) や多体散乱行列  $\Gamma$  中のグリーン関数 (図 3.6 (b) 参照) を自己無撞着に決定する必要がある。

SCTMA においても、化学ポテンシャル  $\mu$  は粒子数方程式

$$N = 2T \sum_{\mathbf{p}, i\omega_n} G(\mathbf{p}, i\omega_n) e^{i\omega_n \delta}, \quad (3.25)$$

から決定する。SCTMA も TMA 同様、BKT 転移を含む 2次元系での超流動転移を記述することはできない。すなわち、TMA と同様、SCTMA でも超流動転移温度を決定する Thouless の判定条件 [99]

$$\Gamma^{-1}(0, 0) = 1 - U\Pi(0, 0) = 0 \quad (3.26)$$

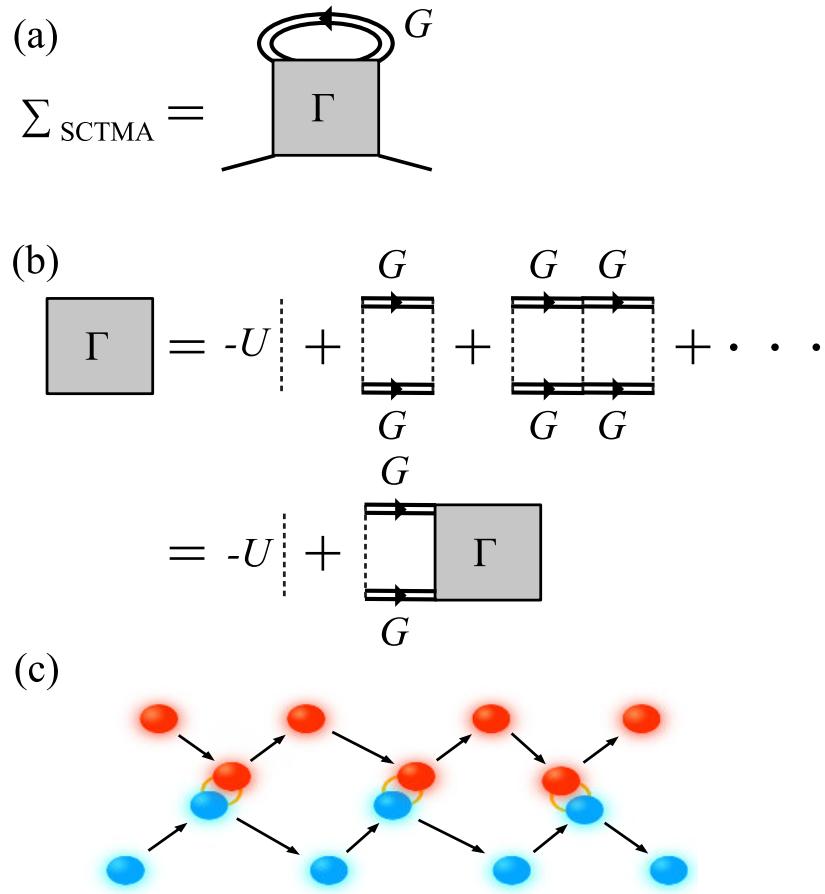


図 3.6 自己無撞着  $T$  行列近似 (SCTMA) における (a) 自己エネルギー  $\Sigma_{\text{SCTMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n)$  (式 (3.22)) と、(b) 対形成揺らぎを表す多体散乱行列  $\Gamma(\mathbf{Q}, i\nu_m)$  (式 (3.23)) のファインマンダイアグラム。 $-U (< 0)$  は接触型の引力相互作用、 $G$  は自己エネルギー  $\Sigma_{\text{SCTMA}}$  を含むフェルミ原子気体の 1 粒子温度グリーン関数 (式 (3.21))。TMA ではこのグリーン関数が自己エネルギーを含まない自由粒子のグリーン関数になっている (図 2.1 参照)。(c) 対の形成と解離 (対形成揺らぎ) を模式的に表した図。ぼやけた赤、青色の球はそれぞれ異なる原子状態 (擬スピン  $\sigma = \uparrow, \downarrow$ ) にあるフェルミ原子を表す。TMA の場合 (図 2.1 (c)) とは異なり、SCTMA ではこれらのフェルミ原子は自己エネルギー (式 (3.22)) の補正を受けたグリーン関数 (式 (3.21)) で記述される。

が有限温度で満たされることはない。ただし、式 (3.25) で決まる  $\mu$  は式 (3.26) で決定される化学ポテンシャル  $\mu_{\text{Th}}^{\text{SCTMA}}$  に低温で漸近する (図 3.7 (a)~(c))。しかし、弱結合領域 ( $\ln(k_F a_{2D}) = 1$ ) の TMA (図 3.4 (a)) と SCTMA (図 3.7 (a)) の  $\mu$  を比較すると、 $\mu \simeq \mu_{\text{Th}}$  となる温度領域は TMA より SCTMA の方がより低温領域に限定されており、これは後者のほうが低エネルギー長波長における対形成揺らぎが抑制されること

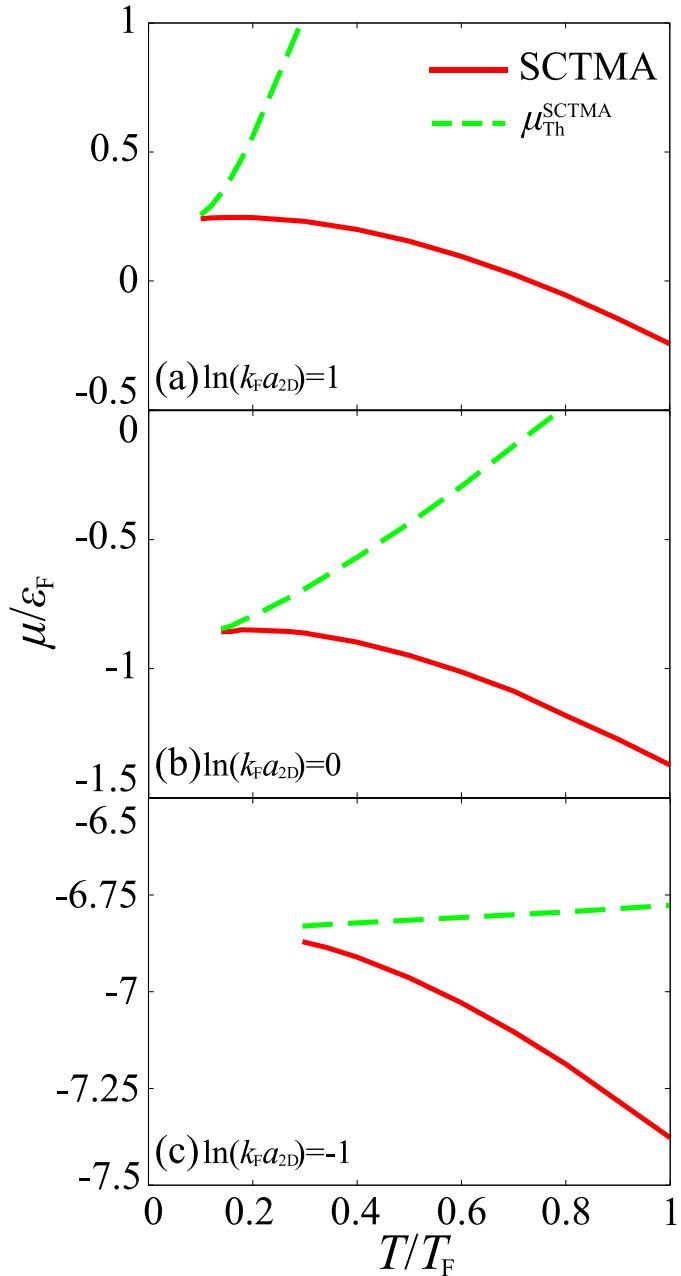


図 3.7 SCTMA で計算された化学ポテンシャル  $\mu$  の温度依存性。破線は Thouless の判定条件式 (3.26) を満たす化学ポテンシャル  $\mu_{\text{Th}}^{\text{SCTMA}}$ 。(c)において、この領域では低温領域の数値計算が大変であるため、 $T/T_F \gtrsim 0.3$  のみの計算となっている。

を示している。実際、図 3.5 (a)と同じ相互作用強度(弱結合  $\ln(k_F a_{2D}) = 0.853$ )、温度( $T/T_F = 0.27$ )での1粒子状態密度  $\rho(\omega)$ もSCTMAで計算すると、図3.8に示すように、TMAで見られたような大きな擬ギャップ構造よりはるかに小さくぼみ構造が現れる。

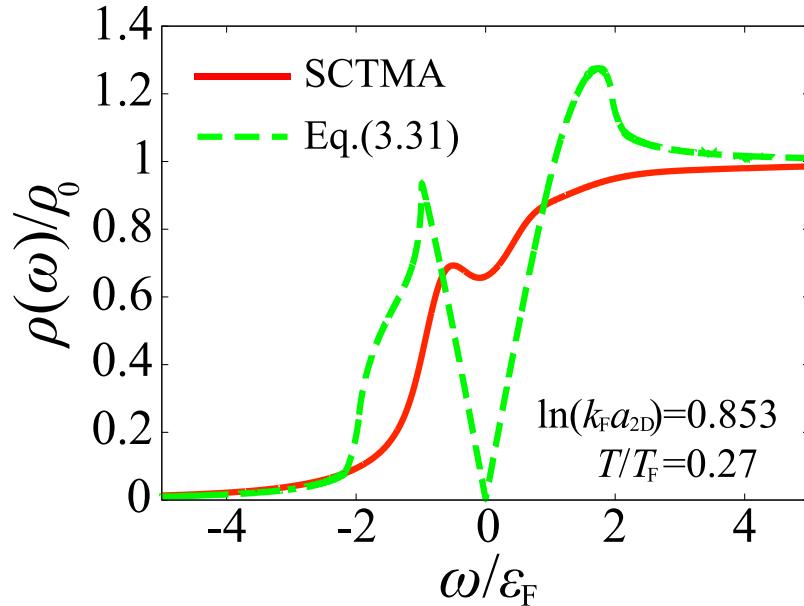


図 3.8 SCTMA で計算された 1 粒子状態密度  $\rho(\omega)$ 。相互作用強度、温度は図 3.5 と同じ  $\ln(k_F a_{2D}) = 0.853$ ,  $T/T_F = 0.27$ 。破線は静的近似の式 (3.31) のグリーン関数を用いた場合の結果。

SCTMA の方が TMA に比べ擬ギャップ現象が抑制される理由は次の 2 つである。1 つ目の理由は対形成揺らぎを表す多体散乱行列  $\Gamma(\mathbf{Q}, i\nu_m)$  がくり込まれたグリーン関数で構成されているため、対形成揺らぎにより擬ギャップが生じ、フェルミ面近傍の状態密度が減少すると、その影響が  $\Gamma(\mathbf{Q}, i\nu_m)$  にフィードバックされ、対形成揺らぎが抑制されるためである。TMA では自由粒子のグリーン関数が多体散乱行列の構成に使われるため、このようなフィードバックはない。

2 つ目の理由はくり込まれたグリーン関数を用いると、相互作用による準粒子の寿命の効果が考慮されるため、“ぼやけた 1 粒子励起スペクトル”が擬ギャップ構造を不明瞭にするためである。準粒子の寿命やそれに伴う 1 粒子励起スペクトルのぼやけは TMA のグリーン関数でも考慮されているが、自己エネルギー内の 1 粒子グリーン関数が全てくり込まれたグリーン関数である SCTMA に比べ、自由粒子のグリーン関数（このグリーン関数に対するスペクトル強度は自由粒子の分散に沿って  $\delta$  関数的な鋭いピークを有する）を用いている TMA はこの効果は顕著ではない。実際、両者のスペクトル強度を比較すると、図 3.9 (a), (b) に示すように、TMA に比べ、SCTMA は幅広いスペクトル構造を与える。

SCTMA の場合、式 (3.15) で与えられる Tan's contact は

$$C_{\text{SCTMA}} = -m^2 T \sum_{\mathbf{Q}, i\nu_m} \Gamma(\mathbf{Q}, i\nu_m), \quad (3.27)$$

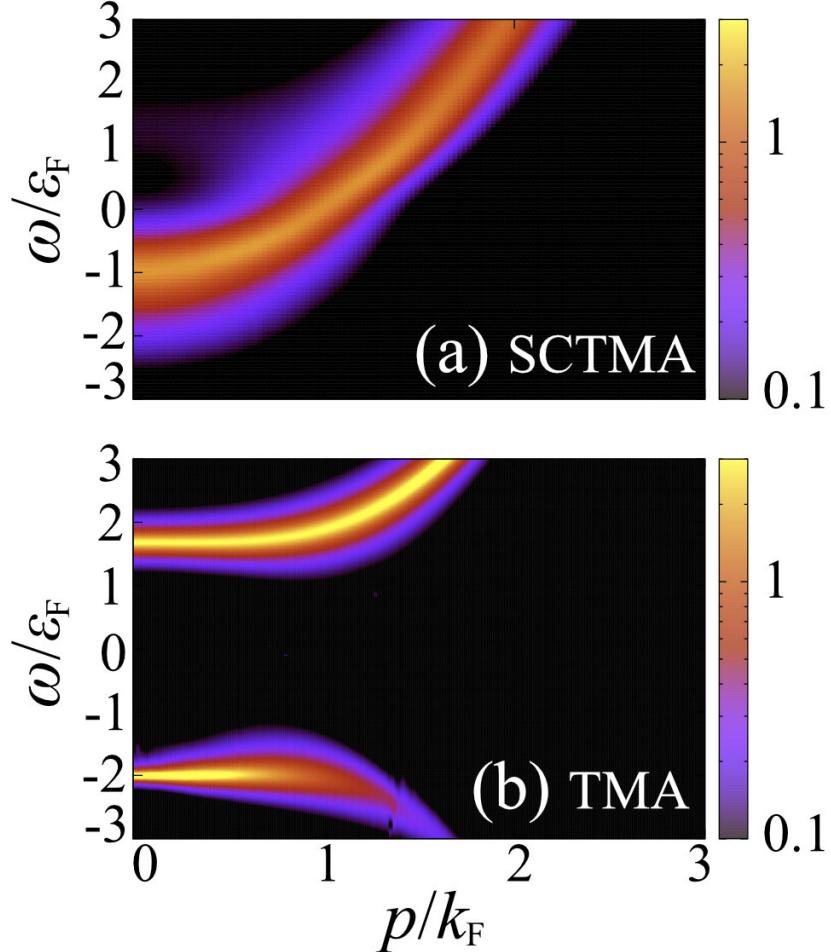


図 3.9 1 粒子励起スペクトル強度  $A(\mathbf{p}, \omega)$ 。(a) SCTMA。(b) TMA。相互作用強度  $\ln(k_F a_{2D}) = 0.853$ 、温度  $T = 0.27T_F$  は図 3.5 (a)、図 3.8 と同じものである。スペクトル強度は  $\varepsilon_F^{-1}$  で規格化している。

となる [41, 106]。TMA の結果を示した図 3.5 (a) や SCTMA の結果を示した図 3.8 (弱結合:  $\ln(k_F a_{2D}) = 0.853$ 、 $T/T_F = 0.27$ ) の場合にこれを評価すると、式 (3.16) で計算した  $C_{\text{TMA}} = 0.766k_F^4$  より小さな値、

$$C_{\text{SCTMA}} = 0.238k_F^4, \quad (3.28)$$

となる。これは  ${}^{40}\text{K}$  2 次元フェルミ原子気体での実験結果の値  $C_{\text{exp}} = 0.223k_F^4$  [24] に近い。ただしこの結果は、図 3.8 (SCTMA) での擬ギャップサイズが TMA の結果を示した図 3.5 (a) でのそれより小さいことと一貫性はあるものの、TMA の場合 (図 3.5 (a)) とは異なり、SCTMA では  $C$  とギャップサイズ  $E_{\text{gap}}$  は単純には結びつかないことに注意す

る必要がある。実際 SCTMA において、静的近似 [107]

$$\begin{aligned}\Sigma_{\text{SCTMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n) &= T \sum_{\mathbf{Q}, i\nu_m} \Gamma(\mathbf{Q}, i\nu_m) G(\mathbf{Q} - \mathbf{p}, i\nu_m - i\omega_n) \\ &\simeq -\Delta_{\text{PG}}^2 G(-\mathbf{p}, -i\omega_n),\end{aligned}\quad (3.29)$$

を行って擬ギャップパラメータ

$$\Delta_{\text{PG}} = \sqrt{-T \sum_{\mathbf{Q}, i\nu_m} \Gamma(\mathbf{Q}, i\nu_m)}, \quad (3.30)$$

を導入すると、 $C = m^2 \Delta_{\text{PG}}^2$  となるが、この近似のもとでの 1 粒子温度グリーン関数は次のようになる（導出は付録 F.2 参照）。

$$G_{\text{SCTMA}}^{\text{static}}(\mathbf{p}, i\omega_n) = -\frac{i\omega_n + \xi_{\mathbf{p}}^*}{\omega_n^2 + \xi_{\mathbf{p}}^{*2} + \tilde{\Delta}_{\text{PG}}^2(\mathbf{p}, i\omega_n)}. \quad (3.31)$$

ここで、 $\xi_{\mathbf{p}}^* = \varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu^*$  であり、有効化学ポテンシャル  $\mu^*$  [87, 107, 108] は次式で決定される。

$$-\mu^* = -\mu + \text{Re} [\Sigma_{\text{SCTMA}}(\mathbf{p} = \mathbf{0}, \omega_+ = -\mu^* + i\delta)]. \quad (3.32)$$

式 (3.31) は式 (3.11) と同じ形をしているが、 $\Delta_{\text{PG}}$  の部分が

$$\tilde{\Delta}_{\text{PG}}(\mathbf{p}, i\omega_n) = \Delta_{\text{PG}} \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{4\Delta_{\text{PG}}^2}{\omega_n^2 + \xi_{\mathbf{p}}^{*2}}}}}, \quad (3.33)$$

に置き換わっているため、SCTMA では、静的近似であってもギャップサイズ  $E_{\text{gap}}$  は Tan's contact とは直接は結びつかなくなる。実際式 (3.31) を用い状態密度を計算すると図 3.8 の破線のように BCS 理論のような完全なギャップではなく、V 字型の擬ギャップとなる。

## 3.4 自己無撞着 $T$ 行列近似 (SCTMA) による擬ギャップ領域の特定

現在 2 次元フェルミ原子気体の BKT 転移温度に対しては、超流動秩序パラメータの位相揺らぎのみを考慮した理論 [33–37] が用いられているが、これは「擬ギャップ」の視点からは、平均場 BCS 理論で得られるような明確なギャップが状態密度に開いている状況と言える。3.2 節で見たように TMA は低温でこの状況に合致した擬ギャップを  $T_{\text{BKT}}^{\text{th}}$  近傍で与えるが、Tan's contact に関する実験結果との比較から、少なくとも弱結合領域では擬ギャップが過大評価されていることが分かった。他方、SCTMA は弱結合領域において

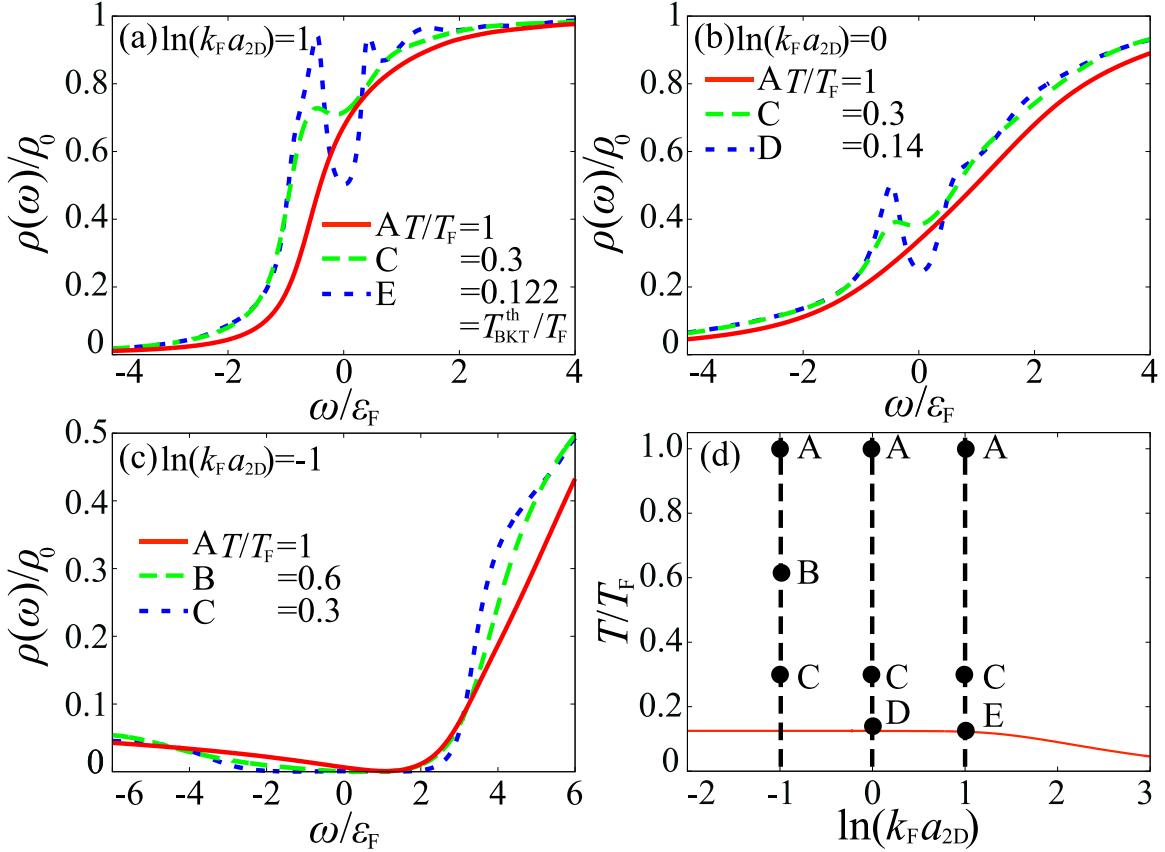


図 3.10 (a)～(c) SCTMA で計算された 1 粒子状態密度  $\rho(\omega)$  の温度依存性。(a) 弱結合領域  $\ln(k_F a_{2D}) = 1$ 、(b) 中間領域  $\ln(k_F a_{2D}) = 0$ 、(c) 強結合領域  $\ln(k_F a_{2D}) = -1$ 。(d) (a)～(c) での各温度を表した図。実線は位相揺らぎのみを考慮した BKT 理論で得られた BKT 転移温度  $T_{\text{BKT}}^{\text{th}}$  [33–37]。

て、TMA より小さな擬ギャップを与える、またその構造も  $\omega = 0$  近傍の状態密度の値も有限であった(図 3.8)。また、SCTMA で計算された Tan's contact  $C$  の値は実験結果とよく一致しており、この近似の場合  $C$  は直接的には擬ギャップサイズ  $E_{\text{gap}}$  と結びつけることはできないものの、擬ギャップの原因である対形成揺らぎが TMA に比べ、観測された  $C$  を説明できる程度に抑制されていることを示している。図 3.8 のような“完全なギャップではない”擬ギャップ構造が  $T_{\text{BKT}}^{\text{th}}$  近傍で実現している場合、「超流動秩序パラメータの振幅が十分発達して一定」となり、位相揺らぎのみが残っているとする現在の BKT 理論[33–37]はその前提が崩れることになる。そこで本節では、まず擬ギャップが現れる領域(擬ギャップ領域)を SCTMA の枠組みで特定、 $T_{\text{BKT}}^{\text{th}}$  がその領域内にあることを確認する。その上で、弱結合側の  $T_{\text{BKT}}^{\text{th}}$  近傍において、どの程度、既存の BKT 理論が前提とする状況が実現しているのかを明らかにする。

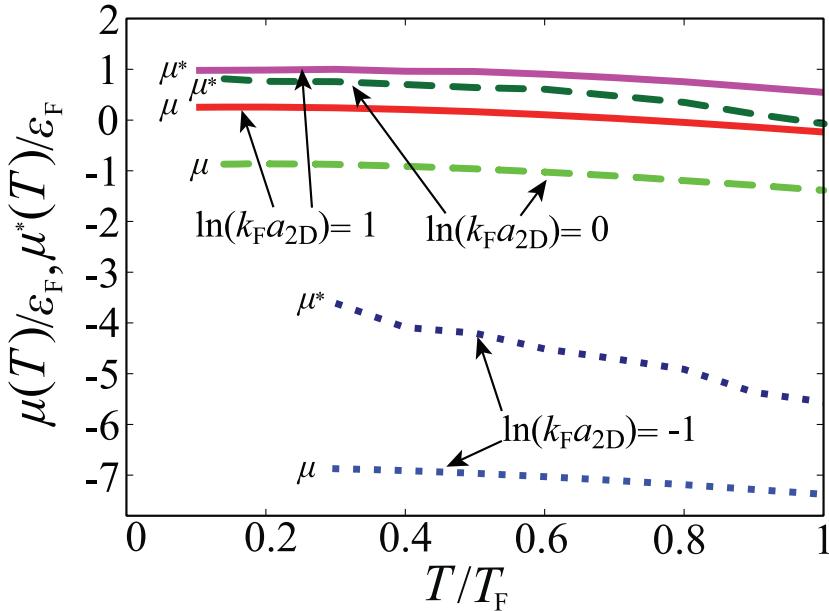


図 3.11 SCTMA で計算された化学ポテンシャル  $\mu$  と、式 (3.32) から決定された有効化学ポテンシャル  $\mu^*$  の温度依存性。

図 3.10 は SCTMA で計算された 1 粒子状態密度の温度依存性である。また、図 3.11 にはこの計算に必要な化学ポテンシャルの計算結果 (これは粒子数方程式 (3.25) を解いて得られる) を示している。図 3.10 (a) の弱結合領域  $\ln(k_F a_{2D}) = 1$  の場合、 $T/T_F = 1$  から温度を下げると、次第に  $\omega = 0$  近傍にくぼみ (擬ギャップ) が現れる。ただし、図 3.2 (a) に示す TMA の場合 ( $\ln(k_F a_{2D}) = 1$ ) とは大きく異なり、 $T_{\text{BKT}}^{\text{th}}$  でも完全なギャップは開かず、依然くぼみ ( $\omega = 0$  でも  $\rho(\omega) > 0$ ) 構造のままである。

図 3.10 (b) に示す中間結合領域 ( $\ln(k_F a_{2D}) = 0$ ) では、2 次元自由フェルミ原子気体の状態密度の特徴である階段構造 (図 3.1 参照) が  $T/T_F = 1$  でも図 3.10 (a) に示す弱結合領域  $\ln(k_F a_{2D}) = 1$  での結果に比べよりぼやけているが、これは強い引力相互作用により準粒子の寿命が短くなり、1 粒子励起スペクトルが幅広くなっていることの反映として考えられる。しかし、図 3.10 (b) の場合も温度を下げるにつれ擬ギャップ構造が  $\omega = 0$  近傍に見られるようになる。ただし、図 3.2 (b) に示す TMA の場合 ( $\ln(k_F a_{2D}) = 0$ ) に比べ、擬ギャップは小さい。ほぼ完全なギャップが開くのは図 3.10 (c) に示す強結合の場合 ( $\ln(k_F a_{2D}) = -1$ ) で TMA の場合 (図 3.2 (c)) 程大きなギャップサイズではないものの、 $T \lesssim 0.6T_F$  では、 $\rho(\omega) \simeq 0$  の領域が  $\omega = 0$  近傍に広がるようになる。

図 3.10 (a) において、擬ギャップが未だ現れていない  $T/T_F = 1$  の状態密度は相互作用の影響で全体的に連続的なエネルギー依存性を示しているものの、大体  $\omega/\epsilon_F \sim -0.5$  から大きな値となっている。これは自由フェルミ原子気体の結果 (図 3.1) と比較する

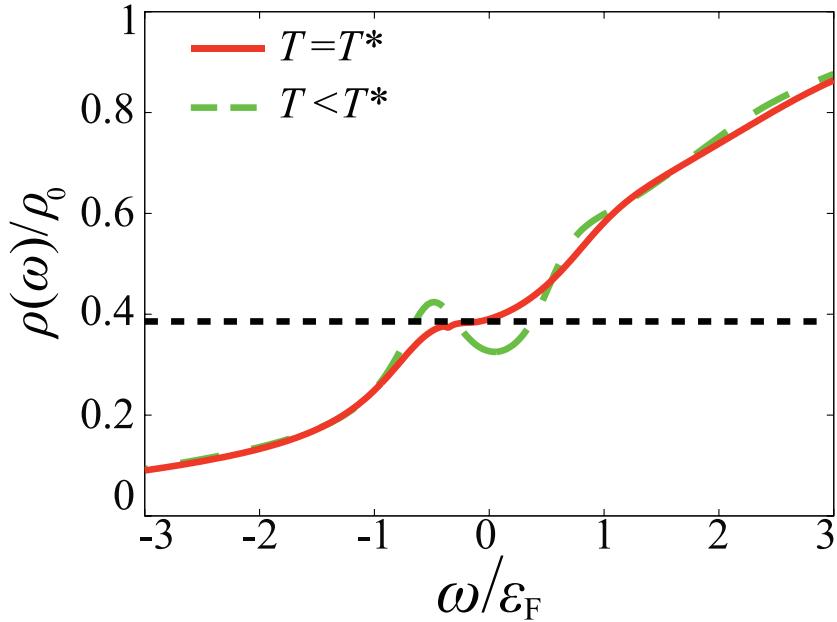


図 3.12 擬ギャップ温度  $T^*$  の決定方法。1 粒子状態密度において、 $\omega \sim 0$  近傍で図中の実線のようにくぼみ構造が現れ始める（平らな構造（点線はその平らな様子を表す））温度を擬ギャップ温度  $T^*$  と定義する。 $T < T^*$  では破線のように、くぼみ構造が現れる。

と  $\mu \simeq 0.5\epsilon_F$  のように考えられるが、一方、図 3.11 ( $\ln(k_{\text{F}}a_{2D}) = 1$ ) に示すように、 $T/T_F = 1$  で  $\mu$  は負である。この不一致の理由は、1 粒子励起スペクトル（式 (3.3) 中の  $\omega = \xi_p = \epsilon_p - \mu$ ）に現れる化学ポテンシャル  $\mu$  が引力相互作用の影響（自己エネルギー  $\Sigma_{\text{SCTMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n)$  の補正）により有効化学ポテンシャル  $\mu^*$ （式 (3.32)）に置き換わることによる。実際、図 3.11 ( $\ln(k_{\text{F}}a_{2D}) = 1$ ) に示すように、 $\mu^*(T/T_F = 1)/\epsilon_F \simeq 0.5 > 0$  となっている。これは中間結合領域の結果である図 3.10 (b) ( $\ln(k_{\text{F}}a_{2D}) = 0$ ) に対しても言えることで、図 3.11 からは  $\mu(T/T_F = 1)/\epsilon_F \simeq -1.4$  であり、単純に考えると  $2|\mu|$  程度のギャップがこの温度の 1 粒子励起スペクトルに期待されるが、粒子が感じる有効化学ポテンシャルは図 3.11 に示すように  $\mu^*(T/T_F = 1)/\epsilon_F \simeq 0$  であるため、図 3.10 (b) において  $T/T_F = 1$  の  $\rho(\omega)$  は  $\omega = 0$  付近に特別な構造を有さない単調増加関数となっている。

図 3.10 に示した 1 粒子状態密度  $\rho(\omega)$  の温度変化から、図 3.12 のように  $\omega = 0$  にくぼみ（擬ギャップ）が現れ始める温度を擬ギャップ温度  $T^*$  として定義、これを弱結合領域から強結合領域に至るまで SCTMA の枠組みで決める（図 3.13 のようになる）。この図にはそれ以外にもいくつかの特徴的な温度 ( $E_{\text{bind}}$ 、 $\mu^*(T) = 0$  を満たす温度)、及び実験 ( $T_{\text{BKT}}^{\text{exp}}$ )、理論 ( $T_{\text{BKT}}^{\text{th}}$ ) で決められた BKT 転移温度も併せてプロットしており、それに基づき相図を作成している。

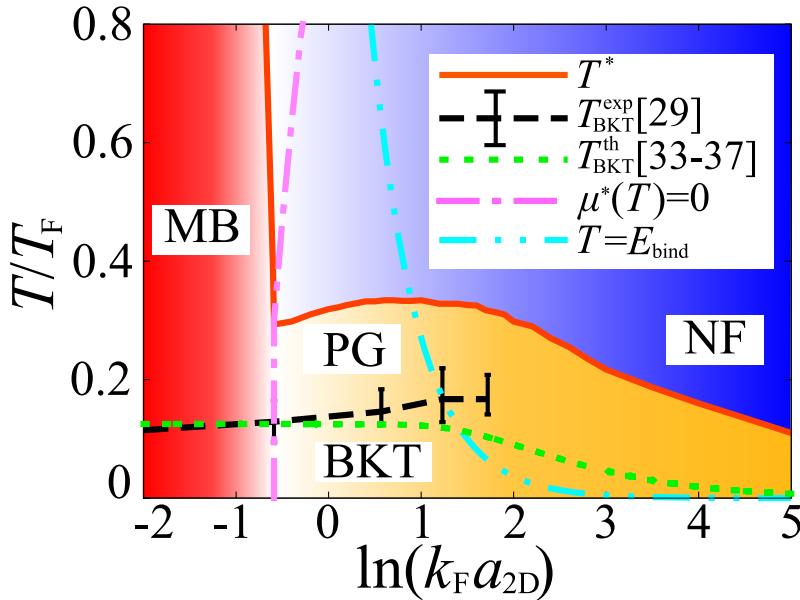


図 3.13 2 次元フェルミ原子気体における相図。実線は状態密度の  $\omega = 0$  近傍にくぼみ構造が現れる擬ギャップ温度  $T^*$ 。エラーバー付きの破線は実験で報告されている BKT 転移温度  $T_{\text{BKT}}^{\text{exp}}$  [29]。点線は超流動秩序パラメータの振幅は一定とし、位相揺らぎのみを考慮した理論で決定された BKT 転移温度  $T_{\text{BKT}}^{\text{th}}$  [33–37]。1 点鎖線は有効化学ポテンシャル  $\mu^*$  が 0 となる温度で、物理的にはフェルミ面が消失する温度を示す。2 点鎖線は 2 体分子の結合エネルギー  $E_{\text{bind}} = 1/(ma_{2D}^2)$  で、クーパー対分子が熱解離する温度の目安を与える。この相図において、 $T \leq T^*$  は擬ギャップが現れる擬ギャップ領域 (Pseudogap (PG))、 $T \geq T^*$  はそうした多体効果が見られない常流動フェルミ原子気体領域 (Normal Fermi gas (NF))。また、 $\mu^*(T) < 0$  (1 点鎖線左側) は強く結合した分子ボゾンでよく記述される領域 (Molecular Bose gas (MB)) である。本研究では BKT 転移温度は決定できないが、[33–37] で決定された  $T_{\text{BKT}}^{\text{th}}$  以下を BKT 相 (BKT) と書いている。なお、この  $T_{\text{BKT}}^{\text{th}}$  以外の境界は相転移を伴わないクロスオーバー温度である。

図 3.13において、 $T < T^*$  では、擬ギャップが状態密度に現れる。SCTMA では BKT 転移温度を決めるることはできないが、位相揺らぎのみを考慮した BKT 理論で得られている BKT 転移温度  $T_{\text{BKT}}^{\text{th}}$  を採用すると、 $T_{\text{BKT}}^{\text{th}} \leq T \leq T^*$  は正常相でありながら、強い引力相互作用に起因した対形成揺らぎにより、擬ギャップ構造が状態密度に現れる擬ギャップ領域 (PG) と考えることができる。 $T \leq T_{\text{BKT}}^{\text{th}}$  は BKT 相 (BKT) であり、 $T \geq T^*$  は相互作用効果はあるものの、擬ギャップは現れない通常のフェルミ原子気体 (NF) の領域である (ただし、 $T_{\text{BKT}}^{\text{th}}$  を与える理論の妥当性については後で議論する)。図 3.13 には有効化学ポテンシャル  $\mu^*$  が 0 となる温度も示されている (1 点鎖線) が、これより左の強結合側では  $\mu^* < 0$  であり、2 体レベルの分子が系を支配するようになる。実際強結合側

では2体分子の束縛エネルギー  $E_{\text{bind}}$  も急速に増大、かつ擬ギャップ温度  $T^*$  も急速に上昇するが、これはこの領域での  $T^*$  が2体分子の解離エネルギーと密接に関係していることの現れである。このことに留意し、図3.13では  $\mu^* < 0$  の領域を分子ボーズ気体領域(MB)としている。ただし、相転移を伴うBKT相以外、NF、PG、MBを分ける境界はあくまでもクロスオーバー温度である。

弱結合側の擬ギャップ温度  $T^*$  の相互作用依存性に着目する。図3.13において、弱結合領域( $\ln(k_F a_{2D}) \gg 1$ )から相互作用強度を強くすると、 $T^*$  は上昇する。これは、引力相互作用が強くなり、対形成揺らぎが顕著になることを反映したものと考えられる。しかし、 $0 \lesssim \ln(k_F a_{2D}) \lesssim 2$  では、対形成揺らぎはひき続きより強くなっていると考えられるにも関わらず、擬ギャップ温度  $T^*$  はほぼ一定値をとる。また、この領域では、図3.14(a)に示すように  $T^*$  だけでなく、擬ギャップサイズ  $E_{\text{gap}}$  もあまり大きな相互作用依存性を示さない。こうした結果は、引力相互作用の増大は擬ギャップ現象に必須の対形成揺らぎを増大させるものの、同時に準粒子の寿命も散乱効果の増大により短くするため、後者については擬ギャップ現象を“ぼかす”効果があることによるものと考えられる。実際、図3.14(b)において擬ギャップの構造のくぼみを無視すると、状態密度の構造は引力相互作用が強くなるにつれ、2次元自由フェルミ原子気体における階段関数的なものから、それが崩れた構造へと変化しており、1粒子励起スペクトルが次第に広がっている(短寿命化でなだらかになっていることを示唆している)。

図3.13において、 $T_{\text{BKT}}^{\text{th}}$ (そして  $T_{\text{BKT}}^{\text{exp}}$  も)は擬ギャップ領域(PG)内にある。従って、もし  $T_{\text{BKT}}^{\text{th}}$  近傍における1粒子状態密度がBCS状態密度のように「完全に開いたギャップ構造」を有していれば、そのギャップサイズを超流動秩序パラメータの振幅と考えることで、「超流動秩序パラメータの振幅は十分発達し、位相のみが揺らいでいる」という2次元フェルミ原子気体に対する従来のBKT理論の前提条件は正当化されるであろう。しかし、こうした仮定は図3.13における分子ボゾン領域(MB)では成り立つものの(図3.10(c)参照)、図3.10(a)、(b)から分かるように、中間結合から弱結合領域では成り立っていない。TMAでは弱結合極限でも大きなギャップ構造が得られるが、SCTMAでは図3.10(a)( $\ln(k_F a_{2D}) = 1$ )より弱結合側( $\ln(k_F a_{2D}) \geq 1$ )に行っても図3.15に示すように  $T_{\text{BKT}}^{\text{th}}$  における擬ギャップ構造は次第に小さくなっていく(弱結合極限では  $T_{\text{BKT}}^{\text{th}} \rightarrow 0$  となり[35]、その極限では自由フェルミ原子気体の状態密度に帰着すると期待されるため、図3.15の結果は物理的に妥当なものである)。

弱結合側で明確な1粒子励起ギャップが開かないという点は状態密度  $\rho(\omega)$  より詳細な1粒子励起の情報を含むスペクトル強度  $A(\mathbf{p}, \omega)$ (式(3.2))からも確認することができる(式(3.1)に示したように  $\rho(\omega)$  は  $A(\mathbf{p}, \omega)$  の運動量  $\mathbf{p}$  の和を実行することで得られる)。図3.16に示すように、低温における  $A(\mathbf{p}, \omega)$  は強結合領域(図3.16(c)の場合)以外、 $\omega = 0$ 付近に明確なギャップ構造は存在していない。式(3.11)で与えられるTMAにお

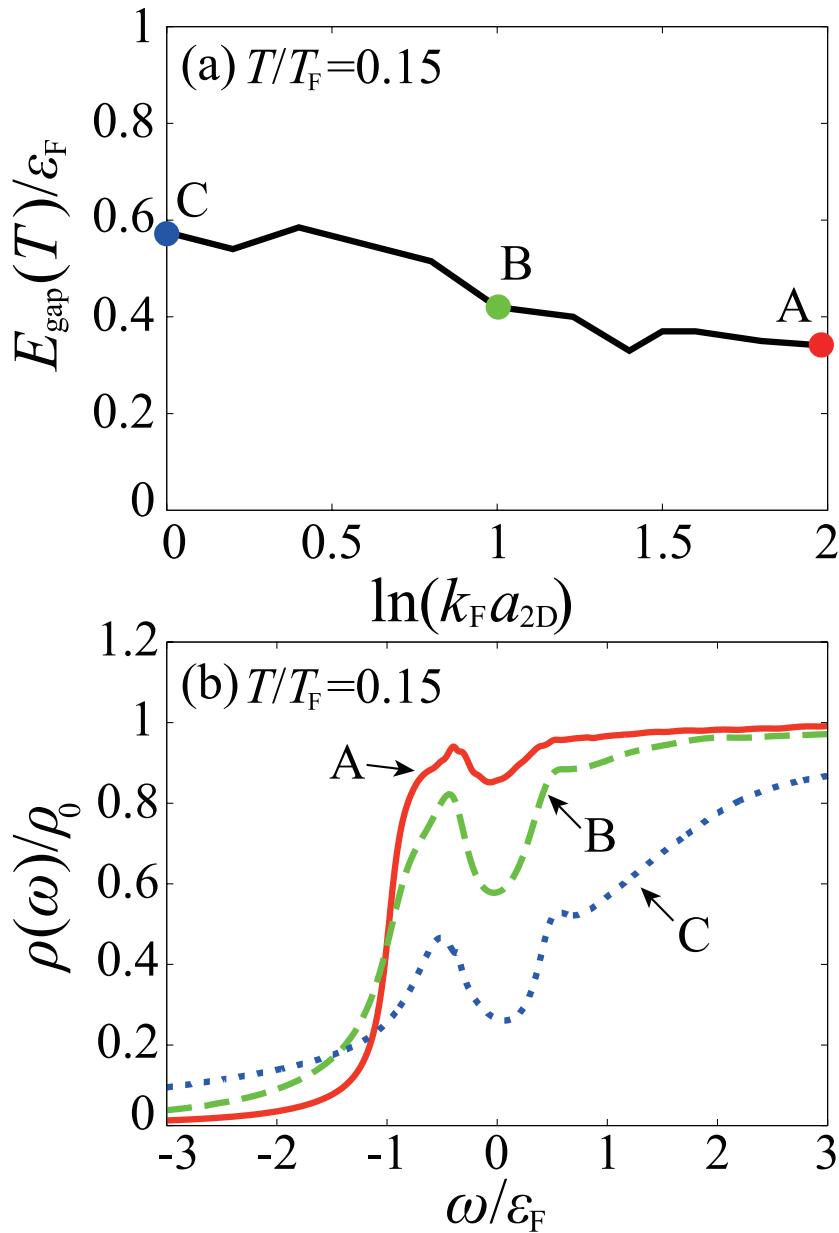


図 3.14 図 3.13 で  $T^*$  があまり相互作用依存性を示さない相互作用領域 ( $0 \lesssim \ln(k_F a_{2D}) \lesssim 2$ ) における (a) 擬ギャップサイズ  $E_{\text{gap}}$  と (b) 状態密度。(b) 中の A、B、C は (a) の相互作用強度  $\ln(k_F a_{2D}) = 2, 1, 0$  の状態密度の結果を表す。温度は  $T/T_F = 0.15$ 。

ける静的近似のグリーン関数 (あるいはこの式の  $\Delta_{\text{PG}}$  を超流動秩序パラメータ  $\Delta$  で置き換えて得られる平均場 BCS 理論のグリーン関数) を解析接続 ( $i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta$ ) したもの

$$G = \frac{1}{(\omega + i\delta - \xi_p) - \frac{\Delta_{\text{PG}}^2}{(\omega + i\delta + \xi_p)}}, \quad (3.34)$$

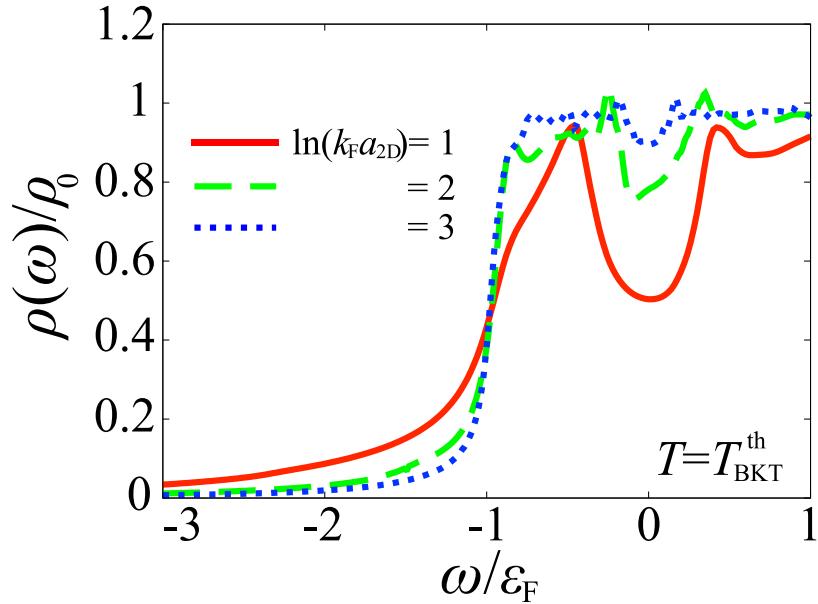


図 3.15 弱結合領域 ( $\ln(k_F a_{2D}) \geq 1$ ) における  $T_{BKT}^{\text{th}}$  での状態密度  $\rho(\omega)$  (SCTMA による計算)。

と書くと、状態密度に  $\Delta_{PG}$ (BCS 状態では  $\Delta$ ) のギャップが開く理由は  $\mu > 0$  の場合、粒子分散 ( $\omega = \xi_p$ ) と正孔分散 ( $\omega = -\xi_p$ ) が  $\Delta_{PG}^2$ (または  $\Delta$ ) により、 $(\omega, p) = (0, \sqrt{2m\mu})$  で結合、準位反発した結果と理解することができる。こうした粒子-正孔の結合は SCTMA の結果の図 3.16 (a)、(b) ( $\ln(k_F a_{2D}) = 1, 0$ ) の場合にも見て取れるが、実際には準粒子の寿命の効果により、それぞれの分散はかなり広がっており、 $\omega = 0$  での準位反発によるギャップも明確に見ることはできない(しかし、 $A(p, \omega)$  を  $\omega$  固定で  $p$  の和を実行することで得られる  $\rho(\omega)$  は、 $\omega = 0$  付近の擬ギャップによりその値が減少していることから、 $\omega = 0$  でのスペクトル強度の減少が反映されている)。他方で、式 (3.34) で  $\mu < 0$  の場合、粒子分散は  $\omega = \varepsilon_p + |\mu|$ 、正孔分散は  $\omega = -(\varepsilon_p + |\mu|)$  と完全に分離、 $2|\mu|$  のギャップが開く。図 3.16 の場合、これは (c) (強結合領域  $\ln(k_F a_{2D}) = -1$ ) において実現している(SCTMA では  $2|\mu^*|$  のギャップが開く)。

以上の結果から、 $T_{BKT}^{\text{th}}$  近傍で 1 粒子状態密度  $\rho(\omega)$  に擬ギャップは現れるものの、強結合領域以外では完全なギャップ構造となっておらず、超流動秩序パラメータという視点で見ると、位相揺らぎだけでなく振幅揺らぎも併せて重要であることが分かる。現時点での後者の効果まで取り入れ、2 次元フェルミ原子気体の弱結合領域から強結合領域までの BKT 転移を系統的に記述できる理論は存在せず、本研究の成果を取り入れ、位相揺らぎのみを考慮した現在の BKT 理論をどう拡張するかはフェルミ原子気体分野の発展において重要な課題である。

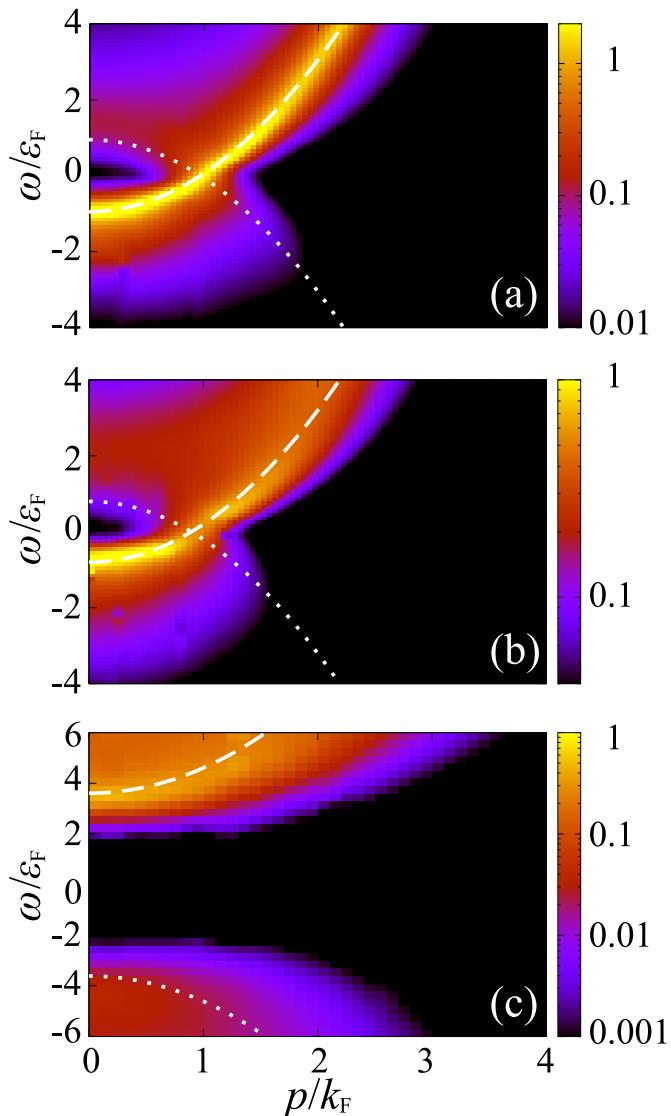


図 3.16 SCTMA で計算された 1 粒子励起スペクトル  $A(\mathbf{p}, \omega)$ 。(a)  $\ln(k_F a_{2D}) = 1$ 、  
 $T = 0.122 T_F = T_{BKT}^{\text{th}}$ 。(b)  $\ln(k_F a_{2D}) = 0$ 、 $T = 0.14 T_F$ 。(c)  $\ln(k_F a_{2D}) = -1$ 、  
 $T = 0.3 T_F$ 。破線は粒子分散  $\omega = \epsilon_{\mathbf{p}} - \mu^*$ 、点線は正孔分散 ( $\omega = -[\epsilon_{\mathbf{p}} - \mu^*]$ )。 $\mu^*$  は  
式 (3.32) の有効化学ポテンシャルであり、(a)、(b) では正、(c) では負となっている。  
スペクトル強度は  $\epsilon_F^{-1}$  で規格化している。

### 3.5 自己無撞着 $T$ 行列近似 (SCTMA) による熱力学量の計算 と実験との比較

前節では、弱結合領域における自己無撞着  $T$  行列近似 (SCTMA) の妥当性の根拠の 1 つとして、 $\ln(k_F a_{2D}) = 0.853$ 、 $T/T_F = 0.27$  において、 ${}^{40}\text{K}$  2 次元フェルミ原子気体で

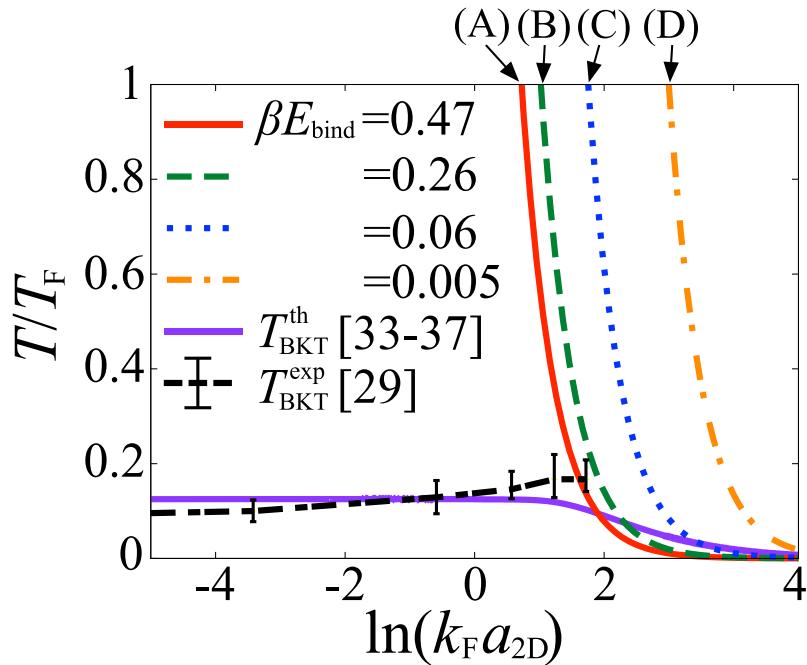


図 3.17  ${}^6\text{Li}$  2次元フェルミ原子気体で熱力学量が観測された温度、相互作用領域 [31, 32]。(A)  $\beta E_{\text{bind}} = 0.47$ 、(B)  $\beta E_{\text{bind}} = 0.26$ 、(C)  $\beta E_{\text{bind}} = 0.06$ 、(D)  $\beta E_{\text{bind}} = 0.005$ 。この実験では、 $\ln(k_F a_{2D}) \gtrsim 1$  の図中の 4 本の線 (A)~(D) に沿って、化学ポテンシャル  $\mu$ 、圧力  $P$ 、内部エネルギー  $E$ 、エントロピー  $S$  が測定されている。参考のため、文献 [33–37] で理論的に得られた  $T_{\text{BKT}}^{\text{th}}$ 、及び、文献 [29] で報告されている  $T_{\text{BKT}}^{\text{exp}}$  も図中に示している。

測定された Tan's contact [24] の強結合理論による計算結果との良い一致を挙げた。本節では、 ${}^6\text{Li}$  2次元フェルミ原子気体に対し、図 3.17 に示した弱結合領域  $\ln(k_F a_{2D}) \gtrsim 1$  の 4 本の線 (A)~(D) ( $\beta E_{\text{bind}} = 0.47, 0.26, 0.06, 0.005$ ) に沿って近年測定された熱力学量 (化学ポテンシャル  $\mu$ 、内部エネルギー  $E$ 、圧力  $P$ 、エントロピー  $S$ ) [31, 32] を SCTMA による計算結果と比較、弱結合領域におけるこの理論の妥当性についてさらなる検討を加える。

文献 [31, 32] で測定された熱力学量のうち、化学ポテンシャル  $\mu$  は粒子数方程式 (3.25) を解くことで得られ、前節で議論した状態密度  $\rho(\omega)$  やスペクトル強度  $A(\mathbf{p}, \omega)$  の計算の際にすでに用いられている。図 3.18 は弱結合領域  $\ln(k_F a_{2D}) \gtrsim 1$  (4 本の線 (A)~(D) (図 3.17)) における SCTMA で計算された化学ポテンシャルと  ${}^6\text{Li}$  2次元フェルミ原子気体での実験結果 [32](エラーバーつきの短い縦線) を比較しているが、 $\beta E_{\text{bind}} = 0.26$  の低温での結果に若干両者の差が見られるものの、それ以外については SCTMA の結果は実験をよく説明していることが分かる。

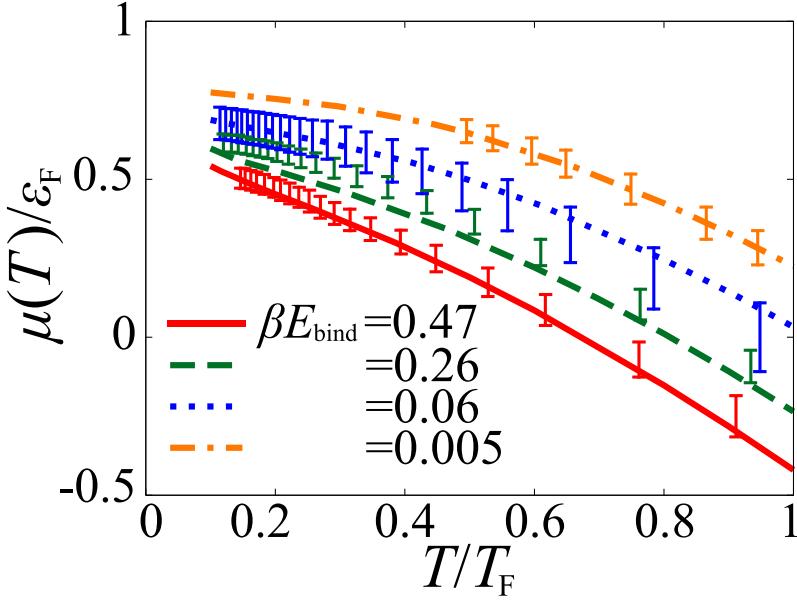


図 3.18 SCTMA で計算された化学ポテンシャル  $\mu(T)$  と  ${}^6\text{Li}$  2 次元フェルミ原子気体での実験結果 [32] との比較。 $\beta E_{\text{bind}} = 0.47, 0.26, 0.06, 0.005$  の 4 本の線は図 3.17 に示した曲線 (4 本の線 (A)~(D)) に沿った結果 (弱結合領域  $\ln(k_F a_{2D}) \gtrsim 1$ ) であり、短い縦線が誤差を含む実験結果である。理論、実験それぞれ同じ色同士が対応している。SCTMA の計算は  $0.1T_{\text{F}} \leq T \leq T_{\text{F}}$  で行っている。

化学ポテンシャル  $\mu$  が決まると、SCTMA では、熱力学ポテンシャル (グランドポテンシャル)  $\Omega$  が計算できる [52, 106]。この時、熱力学ポテンシャルは

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_{\text{FL}}, \quad (3.35)$$

と書け、

$$\Omega_0 = -2T \sum_{\mathbf{p}, i\omega_n} \ln [-G_0(\mathbf{p}, i\omega_n)] = -2T \sum_{\mathbf{p}} \ln (1 + e^{-\beta \xi_{\mathbf{p}}}), \quad (3.36)$$

は自由フェルミ原子気体の熱力学ポテンシャル、

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{FL}} = & 2T \sum_{\mathbf{p}, i\omega_n} [\ln (G_0^{-1}(\mathbf{p}, i\omega_n) G(\mathbf{p}, i\omega_n)) - [G_0^{-1}(\mathbf{p}, i\omega_n) G(\mathbf{p}, i\omega_n) - 1]] \\ & - T \sum_{\mathbf{Q}, i\nu_m} \ln [-U^{-1} \Gamma(\mathbf{Q}, i\nu_m)], \end{aligned} \quad (3.37)$$

は相互作用による補正項を表す。また、熱力学ポテンシャル  $\Omega$  は

$$\begin{aligned} \Omega = & -P \\ = & E - TS - \mu N, \end{aligned} \quad (3.38)$$

のように、内部エネルギー  $E$  や圧力  $P$ 、エントロピー  $S$  と関係している（序論に述べたように、ここでは体積  $V = 1$  としている）。ここで内部エネルギーは式(2.1)のハミルトニアン（ただし化学ポテンシャルの項を除く）の期待値から計算され、SCTMA の枠組みでは次のような式で与えられる [52, 106]。

$$\begin{aligned} E = \langle H + \mu N \rangle &= 2T \sum_{\mathbf{p}, i\omega_n} \varepsilon_{\mathbf{p}} G(\mathbf{p}, i\omega_n) \\ &\quad - UT \sum_{\mathbf{Q}, i\nu_m} [\Pi(\mathbf{Q}, i\nu_m) - \Pi(\mathbf{Q}, i\nu_m)\Gamma(\mathbf{Q}, i\nu_m)\Pi(\mathbf{Q}, i\nu_m)]. \end{aligned} \quad (3.39)$$

前節の議論で登場した Tan's contact  $C$  は熱力学ポテンシャル  $\Omega$  と

$$C = 2\pi m \frac{\partial \Omega}{\partial \ln a_{2D}} \Big|_{T,\mu} = 2\pi m \frac{\partial F}{\partial \ln a_{2D}} \Big|_{T,N} = 2\pi m \frac{\partial E}{\partial \ln a_{2D}} \Big|_{S,N}, \quad (3.40)$$

のように関係している [41, 75, 93]。ここで、 $F = E - TS$  はヘルムホルツの自由エネルギーである。SCTMA では、式(3.40)は式(3.27)と等価である（付録 H 参照）。さらに、SCTMA では式(3.40)を満たすため、Tan の圧力関係式

$$P = E + \frac{C}{4\pi m}, \quad (3.41)$$

を厳密に満たす [96]。すると、式(3.38)、(3.41)から、エントロピー  $S$  が次のように得られる。

$$S = \beta \left[ 2E + \frac{C}{4\pi m} - \mu N \right]. \quad (3.42)$$

式(3.41)、(3.42)を用いると、化学ポテンシャル  $\mu$  が決まつていれば、4つの熱力学量  $E$ 、 $C$ 、 $P$ 、 $S$  のうち2つさえ分かれば残り2つを求めることができる。SCTMA は近似理論ではあるが、式(3.35)の熱力学ポテンシャルの表式や、Tan の圧力関係式(3.41)が厳密に成立するという利点がある。なお、文献[31, 32]の実験でも弱結合領域  $\ln(k_F a_{2D}) \gtrsim 1$  の4本の線(A)～(D)(図3.17)に沿って、圧力  $P$  とヘルムホルツの自由エネルギー  $F$  を測定、式(3.40)を用い Tan's contact  $C$  を得ている（ただし、これらの文献では  $C$  の具体的結果は示されていない）。そして、残り2つの内部エネルギー  $E$  とエントロピー  $S$  を式(3.41)、(3.42)から得ている。

以下では、4つの熱力学量のうち、内部エネルギー  $E$  と Tan's contact  $C$  をそれぞれ式(3.39)、(3.27)から求める。そして、式(3.41)、(3.42)を用い、圧力  $P$ 、エントロピー  $S$  を求める。

上述の手順に従い、まず第1段階として計算された内部エネルギー  $E$  と Tan's contact  $C$  の結果を図3.19、図3.20に示す。図3.19には自由フェルミ原子気体の場合の内部エネルギーも併せ示してあるが、考えている系が引力相互作用系であることから、相互作用が

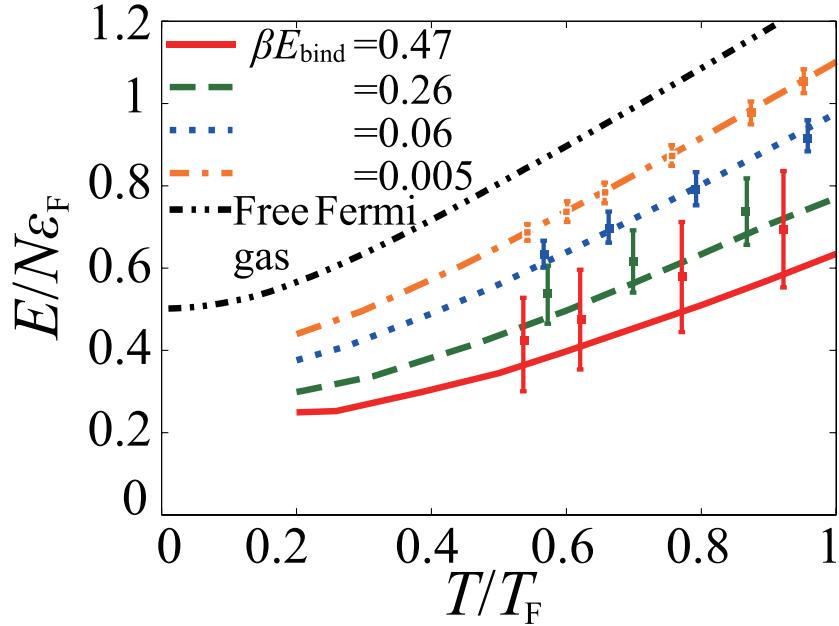


図 3.19 図 3.17 に示された 4 本の線 (A)~(D) (弱結合領域  $\ln(k_{\text{F}}a_{2\text{D}}) \gtrsim 1$ ) に沿って SCTMA で計算された 2 次元フェルミ原子気体の内部エネルギー  $E$ 。計算は  $0.2T_{\text{F}} \leq T \leq T_{\text{F}}$  の範囲で行っている。また参考のため、2 次元自由フェルミ原子気体の結果も示している (Free Fermi gas)。文献 [31] の実験結果はエラーバーを含む短い縦線で示されており、同じ色同士がそれぞれ比較すべき理論、実験の結果である。

ある場合の結果はそれより低エネルギーのものとなっている。また、<sup>6</sup>Li 2 次元フェルミ原子気体での実験結果 [31] も図 3.19 には示しているが、SCTMA の結果は実験とよく一致していることが分かる。(文献 [31,32] には Tan's contact の実験データが示されていないので、図 3.20 では実験との比較は示されていない。)

次に、第 2 段階として、図 3.19、図 3.20 の結果から、式 (3.41)、(3.42) を用い、圧力  $P$  とエントロピー  $S$  を計算した結果を図 3.21 と図 3.22 にそれぞれ示す。引力相互作用系であることを反映し、計算された圧力  $P$  は自由フェルミ原子気体に比べ小さくなる(図 3.21 (a))。また、これを文献 [31] での実験結果と比較できるようにスケールすると、弱結合領域  $\ln(k_{\text{F}}a_{2\text{D}}) \gtrsim 1$  の (A)~(D) の線上(図 3.17) の結果いずれも誤差の範囲内で SCTMA の計算結果と実験結果はよく一致する(図 3.21 (b))。図 3.22 (a) に示すエントロピーは図 3.17 に示した (A)~(D) ( $\ln(k_{\text{F}}a_{2\text{D}}) \gtrsim 1$ ) のいずれの場合もほぼ同じ結果を与えることが分かる。この “ $\beta E_{\text{bind}}$  依存性” は  $E$  や  $C$ 、 $P$  とは異なるが、 $S$  についてもやはり実験結果をよく再現することが図 3.22 (b) から見て取れる。

以上の結果から、SCTMA は弱結合領域  $\ln(k_{\text{F}}a_{2\text{D}}) \gtrsim 1$  (図 3.17 中の 4 本の線 (A)~(D)) での熱力学量  $\mu$ 、 $E$ 、 $P$ 、 $S$  を定量的に正しく記述できることが分かる。前述したように  $(E, C, P, S)$  は式 (3.41)、(3.42) で関係しているので、このうち 2 つが実験をよ

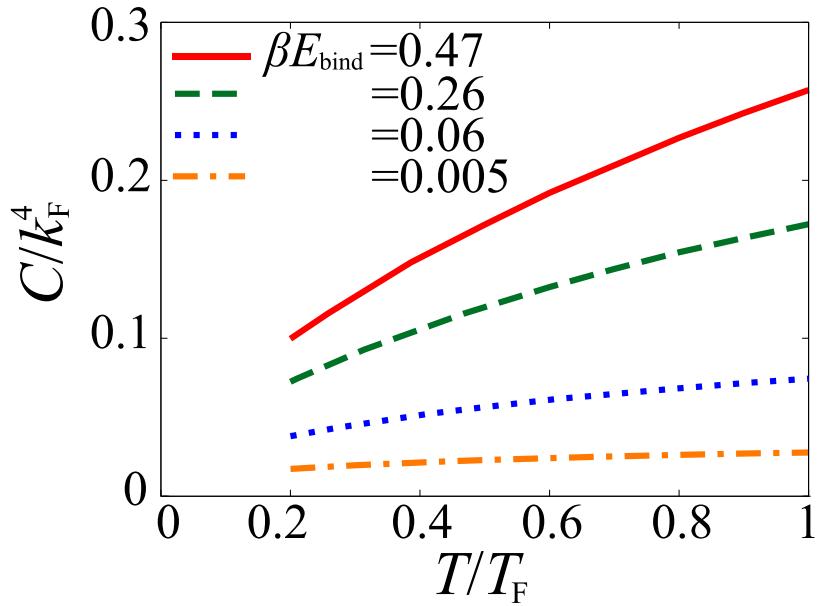


図 3.20 図 3.17 に示された 4 本の線 (A)~(D) (弱結合領域  $\ln(k_F a_{2D}) \gtrsim 1$ ) に沿って SCTMA で計算された Tan's contact  $C$ 。計算は  $0.2T_F \leq T \leq T_F$  の範囲で行って いる。

く説明できれば、残り 2 つの物理量に対しても計算の正しさが保証される。文献 [31, 32] では  $C$  に関するデータが示されていないが、上述したように、 $E$ 、 $P$ 、 $S$  に関し、SCTMA の計算結果は実験結果とよく一致していることから、 $C$  に対しても正しい結果を与えて いる。以上を踏まえると、2 次元フェルミ原子気体の弱結合領域から中間結合領域にかけての多体现象を理論的に研究する上で、SCTMA はよい出発点になる。

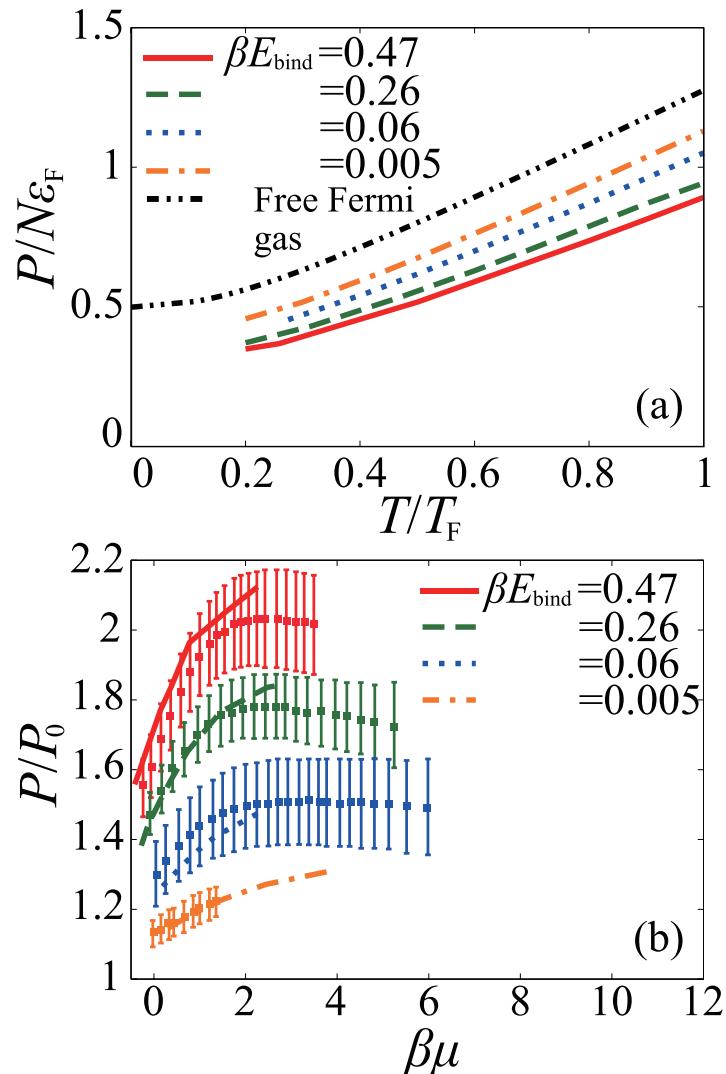


図 3.21 (a) 図 3.17 に示された 4 本の線 (A)~(D) (弱結合領域  $\ln(k_{\text{F}}a_{2\text{D}}) \gtrsim 1$ ) に沿って SCTMA で計算された圧力  $P$  の温度依存性。Free Fermi gas は自由フェルミ原子気体の圧力。(b) (a) に示した SCTMA での計算結果と  ${}^6\text{Li}$  2 次元フェルミ原子気体の実験結果 [31] との比較。横軸は  $\beta\mu$ 、縦軸は、各温度、化学ポテンシャルを自由フェルミ原子気体の圧力の式に代入した値  $P_0 = -mT^2\text{Li}_2(-e^{\beta\mu})/(2\pi)$  [109] で規格化している。ここで、 $\text{Li}_2(x)$  はポリログ関数。

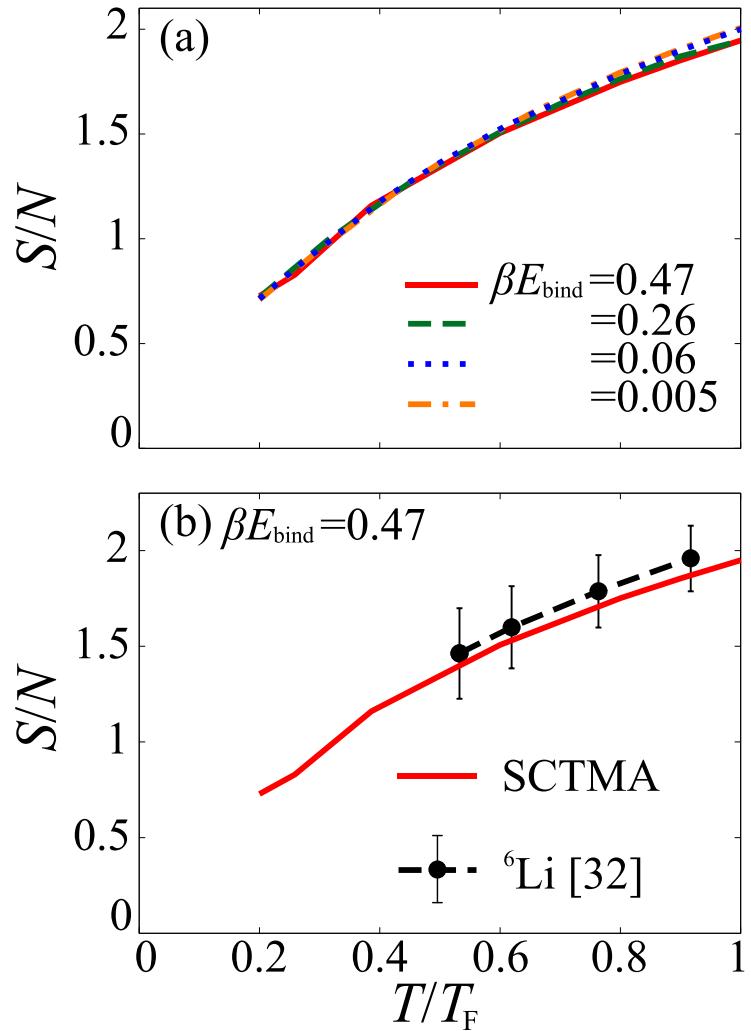


図 3.22 (a) 図 3.17 に示された 4 本の線 (A)~(D) (弱結合領域  $\ln(k_{\text{F}}a_{2\text{D}}) \gtrsim 1$ ) に沿って SCTMA で計算されたエントロピー  $S$  の温度依存性。(b)  $\beta E_{\text{bind}} = 0.47$  で計算された SCTMA の結果と観測されたエントロピー [32](エラーバーを含む破線)との比較。ここでは、実験、理論ともに相互作用依存性が顕著ではないため(実験は図 1.20 (b) 参照)、 $\beta E_{\text{bind}} = 0.47$  に着目し、実験との比較を行っている。エントロピー  $S$  は式 (3.42) 中に温度の逆数を含み、低温領域では誤差が大きくなるため、低温程高精度の計算が必要となる。

## 第4章

### まとめ

本博士論文では、可変な引力相互作用を有する2次元極低温フェルミ原子気体における対形成揺らぎの効果を理論的に研究した。近年 Berezinskii-Kosterlitz-Thouless (BKT) 転移を観測したとする実験の検証、及び、超流動秩序パラメータの位相揺らぎのみを考慮した2次元フェルミ原子気体に対するBKT理論の妥当性を擬ギャップ現象の視点から行った。

本論文前半では、<sup>6</sup>Li 2次元フェルミ原子気体でBKT転移を観測したとする報告について、その根拠となっている実験結果が全て対形成揺らぎの効果を考慮した強結合理論によりBKT転移を仮定せずに定量的に説明できることを示した。すなわち、実験は(1)クーパー対の重心運動量0の分布のある温度( $T_{\text{BKT}}^{\exp}$ )以下の急増(2)  $T_{\text{BKT}}^{\exp}$ 近傍でのBKT転移に特徴的なクーパー対の1次相関関数の幕的振る舞いの観測、をBKT転移実現の根拠としているが、本研究では、BKT転移を仮定せず、常流動相の対形成揺らぎのみを考慮した非自己無撞着  $T$  行列近似(TMA)の枠組みで考慮することでこれら2つの現象を理論的に再現できることを示した。この結果は、現在得られている実験結果だけではBKT転移の根拠とはならず、本当にこの超流動転移が実現しているかを検証するにはさらなる実験が必要であることを示している。

本論文の後半では、2次元フェルミ原子気体に対する従来のBKT理論では考慮されていない“超流動秩序パラメータの振幅揺らぎ”的重要性を擬ギャップ現象の視点から研究した。弱結合領域の1粒子励起を記述する上では不十分なTMAを改善できる自己無撞着  $T$  行列近似(SCTMA)を用い、対形成揺らぎの発達により1粒子状態密度に擬ギャップが現れ始める温度(擬ギャップ温度)を弱結合領域から強結合領域まで明らかにした。この結果から、擬ギャップが現れる領域(擬ギャップ領域)を温度と相互作用強度に関する相図上で特定した。超流動秩序パラメータの振幅は十分発達、その揺らぎはないし、位相揺らぎのみが存在していると仮定している従来のBKT理論で計算されたBKT転移温度 $T_{\text{BKT}}^{\text{th}}$ 付近での擬ギャップ構造が、実際には弱結合領域で完全なギャップとはなってお

らず、 $\omega = 0$  での有限な値を持ったくぼみ構造となっていることを明らかにした。この結果は、この相互作用領域では振幅揺らぎも重要であり、現在の BKT 理論はこの点を改善する必要があることを示している。本論文ではさらに、ここで用いた SCTMA の妥当性を検証するため、近年  ${}^6\text{Li}$  2次元フェルミ原子気体で観測された熱力学量をこの理論を用い計算、実験結果との比較を行った。化学ポテンシャル、圧力、内部エネルギー、Tan's contact、エントロピーいずれも理論と実験との一致はよく、擬ギャップについては現在比較できる実験はないため検証できないものの、この系に対する SCTMA の有効性を示した。

本論文で用いた強結合理論 (TMA, SCTMA) は現時点で BKT 転移を記述できない。本論文の成果により、従来の BKT 理論では無視されていた対形成揺らぎの効果が BKT 転移近傍で重要であることが明らかになったため、BKT 転移を扱えるようこれらの理論を拡張することは重要課題の 1 つである。2次元フェルミ原子気体の対形成揺らぎの効果を明らかにすることは、銅酸化物高温超伝導体や励起子ポラリトン系などの 2 次元強相関系の量子多体物性を理解する上では非常に重要であり、本研究の結果は当該研究分野の実験、理論の今後の方向性に指針を与え、さらなる発展を促すもので重要である。

## 謝辞

本研究を行うにあたり、指導教員の大橋洋士教授には、学部4年での卒業研究以来、修士課程、博士課程の計6年間にわたり、多くのご指導をいただきました。研究を行う上での専門知識だけでなく、研究に対する姿勢や、研究の進め方を学ぶことができました。また、自身の研究内容を論文や学会発表でいかに伝えるかを熱心なご指導により身につけることができました。私の研究成果を博士論文の形でまとめることができたのも、先生のご指導の賜物です。

本学位論文の副査を引き受けさせていただいた、物理学専修の藤谷洋平教授、関口康爾専任講師、物理情報専修の神原陽一准教授には、大変有意義な助言をいただき、感謝いたします。

慶應義塾大学 KiPAS 研究員専任講師の猪谷太輔氏には、研究活動に関する様々なご指導をいただきました。大橋研究室に PD 研究員として在籍されていた遠藤有希氏には研究活動に関するご指導をいただきました。学術振興会特別研究員の花井亮氏には、研究の進め方、研究に関する議論、研究発表に対するたくさんのご意見をいただきました。学術振興会特別研究員の田島裕之氏、物質構造科学研究所 放射光科学第一研究系研究員の山口辰威氏には、研究の進め方や数値計算の基礎を教えていただきました。ここに感謝の意を表します。

大橋研究室の先輩の Digvijay Kharga 氏、馬嶋良氏、同期の Pieter van Wyk 氏、後輩の Soumita Mondal 氏、鏡原大地氏、太田幹氏、武藤悠輔氏、佐藤龍平氏、真辺幸喜氏から、ゼミや研究室での生活など様々な場面で多くの刺激をもらいました。物理学専修理論研究室の高野宏教授、江藤幹雄教授、山内淳准教授、山本直希准教授、古池達彦専任講師、光武亜代理専任講師、檜垣徹太郎専任講師には、授業やティーチングアシスタント等で大変お世話になり、理論研コロキウムでは貴重なご意見をいただきました。物理学科の同期の理論研究室の川久保龍一郎氏、名取慧氏、横倉諒氏や中迫研究室の小林周氏、白浜研究室の巻内崇彦氏らのおかげで素晴らしい学生生活を送ることができました。ここに感謝の意を表します。

最後に、著者の学生生活を応援し支え続けてくれた、家族をはじめ全ての方々に心から

感謝を表します。

## 付録 A

# 2次元フェルミ原子気体における クーパー対相関関数 $C_{2D}(\mathbf{r})$ の表式 (1.10) の導出

ここでは式 (1.10) で与えられる 2 次元系におけるクーパー対相関関数の表式の導出を説明する。超流動秩序パラメータ

$$\Delta(\mathbf{r}) = \langle \Psi(\mathbf{r}) \rangle, \quad (\text{A.1})$$

を振幅部分  $\Delta_0$  と位相部分  $\theta(\mathbf{r})$  に分け、次のように表す。

$$\Delta(\mathbf{r}) = \Delta_0 e^{i\theta(\mathbf{r})}. \quad (\text{A.2})$$

ここで、 $\Psi(\mathbf{r})$  はクーパー対の場の演算子であり、式 (A.2) では振幅  $\Delta_0$ (実数) の空間依存性はないとした。

クーパー対の相関関数

$$C_{2D}(\mathbf{r}) = \langle \Psi(\mathbf{r})^\dagger \Psi(\mathbf{0}) \rangle \quad (\text{A.3})$$

を計算するために、Ginzburg-Landau(GL) 理論の自由エネルギー  $F$  を考える。秩序パラメータの振幅部分  $\Delta_0$  は空間的に一定であるとし、位相部分  $\theta(\mathbf{r})$  のみが空間依存性を有するとすると、GL 理論の方は

$$F = \int d^2\mathbf{r} \left[ a_0 \Delta_0^2 + \frac{b_0}{2} \Delta_0^4 + c_0 \Delta_0^2 |\nabla \theta(\mathbf{r})|^2 \right], \quad (\text{A.4})$$

となる。式 (A.3) を評価する際、重要なのは式 (A.4) の最終項のみなのでその部分を抜き出し、 $J = 2c_0 \Delta_0^2$  とおき、相関関数の寄与で重要な位相揺らぎの自由エネルギー  $F_{FL}$  は

$$F_{FL} = \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{r} J |\nabla \theta(\mathbf{r})|^2, \quad (\text{A.5})$$

## 86付録 A 2次元フェルミ原子気体におけるクーパー対相関関数 $C_{2D}(\mathbf{r})$ の表式 (1.10) の導出

と書く。位相  $\theta(\mathbf{r})$  を

$$\theta(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} \theta_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}, \quad (\text{A.6})$$

とフーリエ変換すると、自由エネルギーの“位相揺らぎ部分”  $F_{FL}$  (式 (A.5)) は

$$F_{FL} = \frac{J}{2} \sum_{\mathbf{q}} q^2 \theta_{\mathbf{q}} \theta_{\mathbf{q}}^*. \quad (\text{A.7})$$

式 (A.7) の  $F_{FL}$  を用いて、式 (A.3) で与えられるようなクーパー対の相関関数  $C_{2D}(\mathbf{r})$  を評価すると、

$$\begin{aligned} C_{2D}(\mathbf{r}) &= \Delta_0^2 \langle e^{-i[\theta(\mathbf{r}) - \theta(\mathbf{0})]} \rangle_{FL} \\ &= \Delta_0^2 \langle e^{-i \sum_{\mathbf{q}} \theta_{\mathbf{q}} (e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} - 1)} \rangle_{FL} \\ &= \Delta_0^2 \frac{\prod_{\mathbf{q}'} \int d\theta_{\mathbf{q}'} d\theta_{\mathbf{q}'}^* e^{-i \sum_{\mathbf{q}} (e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} - 1) \theta_{\mathbf{q}}} e^{-\beta F_{FL}}}{\prod_{\mathbf{q}'} \int d\theta_{\mathbf{q}'} d\theta_{\mathbf{q}'}^* e^{-\beta F_{FL}}}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

この積分は  $\theta_{\mathbf{q}}$  を実部と虚部に分けることでそれぞれガウス積分で実行できる。その際、 $\theta_{-\mathbf{q}} = \theta_{\mathbf{q}}^*$  であることに注意すると、結果は

$$C_{2D}(\mathbf{r}) = \Delta_0^2 \exp \left[ - \sum_{\mathbf{q}} \frac{k_B T}{J q^2} [1 - \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})] \right]. \quad (\text{A.9})$$

式 (A.9) の指数関数部分は次のように評価できる。

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{q}} \frac{T}{J q^2} [1 - \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})] &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{T}{J} \int \frac{dq}{q} \int_0^{2\pi} d\phi [1 - \cos(qr \cos \phi)] \\ &\simeq \frac{1}{2\pi} \frac{T}{J} \int_{r^{-1}} \frac{dq}{q}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

ここで、2行目では、 $qr < 1$  では  $\cos(qr \cos \phi) \simeq 1$  とし、 $q$  積分の下限を  $r^{-1}$  としている。また、 $qr \gg 1$  では  $\cos(qr \cos \phi)$  は激しく振動するので、積分への寄与はないものとした。式 (A.10) は  $q$  積分が紫外発散するのでカットオフ  $r_c^{-1}$  を導入して、

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{q}} \frac{T}{J q^2} [1 - \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})] &= \frac{T}{2\pi J} \int_{r^{-1}}^{r_c^{-1}} \frac{dq}{q} \\ &= -\frac{T}{2\pi J} \ln \left( \frac{r_c}{r} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

この結果を式 (A.9) に代入すると

$$\begin{aligned} C_{2D}(\mathbf{r}) &= \exp \left[ \frac{k_B T}{2\pi J} \ln \left( \frac{r_c}{r} \right) \right] = \frac{r_c^{\frac{k_B T}{2\pi J}}}{r} \\ &= \frac{A}{r^\eta}, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

となり、式 (1.10) が得られる (式 (1.10) 中では  $\eta = M^2 k_B T / (2\pi \hbar^2 \rho_s)$ 、 $A = \alpha$  である)。

## 付録 B

# 2次元フェルミ原子気体のトラップ 周波数に対する条件式 (1.19) の導出

ここでは、実験で系が十分2次元的であるための条件式(1.19)を導出する。式(1.18)のような調和ポテンシャルを量子化したエネルギー $E_{\text{2Dtrap}}$ は

$$E_{\text{2Dtrap}} = \left(n_x + \frac{1}{2}\right)\omega_r + \left(n_y + \frac{1}{2}\right)\omega_r + \left(n_z + \frac{1}{2}\right)\omega_z, \quad (\text{B.1})$$

となる。ここで、 $n_x, n_y, n_z$  は  $x, y, z$  方向の量子数 ( $n_\alpha = 0, 1, 2, \dots$  ( $\alpha = x, y, z$ )))、 $\omega_r, \omega_z$  はトラップ周波数である ( $\hbar = 1$  としている)。フェルミ原子気体は2原子状態を擬スピン  $\sigma = \uparrow, \downarrow$ とした際に、各量子数  $n_\alpha$  に2原子まで占有できる。 $\omega_r \ll \omega_z$  の場合、2次元方向の量子数 ( $n_x, n_y$ ) が優先的に占有される。

$z$  方向の量子数の占有はなく、 $xy$  方向の量子数に限り占有される状況を考える(簡単のため、擬スピン状態のうち、1つの状態 ( $\sigma = \uparrow$ ) に着目する)。 $xy$  方向のエネルギーとして、図 B.1 の水色の部分 ( $n_x, n_y$  の最大量子数は  $n_r$ ) までの量子数が占有された場合、擬スピン状態  $\sigma = \uparrow$  のフェルミ原子数  $N_\uparrow$  (全フェルミ原子数  $N$  とすると、 $N = N_\uparrow + N_\downarrow$ 、 $N_\uparrow = N_\downarrow = N/2$ ) は図 B.1 の水色部分の原子数  $\pi n_r^2/4$  と一致する。このとき、 $n_r$  は

$$n_r = 2\sqrt{\frac{N_\uparrow}{\pi}}. \quad (\text{B.2})$$

$z$  方向のエネルギーが占有されない状況 ( $n_z < 1$ ) は、 $n_r$  においても

$$n_r \omega_r < \omega_z, \quad (\text{B.3})$$

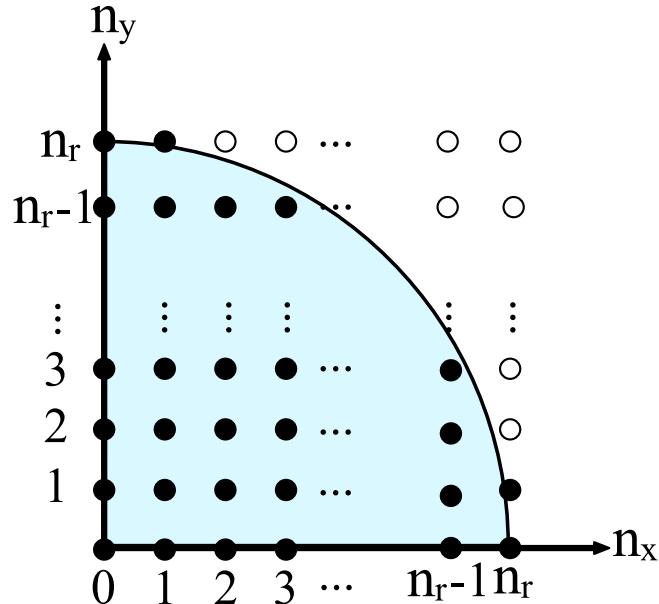


図 B.1 擬スピン状態↑の調和ポテンシャルのエネルギー  $E_{2\text{Dtrap}}$  (式 (B.1)) のうち、 $xy$  方向の調和ポテンシャル中の量子数  $(n_x, n_y)$  の占有を表した図。図の水色部分 (量子数の最大値  $n_x = n_r, n_y = n_r$ ) まで量子数が占有されている。量子数  $n_x, n_y$  の値が 1 となっているものを黒丸、0 の値をとるものを白丸で表している。

となる場合である。式 (B.2) を式 (B.3) に代入し整理すると

$$\begin{aligned}
 1 > n_r \frac{\omega_r}{\omega_z} &= 2 \sqrt{\frac{N_\uparrow}{\pi}} \frac{\omega_r}{\omega_z} \\
 &= \sqrt{\frac{2N}{\pi}} \frac{\omega_r}{\omega_z},
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

となり、式 (1.19) が得られる。

## 付録 C

# 位相揺らぎのみを考慮した2次元 フェルミ原子気体におけるBKT 理論

ここでは、超流動に対する平均場近似の汎関数経路積分表示 [8] について説明し、その後、平均場近似まわりの超流動秩序パラメータの位相揺らぎを考慮したBKT理論 [33–37]について概説する。

### C.1 超流動平均場近似の経路積分表示

式(2.1)で与えられるハミルトニアンに対する分配関数  $Z$  の経路積分表示は [8, 33–37]

$$Z = \int \mathcal{D}[\Psi, \bar{\Psi}] e^{-S[\Psi, \bar{\Psi}].} \quad (\text{C.1})$$

ここで  $\mathcal{D}[\Psi, \bar{\Psi}]$  は汎関数積分を表し、 $\Psi, \bar{\Psi}$  はグラスマン数である。作用  $S[\Psi, \bar{\Psi}]$  は

$$S[\Psi, \bar{\Psi}] = \int_0^\beta d\tau \int d^2r \left[ \sum_\sigma \bar{\Psi}_\sigma(x) [\partial_\tau + \hat{\xi}_p] \Psi_\sigma(x) - U \bar{\Psi}_\uparrow(x) \bar{\Psi}_\downarrow(x) \Psi_\downarrow(x) \Psi_\uparrow(x) \right], \quad (\text{C.2})$$

である。ここで、 $x = (r, \tau)$  であり、 $r$  は2次元位置座標、 $\tau$  は虚時間である。また、 $\beta = 1/T$  ( $T$  は温度)、 $\sigma = \uparrow, \downarrow$  は擬スピン、 $\hat{\xi}_p = -\nabla^2/(2m) - \mu$  ( $\mu$  は化学ポテンシャル)、 $U$  は接触型の引力相互作用(式(2.2))である。式(C.2)の相互作用を次のハバード-ストラトノヴィッチ変換を用いて書き換えられる [8, 33–37] :

$$1 = \int \mathcal{D}[\Delta, \Delta^*] \exp \left[ - \int_0^\beta d\tau \int d^2r \frac{\Delta(x) \Delta^*(x)}{U} \right]. \quad (\text{C.3})$$

ここで  $\Delta(x)$  ( $\Delta^*(x)$ ) はクーパー対に関係した補助場である。 $\Delta^* \rightarrow \Delta^* - U\bar{\Psi}_\uparrow\bar{\Psi}_\downarrow$ 、 $\Delta \rightarrow \Delta - U\Psi_\downarrow\Psi_\uparrow$  と変換すると、式(C.1)の分配関数は次のように書くことができる。

$$Z = \int \mathcal{D}[\Psi, \bar{\Psi}] \int \mathcal{D}[\Delta, \Delta^*] \exp \left[ - \int_0^\beta d\tau \int d^2r \left[ \sum_\sigma \bar{\Psi}_\sigma(x) [\partial_\tau + \hat{\xi}_p] \Psi_\sigma(x) \right. \right. \\ \left. \left. - \Delta^* \Psi_\downarrow(x) \Psi_\uparrow(x) - \Delta \bar{\Psi}_\uparrow(x) \bar{\Psi}_\downarrow(x) + \frac{\Delta(x) \Delta^*(x)}{U} \right] \right]. \quad (\text{C.4})$$

または、南部スピノル

$$\psi = \begin{pmatrix} \Psi_\uparrow \\ \bar{\Psi}_\downarrow \end{pmatrix}, \bar{\psi} = (\bar{\Psi}_\uparrow, \Psi_\downarrow), \quad (\text{C.5})$$

を導入し、

$$Z = \int \mathcal{D}[\Psi, \bar{\Psi}] \int \mathcal{D}[\Delta, \Delta^*] \exp \left[ - \int_0^\beta d\tau \int d^2r \left( \bar{\psi} [-\mathbf{G}^{-1}] \psi + \frac{|\Delta(x)|^2}{U} \right) \right]. \quad (\text{C.6})$$

式(C.6)において、 $\mathbf{G}$  は南部-ゴルコフグリーン関数で、次式で与えられる。

$$\mathbf{G}^{-1}(x, x') = \begin{pmatrix} -\partial_\tau - \hat{\xi}_p & \Delta(x) \\ \Delta^*(x) & -\partial_\tau + \hat{\xi}_p \end{pmatrix} \delta(x - x'). \quad (\text{C.7})$$

式(C.6)はフェルミオン場  $(\Psi, \bar{\Psi})$  に関して2次形式なので積分を実行でき、結果は

$$Z = \int \mathcal{D}[\Delta, \Delta^*] e^{-S_{\text{eff}}[\Delta, \Delta^*]}, \quad (\text{C.8})$$

となる。ここで、

$$S_{\text{eff}}[\Delta, \Delta^*] = \int_0^\beta d\tau \int d^2r \frac{|\Delta(x)|^2}{U} - \text{Tr} \ln[-\mathbf{G}^{-1}]. \quad (\text{C.9})$$

経路積分表示において、BCS 平均場近似は式(C.8)の分配関数  $Z$  中の  $\Delta, \Delta^*$  を熱力学ポテンシャル  $\Omega = -T \ln Z$  に対する鞍点条件

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \Delta} = 0, \quad (\text{C.10})$$

で決まる鞍点解

$$\Delta(x) = \Delta_0, \quad (\text{C.11})$$

で代表させたものに相当する。式(C.9)に鞍点解(式(C.11))を代入すると、“平均場近似の作用”  $S_{\text{MF}}$  は

$$S_{\text{MF}} = - \sum_p \left[ 2 \ln \left[ 2 \cosh \left( \frac{\beta E_p}{2} \right) \right] - \beta \xi_p \right] + \frac{\beta |\Delta_0|^2}{U}. \quad (\text{C.12})$$

ここで  $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{p}}^2 + \Delta_0^2}$  はボゴリューボフ 1 粒子励起である。また、BCS 平均場近似の分配関数は式 (C.12) の  $S_{\text{MF}}$  を用い、

$$Z_{\text{MF}} = e^{-S_{\text{MF}}} = e^{-\beta\Omega_0}. \quad (\text{C.13})$$

式 (C.13) において、

$$\Omega_0 = - \sum_{\mathbf{p}} \left[ 2T \ln \left[ 2 \cosh \left( \frac{\beta E_{\mathbf{p}}}{2} \right) \right] - \xi_{\mathbf{p}} \right] + \frac{|\Delta_0|^2}{U}, \quad (\text{C.14})$$

は BCS 理論における熱力学ポテンシャルである。

鞍点条件 (式 (C.10)) からは BCS 理論におけるギャップ方程式 [33–37, 75, 100] が得られる：

$$1 = U \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \tanh \left( \frac{\beta E_{\mathbf{p}}}{2} \right). \quad (\text{C.15})$$

また、化学ポテンシャルを決定するための粒子数方程式は、式 (C.14) の熱力学ポテンシャルから熱力学的恒等式  $N = -(\partial\Omega_0/\partial\mu)$  を用いて次のように得られる。

$$N = \sum_{\mathbf{p}} \left[ 1 - \frac{\xi_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}}} \tanh \left( \frac{\beta E_{\mathbf{p}}}{2} \right) \right]. \quad (\text{C.16})$$

## C.2 平均場近似まわりの超流動秩序パラメータの位相揺らぎを考慮した BKT 理論

ここでは、2 次元フェルミ原子気体に対し用いられている平均場近似に位相揺らぎを考慮した BKT 理論 [33–37] を概説する。式 (C.1) で与えられる分配関数において、フェルミオン場を表すグラスマン数  $\Psi$  を  $\Psi(x) \rightarrow \Psi(x)e^{i\theta(x)/2}$  と変数変換し、式 (C.8) の  $\Delta$ 、 $\Delta^*$  の汎関数積分を

$$\Delta(x) = \Delta_0 e^{i\theta(x)}, \quad (\text{C.17})$$

とおいて、位相揺らぎ  $\theta(x)$  の効果を加味する。C.1 節と同様、 $\Psi$ 、 $\bar{\Psi}$  についての積分を実行すると、

$$Z = \int \mathcal{D}[\theta] e^{-S_{\text{eff}}[\theta]}. \quad (\text{C.18})$$

ここで、作用  $S_{\text{eff}}[\theta]$  は次式で与えられる。

$$S_{\text{eff}}[\theta] = \frac{\beta |\Delta_0|^2}{U} - \int_0^\beta d\tau \int d^2r \sum_{\mathbf{p}} \left[ \frac{2}{\beta} \ln \left[ 2 \cosh \left( \frac{\beta \tilde{E}_{\mathbf{p}}}{2} \right) \right] - \tilde{\xi}_{\mathbf{p}} \right]. \quad (\text{C.19})$$

式(C.19)において、

$$\tilde{E}_{\mathbf{p}} = \sqrt{\tilde{\xi}_{\mathbf{p}}^2 + \Delta_0^2}, \quad (\text{C.20})$$

$$\tilde{\xi}_{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \tilde{\mu}, \quad (\text{C.21})$$

$$\tilde{\mu} = \mu - i \frac{\partial_{\tau}\theta}{2} + i \frac{\nabla^2\theta}{4m} - \frac{(\nabla\theta)^2}{8m}. \quad (\text{C.22})$$

式(C.19)の $S_{\text{eff}}[\theta]$ は、 $\nabla\theta$ 、 $\partial_{\tau}\theta$ について2次まで考慮し、式(C.12)の平均場近似での作用 $S_{\text{MF}}$ を用いると、次のように表すことができる。

$$S_{\text{eff}}[\theta] = S_{\text{MF}} + S_{\text{FL}}[\theta]. \quad (\text{C.23})$$

式(C.23)の表記において、

$$S_{\text{FL}}[\theta] = \int_0^{\beta} d\tau \int d^2\mathbf{r} \left[ \frac{J}{2} (\nabla\theta)^2 + \frac{W}{2} (\partial_{\tau}\theta)^2 \right], \quad (\text{C.24})$$

は位相揺らぎの効果を表す作用であり、 $J$ 、 $W$ はそれぞれ

$$J = \frac{1}{4m} \sum_{\mathbf{p}} \left[ 1 - \frac{\xi_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}}} \tanh \left( \frac{E_{\mathbf{p}}}{2T} \right) - \frac{1}{2T} \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{E_{\mathbf{p}}}{2T} \right) \right], \quad (\text{C.25})$$

$$W = \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{p}} \left[ \frac{\Delta_0^2}{E_{\mathbf{p}}^3} \tanh \left( \frac{E_{\mathbf{p}}}{2T} \right) + \frac{1}{2T} \frac{\xi_{\mathbf{p}}^2}{E_{\mathbf{p}}^2} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{E_{\mathbf{p}}}{2T} \right) \right], \quad (\text{C.26})$$

である。

超流動密度 $\rho_s$ はGinzburg-Landau(GL)理論[8,9]における自由エネルギーの表式(1.8)と式(C.23)の作用との比較から得られる。位相揺らぎについて、虚時間方向の依存性はない場合を考えると、

$$S_{\text{eff}}[\theta] = S_{\text{MF}} + \int d^2\mathbf{r} \frac{J\beta}{2} (\nabla\theta)^2, \quad (\text{C.27})$$

となるが、このうちの位相部分(最終項)を式(1.8)の

$$\beta F_{\text{FL}} = \int d^2\mathbf{r} \frac{1}{2} \beta \rho_s |\mathbf{v}_s(\mathbf{r})|^2, \quad (\text{C.28})$$

の位相部分と同一視する。後者において、 $\nabla\theta(\mathbf{r})$ の係数 $J$ は超流動密度 $\rho_s$ と

$$\rho_s = (2m)^2 J, \quad (\text{C.29})$$

の関係がある。この係数 $J$ を式(C.25)と等しいとおくことにより、

$$\rho_s = m \sum_{\mathbf{p}} \left[ 1 - \frac{\xi_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}}} \tanh \left( \frac{E_{\mathbf{p}}}{2T} \right) - \frac{1}{2T} \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{E_{\mathbf{p}}}{2T} \right) \right], \quad (\text{C.30})$$

を得る。

こうして得られた  $\rho_s$  を用いると、BKT 転移温度  $T_{\text{BKT}}$  は、KT-Nelson の公式 [10]

$$\frac{\rho_s}{M^2 T_{\text{BKT}}} = \frac{2}{\pi}, \quad (\text{C.31})$$

を満たす温度として決定される ( $M = 2m$  はクーパー対の質量)。

超流動密度  $\rho_s$  を決定する際、超流動秩序パラメータの振幅  $\Delta_0$  と化学ポテンシャル  $\mu$  を決定する必要がある。このうち前者 ( $\Delta_0$ ) は平均場近似のギャップ方程式 (C.15) で決定される。他方、 $\mu$  は粒子数方程式から決定するが、これに対しては位相揺らぎの効果を取り入れたものが用いられる [33–37]。その表式を得るために、まず  $\theta(\mathbf{r}, \tau)$  について波数  $\mathbf{q}$ 、及びボゾンの松原周波数  $\nu_m = 2\pi T m$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) を用いて次のように Fourier 変換する。

$$\theta(\mathbf{r}, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_{\mathbf{q}, i\nu_m} \theta(\mathbf{q}, i\nu_m) e^{-i\nu_m \tau} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}. \quad (\text{C.32})$$

すると  $S_{\text{FL}}[\theta]$  は次のように書ける。

$$S_{\text{FL}}[\theta] = \sum_{\mathbf{q}, i\nu_m} [Jq^2 + W\nu_m^2] \theta(\mathbf{q}, i\nu_m) \theta(-\mathbf{q}, -i\nu_m). \quad (\text{C.33})$$

これを式 (C.23) の  $S_{\text{eff}}[\theta]$  に用い、式 (C.18) の  $\theta$  に関する汎関数積分を実行すると、分配関数  $Z$  は次のようになる。

$$Z = e^{-S_{\text{MF}}} \exp \left[ \sum_{\mathbf{q}, i\nu_m} \ln \left[ \frac{1}{2} [Jq^2 + W\nu_m^2] \right] \right]. \quad (\text{C.34})$$

よって、位相揺らぎの効果を加味した熱力学ポテンシャル  $\Omega = -T \ln Z$  は

$$\Omega = \Omega_0 - T \sum_{\mathbf{q}, i\nu_m} \ln \left[ \frac{1}{2} [Jq^2 + W\nu_m^2] \right], \quad (\text{C.35})$$

となる。この熱力学ポテンシャルを用いると、粒子数方程式は

$$N = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = N_{\text{MF}} + \sum_{\mathbf{q}} T \sum_{i\nu_m} \frac{\frac{\partial W}{\partial \mu} [\nu_m^2 + c_s^2 q^2] + W \frac{\partial c_s^2}{\partial \mu} q^2}{W(\nu_m^2 + c_s^2 q^2)}, \quad (\text{C.36})$$

である。ここで、 $N_{\text{MF}}$  は式 (C.16) で与えられ、 $c_s = \sqrt{J/W}$  である。松原周波数  $\nu_m = 2\pi T m$  の和を実行すると、位相揺らぎの効果を含む粒子数方程式として次式を

得る。

$$\begin{aligned}
 N &= -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \\
 &= N_{\text{MF}} - \frac{1}{\beta} \sum_{\mathbf{q}} \frac{\beta q \frac{\partial c_s}{\partial \mu}}{e^{\beta c_s q} - 1} \\
 &= \sum_{\mathbf{p}} \left[ 1 - \frac{\xi_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}}} \tanh \left( \frac{\beta E_{\mathbf{p}}}{2} \right) \right] - \sum_{\mathbf{q}} \frac{q}{e^{\beta c_s q} - 1} \frac{\partial}{\partial \mu} \sqrt{\frac{J}{W}}. \tag{C.37}
 \end{aligned}$$

## 付録 D

# 本論文で用いた数値計算の環境

本論文で用いた数値計算の環境は下記の通りである。

### 1. 計算機の環境

- ・PC モデル: Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2687W v3 @3.10GHz
- ・コア数: 20 コア
- ・メモリ: 252 GB
- ・ディスク容量: 2700 GB

### 2. 計算に用いた言語

数値計算に用いた言語: Fortran 90

### 3. コンパイル環境

インテル Parallel Studio XE 2015 (Composer | Professional | Cluster) Edition  
(released 26 August 2014) aka Compiler v15.0

Composer XE 2015 Update 3 2015.04.20 15.0.3 20150407



## 付録 E

# 強結合領域における非自己無撞着 $T$ 行列近似 (TMA)

ここでは、化学ポテンシャル  $\mu$  が負で、 $|\mu|/T \gg 1$ 、 $|\mu| \gg \varepsilon_F$  となるような強結合領域における多体散乱行列  $\Gamma_0(\mathbf{Q}, i\nu_n)$  の表式を TMA において求める。この時、フェルミ分布関数  $n_F(\varepsilon) \rightarrow 0$  となることに注意すると、式 (2.11) の対相関関数  $\Pi_0(\mathbf{Q}, i\nu_n)$  は

$$\begin{aligned}\Pi_0(\mathbf{Q}, i\nu_n) &= -\sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{i\nu_n - \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2} - \xi_{-\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2}} \\ &= -\frac{m}{4\pi} \ln \alpha + \frac{m}{2\pi} \ln(p_c) \\ &\simeq -\frac{m}{4\pi} \frac{1}{2\mu} \left[ i\nu_n - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{2(2m)} + 2\mu \ln \left( -\frac{\mu}{\varepsilon_F} \right) \right] + \frac{m}{2\pi} \ln(p_c),\end{aligned}\quad (\text{E.1})$$

と近似される。ここで、 $p_c$  は運動量のカットオフ、無次元量  $\alpha$  は

$$\alpha = k_F^{-2} \left[ \frac{Q^2}{4} - 2m\mu - im\nu_n \right]. \quad (\text{E.2})$$

式 (E.1) において、3 行目は  $\varepsilon_F/|\mu| \ll 1$  の条件を利用し、 $O(\varepsilon_F/|\mu|)$  まで展開した。この時、式 (2.10) で与えられる多体散乱行列  $\Gamma_0(\mathbf{Q}, i\nu_n)$  は

$$\begin{aligned}\Gamma_0(\mathbf{Q}, i\nu_n) &= \frac{-U}{1 - U\Pi_0(\mathbf{Q}, i\nu_n)} \\ &= \frac{1}{-U^{-1} + \Pi_0(\mathbf{Q}, i\nu_n)} \\ &= -\frac{4\pi}{m} \frac{2\mu}{i\nu_n - \frac{Q^2}{2(2m)} + 2\mu \left[ \ln \left( \frac{-2\mu}{E_{\text{bind}}} \right) \right]} \\ &= -\frac{8\pi\mu}{m} \frac{1}{i\nu_n - \frac{Q^2}{2(2m)} + \mu_B}.\end{aligned}\quad (\text{E.3})$$

ここで、

$$\frac{1}{U} = \frac{m}{2\pi} \ln(k_F a_{2D}) + \frac{m}{2\pi} \ln p_c. \quad (\text{E.4})$$

また、 $E_{\text{bind}}$  は 2 体分子の束縛エネルギーで

$$E_{\text{bind}} = \frac{1}{ma_{2D}^2}, \quad (\text{E.5})$$

で与えられる。式 (E.3) 中の

$$\mu_B = -2|\mu| \ln \left( \frac{2|\mu|}{E_{\text{bind}}} \right), \quad (\text{E.6})$$

を分子ボゾンの化学ポテンシャル  $\mu_B$  とみなすと、式 (E.3) は係数  $(-8\pi\mu/m)$  を除き、質量  $M = 2m$ 、化学ポテンシャル  $\mu_B$  の分子ボゾンのグリーン関数とみなすことができる。

## 付録 F

# 強結合理論に対する静的近似における諸計算

## F.1 非自己無撞着 $T$ 行列近似 (TMA) の低温領域の解析

TMA の枠組みにおいて、低温で低エネルギー、長波長領域の対形成揺らぎが発達、

$$\Gamma_0^{-1}(\mathbf{Q} = \mathbf{0}, i\nu_m = 0) \simeq 0, \quad (\text{F.1})$$

となる場合を考える。この時、TMA の自己エネルギー (式 (2.8)) に静的近似 [81] の式 (3.9) を用いたグリーン関数 (式 (3.11)) を用い、粒子数方程式を作ると、

$$\begin{aligned} N &= 2 \sum_{\mathbf{p}, i\omega_n} G(\mathbf{p}, i\omega_n) e^{i\omega_n \delta} \\ &= \sum_{\mathbf{p}} \left[ 1 - \frac{\xi_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}}} \tanh \left( \frac{\beta E_{\mathbf{p}}}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

ここで、 $\delta$  は無限小の正の定数とし、 $E_{\mathbf{p}}$  は擬ギャップパラメータ (式 (3.10)) を含むエネルギー、

$$E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{p}}^2 + \Delta_{\text{PG}}^2}, \quad (\text{F.3})$$

である。式 (F.2) は式 (3.11) からも予想されるように、BCS 理論における粒子数方程式と形式的に同一の表式である [33–37, 75, 100]。粒子数方程式 (F.2) を  $\mu < 0$  でかつ  $T \ll |\mu|$  の低温領域で  $\Delta_{\text{PG}}$  について解くと

$$\Delta_{\text{PG}} \simeq 2\sqrt{\varepsilon_{\text{F}}(\varepsilon_{\text{F}} - \mu)}. \quad (\text{F.4})$$

$\mu < 0$  でかつ  $T \ll |\mu|$  の低温領域では、 $\Gamma_0(\mathbf{Q}, i\nu_m)$  中の対相関関数  $\Pi_0(\mathbf{Q}, i\nu_m)$  の

$\mathbf{Q} = \mathbf{0}, i\nu_m = 0$  の部分は

$$\Pi_0(\mathbf{Q} = \mathbf{0}, i\nu_m = 0) = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{2\xi_{\mathbf{p}}} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty dp p \frac{1}{\frac{p^2}{2m} - \mu}, \quad (\text{F.5})$$

となることを用いると、低エネルギー、長波長領域の対形成揺らぎが発達している領域（式 (F.1)) では、

$$\begin{aligned} 0 &= -U^{-1} + \Pi_0(\mathbf{Q} = \mathbf{0}, i\nu_m = 0) \\ &\simeq -\frac{m}{2\pi} \ln(k_F a_{2D}) - \frac{m}{2\pi} \int_{k_F}^\infty dp \frac{1}{p} + \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty dp p \frac{1}{\frac{p^2}{2m} - \mu}. \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

これを解くと、化学ポテンシャル  $\mu$  は

$$\mu \simeq -\frac{1}{2} E_{\text{bind}}, \quad (\text{F.7})$$

となり、 $|\mu|$  は 2 体分子の結合エネルギー ( $E_{\text{bind}} = 1/(ma_{2D}^2)$ ) の半分の値となる。この結果を式 (F.4) の  $\Delta_{\text{PG}}$  に代入すると、

$$\Delta_{\text{PG}} \simeq 2 \sqrt{\varepsilon_F \left( \varepsilon_F + \frac{E_{\text{bind}}}{2} \right)}. \quad (\text{F.8})$$

$E_{\text{bind}} \rightarrow \infty$  の強結合極限では、

$$\Delta_{\text{PG}} \xrightarrow{E_{\text{bind}} \rightarrow \infty} \sqrt{2E_{\text{bind}}\varepsilon_F}. \quad (\text{F.9})$$

## F.2 自己無撞着 $T$ 行列近似 (SCTMA) におけるグリーン関数 (式 (3.31)) の導出

SCTMA の場合も、低エネルギー、長波長領域の対形成揺らぎが発達して、

$$\Gamma^{-1}(\mathbf{Q} = \mathbf{0}, i\nu_m = 0) \simeq 0, \quad (\text{F.10})$$

となる領域では TMA 同様に静的近似を用いることができる [107]。SCTMA の自己エネルギー (式 (3.22)) は

$$\Sigma_{\text{SCTMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n) \simeq \Sigma_{\text{H}} + G(-\mathbf{p}, -i\omega_n) \times T \sum_{\mathbf{Q}, i\nu_m} \Gamma(\mathbf{Q}, i\nu_m). \quad (\text{F.11})$$

式 (F.11) では、定数シフトの寄与  $\Sigma_{\text{H}}$  も残している。ただし、本論文ではグリーン関数 (式 (3.21)) を考える際、この補正項は化学ポテンシャル  $\mu$  に吸収させ、吸収させた化学

ポテンシャルを有効化学ポテンシャル  $\mu^*$  [87, 107, 108] として考える。この時、式 (F.11) の 2 項目を  $\Sigma'(\mathbf{p}, i\omega_n)$  とすると、この  $\Sigma'(\mathbf{p}, i\omega_n)$  に対し、TMA 同様に静的近似

$$\Sigma'(\mathbf{p}, i\omega_n) = G(-\mathbf{p}, -i\omega_n) \times T \sum_{\mathbf{Q}, i\nu_m} \Gamma(\mathbf{Q}, i\nu_m), \quad (\text{F.12})$$

を導入する (式 (3.29) に相当)。擬ギャップパラメータ (式 (3.30)) を用いると、式 (F.12) は

$$\Sigma'(\mathbf{p}, i\omega_n) = \frac{\Delta_{\text{PG}}^2}{i\omega_n + \xi_{-\mathbf{p}}^* + \Sigma'(-\mathbf{p}, -i\omega_n)}, \quad (\text{F.13})$$

となる。

式 (F.13) は自己エネルギーに対し、自己無撞着な方程式である。式 (F.13) で  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ 、 $i\omega_n \rightarrow -i\omega_n$  とすると

$$\Sigma'(-\mathbf{p}, -i\omega_n) = \frac{\Delta_{\text{PG}}^2}{-i\omega_n + \xi_{\mathbf{p}}^* + \Sigma'(\mathbf{p}, i\omega_n)}, \quad (\text{F.14})$$

となるので、これを式 (F.13) に代入すると、 $\Sigma'(\mathbf{p}, i\omega_n)$  に対する次の 2 次方程式を得る:

$$[i\omega_n + \xi_{\mathbf{p}}^*] \Sigma'^2(\mathbf{p}, i\omega_n) + [\omega_n^2 + \xi_{\mathbf{p}}^{*2}] \Sigma'(\mathbf{p}, i\omega_n) + [i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}}^*] \Delta_{\text{PG}}^2 = 0. \quad (\text{F.15})$$

これを解くと、

$$\begin{aligned} \Sigma'(\mathbf{p}, i\omega_n) &= \frac{-[\omega_n^2 + \xi_{\mathbf{p}}^{*2}] \pm \sqrt{[\omega_n^2 + \xi_{\mathbf{p}}^{*2}]^2 + 4[\omega_n^2 + \xi_{\mathbf{p}}^{*2}]\Delta_{\text{PG}}^2}}{2[i\omega_n + \xi_{\mathbf{p}}^*]} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{i\omega_n + \xi_{\mathbf{p}}^*} \left[ [i\omega_n + \xi_{\mathbf{p}}^*] [i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}}^*] \left[ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\Delta_{\text{PG}}^2}{\omega_n^2 + \xi_{\mathbf{p}}^{*2}}} \right] \right]. \end{aligned} \quad (\text{F.16})$$

式 (F.16) を解析接続 ( $i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta$ ) したものが、粒子の寿命を与えることを利用すると、式 (F.16) の 2 つの解のうち、物理的に正しいものは “-” の方であることが分かる。 $1 - \sqrt{1 + x} = -x/(1 + \sqrt{1 + x})$  と書けることを用いると、結果として静的近似の下での SCTMA の自己エネルギーは

$$\Sigma'(\mathbf{p}, i\omega_n) = \frac{\tilde{\Delta}_{\text{PG}}^2(\mathbf{p}, i\omega_n)}{i\omega_n + \xi_{\mathbf{p}}^*}, \quad (\text{F.17})$$

となる。ただし、

$$\tilde{\Delta}_{\text{PG}}^2(\mathbf{p}, i\omega_n) = \frac{2\Delta_{\text{PG}}^2}{1 + \sqrt{1 + \frac{4\Delta_{\text{PG}}^2}{\omega_n^2 + \xi_{\mathbf{p}}^{*2}}}}. \quad (\text{F.18})$$

式 (F.17) の自己エネルギーを用いると、SCTMA の 1 粒子温度グリーン関数は

$$G(\mathbf{p}, i\omega_n) = -\frac{i\omega_n + \xi_{\mathbf{p}}^*}{\omega_n^2 + \xi_{\mathbf{p}}^{*2} + \tilde{\Delta}_{\text{PG}}^2(\mathbf{p}, i\omega_n)}, \quad (\text{F.19})$$

となり、静的近似のグリーン関数(式(3.31))が得られた。

TMA のグリーン関数(式(3.11))は“静的”な擬ギャップパラメータ  $\Delta_{\text{PG}}$ (式(3.10))を用いた表式であったが、SCTMA では“動的”な擬ギャップパラメータ  $\tilde{\Delta}_{\text{PG}}(\mathbf{p}, i\omega_n)$  が 1 粒子グリーン関数に現れる。この違いが 1 粒子励起を考える際に、準粒子の寿命となって現れる。

## 付録 G

# 静的近似のもとでのクーパー対の重心運動量分布 $n_Q$ の表式

式 (2.23) で与えられるクーパー対の重心運動量分布に対し、TMA の 1 粒子グリーン関数を静的近似における表式 (3.11) で置き換えると、

$$n_Q = T \sum_{i\nu_m} \Gamma_0(Q, i\nu_m) T \sum_{\mathbf{p}, i\omega_n} G_0(Q - \mathbf{p}, i\nu_m - i\omega_n) G_0(\mathbf{p}, i\omega_n) \frac{i\omega_n + \xi_{\mathbf{p}}}{(i\omega_n)^2 - E_{\mathbf{p}}^2}. \quad (\text{G.1})$$

フェルミオンの松原周波数  $\omega_n = \pi T(2n + 1)$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) を実行すると、

$$\begin{aligned} n_Q &= -T \sum_{i\nu_m} \Gamma_0(Q, i\nu_m) \\ &\times \sum_{\mathbf{p}} \left[ -\frac{n_F(\xi_{\mathbf{p}})}{\xi_{\mathbf{p}} + \xi_{Q-\mathbf{p}} - i\nu_m} \frac{2\xi_{\mathbf{p}}}{\Delta_{\text{PG}}^2} \right. \\ &+ \frac{i\nu_m + \xi_{\mathbf{p}} - \xi_{Q-\mathbf{p}}}{i\nu_m - \xi_{\mathbf{p}} - \xi_{Q-\mathbf{p}}} \frac{n_F(-\xi_{Q-\mathbf{p}})}{[i\nu_m - \xi_{Q-\mathbf{p}} - E_{\mathbf{p}}][i\nu_m - \xi_{Q-\mathbf{p}} - E_{\mathbf{p}}]} \\ &+ \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \frac{n_F(E_{\mathbf{p}})}{E_{\mathbf{p}} + \xi_{Q-\mathbf{p}} - i\nu_m} \frac{E_{\mathbf{p}} + \xi_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}} - \xi_{\mathbf{p}}} \\ &\left. + \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \frac{n_F(-E_{\mathbf{p}})}{E_{\mathbf{p}} - \xi_{Q-\mathbf{p}} + i\nu_m} \frac{E_{\mathbf{p}} - \xi_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}} + \xi_{\mathbf{p}}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

低温領域でかつ強結合領域の場合、 $|\mu/T| \gg 1$  かつ  $|\mu| \gg \varepsilon_F$  が成立するが、その場合、式 (G.2) は 4 項目が支配的となる。そこで、その項のみ残すと

$$n_Q = -T \sum_{i\nu_m} \Gamma_0(Q, i\nu_m) \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \frac{n_F(-E_{\mathbf{p}})}{E_{\mathbf{p}} - \xi_{Q-\mathbf{p}} + i\nu_m} \frac{E_{\mathbf{p}} - \xi_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}} + \xi_{\mathbf{p}}}. \quad (\text{G.3})$$

強結合領域において、多体散乱行列  $\Gamma_0(Q, i\nu_m)$  は式 (E.3) で与えられることを用いると、

$$n_Q = \frac{8\pi\mu}{m} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \frac{E_{\mathbf{p}} - \xi_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}} + \xi_{\mathbf{p}}} T \sum_{i\nu_m} \frac{1}{i\nu_m - \frac{Q^2}{2(2m)} + \mu_B} \frac{1}{i\nu_m + E_{\mathbf{p}} - \xi_{Q-\mathbf{p}}}. \quad (\text{G.4})$$

ボゾンの松原周波数  $\nu_m = 2\pi m$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) の和を実行すると

$$\begin{aligned} n_{\mathbf{Q}} &= -\frac{8\pi\mu}{m} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \frac{E_{\mathbf{p}} - \xi_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}} + \xi_{\mathbf{p}}} \\ &\quad \times \left[ \frac{n_B \left( \frac{Q^2}{2(2m)} - \mu_B \right)}{\frac{Q^2}{2(2m)} - \mu_B + E_{\mathbf{p}} - \xi_{\mathbf{Q}-\mathbf{p}}} + \frac{n_B (\xi_{\mathbf{Q}-\mathbf{p}} - E_{\mathbf{p}})}{-\frac{Q^2}{2(2m)} + \mu_B - E_{\mathbf{p}} + \xi_{\mathbf{Q}-\mathbf{p}}} \right]. \end{aligned} \quad (G.5)$$

強結合領域  $|\mu| \gg \varepsilon_F$  かつ、 $\mu_B \simeq 0$  の時、1項目が支配的であり、2項目は無視できる。また、1項目は  $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$  近傍での  $n_{\mathbf{Q}}$  が大きくなることを用いると、 $\mathbf{p}$  の和は解析的に実行することができ、式 (G.5) は

$$n_{\mathbf{Q}} = \frac{2|\mu|}{\Delta_{PG}^2} \left[ \sqrt{\mu^2 + \Delta_{PG}^2} - |\mu| \right] n_B \left( \frac{Q^2}{2(2m)} - \mu_B \right). \quad (G.6)$$

式 (G.6) の係数を  $Z$  とし、式 (F.4) を用いると、

$$Z = \frac{2|\mu|}{\Delta_{PG}^2} \left[ \sqrt{\mu^2 + \Delta_{PG}^2} - |\mu| \right] = \frac{2|\mu|}{4\varepsilon_F(\varepsilon_F + |\mu|)} \left[ \sqrt{(|\mu| + 2\varepsilon_F)^2} - |\mu| \right] = \frac{|\mu|}{|\mu| + \varepsilon_F}. \quad (G.7)$$

この係数  $Z$  を用いると、式 (G.6) は

$$n_{\mathbf{Q}} = Z n_B \left( \frac{Q^2}{2(2m)} - \mu_B \right). \quad (G.8)$$

## 付録 H

### SCTMA における式 (3.40) と式 (3.27) が等価であることの証明

ここでは、式 (3.40) と式 (3.27) が等価であることを示す。熱力学ポテンシャル  $\Omega$  (式 (3.35)) を  $T$ 、 $\mu$  固定で  $\ln a_{2D}$  に関して偏微分すると、式 (3.35) 中の自由フェルミ原子気体の熱力学ポテンシャル  $\Omega_0$  は

$$\frac{\partial \Omega_0}{\partial \ln a_{2D}} \Big|_{T,\mu} = 0. \quad (\text{H.1})$$

そのため、式 (3.40) は熱力学ポテンシャルの相互作用の補正項 (式 (3.37)) が残り、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \ln a_{2D}} \Big|_{T,\mu} &= 2T \sum_{\mathbf{p}, i\omega_n} \left[ \frac{\partial \ln G(\mathbf{p}, i\omega_n)}{\partial \ln a_{2D}} \Big|_{T,\mu} - G_0^{-1}(\mathbf{p}, i\omega_n) \frac{\partial G(\mathbf{p}, i\omega_n)}{\partial \ln a_{2D}} \Big|_{T,\mu} \right] \\ &\quad + T \sum_{\mathbf{Q}, i\nu_m} \Gamma(\mathbf{Q}, i\nu_m) \frac{\partial \Pi(\mathbf{Q}, i\nu_m)}{\partial \ln a_{2D}} \Big|_{T,\mu} \\ &\quad + U^{-1} T \sum_{\mathbf{Q}, i\nu_m} \Gamma(\mathbf{Q}, i\nu_m) \Pi(\mathbf{Q}, i\nu_m) \frac{\partial U}{\ln a_{2D}} \Big|_{T,\mu}, \end{aligned} \quad (\text{H.2})$$

となる。ここで、多体散乱行列  $\Gamma(\mathbf{Q}, i\nu_m)$  は式 (3.23) で書けることを用いた。

式 (H.2) の 1 行目において、

$$\frac{\partial \ln G(\mathbf{p}, i\omega_n)}{\partial \ln a_{2D}} \Big|_{T,\mu} = G^{-1}(\mathbf{p}, i\omega_n) \frac{\partial G(\mathbf{p}, i\omega_n)}{\partial \ln a_{2D}} \Big|_{T,\mu}, \quad (\text{H.3})$$

と書けることから、

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \ln G(\mathbf{p}, i\omega_n)}{\partial \ln a_{2D}} \Big|_{T,\mu} - G_0^{-1}(\mathbf{p}, i\omega_n) \frac{\partial G(\mathbf{p}, i\omega_n)}{\partial \ln a_{2D}} \Big|_{T,\mu} \\ &= -\Sigma_{\text{SCTMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n) \frac{\partial G(\mathbf{p}, i\omega_n)}{\partial \ln a_{2D}} \Big|_{T,\mu}, \end{aligned} \quad (\text{H.4})$$

となる。ここで、式 (3.21) と式 (2.9) を用いた。

式 (H.2) の 2 行目において、最低次の対相関関数  $\Pi(\mathbf{Q}, i\nu_m)$  (式 (3.24)) に関しては、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi(\mathbf{Q}, i\nu_m)}{\partial \ln a_{2D}} \Big|_{T,\mu} &= T \sum_{\mathbf{p}, i\omega_n} \left[ \frac{\partial G(\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2, i\omega_n + i\nu_m)}{\partial \ln a_{2D}} \Big|_{T,\mu} G(-\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2, -i\omega_n) \right. \\ &\quad \left. + G(\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2, i\omega_n + i\nu_m) \frac{\partial G(-\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2, -i\omega_n)}{\partial \ln a_{2D}} \Big|_{T,\mu} \right] \\ &= 2T \sum_{\mathbf{p}, i\omega_n} G(\mathbf{Q} - \mathbf{p}, i\nu_m - i\omega_n) \frac{\partial G(\mathbf{p}, i\omega_n)}{\partial \ln a_{2D}} \Big|_{T,\mu}. \end{aligned} \quad (\text{H.5})$$

ここで、1 行目に関しては変数変換  $\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2 \rightarrow \mathbf{p}$ 、 $i\nu_n + i\omega_n \rightarrow i\omega_n$ 、2 行目に関しては変数変換  $-\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2 \rightarrow \mathbf{p}$ 、 $-i\omega_n \rightarrow i\omega_n$  とし、3 行目を導いた。

式 (H.2) の 3 行目では、式 (3.23) より、

$$\Gamma(\mathbf{Q}, i\nu_m) \Pi(\mathbf{Q}, i\nu_m) = 1 + U^{-1} \Gamma(\mathbf{Q}, i\nu_m). \quad (\text{H.6})$$

松原周波数  $i\nu_m$  に依存しない寄与は、松原周波数  $i\nu_m$  の和を実行すると 0 になり、また、

$$\frac{\partial U}{\partial \ln a_{2D}} \Big|_{T,\mu} = -U^2 \frac{m}{2\pi}, \quad (\text{H.7})$$

となるため、式 (H.2) の 3 行目は

$$U^{-1} T \sum_{\mathbf{Q}, i\nu_m} \Gamma(\mathbf{Q}, i\nu_m) \Pi(\mathbf{Q}, i\nu_m) \frac{\partial U}{\partial \ln a_{2D}} \Big|_{T,\mu} = -\frac{m}{2\pi} T \sum_{\mathbf{Q}, i\nu_m} \Gamma(\mathbf{Q}, i\nu_m). \quad (\text{H.8})$$

以上の結果を用いると、式 (H.2) は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \ln a_{2D}} \Big|_{T,\mu} &= -2T \sum_{\mathbf{p}, i\omega_n} \Sigma_{\text{SCTMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n) \frac{\partial G(\mathbf{p}, i\omega_n)}{\partial \ln a_{2D}} \Big|_{T,\mu} \\ &\quad + 2T \sum_{\mathbf{p}, i\omega_n} \left[ T \sum_{\mathbf{Q}, i\nu_m} \Gamma(\mathbf{Q}, i\nu_m) G(\mathbf{Q} - \mathbf{p}, i\nu_m - i\omega_n) \right] \frac{\partial G(\mathbf{p}, i\omega_n)}{\partial \ln a_{2D}} \Big|_{T,\mu} \\ &\quad - \frac{m}{2\pi} T \sum_{\mathbf{Q}, i\nu_m} \Gamma(\mathbf{Q}, i\nu_m) \\ &= \frac{m}{2\pi} \left[ -T \sum_{\mathbf{Q}, i\nu_m} \Gamma(\mathbf{Q}, i\nu_m) \right]. \end{aligned} \quad (\text{H.9})$$

ここで、2 行目の四角括弧が自己エネルギー (式 (3.22)) になることを用いた。式 (H.9) の左辺は式 (3.40) との関係から、 $C/(2\pi m)$  と書けることから、式 (H.9) は

$$C = -m^2 T \sum_{\mathbf{Q}, i\nu_m} \Gamma(\mathbf{Q}, i\nu_m), \quad (\text{H.10})$$

となり、SCTMA の枠組みで式 (3.40) が式 (3.27) と等価であることが示された。

## 参考文献

- [1] J. V. Jose (Ed), *40 Years of Berezinskii-Kosterlitz-Thouless Theory* (World Scientific, Singapore, 2013).
- [2] V. L. Berezinskii, Sov. Phys. JETP **32**, 493 (1971).
- [3] V. L. Berezinskii, Sov. Phys. JETP **34**, 610 (1972).
- [4] J. M. Kosterlitz, and D. J. Thouless, J. Phys. C **6**, 1181 (1973).
- [5] J. M. Kosterlitz, J. Phys. C **7**, 1046 (1974).
- [6] N. D. Mermin, and H. Wagner, Phys. Rev. Lett. **17**, 1133 (1966).
- [7] P. C. Hohenberg, Phys. Rev. **158**, 383 (1967).
- [8] A. Altland, and B. D. Simons, *Condensed matter field theory, 2nd ed.* (Cambridge University Press, Cambridge ; New York, 2010).
- [9] 山田一雄, 大見哲巨, 超流動 新物理学シリーズ, 培風館 (1995).
- [10] D. R. Nelson, and J. M. Kosterlitz, Phys. Rev. Lett. **39**, 1201 (1977).
- [11] 西川恭治, 森弘之, 統計物理学 朝倉物理学大系 10, 朝倉書店 (2000).
- [12] J. M. Kosterlitz, Rep. Prog. Phys. **79**, 026001 (2016).
- [13] D. J. Bishop, and J. D. Reppy, Phys. Rev. Lett. **40**, 1727 (1978).
- [14] W. H. Nitsche, N. Y. Kim, G. Roumpos, C. Schneider, M. Kamp, S. Höfling, A. Forchel, and Y. Yamamoto, Phys. Rev. B **90**, 205430 (2014).
- [15] K. Epstein, A. M. Goldman, and A. M. Kadin Phys. Rev. Lett. **47**, 534 (1981).
- [16] A. F. Hebard, and A. T. Fiory, Phys. Rev. Lett. **50**, 1603 (1983).
- [17] W. Zhao, Q. Wang, M. Liu, W. Zhang, Y. Wang, M. Chen, Y. Guo, K. He, X. Chen, Y. Wang, J. Wang, X. Xie, Q. Niu, L. Wang, X. Ma, J. K. Jain, M. H. W. Chan, and Q.-K. Xue, Solid State Commun. **165**, 59 (2013).
- [18] Z. Lin, C. Mei, L. Wei, Z. Sun, S. Wu, H. Huang, S. Zhang, C. Liu, Y. Feng, H. Tian, H. Yang, J. Li, Y. Wang, G. Zhang, Y. Lu, Y. Zhao, Sci. Rep. **5**, 14133 (2015).
- [19] G. Modugno, F. Ferlaino, R. Heidemann, G. Roati, and M. Inguscio, Phys. Rev.

- A **68**, 011601 (2003).
- [20] K. Martiyanov, V. Makhalov, and A. Turlapov, Phys. Rev. Lett. **105**, 030404 (2010).
- [21] M. Feld, B. Fröhlich, E. Vogt, M. Koschorreck, and M. Köhl, Nature **480**, 75 (2011).
- [22] B. Fröhlich, M. Feld, E. Vogt, M. Koschorreck, W. Zwerger, and M. Köhl, Phys. Rev. Lett. **106**, 105301 (2011).
- [23] P. Dyke, E. D. Kuhnle, S. Whitlock, H. Hu, M. Mark, S. Hoinka, M. Lingham, P. Hannaford, and C. J. Vale, Phys. Rev. Lett. **106**, 105304 (2011).
- [24] B. Fröhlich, M. Feld, E. Vogt, M. Koschorreck, M. Köhl, C. Berthod, and T. Giamarchi, Phys. Rev. Lett. **109**, 130403 (2012).
- [25] M. Koschorreck, D. Pertot, E. Vogt, B. Fröhlich, M. Feld, and M. Köhl, Nature **485**, 619 (2012).
- [26] A. T. Sommer, L. W. Cheuk, M. J. H. Ku, W. S. Bakr, and M. W. Zwierlein, Phys. Rev. Lett. **108**, 045302 (2012).
- [27] V. Makhalov, K. Martiyanov, and A. Turlapov, Phys. Rev. Lett. **112**, 045301 (2014).
- [28] P. A. Murthy, D. Kedar, T. Lompe, M. Neidig, M. G. Ries, A. N. Wenz, G. Zürn, and S. Jochim, Phys. Rev. A **90**, 043611 (2014).
- [29] M. G. Ries, A. N. Wenz, G. Zürn, L. Bayha, I. Boettcher, D. Kedar, P. A. Murthy, M. Neidig, T. Lompe, and S. Jochim, Phys. Rev. Lett. **114**, 230401 (2015).
- [30] P. A. Murthy, I. Boettcher, L. Bayha, M. Holzmann, D. Kedar, M. Neidig, M. G. Ries, A. N. Wenz, G. Zürn, and S. Jochim, Phys. Rev. Lett. **115**, 010401 (2015).
- [31] K. Fenech, P. Dyke, T. Peppler, M. G. Lingham, S. Hoinka, H. Hu, and C. J. Vale, Phys. Rev. Lett. **116**, 045302 (2016).
- [32] K. Fenech, P. Dyke, T. Peppler, M. G. Lingham, S. Hoinka, H. Hu, and C. J. Vale, supplemental material, Phys. Rev. Lett. **116**, 045302 (2016).
- [33] S. S. Botelho, and C. A. R. Sá de Melo, Phys. Rev. Lett. **96**, 040404 (2006).
- [34] J. Tempere, S. N. Klimin, and J. T. Devreese, Phys. Rev. A **79**, 053637 (2009).
- [35] M. Iskin, and C. A. R. Sá de Melo, Phys. Rev. Lett. **103** 165301 (2009).
- [36] S. N. Klimin, J. Tempere, and J. T. Devreese, New J. Phys. **14**, 103044 (2012).
- [37] L. Salasnich , P. A. Marchetti, and F. Toigo, Phys. Rev. A **88**, 053612 (2013).
- [38] G. Bertaina, and S. Giorgini, Phys. Rev. Lett. **106**, 110403 (2011).
- [39] V. Pietilä, Phys. Rev. A **86**, 023608 (2012).
- [40] R. Watanabe, S. Tsuchiya, and Y. Ohashi, Phys. Rev. A **88**, 013637 (2013).

- [41] M. Bauer, M. M. Parish, and T. Enss, Phys. Rev. Lett. **112**, 135302 (2014).
- [42] B. C. Mulkerin, K. Fenech, P. Dyke, C. J. Vale, X.-J. Liu, and H. Hu, Phys. Rev. A **92**, 063636 (2015).
- [43] F. Marsiglio, P. Pieri, A. Perali, F. Palestini, and G. C. Strinati, Phys. Rev. B **91**, 054509 (2015).
- [44] L. Salasnich, and G. Bighin, J. Supercond. Nov. Magn., **29**, 3103 (2016).
- [45] B. C. Mulkerin, L. He, P. Dyke, C. J. Vale, X.-J. Liu, and H. Hu, Phys. Rev. A **96**, 053608 (2017).
- [46] D. M. Eagles, Phys. Rev. **186**, 456 (1969).
- [47] A. J. Leggett, in *Modern Trends in the Theory of Condensed Matter*, edited by A. Pekalski and J. Przystawa (Springer Verlag, Berlin, 1980), p. 14.
- [48] C. A. R. Sá de Melo, M. Randeria, and J. R. Engelbrecht, Phys. Rev. Lett. **71**, 3202 (1993).
- [49] R. Haussmann, Z. Phys. B **91**, 291(1993).
- [50] E. Timmermans, K. Furuya, P. W. Milonni, and A. K. Kerman, Phys. Lett. A **285**, 228 (2001).
- [51] Y. Ohashi, and A. Griffin, Phys. Rev. Lett. **89**, 130402 (2002).
- [52] R. Haussmann, W. Rantner, S. Cerrito, and W. Zwerger, Phys. Rev. A **75**, 023610 (2007).
- [53] W. Zwerger (Ed), *The BCS-BEC Crossover and the Unitary Fermi Gas*, (Springer Verlag, Berlin, 2012).
- [54] C. A. Regal, M. Greiner, and D. S. Jin, Phys. Rev. Lett. **92**, 040403 (2004).
- [55] M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, A. J. Kerman, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **92**, 120403 (2004).
- [56] J. Kinast, S. L. Hemmer, M. E. Gehm, A. Turlapov, and J. E. Thomas, Phys. Rev. Lett. **92**, 150402 (2004).
- [57] M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, C. Chin, J. Hecker Denschlag, and R. Grimm, Phys. Rev. Lett. **92**, 203201 (2004).
- [58] M. W. Zwierlein, J. R. Abo-Shaeer, A. Schirotzek, C. H. Schunck, and W. Ketterle, Nature **435**, 1047 (2005).
- [59] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, Rev. Mod. Phys. **80**, 885 (2008).
- [60] C. J. Pethick, and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).
- [61] W. Ketterle, and M. W. Zwierlein, in *Proceedings of the International School of Physics “Enrico Fermi”, Course CLXIV*, edited by M. Inguscio, W. Ketterle,

- and C. Salomon (IOS Press, Amsterdam, 2008).
- [62] J. Yin, Phys. Rep. **430**, 1 (2006).
  - [63] R. Grimm, M. Weidemüller, and Y. B. Ovchinnikov, Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics **42**, 95 (2000).
  - [64] H. Feshbach, Ann. Phys. **5**, 357 (1958).
  - [65] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, Rev. Mod. Phys. **80**, 1215 (2008).
  - [66] T. Bourdel, J. Cubizolles, L. Khaykovich, K. M. F. Magalhães, S. J. J. M. F. Kokkelmans, G. V. Shlyapnikov, and C. Salomon, Phys. Rev. Lett. **91**, 020402 (2003).
  - [67] E. L. Hazlett, Y. Zhang, R. W. Stites, and K. M. O'Hara, Phys. Rev. Lett. **108**, 045304 (2012).
  - [68] G. Zürn, T. Lompe, A. N. Wenz, S. Jochim, P. S. Julienne, and J. M. Hutson, Phys. Rev. Lett. **110**, 135301 (2013).
  - [69] C. A. Regal, and D. S. Jin, Phys. Rev. Lett. **90**, 230404 (2003).
  - [70] C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, and E. Tiesinga, Rev. Mod. Phys. **82**, 1225 (2010).
  - [71] B. Rosenstein, and D. Li, Rev. Mod. Phys. **82**, 109 (2010).
  - [72] N. Prokof'ev, O. Ruebenacker, and B. Svistunov, Phys. Rev. Lett. **87**, 270402 (2001).
  - [73] N. Prokof'ev, and B. Svistunov, Phys. Rev. A **66**, 043608 (2002).
  - [74] D. S. Petrov, M. A. Baranov, and G. V. Shlyapnikov, Phys. Rev. A **67**, 031601 (2003).
  - [75] J. Levinson, and M. M. Parish, Annu. Rev. Cold Atoms and Molecules **3**, 1 (2015).
  - [76] D. S. Petrov, and G. V. Shlyapnikov, Phys. Rev. A **64**, 012706 (2001).
  - [77] Z. Hadzibabic, P. Krüger, M. Cheneau, B. Battelier, and J. Dalibard, Nature **441**, 1118 (2006).
  - [78] J. T. Stewart, J. P. Gaebler, and D. S. Jin, Nature **454**, 744 (2008).
  - [79] J. P. Gaebler, J. T. Stewart, T. E. Drake, D. S. Jin, A. Perali, P. Pieri, and G. C. Strinati, Nat. Phys. **6**, 569 (2010).
  - [80] Y. Sagi, T. E. Drake, R. Paudel, R. Chapurin, and D. S. Jin, Phys. Rev. Lett. **114**, 075301 (2015).
  - [81] S. Tsuchiya, R. Watanabe, and Y. Ohashi, Phys. Rev. A **80**, 033613 (2009).
  - [82] Q. Chen, and K. Levin, Phys. Rev. Lett. **102**, 190402 (2009).
  - [83] H. Hu, X.-J. Liu, P. D. Drummond, and H. Dong, Phys. Rev. Lett. **104**, 240407

- (2010).
- [84] S. Tsuchiya, R. Watanabe, and Y. Ohashi, Phys. Rev. A **82**, 033629 (2010).
- [85] S.-Q. Su, D. E. Sheehy, J. Moreno, and M. Jarrell, Phys. Rev. A **81**, 051604(R) (2010).
- [86] S. Tsuchiya, R. Watanabe, and Y. Ohashi, Phys. Rev. A **84**, 043647 (2011).
- [87] A. Perali, F. Palestini, P. Pieri, G. C. Strinati, J. T. Stewart, J. P. Gaebler, T. E. Drake, and D. S. Jin, Phys. Rev. Lett. **106**, 060402 (2011).
- [88] E. J. Mueller, Phys. Rev. A **83**, 053623 (2011).
- [89] R. Watanabe, S. Tsuchiya, and Y. Ohashi, Phys. Rev. A **86**, 063603 (2012).
- [90] M. Ota, H. Tajima, R. Hanai, D. Inotani, and Y. Ohashi, Phys. Rev. A **95**, 053623 (2017).
- [91] S. Tan, Ann. Phys. **323**, 2952 (2008).
- [92] S. Tan, Ann. Phys. **323**, 2971 (2008).
- [93] F. Werner, and Y. Castin, Phys. Rev. A **86**, 013626 (2012).
- [94] J. Hofmann, Phys. Rev. Lett. **108**, 185303 (2012).
- [95] M. Valiente, N. T. Zinner, and K. Mølmer, Phys. Rev. A **86**, 043616 (2012).
- [96] M. Valiente, N. T. Zinner, and K. Mølmer, Phys. Rev. A **84**, 063626 (2011).
- [97] P. Nozières, and S. Schmitt-Rink, J. Low Temp. Phys. **59**, 195 (1985).
- [98] S. A. Morgan, M. D. Lee, and K. Burnett, Phys. Rev. A **65**, 022706 (2002).
- [99] D. J. Thouless, Ann. Phys. **10**, 553 (1960).
- [100] K. Miyake, Prog. Theor. Phys. **69**, 1794 (1983).
- [101] M. Abramowitz, and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*, (Dover Publications, 1970) p. 378.
- [102] J. R. Schrieffer, *Theory of Superconductivity*, (Addison-Wesley, New York, 1964).
- [103] E. Braaten, and L. Platter, Phys. Rev. Lett. **100**, 205301 (2008).
- [104] P. Pieri, A. Perali, and G. C. Strinati, Nat. Phys. **5**, 736 (2009).
- [105] K. Van Houcke, F. Werner, E. V. Kozik, N. V. Prokof'ev, and B. V. Svistunov, arXiv:1303.6245v1.
- [106] R. Haussmann, M. Punk, and W. Zwerger, Phys. Rev. A **80**, 063612 (2009).
- [107] R. Hanai, and Y. Ohashi, Phys. Rev. A **90**, 043622 (2014).
- [108] H. Tajima, R. Hanai, and Y. Ohashi, Phys. Rev. A **93**, 013610 (2016).
- [109] S. Viefers, F. Ravndal, and T. Haugset, Am. J. Phys. **63**, 369 (1995).