

学位論文 博士（工学）

モデルベース開発におけるシステム同定に関する研究
－同定入力選定と評価指標の提案－

2017 年度

慶應義塾大学大学院理工学研究科

室井秀夫

目次

第 1 章	序論	2
1.1	背景	2
1.2	本論文の位置づけ	6
1.3	本論文の構成	6
第 2 章	研究背景	8
2.1	モデルベース開発	8
2.2	システム同定実験の設計	11
2.3	モデルの妥当性評価	29
2.4	まとめ	36
第 3 章	巡回シフト M 系列を用いた多入力 1 出力システムの同定	37
3.1	はじめに	37
3.2	共通極システムが確定的可同定となる巡回シフト M 系列の条件	39
3.3	数値例	47
3.4	まとめ	50
第 4 章	時間領域におけるシステム同定結果の評価指標	51
4.1	はじめに	51
4.2	FIT によるシステム同定結果評価	52
4.3	時間領域における評価のための無次元指標	54
4.4	無次元指標の分類	58
4.5	数値例による無次元指標の特徴把握	66
4.6	まとめ	78
第 5 章	結論	79
5.1	本論文による成果	79
5.2	今後の発展性	80

	2
謝辭	82
參考文獻	84
付録 A 研究業績	88

目次

1.1	Flowchart of system identification	4
1.2	Overview of this thesis	7
2.1	V-model for typical software development	9
2.2	Controller model and plant model for Model-Based Development	9
2.3	V-model for Model Based Development	10
2.4	Conceptual diagram of ARX model for $n_a = 1$, $n_b = 1$ and $N = 4$	13
2.5	Multicollinearity	14
2.6	An example of saturation characteristics	17
2.7	An example of dead zone	18
2.8	M-sequence generator (D denotes shift register)	19
2.9	Gold sequence generator	23
2.10	Wave forms of M seq 1 and M seq 2	23
2.11	Histogram of cross correlation function between M seq 1 and M seq 2	24
2.12	Wave forms of Gold seq 1 ~ Gold seq 3	24
2.13	Cyclic shifted M-sequences for 2 inputs	25
2.14	Impulse response of the example (Blue:impulse response Red : 1% of maximum value of impulse response)	27
2.15	Input and output signal	31
2.16	Frequency response of models	31
2.17	Pole and zeros of ARX models (\times : pole, \circ : zero)	32
2.18	Residual analysis (Blue:2nd order, Green:4th order, Red:10th order)	33
2.19	Cross validation	34
3.1	Toner supply system	38
3.2	Rank of $\Phi^T \Phi$ for the shift length. Rank=6 means full rank.	48
3.3	Rank of $\Phi^T \Phi$ for the shift length. Rank=13 means full rank.	49

4.1	Waveform of the example : gain shift case (Blue : $y(k)$, Red : $\hat{y}(k)$)	53
4.2	Waveform of the example : phase shift case (Blue : $y(k)$, Red : $\hat{y}(k)$)	53
4.3	Interpritation of index B	59
4.4	Maximum and minimum value of index B	59
4.5	Interpritaion of errors of FIT and index B	60
4.6	Example of index B and its partial derivative with respect to w	62
4.7	Visualization of FIT on the example (blue shows values less than -100.)	69
4.8	Visualization of E on the example (blue shows values less than -1.)	69
4.9	Visualization of r on the example	69
4.10	Visualization of Tri_2 on the example	69
4.11	Optimal Values of criteria when $\sigma^2 = 0.5$	72
4.12	Optimal Values of criteria when $\sigma^2 = 1.0$	72
4.13	Values of FIT for eq.(4.59) and (4.60) , red indicate higher value, blue indicate lower value, o indicate true parameter	75
4.14	Values of Tri_2 for eq.(4.59) and (4.60) , red indicate higher value, blue indicate lower value, o indicate true parameter	75
4.15	Values of FIT for eq.(4.63) and (4.64), red indicate higher value, blue indicate lower value, o indicate true parameter, * indicate optimal value for FIT	76
4.16	Values of Tri_2 for eq.(4.63) and (4.64) , red indicate higher value, blue indicate lower value, o indicate true parameter, * indicate optimal value for Tri_2	77

表目次

2.1	Coefficients of primitive polynomials	20
2.2	Example of generation of M-sequence using primitive polynomial (1, 3)	20
2.3	Mean value of estimated and true parameters	28
2.4	Standard deviation of estimated parameters	28
2.5	Sum of eigenvalues of \mathbf{V}	29
4.1	Values of FIT for the example	54
4.2	Classification of criteria by inequality	58
4.3	Values of criteria for the example in section 4.2	71
4.4	Maximization methods for criteria	72
4.5	Optimal Values for the criteria when $\sigma^2 = 0.5$	72
4.6	Optimal Values for the criteria when $\sigma^2 = 1.0$	73

略語・記号

本論文で用いる略語，および記号を定義する．ここで定義した略語・記号は本論文中では断りなく使用する．

LTI Linear Time-Invariant : 線形時不変

SISO Single Input Single Output : 1 入力 1 出力

MISO Multiple Input Single Output : 多入力 1 出力

ARX モデル Auto-Regressive with eXogenous input model : 外生入力をもつ自己回帰モデル

FIR Finite Impulse Responce : 有限インパルス応答

PE 性 Persistently Excitation : 持続的励振性

BIBO Bounded-Input Bounded-Output : 有界入力有界出力

MSE Mean Squared Error : 平均二乗誤差

RMSE Root Mean Squared Error : 平均二乗誤差平方根

NRMSE Normalized RMSE : 規格化平均二乗誤差平方根

FIT Fit ratio : 適合率

r 相関係数

SITB Matlab System Identification Tool Box

全零システム 有限インパルス応答で記述されるシステム

M 系列 Maximum length shift register (最大周期シフトレジスタ)

\mathbb{R} 実数

\mathbb{Z} 整数

$\mathbb{R}^{a \times b}$ $a \times b$ の実数行列

$\mathbf{X} > 0$ \mathbf{X} は正定値行列

\oplus 2 を法とする和

第 1 章

序論

本論文は

1. 共通極をもつ多入力系を同定する際に印加する M 系列信号の満たすべき条件と，その条件に基づいた入力設計法の提案
2. システム同定結果の時間領域における評価指標についての考察と提案

を目的とした研究成果をまとめたものである。

1.1 背景

近年，制御システムの複雑化に対処するために，モデルベース開発（Model-Based Development : MBD）と呼ばれる組み込み制御システム開発手法が自動車業界を中心に広がってきている [1]。JMAAB (Japan MBD Automotive Advisory Board) による，MBD の定義をつぎに与える [2]。

MBD の定義

MBD の定義：複雑化・高度化した現代の自動車制御システム開発において MATLAB/Simulink 等の CAE (Computer Aided Engineering) ツールによって，制御装置と制御対象の機能をモデリングし，それらを実行可能な仕様書として用いることで，製品ライフサイクル全般に渡った品質向上と開発効率向上を目指した開発手法のことである。シミュレーション技術を駆使することで，高度な機能確認を実施でき，かつ，複雑な開発工程のルーチンワーク化を促進することで，自動化・省力化にも貢献する。

モデルの定義：対象の機能が図示されており，一意的に解釈できるもの。

この定義からわかるように、MBDでは制御対象と制御装置^{*1}をモデリングし、関係する組織間でモデルを共有したうえで、シミュレーションにより機能検証を行いつつ、設計を行う。これにより、従来の設計試作を繰り返す開発手法よりも手戻りを減らし工期を短縮できる上に、モデルを用いたシステマティックな制御系設計が可能となり、すでに多くの企業において成果を上げている [3]–[5]。

モデルベース開発を行うにあたって特に重要となるのが制御対象を表現するプラントモデル^{*2}である。モデリングの方法には大きく分けて2種類の方法、すなわちホワイトボックスモデリングとブラックボックスモデリング、がある。

ホワイトボックスモデリングは、制御対象における現象を運動方程式などの第一原理に基づいて記述するものである。この方法は対象に働く物理法則が明確かつ、モデリングに用いるパラメータが測定できる場合には有用である。一方、分布定数系など、対象を正確に表現するためには次数の大きなモデルが必要であり、計算に時間がかかりすぎる場合や、対象を物理法則で表現したものの、簡単に測定できない未知パラメータが多く、シミュレータとして機能しないような場合もある。このような場合に検討されるのがブラックボックスモデリングである。ブラックボックスモデリングは、対象の入出力間に存在する関係を入出力データをもとに統計的にモデリングするものである。モデルベース開発において、ブラックボックスモデリングは主に2つの使われ方をする。ひとつは、ホワイトボックスモデルの低次元化手段として、もうひとつはホワイトボックスモデリングが困難な物理現象をもつ試作機のモデリング手段としてである。前者は、主に計算時間の低減を目的としたものであり、後者は制御対象の特性把握や数少ない試作機の共有などを目的としている。

なお、ダイナミクスが含まれる対象のブラックボックスモデリングは、制御分野でシステム同定と呼ばれる。足立 [6] によると、システム同定の基本的な手順は

1. プリ同定
2. システム同定実験の設計
3. システム同定実験
4. 入出力データの前処理
5. 構造同定（モデル構造の選定）
6. （線形・離散時間）システム同定
7. モデルの妥当性の評価

となっている。Fig. 1.1 に基本的な手順の流れを示す。システム同定は手順化されている上に、

^{*1} 制御装置はハードウェアとしての制御装置である。自動車のエンジンならば ECU (Engine Control Unit) などを指す。

^{*2} 本論文では、以後、断りなくプラントモデルを『モデル』と表記する。区別が必要な場合のみ、プラントモデルと表記する。

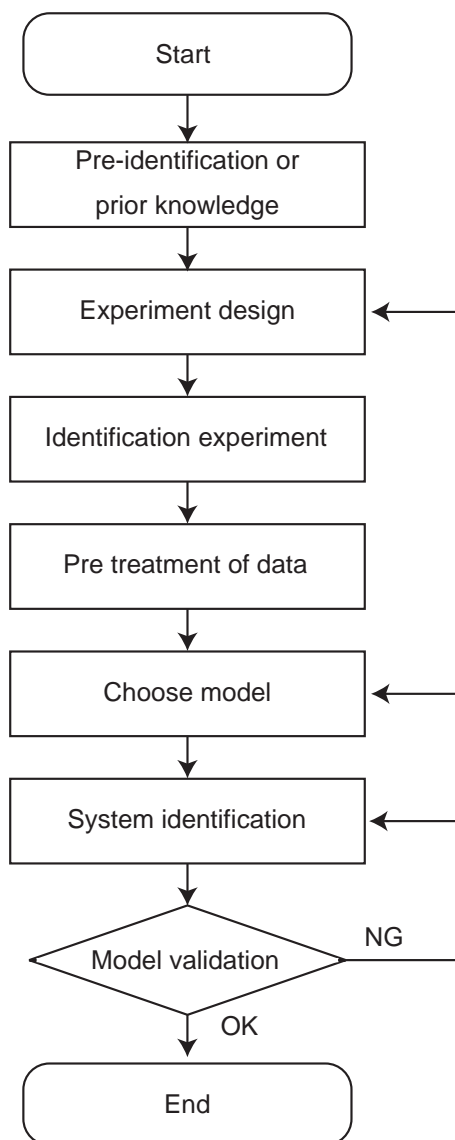


Fig. 1.1 Flowchart of system identification

MATLAB の System Identification ToolBox（以下，SITB と略記する）のような CAE ツールも構築され，コマンド一つで同定アルゴリズムを実行できる環境が整っている．そのため，システム同定は一見確立された分野であるように見える．

しかし，多くの場合システム同定というと，暗に前述の入出力データの前処理以降を指す場合が多い．たとえば，SITB には“iddemo”と呼ばれるシステム同定の例題が9種類実装されている [7]．このうち，iddemo1 はフィードバックプロセストレイナー PT326 と呼ばれる電圧を入力，温度を出力とする 1 入力 1 出力の熱伝導装置を同定する例題である [8]．この例題は，同定対象にランダム二値信号（Random Binary Signal : RBS）を印加して得られた入出力データをもとに，予測誤差法により状態空間モデル，ARX モデル，連続時間伝達関数をそれぞれ

同定し，得られたモデルのナイキスト線図を描画後，時間領域においてこれらのモデルの予測出力と実測出力をグラフ表示し，適合率と呼ばれる，予測出力と実測出力の二乗和誤差平方根を実測出力の標準偏差で規格化し，パーセント表示した指標を比較するという内容である．当然ではあるが，“適切な入出力データ”が与えられた状態からこのデモはスタートする．

一方，実際のシステム同定では，この適切な入出力データを得るために，同定実験までのステップが必要になる．まず，プリ同定による同定対象の特徴把握後，特徴に応じたシステム同定実験の設計を行う．このシステム同定実験の設計のステップでは，同定実験を行うための環境整備のほか，アクチュエータに印加する同定入力を考える．適切な同定入力を同定対象に与えられなければ，そのあとの同定実験のステップで適切な入出力データを得ることはできない．また，同定実験は時間と費用がかかり，簡単にやり直しがきかないこともある [9]．

このように，システム同定実験の設計のステップ，特に同定入力の設計はシステム同定にとって非常に重要な手順である．同定入力は，同定対象のもつすべてのモードを励起するものでなければならない．1入力1出力（Single Input Single Output : SISO）系に対する同定入力の場合，これは PE（Persistently Excitation : 持続的励振）性と呼ばれる条件によって特徴づけられることが知られている．そのため，SISO系では，M系列や白色雑音といった，すべてのモードを励起できるような信号を入力しておけばよいということになる．一方，多入力系の場合は入力間の相互相関を考慮しなければならないのだが，SISO系のように明確な特徴づけがされていない．

また，前述の iddemo を概観すると，モデルの妥当性評価では，離散時間信号の周波数領域でのモデルを推定する iddemo4，逐次同定を扱う iddemo5 を除くすべての例題において，時間領域におけるグラフ表示と適合率の比較を行っている．つまり，このグラフ表示と適合率の比較は，SITB によるシステム同定において事実上の標準であるといえるだろう．しかし，適合率はパーセント表示であるにも関わらず，負値を取る場合もある [10]．これは，適合率の定義から上限は 100 % でも下限が存在しないためであるが，% で表示する以上，ユーザは 0~100 までの間の値を取るものであると期待する．さらに，適合率はシステム同定にとって適切な指標なのかどうかについて，著者が調べた限り，ほとんど議論がされていない．

最後に，MBD の視点から前述の二つの課題を考える．まず，同定入力の設計についてであるが，同定対象には ON/OFF の二値信号が入力となることが多い．そのため，二値信号によりすべてのモードを励起できる信号を提示することが望まれている．つぎに，モデルの妥当性評価についてであるが，適合率は SITB に搭載されているため，MBD に関わる多くのユーザが目にするようになる．しかし，適合率がシステム同定結果にとって適切な評価指標であるかどうかもわからないまま，これを使うことは好ましくなく，適合率についての議論が必要である．

このように，システム同定はいまだに解決すべき問題は多く，発展途上であると考えられる．MBD の発展とともに，システム同定への期待は増しており，同定法以外の部分について

も焦点を当てた研究が求められている。

1.2 本論文の位置づけ

本論文では MBD におけるシステム同定について論ずる。特に、背景として述べたように、“システム同定実験の設計”と“モデルの妥当性の評価”それぞれのうち、多入力系の入力設計と、時間領域でのシステム同定結果の評価法は、システム同定を成功させる上で重要である。

まず、多入力系の入力設計について、本論文では対象のすべてのモードを励起する入力について、すなわち可同定性の観点から入力設計を論じる。特に、SISO系でよく用いられる M 系列を多入力系に印加することを考える。M 系列をはじめとする二値信号は、アクチュエータの飽和にかからないよう設計可能である上に、ON/OFF のような二値しか取りえない入力に対しても印加可能であり、同定入力として利用できれば、応用上有用である。

つぎに、背景で述べたとおり、時間領域でのシステム同定結果の評価は“モデルの妥当性の評価”においてほぼ必ず行われ、適合率も多くの人が見る指標となっている。この指標がシステム同定にとって妥当かどうかを議論し、他分野を含めて他に適切な指標を探ることは重要であると考えられる。

以上のように、本論文では、MBD におけるモデリング手段としてシステム同定を利用しやすい環境を整えることを目的とし、多入力系の入力設計の観点から“共通極をもつシステム多入力系を同定する際に印加する M 系列信号の満たすべき条件”を提示し、時間領域でのシステム同定結果の評価の観点から、“システム同定結果の時間領域における評価指標”として、システム同定の評価に適した指標について考察する。

1.3 本論文の構成

本論文の構成を Fig.1.2 に示す。第2章では、本論文の背景となる“モデルベース開発”および“システム同定実験の設計”と“モデルの妥当性の評価”の基礎的な事項および従来研究について述べる。

第3章では、共通極をもつ多入力系に対する入力設計について述べる。まず、共通極をもつ多入力系に対して、巡回シフト M 系列という二値信号を印加するために満たすべき条件を可同定性の観点から明らかにする。つぎに、条件に基づいた入力設計法を提案し、提案法が適切に機能することをシミュレーションによって確認する。

第4章では、システム同定結果の時間領域での評価法について述べる。まず、システム同定で用いる指標である適合率の特徴をまとめ、その問題点を明らかにする。つぎに、適合率に代わる指標を提示するために、システム同定分野外で用いられている指標についての特徴を、適用される不等式をもとにまとめ、このまとめをもとに新たな指標を提案し、その意味について

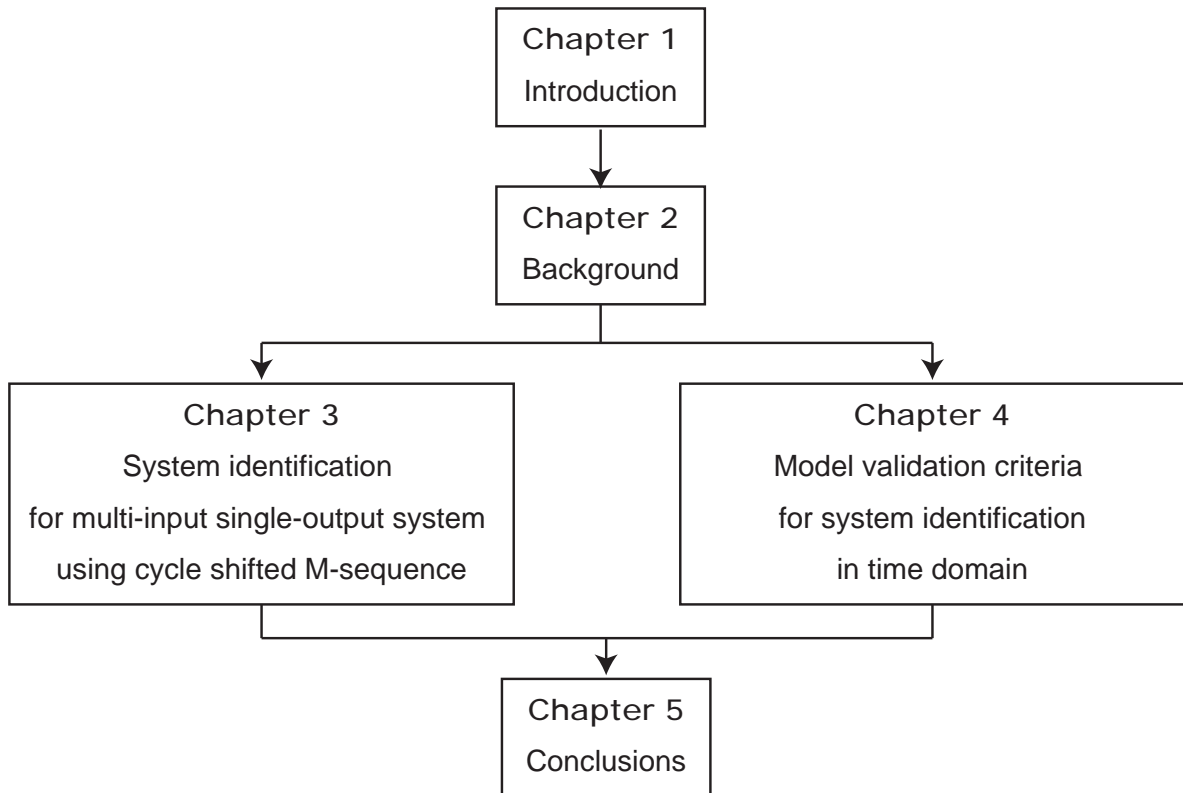


Fig. 1.2 Overview of this thesis

調べた。最後に、提案した指標が最適値となる条件について解析し、システム同定結果評価に対する有用性を数値例により検証した。

第5章では、本論文の結論について述べる。

第 2 章

研究背景

本章では、はじめにモデルベース開発の概要について述べる。つぎに、前章で説明したように、システム同定は 7 つのステップからなる。このうち、本論文でのメインピックである“システム同定実験の設計”と、“モデルの妥当性評価”についての概要、従来研究について述べる。

2.1 モデルベース開発

モデルベース開発 (MBD) は、組み込みソフトウェア開発手法のひとつで、近年自動車業界を中心に広がりを見せている。本節では、MBD の基本的な概念と流れについて説明し、システム同定との関わりについて述べる。

2.1.1 ソフトウェア開発の基本的な流れ

ソフトウェア開発の基本的な流れを Fig. 2.1 に示す [11],[12]。この流れは一般的に V 字プロセス、あるいは V モデルと呼ばれる。

左側半分が要件定義や設計といった要求仕様策定の工程であり、右側半分がテストの工程を示している。また、V 字プロセスでは、左側の項目で決めた要求仕様に対して同じ高さに配置されている右側の項目のテストが対応している。たとえば、最上流の要件定義 (Requirement) は顧客要望から製品規格を決める工程であるのに対し、受け入れテスト (Acceptance test) は取り決めた規格をシステムが満足し、顧客要望を満たすことができるか確かめる工程である。V 字プロセスは要求とテストを対応付けることで、どのテストがどの要求と対応しているかを明確化する狙いがある。

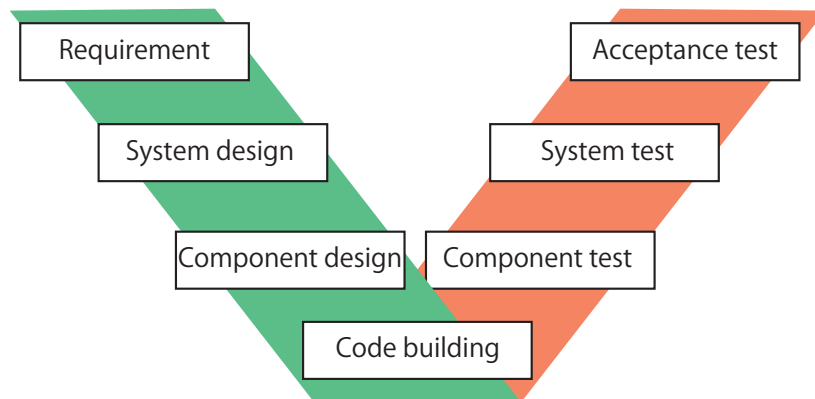


Fig. 2.1 V-model for typical software development

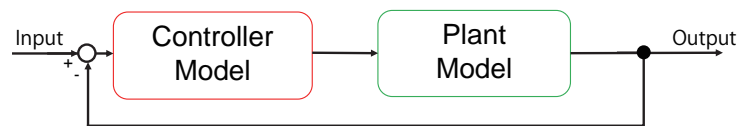


Fig. 2.2 Controller model and plant model for Model-Based Development

2.1.2 MBD の流れ

従来の開発には以下に挙げる問題点が存在した [13].

- 【1】 構築しようとしているシステムの複雑化により、仕様書のレビューに限界がある.
- 【2】 仕様書は自然言語で記述されるため、曖昧な部分や誤解が生じる.
- 【3】 仕様書のレビューや誤解により、不具合が生じ、テストで手戻りが発生する.

MBD では、【1】～【3】までの問題点に対し、Fig. 2.2 に示すように、自然言語で記述される仕様書をコントローラモデル、制御対象をプラントモデルとしてそれぞれを MATLAB /Simulink 等の CAE ツールを用いて記述することにより解決を図る.

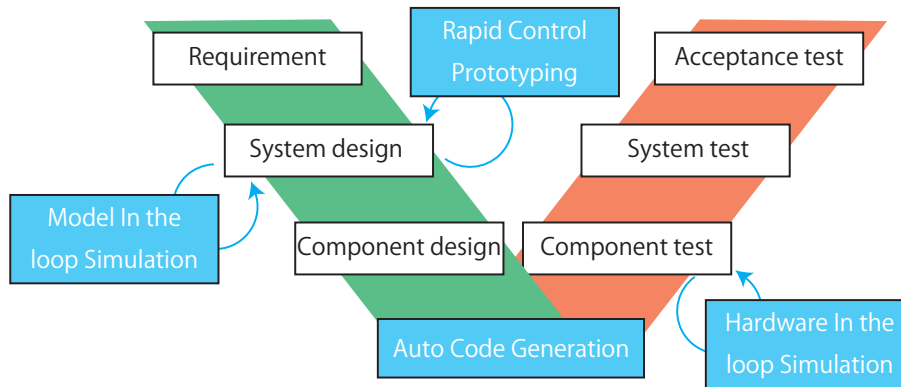


Fig. 2.3 V-model for Model Based Development

MBD に対する V 字プロセスを Fig. 2.3 に示す。ただし、青枠部分が MBD に対応している。青枠部分について、それぞれ説明する。

Model In the Loop Simulation

プラントモデルとコントローラモデルにより、シミュレーションを行うことを Model In the Loop Simulation (MILS) と呼ぶ。シミュレーションにより、コントローラモデルの振る舞いを確認できるため、【1】のレビューの負担を減らすことができる。また、コントローラモデルを開発関係者で共有するため、【2】で問題となった曖昧さや誤解が生じなくなるメリットがある。さらに、シミュレーションによりテスト工程の一部を先取りできるため、【3】で問題となる不具合を減らせる。

Rapid Control Prototyping

MILS で開発されたコントローラモデルと実制御対象のプロトタイプを接続し、振る舞いを確認することを Rapid Control Prototyping (RCP) と呼ぶ。MILS と並行、もしくは MILS の後に行われる。RCP を行うことで MILS で見えなかった実時間動作での不具合が確認できる。

自動コード生成

MILS や RCP で開発されたコントローラモデルを実装できる形のソースコードに機械的に変換することを自動コード生成 (Auto Code Generation : ACG) と呼ぶ。たとえば、Simulink で生成したコントローラモデルであれば Simulink Coder [14] によりソースコードに変換できる。仕様書からハンドコーディングする工程を減らせる^{*1}ため、【2】で問題となる誤解のほか、コーディングでの単純ミスを減らせる。

Hardware In the Loop Simulation

自動コード生成により得られたソースコードを実装したボードと、プラントモデルを接続し

^{*1} 自動コード生成はすべてのソフトウェアに適用できるわけではない。特に、ボード間の通信や割り込み処理への対応が困難なことが多い。

テストを行うことを **Hardware In the Loop Simulation (HILS)** と呼ぶ。数多くのテストシナリオに基づき、開発したソフトに不具合やバグがないことを確認する。

2.1.3 プラントモデリングとシステム同定

MBD でコントローラモデルを開発するためには、プラントモデルが重要となる。実機動作を再現できるプラントモデルを得られていれば、HILS 後のテストで実機をスムーズに導入でき、MBD の目的である開発効率化を実現できる。一方、特に複雑な物理現象を扱う場合に、プラントモデルは MBD にとってボトルネックになりやすい。たとえば、

- 【1】 構築したプラントモデルと制御対象とで挙動が異なり、MILS に着手できない。
- 【2】 複雑すぎるプラントモデルを構築したため、MILS や HILS でシミュレーションする際に時間がかかりすぎる、

といったことが起こると、開発効率が落ちてしまう。前者はパラメータが不適切、もしくは物理現象を再現できていないなどの原因が考えられる。後者は 3DCAD で構築したモデルなど、演算に時間がかかるモデルを用いる場合に起きる。このような場合のモデリング法のひとつとしてシステム同定が考えられる。前述の問題点【1】に対し、システム同定では、適切な入出力データを得られれば、再現できていない物理現象を特定せずとも、モデルを構築できる。また、【2】についても、MBD では入力からセンサまでのプラントモデルさえあればよい。そのため、構築したモデルに対してシステム同定を行ない、低次のプラントモデルを得ることで、演算時間を短縮できる。

システム同定を行なうとき、適切な入出力データが得られるよう、可同定性を満たす同定入力を印加すること、そして、同定で得られたモデルの妥当性が確認できることが重要となる。まず、前者については制御対象が多入力システムである場合、可同定性に関する研究は少なく、同定入力設計が課題となる。また、後者のモデルの妥当性評価では、同定実験で用いた入力を同定モデルに対し印加し、得られた予測値と実測値を比較する。この比較を行うとき、適合率と呼ばれる指標がよく用いられる。しかし、適合率は負値を取る、低振幅波形に高い値を示す、といった課題がある。そこで、本論文では、多入力 1 出力システム（共通極システム）に対する同定入力としての M 系列設計法と、同定結果の評価に用いる指標について述べる。

2.2 システム同定実験の設計

システム同定実験の設計のステップは、大きく分けて、

- 【1】 ハードウェアの選定
- 【2】 サンプリング周期の選定

【3】 同定入力的设计

の3項目からなる。本節では【3】について述べる。

なお，【1】は同定入力を加えるファンクションジェネレータなどの装置，対象を動かすモータなどのアクチュエータ，出力を取得するためにつけるエンコーダなどのセンサ，対象の動作帯域に応じた入出力を測定するためのオシロスコープやデータロガーといった計測器，などを同定対象の動作帯域やダイナミックレンジをもとに選定するものである。また，【2】は，できるだけ短いサンプリング周期でサンプリングしておき，後からデシメーションによりシステム同定に適したサンプリング周期に変換する方法が一般的に取られる。そのため，【1】，【2】はシステム同定において大きな問題となることは少ない。

2.2.1 SISO 系の ARX モデルを用いた同定

同定入力の設計が重要となる理由を，システム同定の基本である最小二乗法による SISO 系の ARX モデルを用いた同定により説明する。

【1】最小二乗法による ARX モデルのパラメータ推定

一般的な離散時間 LTI システムは

$$y(k) = G(q)u(k) + H(q)w(k) \quad (2.1)$$

で定義される。ただし， $u(k)$ ， $y(k)$ はそれぞれ時刻 k における入力，出力であり， $\{w(k)\}$ は平均値 0，有限な分散をもつ白色雑音である。また， $G(q)$ はシステムの伝達関数， $H(q)$ は雑音の伝達関数を示す。式 (2.1) に対し，ARX モデルは

$$G(q) = \frac{B(q)}{A(q)}, \quad H(q) = \frac{1}{A(q)} \quad (2.2)$$

すなわち，

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + w(k) \quad (2.3)$$

で定義される。ただし， $A(q)$ ， $B(q)$ はそれぞれ，

$$\begin{aligned} A(q) &= 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \cdots + a_{n_a}q^{-n_a} \\ B(q) &= b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \cdots + b_{n_b}q^{-n_b} \end{aligned}$$

で， n_a ， n_b はそれぞれ式 (2.3) 両辺の多項式の次数をあらわす。なお， q はシフトオペレータであり，

$$q^{-1}u(k) = u(k-1) \quad (2.4)$$

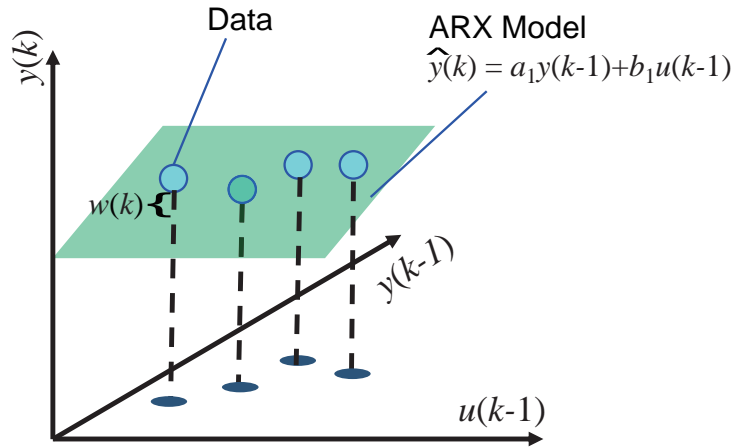


Fig. 2.4 Conceptual diagram of ARX model for $n_a = 1$, $n_b = 1$ and $N = 4$

である。ここで

$$\theta = [a_1, \dots, a_{n_a}, b_1, \dots, b_{n_b}]^T \in \mathbb{R}^{(n_a+n_b)}$$

$$\phi(k) = [-y(k-1), \dots, -y(k-n_a), u(k-1), \dots, u(k-n_b)]^T \in \mathbb{R}^{(n_a+n_b)}$$

と表記すると，式 (2.3) は

$$y(k) = \phi^T(k)\theta + w(k) \tag{2.5}$$

と書ける。入出力データが N 対，得られたとすると，

$$\mathbf{y} = \mathbf{\Phi}\theta + \mathbf{w} \tag{2.6}$$

と書ける。ただし，

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y(n_a+1) & y(n_a+2) & \dots & y(n_a+N) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^N$$

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi(n_a) & \phi(n_a+1) & \dots & \phi(n_a+N-1) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{N \times (n_a+n_b)}$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w(n_a+1) & w(n_a+2) & \dots & w(n_a+N) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^N$$

とおいた。Fig.2.4 は式 (2.6) を $n_a = 1$, $n_b = 1$, $N = 4$ として示す ARX モデルの概念図である。図のように，ARX モデルは多変量解析における重回帰分析と同様に， $n_a + n_b$ 個の説明変数 $u(k-1), \dots, u(k-n_b), y(k-1), \dots, y(k-n_a)$ で 1 つの目的変数 $y(k)$ を記述するものである。したがって，パラメータ θ の推定値 $\hat{\theta}$ は重回帰分析と同様に最小二乗法によって求められる。最小二乗法では，損失関数

$$J = \sum_{k=n_a+1}^{n_a+N} (y(k) - \phi^T(k)\theta)^2 \tag{2.7}$$

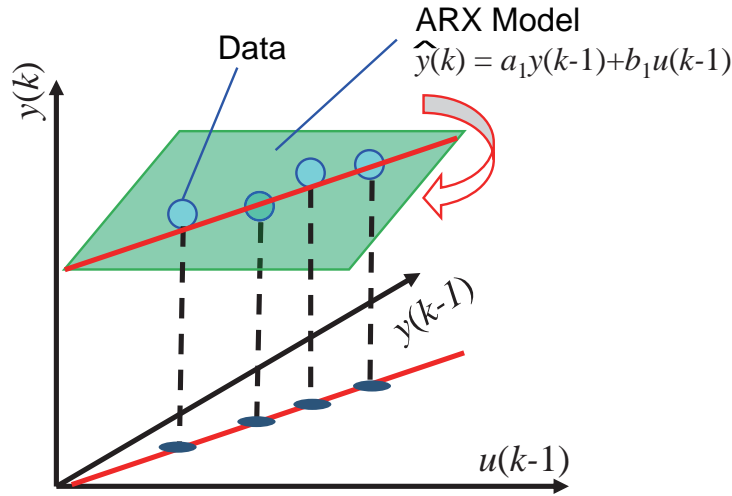


Fig. 2.5 Multicollinearity

を最小化するパラメータ θ を求める。 J を θ により偏微分して 0 とおくことで、

$$\Phi^T \Phi \hat{\theta} = \Phi^T y \tag{2.8}$$

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y \tag{2.9}$$

を得る。なお、式 (2.8) は正規方程式と呼ばれる。

[2] 多重共線性

$u(k-1)$, $y(k-1)$ が線形従属の関係にあると仮定する。すると、式 (2.8) 右辺の $\Phi^T \Phi$ が特異となり、この逆行列は存在しない。これは、Fig.2.5 のようにモデルが赤線を中心に回転の自由度をもつことになる。すなわち、モデルを一意に決めることができなくなる。多変量解析分野ではこのように、説明変数間に強い相関もしくは線形従属な関係があることを、多重共線性 [15] と呼ぶ。多変量解析分野では、説明変数間に多重共線性がある場合、主成分分析で説明変数をまとめて回帰を行う主成分回帰 (Principal Component Regression : PCR) や、式 (2.8) を

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi + \lambda I)^{-1} \Phi^T y \tag{2.10}$$

と正則化項 λI を加えて逆行列を取れるようにする、正則化最小二乗法 (リッジ回帰) などで対応する。

システム同定においても、多重共線性は問題になる。これを具体例を用いて説明する。3 次の ARX モデル

$$(1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + a_3 q^{-3})y(k) = (b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + b_3 q^{-3})u(k) + w(k) \tag{2.11}$$

のパラメータ a_i , b_i , $i = 1, 2, 3$ を最小二乗法により求める。ここで、 $u(k) = \sin(\omega T k + \varphi)$ と、角周波数 ω , 初期位相 φ の単一正弦波を印加した場合について考える。なお、 T はサンプリン

グ周期である。すると、

$$u(k) = \sin(\omega T k + \varphi) \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} u(k-1) &= \sin(\omega T k + \varphi) \cos \omega T - \cos(\omega T k + \varphi) \sin \omega T \\ &= \cos \omega T u(k) - \cos(\omega T k + \varphi) \sin \omega T \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} u(k-2) &= \sin(\omega T k + \varphi) \cos(2\omega T) - \cos(\omega T k + \varphi) \sin(2\omega T) \\ &= (\cos(2\omega T) - 2 \cos(\omega T)^2)u(k) + 2 \cos \omega T u(k-1) \end{aligned} \quad (2.14)$$

となり、 $u(k-2)$ は $u(k)$ と $u(k-1)$ の線形結合で記述できることがわかる。この単一正弦波 u を利用して式 (2.11) を同定すると、Fig.2.5 のように多重共線性が生じる。

このように、システム同定分野でも多重共線性は問題となる。そこで、システム同定では多重共線性を回避するために、適切な入力 $u(k)$ を印加しなければならない。

2.2.2 可同定性

システム同定では、同定入力と同定対象のもつすべてのモードを励起することにより、多重共線性を回避できる。これは、可同定性と呼ばれる概念によって特徴づけられる。本節ではまず、本論文で用いる可同定性について定義する。つぎに、線形差分方程式で記述される SISO 系に対して、可同定性を満たす入力の特徴づける PE 性について説明する。

[1] 確定的可同定

確定的な離散時間 SISO 系

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \cdots + a_{n_a} y(k-n_a) = b_1 u(k-1) + \cdots + b_{n_b} u(k-n_b) \quad (2.15)$$

を考える。ここで、このシステムの伝達関数

$$G(q) = \frac{b_1 q^{-1} + \cdots + b_{n_b} q^{-n_b}}{1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_{n_a} q^{-n_a}} \quad (2.16)$$

は既約であるとする。また、パラメータを

$$\boldsymbol{\theta} = [a_1, \cdots, a_{n_a}, b_1, \cdots, b_{n_b}]^T \quad (2.17)$$

と表記する。以上の準備のもとで、入出力データ $\{u(k), y(k) : k = 1, 2, \dots, N\}$ に基づいて、式 (2.17) のパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ が一意的に決定されるとき、 $\boldsymbol{\theta}$ は確定的可同定であるという [16],[17]。

[2] 確率的可同定

確率的な離散時間 SISO 系

$$y(k) + \cdots + a_{n_a} y(k-n_a) = b_1 u(k-1) + \cdots + b_{n_b} u(k-n_b) + w(k) \quad (2.18)$$

を考える。ただし、 $w(k)$ は平均値 0、分散 σ^2 の白色雑音である。入出力データ $\{u(k), y(k) : k = 1, 2, \dots, N\}$ に基づく、パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の漸近的最小分散推定値 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N$ が $N \rightarrow \infty$ のときに $\boldsymbol{\theta}$ に二乗

平均収束する，すなわち

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[\hat{\theta}_N] = \theta \quad (2.19)$$

のとき， θ は確率的可同定であるという [16],[17].

θ が確率的可同定ならば， θ は確定的可同定である.

[3] PE 性

式 (2.18) で示されるシステムが確率的可同定となる条件を与える． $u(k)$ の自己相関関数 $\phi_u(\tau)$ を

$$\phi_u(\tau) = E[u(k)u(k + \tau)] \quad (2.20)$$

で定義する．ただし， $E[\cdot]$ は期待値であり， τ はラグである．自己相関関数から構成される自己相関行列

$$\mathbf{R}_n = \begin{bmatrix} \phi_u(0) & \phi_u(1) & \cdots & \phi_u(n) \\ \phi_u(1) & \phi_u(0) & \cdots & \phi_u(n-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_u(n) & \phi_u(n-1) & \cdots & \phi_u(0) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

を定義する．ここで， \mathbf{R}_n が正則で， \mathbf{R}_{n+1} が特異となるような n が存在する場合， $u(k)$ は次数 n の PE 性信号であると呼ばれる．

式 (2.18) が確率的可同定となるための必要十分条件は，入力 u が次数 $n_a + n_b$ 以上の PE 性信号であることが知られている [18]. なお，前項で扱った単一正弦波は 2 次の PE 性信号であり，3 次の ARX モデルに対しては確率的可同定ではない．

2.2.3 同定入力

PE 性の次数が高く，同定に適した同定入力について述べる．

[1] 白色雑音

白色雑音とは，すべての周波数に対して同じ強度をもつ信号である．白色雑音の自己相関関数は

$$\phi(\tau) = \begin{cases} \sigma^2, & \tau = 0 \text{ のとき} \\ 0, & \tau \neq 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (2.22)$$

である．ただし， σ^2 は白色雑音の分散である．式 (2.22) より，白色雑音に対しては，自己相関行列式 (2.21) の対角成分のみに値をもつため，次数無限大の PE 性信号である．白色雑音は PE 性の観点からは理想的な同定入力であるものの，実用上は以下のように振幅面でいくつかの問題がある．

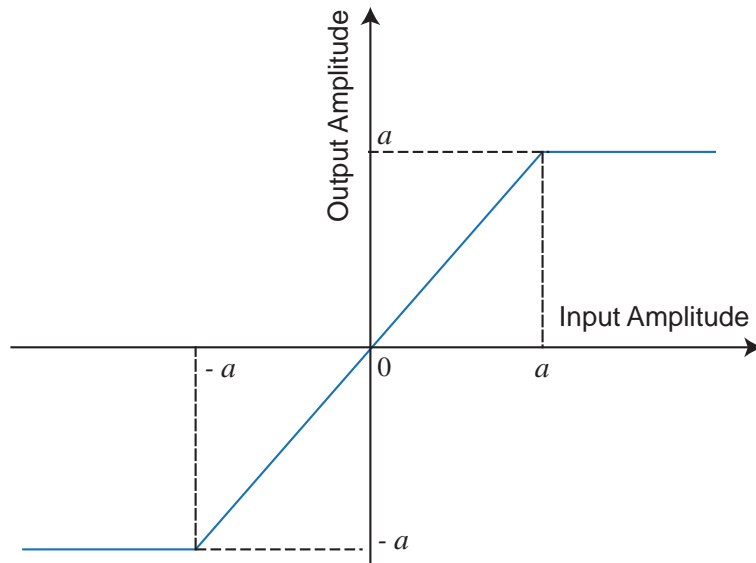


Fig. 2.6 An example of saturation characteristics

- 【1】 アクチュエータの飽和にかかりやすい
- 【2】 アクチュエータの不感帯にかかりやすい

まず【1】について述べる．一般的に出力の測定値には雑音が混入するため，出力値が小さいと雑音に埋もれてしまい，出力のSN比が悪くなる．SN比が悪いとシステム同定精度は劣化するため，SN比の良いデータを取るためには同定入力の振幅は大きくとるべきである．しかし，アクチュエータは Fig.2.6 のように，ある入力（Fig.2.6 では $\pm a$ ）以上は出力が一定値を取る飽和特性をもつことが多い．システム同定を行う場合，同定入力は飽和にかからない程度に小さくすることが望ましい．この観点に立つと，与えられたエネルギーが一定である制約のもと，最大振幅が小さいものが同定入力としては望ましい．これを特徴づける指標が波高率（crest factor）である [6]．信号 $u(k)$ の波高率は，

$$C_r = \frac{\max_k |u(k)|}{\sqrt{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k)^2}} \quad (2.23)$$

で定義される．波高率は， $u(k)$ の最大振幅を平均パワーで割ったものであり，小さいほど同定入力として望ましいと言える*2．平均値 0，分散 σ^2 の正規性白色雑音の場合，

$$C_r > \frac{3\sigma}{\sigma} = 3 \quad (2.24)$$

*2 たとえば，直流 ($u(k) = 1$) ならば $C_r = 1$ ，正弦波 ($u(k) = \sin(\omega k)$) ならば $C_r = \sqrt{2}$ である．

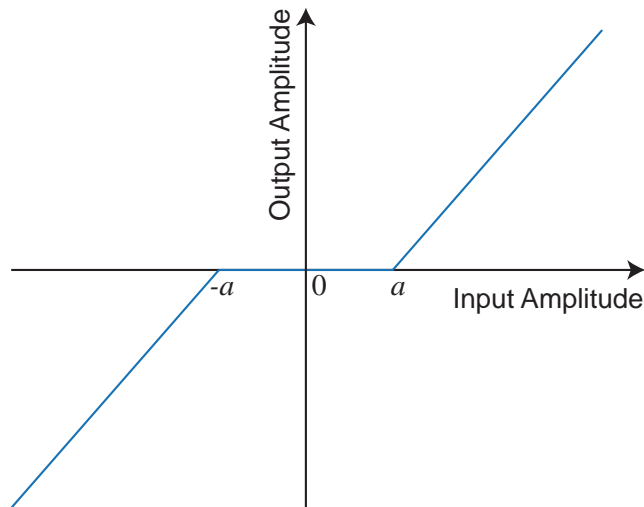


Fig. 2.7 An example of dead zone

である．ここでは計算のため， $\max_k |u(k)| > 3\sigma$ を利用した．なお， $u(k) \in [-a, a]$ の一様分布をもつ白色雑音の場合，分散は $a^2/3$ なので，

$$C_r > \frac{a}{a/\sqrt{3}} = \sqrt{3} \quad (2.25)$$

であり，正規性白色雑音よりは望ましい波高率をもつ．

つぎに，【2】について述べる．たとえば，モータなどは静止摩擦をもつため，Fig.2.7 に示すように，ある程度入力（Fig.2.7 では $\pm a$ ）を印加しなければ動き出さない．これは不感帯とよばれる非線形性である．白色雑音には，不感帯にかかるような小さい入力も含まれる．特に平均値 0 の正規性白色雑音の場合は 0 が最頻値となるため，不感帯にかかりやすい同定入力であるといえる．

これらの問題から，白色雑音を同定入力とすることは一般的に難しい．

(a) M 系列

前述の飽和・不感帯にかかりにくい信号として，1 と -1 のみを取る二値信号が挙げられる．二値信号の波高率は式 (2.23) より最小値である 1 を取り，振幅特性は同定入力の中で最良である．

二値信号の中でも，有限サンプル数において白色雑音を近似した性質をもつ“M 系列”がシステム同定ではよく利用される．M 系列は 1 周期 $N = 2^{n_m} - 1$ サンプルで構成される ± 1 のみを取る二値信号であり，1 周期中に 1 が 2^{n_m-1} 個，-1 が $2^{n_m-1} - 1$ 個存在する．ただし， n_m は任意の正の整数である [19]．

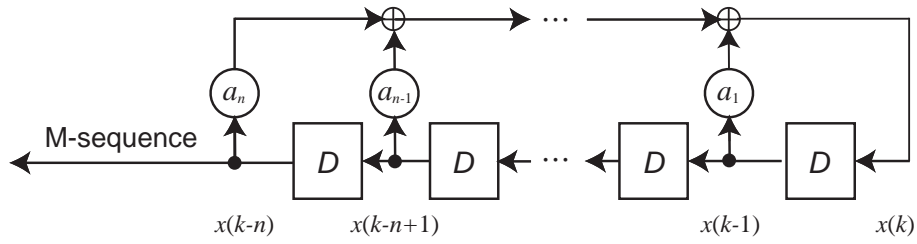


Fig. 2.8 M-sequence generator (D denotes shift register)

M 系列を $x(k)$, $k = 1, \dots, N$ とおくと, その 1 周期分の総和は

$$\sum_{k=1}^N x(k) = 1 \tag{2.26}$$

となる. また, M 系列の自己相関関数 $\phi_m(\tau)$ はラグ τ に対して, 以下の二値のみを取る.

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{N} \sum x(k)x(k + \tau) = \begin{cases} 1, & \tau = 0, N, 2N, \dots \text{のとき} \\ -\frac{1}{N}, & \text{その他} \end{cases} \tag{2.27}$$

よって, 式 (2.21) の自己相関行列 \mathbf{R}_{N+1} は,

$$\mathbf{R}_{N+1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{N} & \dots & -\frac{1}{N} & 1 \\ -\frac{1}{N} & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{N} & \vdots \\ -\frac{1}{N} & \dots & -\frac{1}{N} & 1 & -\frac{1}{N} \\ 1 & -\frac{1}{N} & \dots & -\frac{1}{N} & 1 \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

となる, すなわち, \mathbf{R}_N は正則で, \mathbf{R}_{N+1} は特異であり, M 系列は次数 N の PE 性信号であるといえる. そのため, N を大きくとれば PE 性の次数を大きくすることができ, 可同定性の条件を満たしやすい同定入力である.

なお, M 系列は

$$x(k) = a_1x(k-1) \oplus a_2x(k-2) \oplus \dots \oplus a_nx(k-n) \tag{2.29}$$

によって生成できる. ただし, $a_i, i = 1, 2, \dots, n$ は原始多項式^{*3}の係数であり 0 か 1 をとる. また, \oplus は 2 を法とする和をあらわす. これは, Fig.2.8 に示すような n 段のシフトレジスタを用いた発生回路に対応する. Table 2.1 に n_m に対して, 原始多項式となる $a_i = 1, i = 1, \dots, n_m$

^{*3} 整数係数多項式の係数の最大公約数が 1 のとき, その多項式を原始多項式という.

Table 2.1 Coefficients of primitive polynomials

n_m	Primitive polynomial
2	(1, 2)
3	(1, 3)
4	(1, 4)
5	(2, 5)
6	(1, 6)

Table 2.2 Example of generation of M-sequence using primitive polynomial (1, 3)

k	$x(k)$	$x(k-1)$	$x(k-2)$	$x(k-3)$
1	1	1	0	0
2	1	1	1	0
3	0	1	1	1
4	1	0	1	1
5	0	1	0	1
6	0	0	1	0
7	1	0	0	1
8	1	1	0	0

の組み合わせの例を示す。たとえば、 $n_m = 3$ における (1, 3) とは、

$$x(k) = x(k-1) \oplus x(k-3) \quad (2.30)$$

という、シフトレジスタ数が 3 の多項式を示す。ここで、式 (2.30) の初期値として、 $[x(0) x(-1) x(-2)] = [1 0 0]$ を与えると、Table 2.2 の $x(k)$ の列に示すように、 $[1 1 0 1 0 0 1 1 \dots]$ の系列が得られる。 $k = 8$ の行と $k = 1$ の行に注目すると、 $x(k) \sim x(k-3)$ のすべてが一致している。つまり、この系列は 1 周期 7 サンプルの系列であるといえる。なお、Table 2.2 の $x(k-1) \sim x(k-3)$ の 3 列を、1 行ごとに 3 桁の 2 進数とみると、 $[0 0 0]$ を除く 3 桁で表現可能な 2 進数がすべて含まれていることがわかる。このように、シフトレジスタ数が 3 の場合、 $2^3 - 1 = 7$ が最大の系列長である。なお、M 系列の名前は、あるシフトレジスタ数において生成可能な最大周期 (Maximum length) の系列というところからきている。

また、初期値に $[0 0 0]$ を与えると、0 しか得られないため、初期値は全要素が 0 以外のものを与えなければならない。

2.2.4 MISO系に対するM系列の印加法

MISO系に対するM系列の印加法としては、異なる原始多項式から生成したM系列のうち相互相関関数の値が小さいものを複数選別して加える方法、ある入力チャンネルに加えたM系列を巡回シフトさせ他の入力チャンネルに加える方法、の二種類が知られている。前者の方法はプリファードM系列 [20]、後者の方法は巡回シフトM系列 [21] と呼ばれる。

[1] プリファードM系列

プリファードM系列を作成するために、以下の間引き演算を導入する。

$$u[a] \equiv [u(0), u(a), \dots, u(ai), \dots]$$

とし、 a, i は正整数とする。これは、系列 u を a おきの間引くことを意味する。特に、M系列の場合、周期 N と互いに素な数 a で間引くことで、別の原始多項式から生成されるM系列となることが知られている。この性質を利用して生成したM系列同士の相互相関関数についてはつぎの二つの定理が知られている [20]。

定理 2.1

u と v を周期 $2^n - 1$ のM系列とする。

もし、3つの条件

- (1) $v = u[p]$.
- (2) $p = 2^k + 1$ または、 $p = 2^k - 1$ 。ただし、 k は任意の正整数。
- (3) $r = \gcd(n, k)$ としたとき、 n/r が奇数である。

をすべて満たすならば、 u と v の相互相関関数は1周期中に以下の3値を特定の回数とる

- $(-1 + 2^{(n+r)/2})/N$ を $2^{n-r-1} + 2^{(n-r-2)/2}$ 回
- $-1/N$ を $2^n - 2^{n-r} - 1$ 回
- $(-1 - 2^{(n+r)/2})/N$ を $2^{n-r-1} - 2^{(n-r-2)/2}$ 回

ただし、 n, k は正の整数であり、 $\gcd(n, k)$ は n と k の最大公約数をあらわす。

定理 2.2

u と v を周期 $2^n - 1$ の M 系列とする.

もし, 2 つの条件

- (1) n は 4 の倍数である
- (2) $v = u[-1 + 2^{(n+2)/2}]$ である

をともに満たすならば, u と v の相互相関関数は 1 周期中に以下の 4 値を特定の回数とる

- $(-1 + 2^{(n+2)/2})/N$ を $(2^{n-1} - 2^{(n-2)/2})/3$ 回
- $(-1 + 2^{n/2})/N$ を $2^{n/2}$ 回
- $-1/N$ を $2^{n-1} - 2^{(n-2)/2} - 1$ 回
- $(-1 - 2^{n/2})/N$ を $(2^n - 2^{n/2})/3$ 回

定理 2.1 を満たす M 系列対をプリファードペアと呼び, プリファードペアの関係にある M 系列をまとめてプリファード M 系列と呼ぶ. また, 定理 2.2 を満たす M 系列をまとめて特殊 M 系列と呼ぶ. これらを満たさない M 系列対の相互相関関数は一般的に大きな値を取ることが知られている. プリファード M 系列の組み合わせは非常に少ないことが知られており, 入力数が 6 を超えるとその生成が困難である [22].

[2] Gold 系列

系列間の相互相関関数が小さい多数の系列を得るために, Gold 系列 [23] が使われることがある. Gold 系列は Fig.2.9 に示すように, プリファードペアな 2 つの M 系列の 2 を法とする和を取ったものである. 各 M 系列の周期を $2^k - 1$ とすると, Fig.2.9 に示す M 系列 1 の発生器を固定して, M 系列 2 の初期値を 1 時刻ずつずらすことで, $2^k - 1$ 種類の Gold 系列を生成できる. 最終的に, 1 つのプリファードペアから, 生成した Gold 系列と, 生成に利用した 2 種類の M 系列の計 $2^k + 1$ 種類の異なる系列が生成できる. Gold 系列はプリファードペアとなる M 系列と同じく 3 値の相互相関関数を取ることが知られている. なお, Gold 系列それぞれの自己相関関数は相互相関関数と同じく 3 値を取る.

また, 定理 2.2 を満たす M 系列で, Gold 系列と同様な操作をして得られた系列は Gold ライク系列と呼ばれている. こちらも定理 2.2 で示す 4 値の相互相関関数を取ることが知られている.

Gold 系列の生成例を示す. まず, M 系列 $Mseq_1$ をシフトレジスタ数 $n = 5$, Table 2.1 から原始多項式の係数 (2, 5) を用いて生成する. つぎに, $Mseq_2[k] = Mseq_1[2^k + 1]$, $k = 2$ として間引いた M 系列 $Mseq_2$ を生成する. 定理 2.1 より, $e = \gcd(n, k) = 1$ なので, $Mseq_1$ と $Mseq_2$ はプリファードペアである. $Mseq_1$ と $Mseq_2$ それぞれ 1 周期を Fig.2.10 に示し, これ

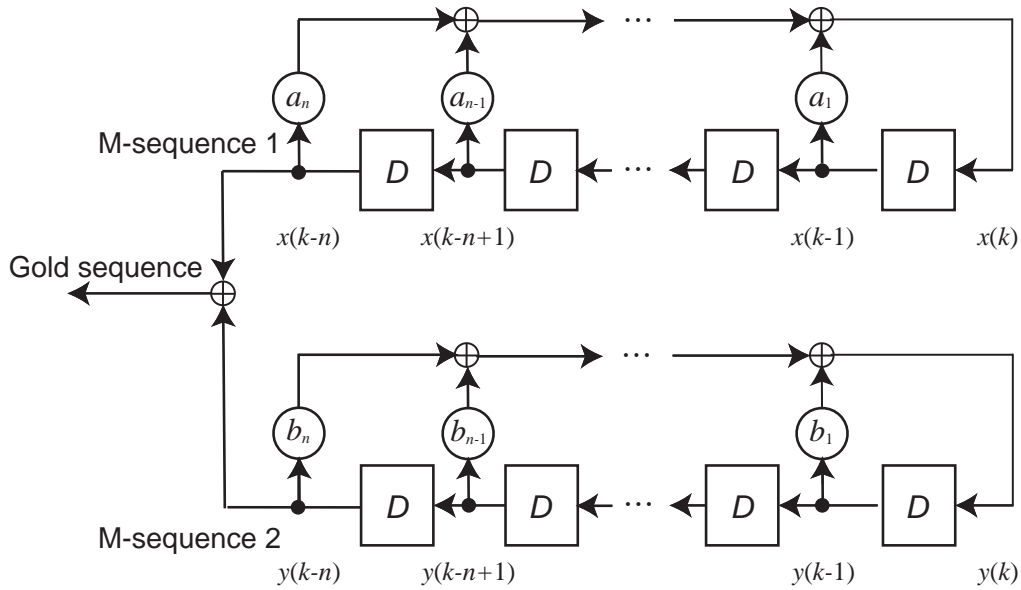


Fig. 2.9 Gold sequence generator

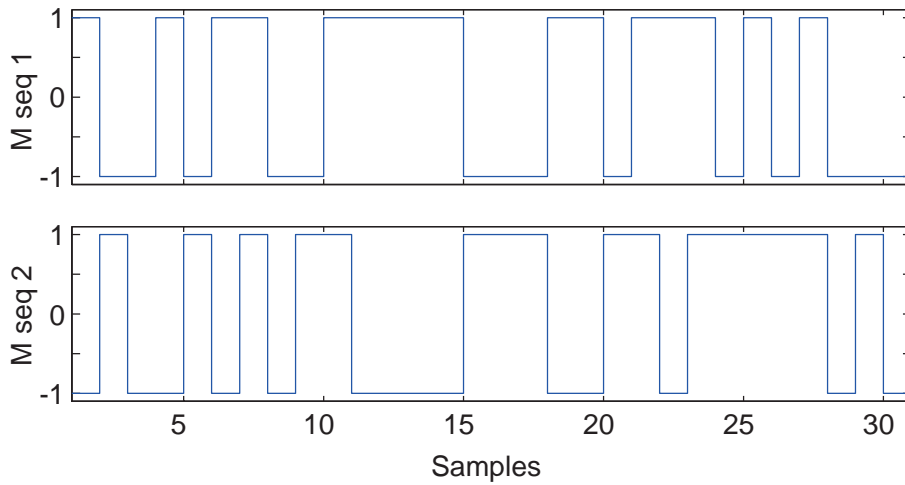


Fig. 2.10 Wave forms of M seq 1 and M seq 2

らの相互相関関数 $\phi_{Mseq_1, Mseq_2}$ のヒストグラムを Fig.2.11 に示す. 図より, 相互相関関数は,

$$\begin{aligned} \phi_{(Mseq_1, Mseq_2)} &= (-1 + 2^{(5+1)/2})/31, -1/31, (-1 - 2^{(5+1)/2})/31 \\ &= 7/31, -1/31, -9/31 \approx 0.225, -0.032, -0.29 \end{aligned}$$

の 3 値をそれぞれ, 10 回, 15 回, 6 回取っていることが確認できる. さらに, Fig.2.12 にプリファード M 系列 $Mseq_1, Mseq_2$ から生成した Gold 系列を 3 種類示す. これらの系列の相互相関関数・自己相関関数は Fig.2.11 に示す 3 値を同じ回数だけ取る.

プリファード M 系列と Gold 系列は主に移動体通信の分野で利用されている [24], [25].

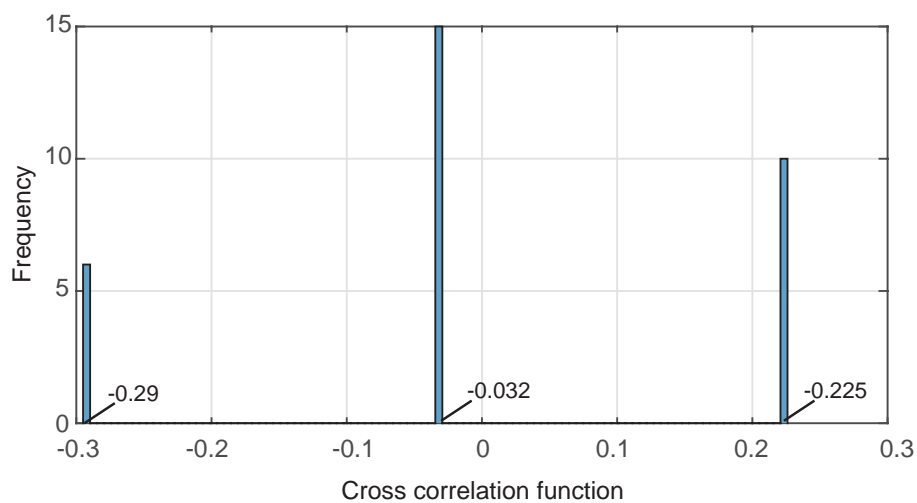


Fig. 2.11 Histogram of cross correlation function between M seq 1 and M seq 2

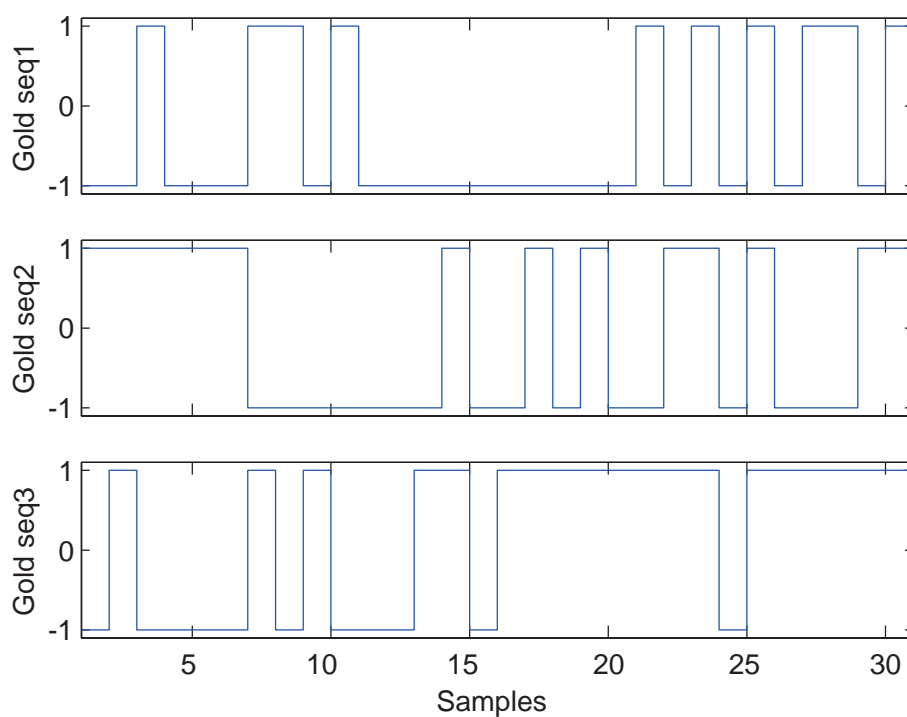


Fig. 2.12 Wave forms of Gold seq 1 ~ Gold seq 3

方，開ループでの同定を前提としているためか，システム同定への応用例 [26] は少ない．本論文では，これらの系列については紹介にとどめるが，後述する巡回シフト M 系列と異なり，確定的可同定性が問題となることがないため，次数が全くわからない上に入力数が多い系に対して，開ループ同定を行う際には有用であると考えられる．

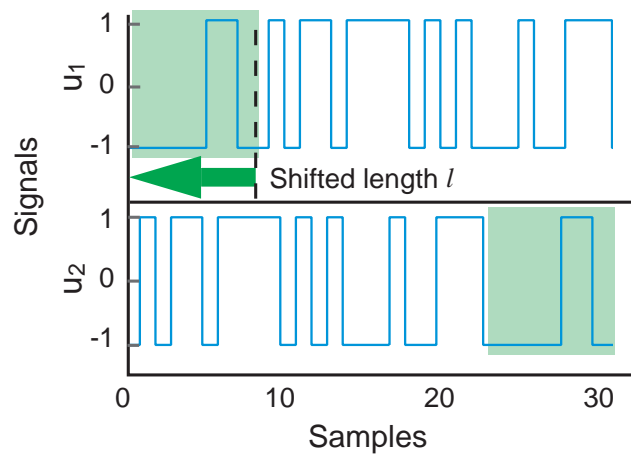


Fig. 2.13 Cyclic shifted M-sequences for 2 inputs

[3] 巡回シフト M 系列

巡回シフト M 系列は 1 周期 N サンプルの M 系列 $\{u_1(k) : k = 1, 2, \dots, N\}$ を, p 入力 u_1, u_2, \dots, u_p に対して,

$$u_1(k) = u_2(k - \ell) = \dots = u_p(k - (p - 1)\ell) \quad (2.31)$$

と, 入力チャンネルごとに ℓ 時刻ずつシフトした系列である. ただし, $m(k - N) = m(k)$, $k = 1, \dots, N$ であり, 時刻 $k \leq 0$ では, M 系列を巡回シフトさせる. たとえば, 2 つの入力 u_1, u_2 に対して, $N = 31$, $\ell = 8$ の巡回シフト M 系列を作成すると, Fig.2.13 のようになる. 図中の背景を緑で示す部分が前述の巡回シフトに対応する部分である. 巡回シフト M 系列はシフト幅 ℓ と M 系列の系列長 N のみを決定すれば入力を生成でき, 他のクラスの入力よりも簡単に設計できる利点がある.

なお, 巡回シフト M 系列の系列間の相互相関関数は, 式 (2.27), (2.31) より,

$$\phi_{uv}(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau = \ell, 2\ell, \dots \text{ のとき} \\ -\frac{1}{N}, & \text{その他} \end{cases} \quad (2.32)$$

となる. これは, 定理 2.2 に示すプリファード M 系列の系列間の相互相関関数よりも絶対値が小さいことがわかる.

[4] 巡回シフト M 系列を用いた有限インパルス応答で記述される MISO 系の多項式モデルを用いた同定

巡回シフト M 系列は, 設計パラメータがシフト幅 ℓ と系列長 N だけであり, 相互相関関数も小さい値を示す. しかし, システム同定において巡回シフト M 系列を利用する場合, 設計パラメータの選び方によっては可同定性条件を満たさなくなり, 正しくパラメータ推定ができなくなる問題点をもつ. そこで, 可同定性条件を満たす巡回シフト M 系列の設計法とし

て、MISO の有限インパルス応答で記述される多項式システム（以降、全零システムと記載）に対するものが研究されてきた [27]–[29]. この設計法は、シフト幅 ℓ を対象のインパルス応答長よりも長く取り、かつ未知パラメータ数よりも多くのデータ数を取得するように設計するものである. この設計法により生成された同定入力音響分野で、スピーカから耳までの音の伝わり方を示す頭部伝達関数からなる 24 入力系の同定実験に利用され、成果を挙げている [29]–[31].

巡回シフト \mathbf{M} 系列を用いた同定法を詳しく述べる. p 入力 1 出力の確定的な全零システム

$$y(k) = b_{11}u_1(k-1) + \cdots + b_{1n_b}u_1(k-n_b) + \cdots + b_{p1}u_p(k-1) + \cdots + b_{pn_b}u_p(k-n_b) \quad (2.33)$$

を仮定する. ただし, $u_i(k)$, $i = 1, \dots, p$ はそれぞれ時刻 k における i 番目の入力であり, b_{ij} , $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, n_b$ は入力 i の j 番目のインパルス応答である. このとき, 式 (2.33) とまったく同じ構造をもつ FIR モデル

$$\hat{y}(k) = \hat{b}_{11}u_1(k-1) + \cdots + \hat{b}_{1n_b}u_1(k-n_b) + \cdots + \hat{b}_{p1}u_p(k-1) + \cdots + \hat{b}_{pn_b}u_p(k-n_b) \quad (2.34)$$

のパラメータを一意に決定するための, すなわち確定的可同定となるための入力の条件として, つぎの定理が成り立つ [28].

定理 2.3

式 (2.33) で記述される p 入力 1 出力 n_b 次の全零システムが, シフト幅 ℓ , 系列長 N の巡回シフト \mathbf{M} 系列を印加することで確定的可同定となるための必要十分条件は

$$\ell \geq n_b \quad (2.35)$$

$$N \geq n_b + (p-1)\ell \quad (2.36)$$

である.

式 (2.35) は n_b 以上間隔をあけて巡回シフト \mathbf{M} 系列を印加し, 最小二乗法の計算時にランク落ちしないことを, 式 (2.36) は未知パラメータ数以上のデータを用いることを要求している. なお, 定理 2.3 を同定実験に適用する場合, 同定対象のインパルス応答が有限時間で収束するとし, その次数を n_b とみなす. すなわち, 定理 2.3 は暗に同定対象のインパルス応答が減衰しきるまでの時間が既知であることも要求している. また, n_b は大きな値になりやすいため, シフト幅 ℓ や系列長 N も長くなりやすい. たとえば, 2 入力 1 出力システムである同定対象が

$$y(k) = \frac{1}{1-0.9q^{-1}}(u_1(k) + 0.3u_2(k)) \quad (2.37)$$

であるとする. まず, 式 (2.37) を FIR モデルで表現するために, この例では, Fig.2.14 のように, 最大値の 1% 程度まで減衰する時間として, $n_b = 44$ で打ち切る. これより, ℓ は 44 以上

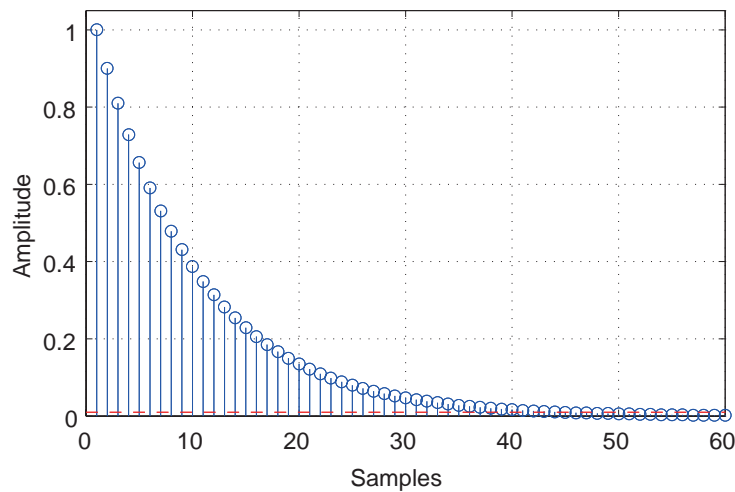


Fig.2.14 Impulse response of the example (Blue:impulse response Red : 1% of maximum value of impulse response)

となり、 N は 88 以上となる。一方、式 (2.37) は共通極をもつ伝達関数で記述されるシステムであり、合計 3 つのパラメータで記述されている。これらのパラメータを決定するには最低でも 3 つの入出力データ対があればよいと考えられ、定理 2.3 よりも短い系列長でも確定的可同定となると考えられる。

所見 p 入力 1 出力系の同定においては、巡回シフト M 系列を用いずに、1 つの入力チャンネルに M 系列を印加し、ほかの入力チャンネルには何も入力しない、という同定実験を p 回繰り返す方法も考えられる。この場合、 p 入力 1 出力系を p 個の SISO 系とみなしているため、それぞれの入出力間における確定的可同定性は満足している。

しかし、この方法は巡回シフト M 系列を用いる方法に比べ、 m 倍の時間を要する欠点がある。

2.2.5 全零システムに対する M 系列印加法の比較

前項まで MISO 系に対する M 系列印加法として、プリファード M 系列、Gold 系列、巡回シフト M 系列を挙げた。これらを用いて全零システムを同定する際のパラメータ推定精度比較を行う。

問題設定

真のシステム

$$y(k) = B_1(q)u_1(k) + B_2(q)u_2(k) + B_2(q)u_3(k) + w(k) \quad (2.38)$$

Table 2.3 Mean value of estimated and true parameters

	b_{11}	b_{12}	b_{21}	b_{22}	b_{31}	b_{32}
Cyclic shifted	0.9991	0.5002	0.8997	0.3999	0.7993	0.2991
Preffered	0.9991	0.5001	0.8996	0.4001	0.7992	0.2998
Gold	0.9995	0.5001	0.9000	0.4003	0.8012	0.3005
True	1.0	0.5	0.9	0.4	0.8	0.3

Table 2.4 Standard deviation of estimated parameters

	b_{11}	b_{12}	b_{21}	b_{22}	b_{31}	b_{32}
Cyclic Shifted	0.1802	0.1805	0.1805	0.1799	0.1794	0.1805
Preffered	0.1802	0.1905	0.1900	0.1930	0.1991	0.1882
Gold	0.1852	0.1886	0.1940	0.1804	0.1798	0.1891

のパラメータを推定する。ただし、

$$\begin{aligned} B_1(q) &= q^{-1} + 0.5q^{-2} \\ B_2(q) &= 0.9q^{-1} + 0.4q^{-2} \\ B_3(q) &= 0.8q^{-1} + 0.3q^{-2} \end{aligned}$$

とし、 $w(k)$ は平均値 0, 分散 1 の正規性白色雑音とする。入力 $u_i(k)$, $i = 1, 2, 3$ は 1 周期 $N = 31$ サンプルの M 系列から構成される巡回シフト M 系列 (シフト幅 $l = 4$)、プリファード M 系列、Gold 系列の 3 種類とする。モデルは式 (2.38) とまったく同じ構造の FIR モデルを仮定し、それぞれの入力に対して 10^5 回ずつ推定を行った。それぞれのパラメータ推定値の平均値と標準偏差を比較する。

結果

パラメータ推定値の平均値と標準偏差を Tables 2.3, 2.4 に示した。ただし、多項式 $B_i(q)$ において q^{-j} の係数を b_{ij} と表記した。平均値に関してはどの方法もほぼ変わらない結果であったのに対し、標準偏差は最も巡回シフト M 系列が小さかった。この原因について考察する。パラメータ推定には、式 (2.8) を利用する。この際、パラメータの推定誤差共分散行列は

$$\mathbf{V} = (\mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi})^{-1} \quad (2.39)$$

で与えられ、 \mathbf{V} の固有値和が小さい、すなわち \mathbf{V}^{-1} の固有値の逆数和が大きいほど、パラメータの真値と推定値の誤差の二乗和の意味でパラメータ推定精度が高くなる [32]。それぞれの入

Table 2.5 Sum of eigenvalues of V

	Cyclic Shifted	Preffered	Gold
Sum of eigenvalues of V	0.1947	0.2170	0.2086

力について V の固有値和を計算し, Table 2.5 にまとめた. Table 2.5 に示したように, 巡回シフト M 系列が最も V の固有値和が小さい. 式 (2.38) のシステムを同定する場合, 巡回シフト M 系列の V^{-1} は

$$V_{cy}^{-1} = \begin{bmatrix} 31 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 31 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 31 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 31 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 31 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 31 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

となる. 対角項に $N = 31$, 非対角項に -1 が入ることが特徴である. 式 (2.40) の固有値は 26 が 1 個, 32 が 5 個である*4. 仮に, 白色性をもつ二値信号があれば, V^{-1} は対角項が 31 の対角行列となる. この行列の固有値が 31 が 6 個であり, 式 (2.40) は対角行列に近い固有値をもつことがわかる. 一方, 今回用いたプリファード M 系列, Gold 系列の V^{-1} はそれぞれ

$$V_{pre}^{-1} = \begin{bmatrix} 31 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 31 & 7 & -1 & -9 & -1 \\ -1 & 7 & 31 & -1 & -9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 31 & 7 & -9 \\ -1 & -9 & -9 & 7 & 31 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -9 & -1 & 31 \end{bmatrix}, V_{gold}^{-1} = \begin{bmatrix} 31 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 7 & 31 & 7 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 7 & 31 & -1 & -1 & -9 \\ -1 & -1 & -1 & 31 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 31 & -1 \\ -1 & -1 & -9 & -1 & -1 & 31 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

となった. プリファード M 系列は相互相関関数, Gold 系列は, 自己相関関数, 相互相関関数ともに $-1/N$ 以外の値をそれぞれとりうるため, 式 (2.41) の $V_{pre}^{-1}, V_{gold}^{-1}$ それぞれの非対角項に -1 以外の値が入っている. この非対角要素により, 固有値和が大きくなったと考えられる.

このように全零システムを同定する際には, 巡回シフト M 系列を用いると他の入力を用いるよりもパラメータ推定精度が良くなると考えられる.

2.3 モデルの妥当性評価

モデルの妥当性評価のステップでは, モデルが対象を適切に表現しているのかを評価する. この評価は時間領域, 周波数領域, s または z 領域など, さまざまな面から評価を行うことが好ましい. それぞれ具体的には

*4 式 (2.40) の形の行列は Pei matrix と呼ばれ, 余因子展開による固有値の解析計算が可能である [33],[34]. 行列のサイズが $a \times a$, 対角項が N とすると, 固有値は $N - a + 1$ が 1 個, $N + 1$ が $a - 1$ 個である.

- スペクトル解析法と予測誤差法でモデリングを行い、それぞれの周波数応答を比較する（周波数領域）
- 極零相殺の有無を確認する（ s, z 領域）
- モデル出力とプラント出力を比較する（時間領域）

などが挙げられる。これらに加えて、残差の白色性や、残差と過去の入力との相互相関を解析し、モデリングできていない部分を検証する残差解析や、第一原理モデリングのように、パラメータに明確な物理的意味がある場合は、事前情報からその妥当性を検証することも有用である [35].

本章では、モデルの妥当性評価としてよく行われる方法を、例題を通じて振り返ったのち、第4章で述べる時間領域での評価について詳しく述べる。

2.3.1 妥当性評価の例

真のシステムを

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + w(k) \quad (2.42)$$

とする。ただし、

$$A(q) = 1 - 1.034q^{-1} + 0.550q^{-2} + 0.184q^{-3} + 0.301q^{-4} \quad (2.43)$$

$$B(q) = 0.478q^{-1} - 0.115q^{-2} + 0.028q^{-3} + 0.241q^{-4} \quad (2.44)$$

とし、サンプリング周期は 1 s とする^{*5}。また、 $u(k)$, $y(k)$ は時刻 k での入出力、 $w(k)$ は平均値 0、分散 $\sigma^2 = 0.04$ の正規性白色雑音であるとする。 $u(k)$ として 1 周期 511 サンプルの M 系列を 2 周期印加し入出力データを得た。得られた入出力データのうち、はじめの 200 サンプルを Fig.2.15 に示す。ここで、2, 4, 10 次の ARX モデルを仮定し、それぞれのパラメータを推定後、モデル構造と推定したパラメータについての妥当性を評価する。

[1] 周波数領域における評価

周波数領域における評価は、ボード線図上でおこなう。まず、得られたモデル 3 種類とノンパラメトリックな同定法であるスペクトル解析法^{*6}による周波数伝達関数を Fig.2.16 に示す。Fig.2.16 は 2 次 ARX モデル以外は 2 つのピークをもつことを示す。これより、2 次系では次数が不足していることがわかる。また、4 次と 10 次ではほぼ同じ周波数応答を示すことがわかる。そのため、ケチの原理^{*7}に従うと、10 次も次数が必要でないことがわかる。なお、スペ

^{*5} 連続時間伝達関数 $A(s) = s^4 + 0.6s^3 + 1.15s^2 + 0.15s + 0.1$, $B(s) = 0.4s^2 + 0.066s + 0.1$ をゼロ次ホールダにより離散化している。

^{*6} $\hat{G}(e^{j\omega\tau}) = \hat{S}_{yu} / \hat{S}_{uu}$ により周波数伝達関数を求める方法。ただし、 $\hat{S}_{yu} = \sum \hat{\phi}_{yu}(\tau)e^{-j\omega\tau}$ は入出力間のクロススペクトル密度推定値、 $\hat{S}_{uu} = \sum \hat{\phi}_{uu}(\tau)e^{-j\omega\tau}$ は入力のパワースペクトル密度推定値であり、それぞれ自己相関関数 $\hat{\phi}_{uu}(\tau)$, 相互相関関数 $\hat{\phi}_{yu}(\tau)$ の推定値から計算する。詳細は [6] を参照。

^{*7} モデル構造を選択するとき、ほぼ同等の性能ならば、次数の低いモデルを選ぶ

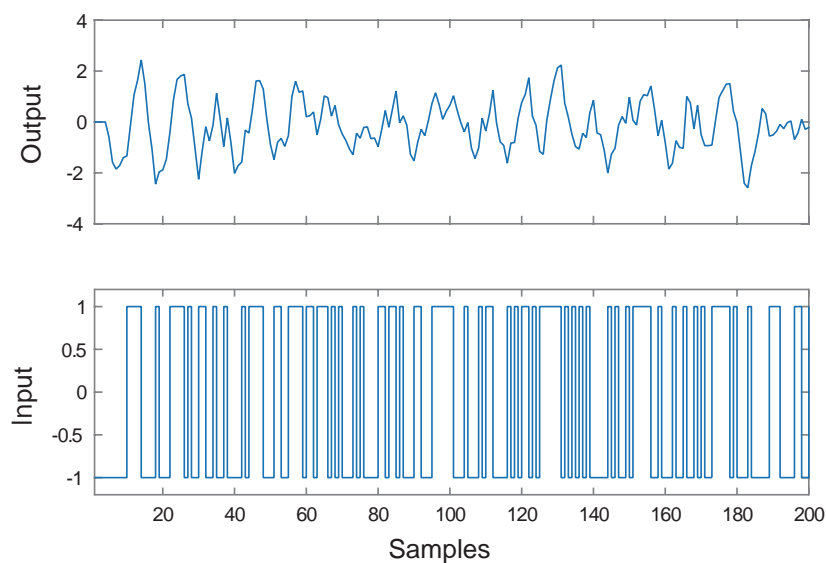


Fig. 2.15 Input and output signal

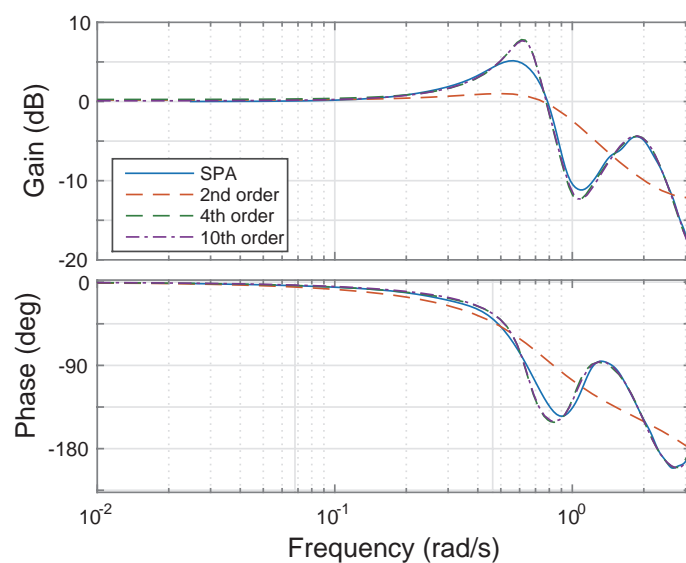


Fig. 2.16 Frequency response of models

クトル解析法で得られた周波数伝達関数は参考情報として有用であり、パラメトリックな同定法で得られた周波数伝達関数と特徴が大まかにあっていることを確認した上で、モデルを選択すべきである。

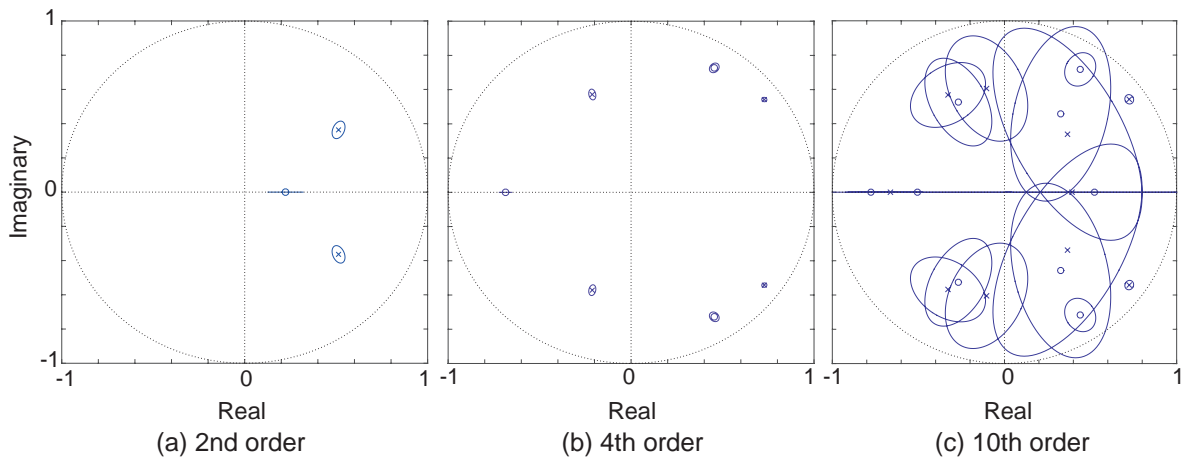


Fig. 2.17 Pole and zeros of ARX models (× : pole, ○ : zero)

[2] z 領域における評価

得られたモデルの極と零点を z 平面上にプロットし、それらが近い場合は次数が高い、すなわち実際には存在しない極と零点のペアが得られている可能性がある。極と零点の近さの判断は、それぞれの不確かさをもとにおこなう。2次、4次、10次 ARX モデルの極と零点を Figs.2.17(a)~(c) に示す。ただし、それぞれの図中の実線は不確かさを示している。Fig.2.17(c) は極零相殺の余地が多くあり、次数が高すぎることを示唆される。

[3] 残差解析

モデルによる予測値 $\hat{y}(k)$ と実測値 $y(k)$ との差で定義される残差は、モデルの妥当性に関する重要な判断材料になる。式 (2.1) に対して、残差 $e(k)$ は、つぎのように定義される。

$$e(k) = \hat{H}^{-1}(q)\{y(k) - \hat{G}(q)u(k)\} \quad (2.45)$$

ただし、 $\hat{G}(q)$ 、 $\hat{H}(q)$ はそれぞれ同定されたシステム、雑音の伝達関数を示す。残差解析では以下の2項目を調べる。

- (1) 残差は白色で平均値が0
- (2) 残差が過去の入力と無相関

この確認は、 $e(k)$ が白色であることを通して、式 (2.1) に対して仮定したモデル構造の妥当性検証を行っていることに相当する。たとえば、式 (2.42) で定義される ARX モデルにおいては、 $e(k)$ は式誤差であり、これに対して (1), (2) が成立することは式 (2.42) の構造の仮定が妥当であることを示している。実際に残差解析を行う際には、 $e(k)$ の自己相関関数がラグが0以外で十分に0に近いこと、および $e(k)$ と $u(k)$ の相互相関関数が全時刻において十分に0に近いことを調べればよい。また、(2) については、残差 $e(k)$ に過去の入力由来の成分が含まれているかどうかを調べており、満たされない場合は、モデル次数が低すぎることを疑われる [9]。

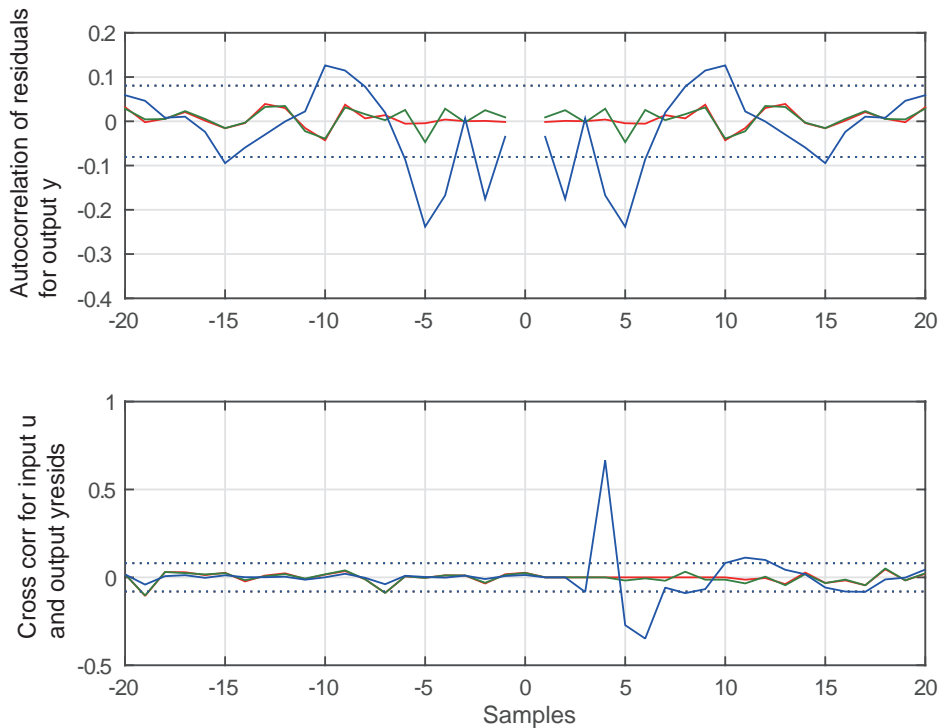


Fig. 2.18 Residual analysis (Blue:2nd order, Green:4th order, Red:10th order)

例題に対して、残差解析を行った結果を Fig.2.18 に示す。図中の破線は 95% 信頼区間を示しており、破線の中に $e(k)$ の自己相関関数、および $e(k)$ と $u(k)$ の相互相関関数がそれぞれ入っていれば無相関であるとみなせる。ただし、ラグが 0 のときの自己相関関数は評価の対象外であるため、この図からは削除している。

2次 ARX モデルは残差解析の結果、 $e(k)$ の自己相関関数、および $e(k)$ と $u(k)$ の相互相関関数がともに信頼区間の外に外れており、次数が不足していることが疑われる。一方、4次以上のモデルではこれらの値が信頼区間内に入っており、次数が十分であることが確かめられる。

2.3.2 時間領域における評価

時間領域での評価では、測定値 y とモデル出力 \hat{y} の二つの波形の適合度からモデルの妥当性を判断するものであり、直感的にわかりやすく、対象が非線形システムの場合にも利用できるため、応用の場面ではしばしば用いられる。

なお、モデル出力は出力の初期値 $y(i)$, $i = -n_a + 1, n_a + 2, \dots, 0$ を与え、

$$\hat{y}(k) = \hat{G}(q)u(k) \quad (2.46)$$

を計算する“シミュレーション”と、

$$\hat{y}(k) = (1 - \hat{H}^{-1}(q))y(k) + \hat{H}^{-1}(q)\hat{G}(q)u(k) \quad (2.47)$$

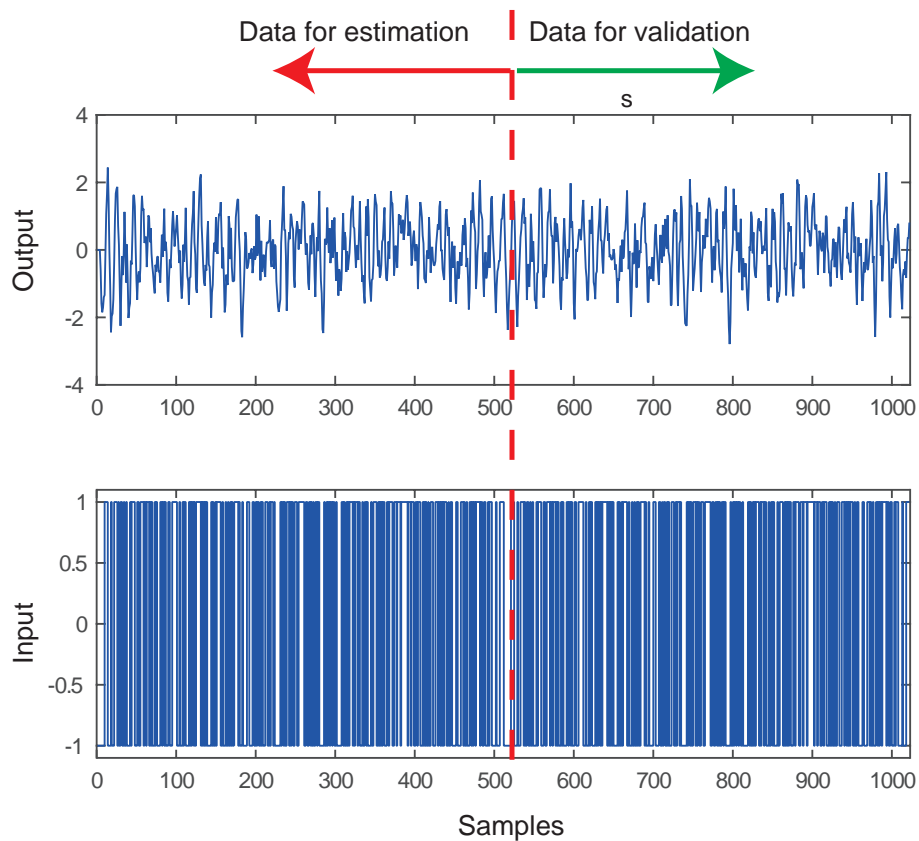


Fig. 2.19 Cross validation

を計算する“1 段先予測”とがある。それぞれ同定法として、出力誤差法を選択したときと、予測誤差法を選択したときに計算する損失関数の値を評価することに相当する。一般的には式 (2.46) が利用されることが多い。

[1] クロスバリデーション

クロスバリデーションとは、同定実験によって収集された入出力データを、モデル構築用のデータセットとモデル検証用のデータセットに分けて、妥当性の評価やモデルの構造決定を行う方法である [36]。たとえば、Fig.2.19 に示すように、1 つの実験で得られた入出力データの前半で構築を行い、後半で検証を行う。一般的に、モデル構造を複雑にすれば、モデルは構築用データセットに適合しやすくなるが、本来適合するべきではないデータに含まれる雑音についても適合してしまい、結果的に未知のデータに対して適合できないことがある。これは、過学習やオーバーフィッティングとよばれる。クロスバリデーションでは、あらかじめモデル構築に用いるデータのほかに検証用データを用意することで、過学習を防ぐ狙いがある。

2.3.3 評価指標

[1] MSE と RMSE

クロスバリデーションにおいて適合度を測る指標には MSE (Mean Square Error) や RMSE (Root Mean Square Error) がよく用いられ、それぞれ、

$$\text{MSE} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (y(k) - \hat{y}(k))^2 \quad (2.48)$$

$$\text{RMSE} = \frac{1}{N-1} \sqrt{\sum_{k=1}^N (y(k) - \hat{y}(k))^2} \quad (2.49)$$

で与えられる。ただし、 $y(k)$ と $\hat{y}(k)$ はそれぞれ時刻 k での測定値、予測値であり、 N はサンプル数である。

一方、これらの指標はモデリング対象となる物理単位での誤差に基づいた指標である。そのため、対象によって用いられる単位系が異なり、どの程度二つの波形が一致しているのかを一般的に論じる指標としては適切ではないと考えられる。モデル性能を時間領域で評価する際には、対象の単位系によらず適合度を評価できる無次元な指標（以後、無次元指標と呼ぶ）を利用すると直感的にわかりやすい。そこで、システム同定では適合率と呼ばれる指標が良く用いられてきた。

[2] 適合率 (FIT)

適合率（以降、FIT と記載）は

$$\text{FIT} = \left\{ 1 - \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^N (y(k) - \hat{y}(k))^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^N (y(k) - \bar{y})^2}} \right\} \times 100 [\%] \quad (2.50)$$

$$(2.51)$$

で定義される。ただし、

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k)$$

である。式 (2.50) の右辺第 2 項は、RMSE を測定値の標準偏差で規格化したものであり、NRMSE (Normalized-RMSE) と呼ばれる。そして、FIT 自体も NRMSE fitness value と呼ばれることがある [37]。この指標は RMSE が 0 となるとき、すなわち完全に y と \hat{y} が一致した

ときに最大値 1 をとる。しかし、RMSE の増加に対して値が単調減少するため、最小値が存在しない。より具体的には FIT は測定値の標準偏差を上回った場合に負値を取る。

適合率はシステム同定分野において広く利用される一方、適合率が一般的に利用されている背景を含め、システム同定で用いる無次元指標についての議論は、著者が調べた限りほとんど行われていなかった。

2.4 まとめ

本章では、MBD の基礎的な項目、およびシステム同定において重要なシステム同定実験の設計、モデルの妥当性評価のステップについて、それぞれの従来研究についてまとめた。

前節までに述べた通り、MBD においてプラントモデリングはボトルネックになりやすく、これを解消するひとつの手段としてシステム同定が考えられる。システム同定をする際には特に同定入力設計と妥当性評価が重要となる。しかし、可同定性を保証した同定入力設計法は、SISO 系については研究されている一方、MISO 系については全零システムに対する方法があるのみで、極をもつシステムに対するものはほとんど研究されてこなかった。また、モデルの妥当性評価のステップにおいては、同定実験で得られた測定値とモデル出力を比較する、時間領域での評価が一般的に行われる。しかし、この評価で従来から使われている適合率は % 表示にも関わらず最小値が存在しない。また、適合率が広く利用されている背景やシステム同定にとってのメリットについての議論がされていないという問題があった。

そこで、本論文では

1. MISO 系の極をもつシステムに対して可同定性を保証した同定入力設計法を提案すること
2. 時間領域におけるシステム同定結果の評価に適した無次元指標を提示すること

を目的とする。

第 3 章

巡回シフト M 系列を用いた多入力 1 出力システムの同定

本章では、MISO システムについて考える。その中で、共通極^{*1}をもつシステム（以下、共通極システムと略記）を対象を絞った同定入力設計について述べる。まず、共通極システムに対して、巡回シフト M 系列を印加するために満たすべき条件を可同定性の観点から明らかにする。つぎに、その条件を満たす同定入力設計法を提案し、提案法が適切に機能することをシミュレーションによって確認する。

3.1 はじめに

共通極システムは全入力に共通なダイナミクスをもつシステムである。確定的な p 入力 1 出力の (n_a, n_b) 次^{*2}の共通極システムは

$$A(q)y(k) = B_1(q)u_1(k) + \cdots + B_p(q)u_p(k) \quad (3.1)$$

で与えられる。ただし、 $u_i(k)$, $i = 1, \dots, p$ はそれぞれ時刻 k における i 番目の入力、 $y(k)$ は時刻 k における出力、 $A(q), B_i(q)$, $i = 1, \dots, p$ はそれぞれ、

$$\begin{aligned} A(q) &= 1 + a_1q^{-1} + \cdots + a_{n_a}q^{-n_a} \\ B_i(q) &= b_{i1}q^{-1} + \cdots + b_{in_b}q^{-n_b} \end{aligned}$$

で与えられ、特性方程式 $A(q) = 0$ の根が共通極である^{*3}。

*1 全入力に対して、共通な極

*2 本論文では、共通極システムの次数表記は、分母次数が n_a 、すべての入力に対する分子次数が n_b の場合、 (n_a, n_b) 次と表記する。

*3 簡単のため、入力ごとの分子次数はそれぞれ n_b で統一している。

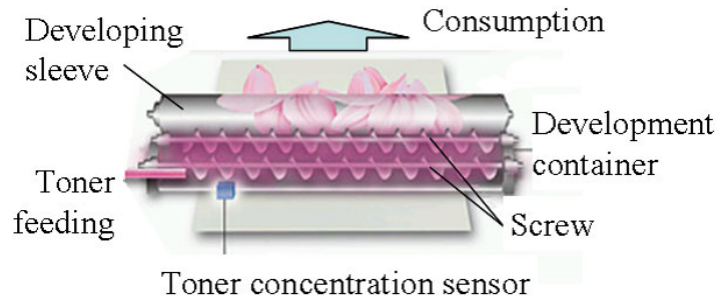


Fig. 3.1 Toner supply system

たとえば、音響分野で用いられる音源から受信点までの音場特性は共通極システムである。これは、室内の形状や吸音率が変わらなければ、音源、受信点の移動があっても、同じ極で音場特性を表現できるためである [38]。また、複写機のトナー補給系も共通極システムである [39]。トナー補給系は Fig. 3.1 に示すトナーとキャリア（鉄粉）を攪拌する容器に、トナーを補給／消費し、トナー濃度センサでトナー濃度^{*4}を検知する機構である。容器中でのトナーの攪拌のされ方は、補給に対しても、消費に対しても同じであるため、トナー補給／消費から、トナー濃度センサまではむだ時間は異なるものの共通のダイナミクスをもつといえる。このように、ひとつの物理系に対して複数の入力作用する場合、共通極システムとなることが多く、MBD が対象とするシステムの多くは共通極をもつと考えられる。ただし、前述の音響系の場合、各音源が仕切られており、受信点に至るまでの吸音率が異なれば、入力から出力までのダイナミクスは入力間で異なるものとなる。このように、異なる物理系に対して複数の入力作用し、最終的にひとつのセンサで検出するような場合は、共通極をもたない。

第2章で与えた定理 2.3 では、FIR システムを確定的可同定とする巡回シフト M 系列の必要十分条件を示した。全零システムは共通極の存在を仮定しなくてもよいため、応用範囲が広い。しかし、前述のように対象が共通極をもつことが既知ならば、全零システムによる表現は冗長である。本章では共通極システムそのものを確定的可同定とする巡回シフト M 系列の条件を示す。

なお、金井 [40] は巡回シフト M 系列によって共通極システムが確定的可同定となるための十分条件の導出を試みているが、証明中に近似^{*5}がおこなわれており、厳密な証明とはいえない。

^{*4} 単位体積あたりのトナーとキャリアの総重量でトナー重量を割った値

^{*5} 論文中の式 (2.68) において、ラグが 0 以外における M 系列の自己相関関数を 0 としている。

3.2 共通極システムが確定的可同定となる巡回シフト M 系列の条件

3.2.1 問題設定

共通極システム (3.1) のパラメータを

$$\theta = [a_1, \dots, a_{n_a}, b_{11}, \dots, b_{1n_b}, \dots, b_{p1}, \dots, b_{pn_b}]^T \in \mathbb{R}^{n_a + pn_b} \quad (3.2)$$

と定義する. 式 (3.1) で記述されるシステムを巡回シフト M 系列を用いて同定するときに確定的可同定となる条件を導く. すなわち, 巡回シフト M 系列を $u_i(k)$, $i = 1, \dots, p$ とした入出力データ $\{u_1(k), \dots, u_p(k), y(k) : k = 1, 2, \dots, N\}$ に基づいて, 式 (3.2) のパラメータ θ が最小二乗法により一意的に決定されるために, 入力 $u(k)$ が満たすべき条件を導く.

なお, 式 (3.1) に対して,

$$\begin{aligned} \phi(k) &= [-y(k-1), \dots, -y(k-n_a), u_1(k-1), \dots, u_1(k-n_b), \dots, u_p(k-1), \dots, u_p(k-n_b)]^T \\ &= [y^T(k) \mathbf{u}_1^T(k) \cdots \mathbf{u}_p^T(k)]^T \end{aligned}$$

とおくと, 出力は

$$y(k) = \theta^T \phi(k) \quad (3.3)$$

とあらわせる. いま,

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= [y(N) \ y(N-1) \ \cdots \ y(1)]^T \in \mathbb{R}^N \\ \Phi &= [\phi(N) \ \phi(N-1) \ \cdots \ \phi(1)]^T \in \mathbb{R}^{N \times (n_a + pn_b)} \end{aligned}$$

とすると, 式 (3.3) より

$$\mathbf{y} = \Phi \theta \quad (3.4)$$

が得られる. パラメータ θ の最小二乗推定値は

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{y} \quad (3.5)$$

で与えられる. すなわち, パラメータ θ が最小二乗法により一意的に決定される条件とは, 式 (3.5) の $\Phi^T \Phi$ の逆行列が存在する条件である. $\Phi^T \Phi$ は非負の固有値しか持たないため, 式 (3.1) のシステムが確定的可同定であるための必要十分条件は,

$$\Phi^T \Phi > 0 \quad (3.6)$$

を満たすことである.

3.2.2 従来研究

共通極システムが確定的可同定となるための十分条件として、つぎの補題が成り立つ [40].

補題 3.1

仮定 1 周期 N の M 系列の自己相関関数が,

$$\phi(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau = N, 2N, \dots \text{のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \quad (3.7)$$

で与えられる.

仮定 2 システム $1/A(q)$ に対して

$$\frac{1}{A(q)} = g_1 q^{-1} + g_2 q^{-2} + \dots + g_{n_s} q^{-n_s} \quad (3.8)$$

が成り立つ. すなわち, システム $1/A(q)$ のインパルス応答が減衰しきる時刻を n_s とし, 時刻 $n_s + 1$ 以降のインパルス応答は 0 とみなす.

仮定 3 多項式 $A(q)$ と多項式 $B_i(q)$, $i = 1, \dots, p$ はそれぞれ互いに素である.

以上の仮定のもとで, 式 (3.1) で記述される p 入力 1 出力, (n_a, n_b) 次の共通極システムが, シフト幅 ℓ , 系列長 N の巡回シフト M 系列を印加することで確定的可同定となるための十分条件は,

$$\ell \geq n_s + n_a + n_b \quad (3.9)$$

$$N \geq p\ell \quad (3.10)$$

をすべて満たすことである.

補題 3.1 は確定系を扱うにも関わらず, 仮定 1 の近似を行っている問題があり, 少なくともこの近似をせず導出すべきである. また, 仮定 2 でおいた n_s 以上にシフト幅を長くしなければならず, 結果的に定理 2.3 を適用したときとほぼ同じ長さの系列長が必要となる.

3.2.3 共通極システムが確定的可同定となるための十分条件

まず, システムが確定的可同定となるための十分条件をつぎの補題で与える.

補題 3.2

仮定 1 系列長 N の巡回シフト M 系列を各入力 $u_i(k)$, $i = 0, 1, \dots, p$ に 2 周期印加し、後半 1 周期を用いるとする。後半 1 周期の開始を時刻 0 とすると、

$$u_i(k) = u_i(k + N), \quad k = 0, -1, \dots, -N + 1 \quad (3.11)$$

となる。なお、時刻 $k \leq -N + 1$ において $u_i(k)$ は 0 とする。

仮定 2 多項式 $A(q)$ の係数 a_{n_a} は非零である。また、特性方程式 $A(q) = 0$ は重根をもたない。

仮定 3 多項式の組 $\{B_1(q), \dots, B_p(q)\}$ と $A(q)$ は互いに素である^a。

仮定 4 多項式 $A(q)$ は加算器 $(1 - q^{-1})$ を含まない。

以上の仮定のもとで、式 (3.1) で記述される p 入力 1 出力、 (n_a, n_b) 次の共通極システムが、シフト幅 ℓ 、系列長 N の巡回シフト M 系列を印加することで確定的可同定となるための十分条件は、

$$\ell \geq n_b \quad (3.12)$$

$$N \geq n_a + n_b + (p - 1)\ell + 1 \quad (3.13)$$

$$N \geq 2n_a + (p - 1)\ell \quad (3.14)$$

をすべて満たすことである。ただし、 ℓ は多項式 $A(q)$ と $\sum_{i=1}^p q^{-(p-i)\ell} B_i(q)$ が互いに素となる値である。

^a $A(q)$ が $\{B_1(q) \dots B_p(q)\}$ すべてに対して極零相殺できる根をもたないことを意味する。たとえば、 $p = 2$ の場合、 $A(q) = (q - 0.3)(q - 0.5)$ と $\{B_1(q) = q - 0.3, B_2(q) = q - 0.5\}$ は互いに素である。

補題 3.2 は、式 (3.5) の最小二乗法の計算時に入力同士に同じ M 系列が入ることによりランク落ちしないことと、パラメータ数よりも多くデータを確保することを要求している。

たとえば、2.1.4 項の式 (2.37) の例に対して補題 3.2 を適用すると、 $p = 2$, $n_a = 1$, $n_b = 1$ より、 $\ell \geq 1$, $N \geq 5$ となり、シフト幅、系列長ともに従来から知られている定理 2.3 [28] で設定した $\ell \geq 88$ よりも短くても確定的可同定となる。

共通極モデルだけを同定するのであれば、補題 3.2 に従えば、従来よりも短いシフト幅・系列長での同定が可能になる。さらに仮定 3 より、実質共通極をもたないようなシステムに対しても補題 3.2 が適用できる特徴がある。

ただし補題 3.2 は、仮定 1 より、M 系列を 2 周期印加し、2 周期目で同定を行った際に確定的可同定となるための十分条件であることに注意する。

証明 巡回シフト M 系列が式 (3.12), (3.13) を満たす場合に, 式 (3.1) で記述されるシステムが確定的可同定であることを示す. いま,

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{bmatrix} \mathbf{y}(N)^T & \mathbf{u}_1(N)^T & \cdots & \mathbf{u}_p(N)^T \\ \mathbf{y}(N-1)^T & \mathbf{u}_1(N-1)^T & \cdots & \mathbf{u}_p(N-1)^T \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{y}(1)^T & \mathbf{u}_1(1)^T & \cdots & \mathbf{u}_p(1)^T \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{Y} \mathbf{U}_1 \cdots \mathbf{U}_p] \end{aligned} \quad (3.15)$$

より, 式 (3.6) は

$$\begin{aligned} \Phi^T \Phi &= [\mathbf{Y} \mathbf{U}_1 \cdots \mathbf{U}_p]^T [\mathbf{Y} \mathbf{U}_1 \cdots \mathbf{U}_p] \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q}^T \\ \mathbf{Q} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.16)$$

となる. ただし,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} \\ \mathbf{Q} &= [\mathbf{Y}^T \mathbf{U}_1 \cdots \mathbf{Y}^T \mathbf{U}_p]^T \\ \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^T \mathbf{U}_1 & \cdots & \mathbf{U}_1^T \mathbf{U}_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{U}_p^T \mathbf{U}_1 & \cdots & \mathbf{U}_p^T \mathbf{U}_p \end{bmatrix} \end{aligned}$$

とおいた. 式 (3.12), (3.13) から, 定理 2.3 を満足するため, $\mathbf{R} > 0$ である. よって, \mathbf{R} の Schur 補元

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{P} - \mathbf{Q}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q} \quad (3.17)$$

が正則であれば, $\Phi^T \Phi$ も正則となる. この場合, $\Phi^T \Phi$ は半正定になるため, 式 (3.17) が正則であれば, 式 (3.6) を満足する. そのため, $\tilde{\mathbf{R}}$ が正則であることを示す.

M 系列から構成される行列 \mathbf{M} を

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} u_1(N) & u_1(N-1) & \cdots & u_1(1) \\ u_1(N-1) & u_1(N-2) & \cdots & u_1(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1(1) & u_1(N) & \cdots & u_1(2) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

とおく. すべての要素が 1 である行列を $\mathbf{1}$ とおくと, M 系列の性質である式 (2.26), (2.27) より,

$$\mathbf{I} = \frac{1}{N+1} (\mathbf{M} \mathbf{M}^T + \mathbf{1}) \quad (3.18)$$

$$\mathbf{1} = \mathbf{M} \mathbf{1} \mathbf{M}^T \quad (3.19)$$

が成り立つ。行列 \mathbf{M} は

$$\mathbf{M} = [\mathbf{U}_1 \mathbf{M}_1 \cdots \mathbf{U}_p \mathbf{M}_p] \quad (3.20)$$

と内部に $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_p$ を含む。ただし, \mathbf{M} から $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_p$ を除いた行列をそれぞれ $\mathbf{M}_i, i = 1, 2, \dots, p$ とおいた。つぎに, \mathbf{M}_x を

$$\mathbf{M}_x = [\mathbf{M}_1 \cdots \mathbf{M}_p] \in \mathbb{R}^{N \times (N - pn_b)} \quad (3.21)$$

とおく。また, \mathbf{R}^{-1} については,

$$\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{N+1} \left(\mathbf{I} + \frac{1}{N - pn_b + 1} \mathbf{1} \right) \quad (3.22)$$

となる [19]。以上で得られた式 (3.18)~(3.22), および仮定 1 を用いると, 式 (3.17) は

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}} &= \frac{1}{N+1} \mathbf{Y}^T \left(\mathbf{M} \mathbf{M}^T + \mathbf{1} - \sum_{i=1}^p \mathbf{U}_i \left(\mathbf{I} + \frac{1}{N - pn_b + 1} \mathbf{1} \right) \mathbf{U}_i^T \right) \mathbf{Y} \\ &= \frac{1}{N+1} \mathbf{Y}^T \mathbf{M}_x \left(\mathbf{I} + \frac{1}{N - pn_b + 1} \mathbf{1} \right) \mathbf{M}_x^T \mathbf{Y} + \frac{N - pn_b}{(N+1)(N - pn_b + 1)} \mathbf{Y}^T \mathbf{1} \mathbf{Y} \end{aligned} \quad (3.23)$$

と変形できる。式 (3.12), (3.13) より $N \geq pn_b$ であるため, 式 (3.23) が半正定であることは明らかである。よって, $\mathbf{Y}^T \mathbf{M}_x$ が行フルランクであれば, 式 (3.23) は正定となり, 式 (3.6) を満足する。

仮定 1 を用いて, 出力 \mathbf{Y}^T を入力のみで表現すると,

$$\mathbf{Y}^T = \sum_{i=1}^p \mathbf{G} \mathbf{B}_i \mathbf{U}_{xi}^T = \mathbf{G} \sum_{i=1}^p \mathbf{B}_i \mathbf{U}_{xi}^T \quad (3.24)$$

となる。ただし,

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} g_1 & \cdots & \cdots & \cdots & g_N \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & g_1 & \cdots & g_{N-n_a+1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_a \times N} \\ \mathbf{B}_i &= \begin{bmatrix} b_{i1} & \cdots & b_{in_b} & \mathbf{0} \\ & \ddots & \cdots & \ddots \\ & & \ddots & \cdots & b_{in_b} \\ & & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & & & b_{i1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N} \\ \mathbf{U}_{xi} &= \begin{bmatrix} u_i(N) & u_i(N-1) & \cdots & u_i(1) \\ u_i(N-1) & u_i(N-2) & \cdots & u_i(N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_i(1) & u_i(N) & \cdots & u_i(2) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N} \end{aligned}$$

である。ただし, $\{g_i\}$, $i = 1, 2, \dots$ は

$$\frac{1}{A(q)} = g_1 q^{-1} + g_2 q^{-2} + \dots \quad (3.25)$$

を満たす, システム $1/A(q)$ のインパルス応答である。

式 (3.24) より, $\mathbf{Y}^T \mathbf{M}_x$ を展開すると,

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{M}_x = (N+1) \mathbf{G} \sum_{i=1}^p \mathbf{B}_i \mathbf{Z}_i \quad (3.26)$$

となる。ここで, $n_x = \ell - n_b$ と表記すると, 行列 \mathbf{Z}_i は

$$\mathbf{X} = [\mathbf{O}_{n_x \times n_b} \quad \mathbf{I}_{n_x \times n_x}]^T \in \mathbb{R}^{n_x \times \ell}$$

により,

$$\mathbf{Z}_i = \left[\begin{array}{cc|ccc} & & \mathbf{X} & & \mathbf{O} \\ & & \ddots & & \\ \mathbf{O}_{N-(i-1)\ell \times (i-1)n_x} & & & \mathbf{X} & \\ \hline \mathbf{X} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & & \mathbf{I}_{N-p\ell \times N-p\ell} \\ & \ddots & & & \\ \mathbf{O} & & \mathbf{X} & & \mathbf{O}_{(i-1)\ell \times N-(i-1)n_x - pn_b} \end{array} \right] - \frac{1}{N+1} \mathbf{1} \quad (3.27)$$

とあらわされる。これより,

$$\sum_{i=1}^p \mathbf{B}_i \mathbf{Z}_i = \left[\begin{array}{cccc|ccc} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 & \cdots & \cdots & \mathbf{C}_{p-1} & \mathbf{C}_p & \\ & \mathbf{C}_1 & & & \vdots & \mathbf{C}_{p-1} & \mathbf{O}_{n_x \times N-p\ell} \\ \mathbf{C}_p & & \ddots & & \vdots & & \\ \mathbf{C}_{p-1} & \mathbf{C}_p & & \ddots & \vdots & & \mathbf{C}^* \\ \vdots & & \ddots & & \mathbf{C}_1 & & \\ \vdots & & & \ddots & & \mathbf{C}_1 & \\ \mathbf{C}_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{C}_p & & \end{array} \right] - \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n_b} b_{ij} \mathbf{1} \quad (3.28)$$

$$= \left[\mathbf{D}_{N \times (p-1)n_x} \mid \mathbf{E}_{N \times N - (p-1)\ell - n_b} \right] - \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n_b} b_{ij} \mathbf{1} \quad (3.29)$$

となる。ただし、

$$\mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} 0 & b_{in_b} & \cdots & \cdots & b_{i1} & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \mathbf{0} & & b_{in_b} & \cdots & \cdots & b_{i1} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{\ell \times n_x}$$

$$\mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} 0 & b_{pn_b} & \cdots & b_{p1} & & & b_{1n_b} & \cdots & b_{11} \\ \vdots & & \ddots & & & & & \ddots & \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & & & b_{pn_b} & \cdots & b_{p1} & & & b_{1n_b} & \cdots & b_{11} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{N-n_x \times N-p\ell}$$

であり、 \mathbf{C}^* の係数 b_{i1} と b_{i-1n_b} の間には $n_x = \ell - n_b$ 列、0 要素があることに注意する。また、式 (3.29) は、式 (3.28) の右辺第 1 項の $(p-1)n_x$ 列までを \mathbf{D} 、それ以降を \mathbf{E} とおいたものである。

以上を用いて、式 (3.26) の右辺、すなわち、

$$(N+1)\mathbf{G} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{E} \end{bmatrix} - \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n_b} b_{ij} \mathbf{1} \right) \quad (3.30)$$

を計算する。まず、 \mathbf{G} と $\sum \mathbf{BZ}$ の積を考える。特に、 \mathbf{G} と \mathbf{E} の積は、 $B_i(q)/A(q)$, $i = 1, \dots, p$ を無限級数展開したもの、すなわち伝達関数 $B_i(q)/A(q)$ のインパルス応答を間隔 ℓ おいて重ねあわせている*6。仮定 2 より、それぞれの伝達関数を部分分数分解すると、

$$\frac{B_i(q)}{A(q)} = \frac{\beta_{i1}}{q-d_1} + \frac{\beta_{i2}}{q-d_2} + \cdots + \frac{\beta_{in_a}}{q-d_{n_a}} \quad (3.31)$$

と n_a 以上の項に展開され、インパルス応答は

$$g_i(k) = \beta_{i1}d_1^k + \beta_{i2}d_2^k \cdots + \beta_{in_a}d_{in_a}^k \quad (3.32)$$

で与えられる。ただし、 d_i , $i = 1, \dots, n_a$ は $1/A(q)$ の極、 β_{ij} , $j = 1, \dots, n_a$ は部分分数分解したときの留数である。時刻 ℓ ずつシフトし、この和をとっても、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p g_i(k) &= d_1^{k-(p-1)\ell} (d_1^\ell (d_1^\ell (\dots) + \beta_{p-11}) + \beta_{p1}) + \cdots \\ &= \beta_{all1} d_1^{k-(p-1)\ell} \cdots \beta_{alln_a} d_{n_a}^{k-(p-1)\ell} \end{aligned} \quad (3.33)$$

と書ける。ただし、 $k \geq (p-1)\ell$ である。また、仮定 3 より $\beta_{alli} \neq 0$, $i = 1, \dots, n_a$ となる。この積により得られる部分行列は n_a 行 $N - (p-1)\ell - n_b$ 列もしくは、 $N - (p-1)\ell - 2n_a$ 列であり、列数は式 (3.13) より $n_a + 1$ より大きい。結局、 \mathbf{GE} は、 $g_{a_k} = \sum_{i=1}^p g_i(k)$ を時刻 $(p-1)\ell + n_b + 1$

*6 \mathbf{GD} も同様の解釈ができるが、重ね合わせの順序が列ごとに異なり、その部分行列のランクを考えるのは困難である。そのため、本証明では \mathbf{GE} のみを利用する。

から並べた行列により

$$\mathbf{GE} = \mathbf{G}_{all} = \begin{bmatrix} g_{a_{(p-1)\ell+n_b+1}} & \cdots & g_{a_N} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{a_{(p-1)\ell+n_b-n_a+2}} & \cdots & g_{a_{N-n_a+1}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_a \times N-(p-1)\ell-n_b} \quad (3.34)$$

となる．式 (3.14) より，この部分行列にはすべての要素が $B_{all}(q)/A(q)$ のインパルス応答式 (3.33) で記述される $n_a \times n_a + 1$ の部分行列が含まれる．そのため，この部分行列は行フルランクとなる．

最後に， \mathbf{G} と式 (3.29) の第二項の積は

$$\frac{-1}{N+1} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n_b} b_{ij} \mathbf{G} \mathbf{1} = \frac{-1}{N+1} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n_b} b_{ij} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N g_i & \cdots & \sum_{i=1}^N g_i \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{N-n_a+1} g_i & \cdots & \sum_{i=1}^{N-n_a+1} g_i \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

のランク 1 の行列となる．式 (3.34) は行フルランクであるため，ランク 1 の式 (3.35) をこれに足してもランク落ちしないことを示せばよい．式 (3.35) から， $n_a \times n_a$ の部分行列を構成すると，つねにその非零固有値 λ_n は

$$\lambda_n = -\frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n_b} b_{ij} \sum_{j=0}^{n_a-1} \sum_{i=1}^{N-j} g_i \quad (3.36)$$

であり，対応する右固有ベクトルは式 (3.35) の 1 列目となる．よって，式 (3.34) で同様に部分行列を構成したときに，すべての部分行列に対して同一な固有値と対応する固有ベクトルが存在しなければよい．式 (3.34) の 1 列目から n_a 列目までで構成される部分行列 \mathbf{G}_1 と，2 列目から $n_a + 1$ 列目までで構成される部分行列 \mathbf{G}_2 それぞれが，ある共通な非ゼロの固有値 λ と対応する右固有ベクトル \mathbf{g}_{eig} をもつとする．このとき，

$$\mathbf{G}_1 \mathbf{g}_{eig} = \mathbf{G}_2 \mathbf{g}_{eig} = \lambda \mathbf{g}_{eig} \Rightarrow (\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2) \mathbf{g}_{eig} = \mathbf{0} \quad (3.37)$$

である． $\lambda \neq 0$ なので，

$$\mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} (1-q^{-1})g_{a_{(p-1)\ell+n_b+2}} & \cdots & (1-q^{-1})g_{a_{(p-1)\ell+n_a+n_b+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (1-q^{-1})g_{a_{(p-1)\ell+n_b-n_a+3}} & \cdots & (1-q^{-1})g_{a_{(p-1)\ell+n_b+2}} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

が零固有値をもつときのみ，式 (3.37) は成立する．式 (3.38) のすべての要素は $(1-q^{-1})/A(q)$ のインパルス応答である．仮定 4 より， $1/A(q)$ が加算器を含まないため，式 (3.37) のような \mathbf{g}_{eig} は存在しない．

以上より，式 (3.12), (3.13) が成り立つならば，式 (3.26) は行フルランク，すなわち，共通極システムは確定的可同定となることが導かれた．

3.2.4 共通極システムが確定的可同定となるための必要条件

補題 3.2 では共通極システムが確定的可同定となるための十分条件を示した。一方、必要条件としては以下の補題が成り立つ。

補題 3.3

式 (3.1) で記述される p 入力 1 出力, (n_a, n_b) 次の共通極システムが, シフト幅 ℓ , 系列長 N の巡回シフト M 系列を印加することで確定的可同定となるための必要条件は

$$Nj - n_b \geq \ell i \geq N(j-1) + n_b \quad (3.39)$$

$$N \geq n_a + pn_b \quad (3.40)$$

をすべて満たすことである。ただし, $i = 1, 2, \dots, p-1, j > 0$ である

シフト幅の下限についての条件は必要条件 (3.39) に $i = 1, j = 1$ を代入すると, 十分条件 (3.12) と同じ $\ell \geq n_b$ となる。

証明 補題 3.3 の対偶をとると,

$$N(j-1) - n_b < \ell i < N(j-1) + n_b, \quad i = 1, 2, \dots, p-1, j \in \mathbb{N} \quad (3.41)$$

$$N < n_a + pn_b \quad (3.42)$$

のいずれかが成り立つならば, 確定的可同定でない, すなわち式 (3.6) が成り立たないことを示せばよい。

まず, 式 (3.41) ならば, 式 (3.15) における 1 番目の入力チャンネルに相当する U_1 と $i+1$ 番目の入力チャンネルに相当する U_{i+1} のそれぞれの列成分に同じ M 系列が存在するため, Φ は特異となり, 式 (3.6) が成り立たない。つぎに, 式 (3.42) ならば, 入出力データ対よりも未知パラメータ数が多いため, $\Phi^T \Phi$ が特異となり, 式 (3.6) が成り立たない。

以上より, 補題 3.3 が示された。

3.3 数値例

導いた補題 3.2, 3.3 の妥当性を数値例により検証する。

3.3.1 問題設定

確定的な p 入力 1 出力の共通極システム

$$A(q)y(k) = B_1(q)u_1(k) + B_2(q)u_2(k) + \dots + B_p(q)u_p(k) \quad (3.43)$$

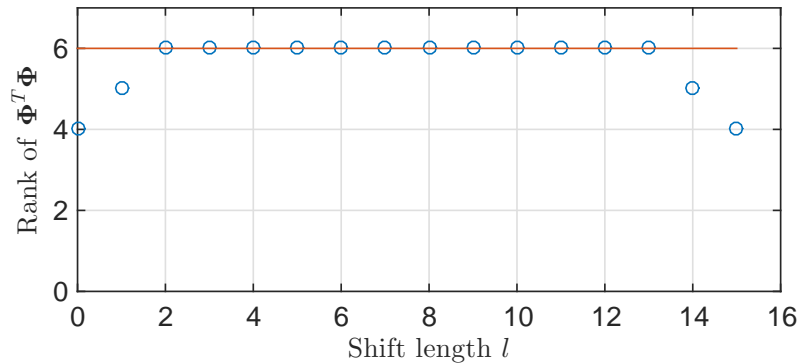


Fig. 3.2 Rank of $\Phi^T \Phi$ for the shift length. Rank=6 means full rank.

を考える。ただし，入力 $u_i(k)$, $i = 1, 2, \dots, p$ は 1 周期 N サンプルの M 系列から構成される巡回シフト M 系列とする。

ここで，巡回シフト M 系列のシフト幅を $0 \sim N$ まで推移させ，シフト幅の値ごとに式 (3.6) の $\Phi^T \Phi$ のランクがフルランクか否か，すなわち確定的可同定かどうかを判断し，補題 3.2，補題 3.3 の妥当性を検証する。なお，検証のため $A(q)$, $B_i(q)$, $i = 1, 2, \dots, p$ と N には 2 つの数値条件を当てはめる。

3.3.2 数値条件 1

式 (3.43) に対して，2 入力 1 出力，(2, 2) 次の共通極システム

$$\begin{aligned} A(q) &= 1 + 1.5q^{-1} - 0.7q^{-2} \\ B_1(q) &= q^{-1} + 0.3q^{-2} \\ B_2(q) &= 0.9q^{-1} + 0.4q^{-2} \end{aligned}$$

を仮定する。また，巡回シフト M 系列の系列長は $N = 15$ とする，この例題では $p = 2$, $n_a = n_b = 2$, $N = 15$ なので，補題 3.2, 3.3 より

$$\text{十分条件: } 2 \leq \ell \leq 10 \rightarrow \text{確定的可同定} \quad (3.44)$$

$$\text{必要条件: } \text{確定的可同定} \rightarrow 2 \leq \ell \leq 13 \quad (3.45)$$

が導いた条件によるシフト幅 ℓ に関する条件となる。Fig.3.2 に最小二乗法に用いる式 (3.15) 記載のデータ列からなる行列 $\Phi^T \Phi$ のランクを示した。

Fig.3.2 のように $\Phi^T \Phi$ は $2 \leq \ell \leq 13$ の場合にフルランク，すなわち確定的可同定である。これより，補題 3.2, 3.3 とともに妥当であることがわかる。一方，補題 1 で保証した範囲外の $11 \leq \ell \leq 13$ でも確定的可同定となっている。これは，補題 1 の証明で式 (3.28) の右辺第一項の行列 D を考慮していないためであると考えられる。

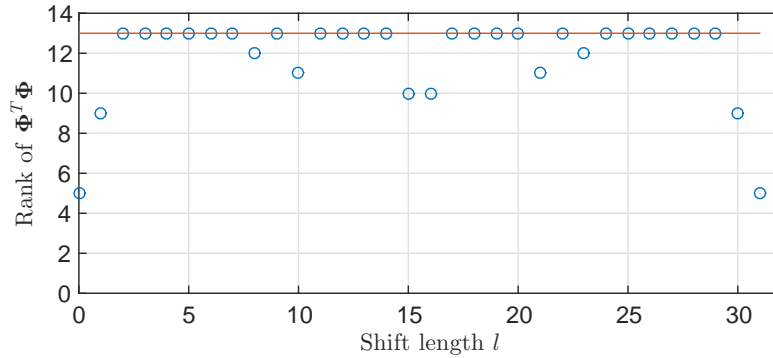


Fig. 3.3 Rank of $\Phi^T \Phi$ for the shift length. Rank=13 means full rank.

3.3.3 数値条件 2

式 (3.43) に対して, 5 入力 1 出力, (3, 2) 次の共通極システム

$$\begin{aligned}
 A(q) &= 1 + 1.2q^{-1} + 0.47q^{-2} + 0.06q^{-3} \\
 B_1(q) &= q^{-1} + 0.3q^{-2}, \quad B_2(q) = q^{-1} + 0.4q^{-2}, \quad B_3(q) = q^{-1} + 0.5q^{-2} \\
 B_4(q) &= q^{-1} + 0.6q^{-2}, \quad B_5(q) = q^{-1} + 0.7q^{-2}
 \end{aligned}$$

を仮定する. また, 巡回シフト M 系列の系列長は $N = 31$ とする, この例題では $p = 5, n_a = 3, n_b = 2, N = 31$ なので, 補題 3.2, 3.3 より

$$\text{十分条件: } 2 \leq \ell \leq 6 \rightarrow \text{確定的可同定} \quad (3.46)$$

$$\text{必要条件: 確定的可同定} \rightarrow \ell = 2 \sim 7, 9, 11 \sim 14, 17 \sim 20, 22, 24 \sim 29 \quad (3.47)$$

が導いた条件によるシフト幅 ℓ に関する条件となる. 補題 3.3 については, 対偶を考えるとわかりやすい. つまり,

$$31(j-1) - 2 \leq i\ell \leq 31(j-1) + 2, \quad i = 1, 2, \dots, 4, \quad j \in \mathbb{N} \quad (3.48)$$

となる ℓ は確定的可同定ではない. たとえば, $\ell = 23$ は, $i = 4, j = 3$ の場合に式 (3.48) の条件を満たすため, 確定的可同定とならない. これは, 式 (3.15) における 1 番目の入力チャンネルに相当する U_1 と 5 番目の入力チャンネルに相当する U_5 に重なりあう部分が生じてランク落ちすることを意味する.

数値例 1 と同様に, Fig.3.3 に最小二乗法に用いる式 (3.15) 記載のデータ列からなる行列 $\Phi \Phi^T$ のランクを示した. まず, Fig.3.3 より, $2 \leq \ell \leq 6$ では確定的可同定となっているため, 十分条件式 (3.46) が妥当であることが確認できる. また, 必要条件も, 式 (3.47) で述べた値がすべてが確定的可同定となっていることから, こちらも妥当であることが確認できる.

数値例 2 の場合，十分条件で得られたシフト幅は確定的可同定となる範囲よりもかなり狭い範囲になっている．しかし，式 (3.47) のうち，十分条件と重なっていない範囲におけるシフト幅の値は，とびとびの値で直感的に設計しにくいと思われる．

3.4 まとめ

本章では， p 入力 1 出力の共通極モデルが確定的可同定となるための，巡回シフト M 系列のシフト幅と系列長に関する十分条件と必要条件を導出した．そして，数値例を用いてこれらの条件を検証した．その結果，それぞれの条件が適切ではあるものの，十分条件はさらに広い範囲のものが存在することが示唆された．

今後の課題は共通極システムが確定的可同定となるための巡回シフト M 系列の必要十分条件を導出することである．さらに，提案した巡回シフト M 系列による入力設計法は，確定的可同定性の意味，つまり同定できるかどうかという面についてしか着目していない．そのため，巡回シフト M 系列の設計パラメータと同定精度の関係についても解析していくことも今後の課題となる．

第 4 章

時間領域におけるシステム同定結果の評価指標

本章では、時間領域におけるシステム同定結果の評価指標について述べる。MBD において MATLAB の SITB を利用しシステム同定をおこなうと、システム同定結果の評価では適合率が表示される。しかし、第 2 章で述べたように、この適合率の妥当性に関する議論は筆者の調べた限りほとんどない。そこでまず、無次元指標についての議論が活発である自然地理学分野において提案された指標と、それらが提案されてきた背景に関する議論をまとめる。つぎに、新しい指標を提案し、この指標の意味について解析する。最後に、線形システム同定の評価のための 2 つの例題をもとに、それぞれの指標の妥当性を考察する。

4.1 はじめに

システム同定結果の時間領域での評価は、測定値 y とモデル出力 \hat{y} の二つの波形の適合度からモデルの妥当性を判断するものである。この方法は直感的で、対象が非線形システムの場合にも利用できるため、応用の場面ではしばしば用いられる。時間領域での評価を行うためには、二つの波形の適合度を測る指標が重要である。特に、同定対象の単位系に左右されない無次元指標は便利である。システム同定では適合率と呼ばれる無次元指標が時間領域での評価によく用いられる。適合率は

$$\text{FIT} = \left\{ 1 - \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^N (y(k) - \hat{y}(k))^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^N (y(k) - \bar{y})^2}} \right\} \times 100 [\%] \quad (4.1)$$

で定義される。ただし、

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k), \quad \bar{\hat{y}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{y}(k)$$

であり、 $y(k)$ と $\hat{y}(k)$ はそれぞれ時刻 k での測定値、予測値である。適合率は % で表示され、NRMSE (Normalized-RMSE) fitness value とよばれる [37] ため、ユーザは 0~100% に規格化されたものであると期待する。実際、式 (4.1) は完全に y と \hat{y} が一致したときに最大値である 100% をとる。しかし、FIT は RMSE の増加に対して値が単調減少するため、最小値が存在せず、RMSE が測定値の標準偏差を上回った場合に負値を取る。これはユーザにとって理解しにくい。また、適合率が一般的に利用されている背景を含め、システム同定で用いる無次元指標についての議論は、著者が調べた限りほとんどなかった。

そこで、本章ではシステム同定で用いる無次元指標について議論すると同時に、適合率に代わるユーザにとってわかりやすく、意味のある指標を提案することを目的とする。

本章ではまず、適合率を利用したシステム同定結果評価について、簡単な例題を与え、適合率の問題点を明らかにする。つぎに、過去に他分野で提案された二つの波形の適合度を評価する無次元指標について紹介する。そして、紹介した指標を規格化の有無、規格化に用いている不等式に基づき分類し、これをもとに新しい指標を提案する。さらに、線形システム同定結果の評価において最低限求められる、振幅特性、位相特性を、適合率、紹介した指標、提案した指標により適切に評価できるかを簡単な例題を通して考察する。最後に、ここまでに挙げた指標についての総括を行い、システム同定にとって適切な無次元指標についてまとめる。

4.2 FIT によるシステム同定結果評価

FIT を利用したシステム同定結果評価について、簡単な例題を与える。離散時間線形時不変システム

$$y(k) = G(q)u(k) \tag{4.2}$$

を考える。ただし、 $G(q)$ は離散時間伝達関数、 $u(k)$ 、 $y(k)$ はそれぞれ時刻 k でのシステムの入力、出力であり、 q はシフトオペレータである。ここで、真のシステムとして

$$G(q) = \frac{q^{-1} + 0.5q^{-2}}{1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2}}$$

を仮定する。いま、 $G(q)$ に対してゲインのみ異なる 2 種類のモデル

$$\hat{G}_+(q) = 2.01G(q), \quad \hat{G}_-(q) = 0.49G(q)$$

そして、位相のみ異なるモデル、位相とゲインの異なるモデル

$$\hat{G}_p(q) = G(q)q^{-3}, \quad \hat{G}_{p-}(q) = 0.49G(q)q^{-3}$$

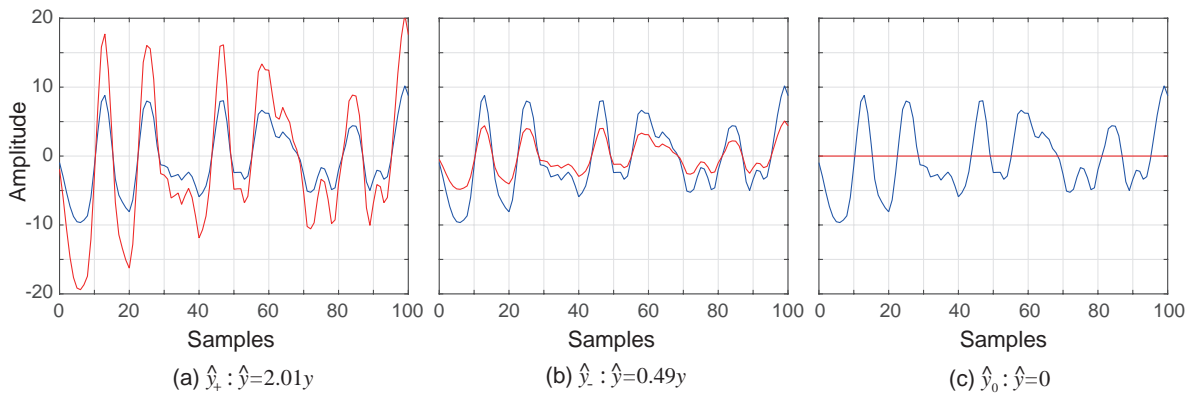


Fig. 4.1 Waveform of the example : gain shift case (Blue : $y(k)$, Red : $\hat{y}(k)$)

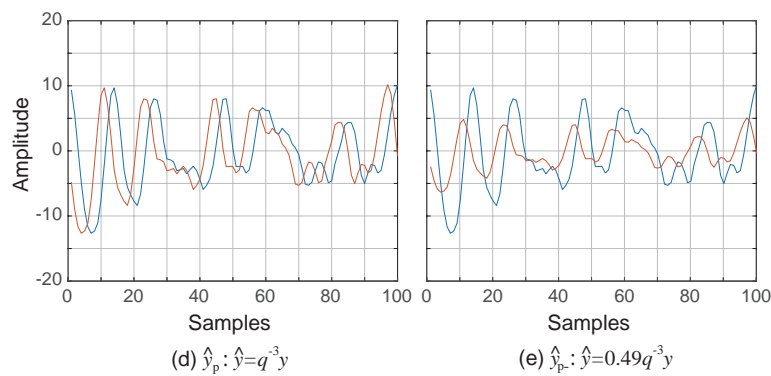


Fig. 4.2 Waveform of the example : phase shift case (Blue : $y(k)$, Red : $\hat{y}(k)$)

が推定されたとする．出力 y に対し，前述の 4 種類のモデルそれぞれに， u として 1 と -1 の二値で構成される 1 周期 1023 サンプルの M 系列を 1 周期印加した際に得られたモデル出力，および全時刻で 0 を取る出力を

$$\begin{aligned} \hat{y}_+(k) &= \hat{G}_+(q)u(k), \quad \hat{y}_-(k) = \hat{G}_-(q)u(k) \\ \hat{y}_p(k) &= \hat{G}_p(q)u(k), \quad \hat{y}_{p-}(k) = \hat{G}_{p-}(q)u(k) \\ \hat{y}_0(k) &= 0 \end{aligned}$$

とおく．これらの予測値について FIT をそれぞれ算出する．

真の出力 y とゲインのみ異なる二種類のモデル出力 \hat{y}_+ , \hat{y}_- , \hat{y}_0 の 0~100 サンプルを Fig. 4.1(a)~(c) に示す．また，真の出力 y とゲイン，位相の異なる二種類のモデル出力 \hat{y}_p , \hat{y}_{p-} の 0~100 サンプルを Fig. 4.2(d), (e) に示す．また，Table 4.1 にそれぞれのモデルに対する FIT の計算結果を示す．

Fig. 4.1 より， \hat{y}_+ , \hat{y}_- は \hat{y}_0 より情報はあり，高い値を期待する．また，Fig. 4.2(d) と (e) を比べると，(d) の方が正しい振幅であり，高い値を期待する．しかしこの期待に反して，FIT

Table 4.1 Values of FIT for the example

	FIT [%]
\hat{y}_+	-1.00
\hat{y}_-	49.00
\hat{y}_p	-13.55
\hat{y}_{p-}	5.62
\hat{y}_0	0.00

は、出力 y のほぼ2倍である y_+ に対しては負値をとったが、ほぼ半分である y_- に対しては正值をとり、さらに y_+ よりも y_0 の方が高い値をとっている。また、 y と同振幅で位相のみ異なる y_p に対しては負値をとったが、 y_p と同じだけ位相遅れをもち、かつ y よりも振幅が小さい y_{p-} には正值をとっている。

以上をまとめると、FITの問題点としては

- 低振幅の予測波形を良く評価する。
- \hat{y}_0 よりも、位相や振幅が y と一致している波形の方が低い値を示すことがある。

の2点が挙げられる。

4.3 時間領域における評価のための無次元指標

FITに代わる無次元指標について考える。無次元指標は、主に気候学と水文学の分野（以降、この二分野をまとめて自然地理学分野と呼ぶ）において1970年代ごろから“Goodness of fit”というキーワードのもとで考えられてきた。最初に、“Coefficient of Efficiency E ”が、降雨流出モデル（降雨量から川の流量を予測するモデルで洪水予測などに利用される）の評価指標として、J.E.Nashらにより提案された[41],[42]。この指標は出力測定値（以下、測定値と略記）とモデルの出力予測値（以下、予測値と略記）のMSEを測定値の分散で規格化したものであり、MSEが0となるときに最大値である1をとる。しかし、この指標はMSEに伴い単調減少するため、最小値が存在しない。そこで、MSEを0~100となるように規格化した“Index of agreement d_j ”がC.J.Willmottらによって提案された[43],[44]。その後、この2種類の指標についての優劣や、これらの更新に関する議論が今日まで続いている[45]–[50]。なお、自然地理学分野ではこのほかにも多数の指標が提案されているが、その多くは E または d_j のどちらかに類似しており、本質的な違いはない。そのため、本章ではこの2つについてのみ紹介し、ほかの指標についてはMoriassiらのガイドライン[47]を参照されたい。

以下でこれらの指標について詳しく説明する。

[1] 相関係数 多くの文献では、無次元指標として有名な相関係数が最初に議論されている [45],[47]. 相関係数 (以降, r と記載) は,

$$r = \frac{\sum_{k=1}^N (y(k) - \bar{y})(\hat{y}(k) - \bar{\hat{y}})}{\sqrt{\sum_{k=1}^N (y(k) - \bar{y})^2 \sum_{k=1}^N (\hat{y}(k) - \bar{\hat{y}})^2}} \quad (4.3)$$

で定義される。ここで,

$$\mathbf{y} = [y(1) \ y(2) \ \dots \ y(N)]^T, \quad \hat{\mathbf{y}} = [\hat{y}(1) \ \hat{y}(2) \ \dots \ \hat{y}(N)]^T \\ \bar{\mathbf{y}} = [\bar{y}, \bar{y}, \dots, \bar{y}]^T \in \mathbb{R}^N, \quad \bar{\hat{\mathbf{y}}} = [\bar{\hat{y}}, \bar{\hat{y}}, \dots, \bar{\hat{y}}]^T \in \mathbb{R}^N$$

とおくと, 式 (4.3) は,

$$r = \frac{\langle \mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{y}} - \bar{\hat{\mathbf{y}}} \rangle}{\|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}\| \|\hat{\mathbf{y}} - \bar{\hat{\mathbf{y}}}\|} \quad (4.4)$$

のように内積の形で記述できる。式 (4.4) より, r はコーシー=シュワルツの不等式

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| \leq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^N, \quad N \in \mathbb{N} \quad (4.5)$$

により規格化されており, $1 \sim -1$ の範囲の値をとることがわかる。一般的に $r = 1$ の場合を正の相関, $r = -1$ の場合を負の相関とよび, 両者を区別する。一方, r は y と \hat{y} が定数倍の関係にある場合はつねに 1 となり, 区別がつかない。また, $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$ に対して, 式 (4.3) はゼロ割をおこし値が算出できないことに注意する。

r はさまざまな分野で用いられているが, 自然地理学分野において, r は推奨されていない [45],[47],[51]. その理由は,

- アウトライア (外れ値) に敏感である
- オフセットが存在しても値が変化しない
- 定数倍の関係に対して値が変化しない

である。

[2] Coefficient of Efficiency Coefficient of Efficiency (以降, E と記載) は自然地理学分野, 特に水文学分野で一般的に利用される指標で,

$$E = 1 - \frac{\sum_{k=1}^N (y(k) - \hat{y}(k))^2}{\sum_{k=1}^N (y(k) - \bar{y})^2} \quad (4.6)$$

で定義される。なお、文献によっては E を “Nash-Sutcliffe model efficiency coefficient” (NSE) と呼ぶこともある [47]。

この指標は水文学分野で扱われる降雨流出モデルの評価指標として米国土木学会 (ASCE) で推奨されている [52]。その理由として、 $E \leq 0$ の場合は、モデルの予測結果が測定値の平均をモデルとして採用した場合よりも良くないと解釈でき、モデルが妥当でないと判断できることを挙げている。

この指標は MSE が 0 となるとき、すなわち完全に y と \hat{y} が一致したときに最大値 1 をとる。しかし FIT と同様に、MSE の増加に対して値が単調減少するため、最小値が存在しない。特に、MSE が測定値の分散を上回ると式 (4.6) は負値をとることについて評価指標として議論となる部分であった。これを受けて提案された最小値が存在する指標がつぎに示す Index of agreement である。

[3] Index of agreement Index of agreement (以降、 d_j と記載) は

$$d_j = 1 - \frac{\sum_{k=1}^N |y(k) - \hat{y}(k)|^j}{\sum_{k=1}^N (|y(k) - \bar{y}| + |\hat{y}(k) - \bar{y}|)^j} \quad (4.7)$$

で定義される [44]。ただし、 j は任意な正整数であり、特に $j = 1$ としたものは “Modified index of agreement” (d_1) と呼ばれる。

d_j が規格化されていることは以下のように示すことができる。式 (4.7) はつぎのように書き直せる。

$$1 - d_j = \frac{\sum_{k=1}^N |y(k) - \hat{y}(k)|^j}{\sum_{k=1}^N (|y(k) - \bar{y}| + |\hat{y}(k) - \bar{y}|)^j} = \frac{\sum_{k=1}^N |y'(k) - \hat{y}'(k)|^j}{\sum_{k=1}^N (|y'(k)| + |\hat{y}'(k)|)^j} \quad (4.8)$$

ただし、 $y'(k) = y(k) - \bar{y}$, $\hat{y}'(k) = \hat{y}(k) - \bar{y}$ とおいた。ここで、三角不等式より

$$|y'(k) - \hat{y}'(k)| \leq |y'(k)| + |-\hat{y}'(k)| = |y'(k)| + |\hat{y}'(k)| \quad (4.9)$$

が成り立つ。なお、式 (4.9) の等号成立条件は $y'(k)$ か $\hat{y}'(k)$ のいずれかが 0 か、任意の正数 λ に対して、 $y'(k) = -\lambda \hat{y}'(k)$ となるときである。また、 $y'(k) = \hat{y}'(k)$ の場合、式 (4.9) 左辺が 0 となる。式 (4.9) より、

$$0 \leq \frac{\sum_{k=1}^N |y'(k) - \hat{y}'(k)|}{\sum_{k=1}^N (|y'(k)| + |\hat{y}'(k)|)} \leq 1 \quad (4.10)$$

が成り立つ。したがって、任意の $j > 0$ に対して、式 (4.8) は $0 \sim 1$ の間に規格化されている。

d_j のもうひとつの大きな特徴は、式 (4.7) 右辺第二項の分母において、測定値 y 、予測値 \hat{y} それぞれから、測定値の平均値 \bar{y} を差し引いていることである。これにより、測定値と予測値の平均値の差まで含めて評価できる。

具体例を挙げてこの効果を説明する。測定値 $y(k)$ と予測値 $\hat{y}(k)$ が以下の関係をもつとする。

$$\hat{y}(k) = y(k) + f, \quad \bar{y} = 0, \quad f > 0 \quad (4.11)$$

ただし、 f は予測値のオフセットである。このとき、 d_j は

$$d_j = 1 - \frac{N|f|^j}{\sum_{k=1}^N (|y(k)| + |y(k) + f|)^j} \quad (4.12)$$

となる。 $y(k) > 0$ の場合、 $|y(k)| + |y(k) + f| = 2y(k) + f$ 、 $y(k) \leq 0$ の場合、 $|y(k)| + |y(k) + f| = f$ であるので、

$$d_j = 1 - \frac{Nf^j}{\sum_{k=1}^{N_1} (2y(k) + f)^j + (N - N_1 + 1)f^j} \quad (4.13)$$

となる。ただし、簡単のため $1 \leq k \leq N_1$ のとき $y(k) > 0$ 、 $N_1 + 1 \leq k \leq N$ のとき、 $y(k) \leq 0$ とした。すると、式 (4.13) は

$$d_j = 1 - \frac{Nf^j}{g(f) + Nf^j} = 1 - \frac{f^j}{g(f)/N + f^j} \quad (4.14)$$

と書き表せる。ただし、 $g(f) = (2y(k) + f)^j - f^j = g_1 f^{j-1} + g_2 f^{j-2} + \dots$ とした。式 (4.14) を f で偏微分して、

$$\frac{\partial d_j}{\partial f} = -\frac{f^{j-1} g(f)}{N(g(f)/N + f^j)^2} \quad (4.15)$$

を得る。 $g(f)$ の各要素 g_1, g_2, \dots と f は正なので、式 (4.15) はつねに負値となる。よって、オフセット f の増加に伴って値が単調減少することがわかる。

d_j は E の問題点であった最小値が存在しない課題を克服しており、この指標をもとにした新たな指標を作る動きが最近も続いている [48]。一方で、この指標は Coefficient of Efficiency のような解釈ができない問題点があるとされ、Coefficient of Efficiency ほど標準的に用いられていない [45]。

Table 4.2 Classification of criteria by inequality

	Each sample	All samples
Schwarz	A	$r = \frac{\langle \mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{y}} - \bar{\hat{\mathbf{y}}} \rangle}{\ \mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}\ \ \hat{\mathbf{y}} - \bar{\hat{\mathbf{y}}}\ }$
Triangle	$d_j = 1 - \frac{\sum_{k=1}^N y(k) - \hat{y}(k) ^j}{\sum_{k=1}^N (y(k) - \bar{y} + \hat{y}(k) - \bar{y})^j}$	B

4.4 無次元指標の分類

前節で紹介した無次元指標をまとめる。まず、下限が存在しない指標として、式 (4.1) で定義される適合率 (FIT), 式 (4.6) で定義される Coefficient of Efficiency (E) を紹介した。ともに、測定値と予測値の誤差をもとにしており、E は MSE を、FIT は RMSE を規格化している違いがある。

つぎに、下限が存在する指標としては、式 (4.4) で定義される相関係数 (r), 式 (4.7) で定義される Index of agreement (d_j) を紹介した。両者を規格化に利用した不等式をもとに、Table 4.2 にまとめた。なお、表中の All samples は波形全体を1つのベクトルとみなして評価するものであり、Each sample は波形を1点ずつ評価するものである。そして、表中に示した A, B はそれぞれ対応する指標が定義されていないものである。これらに対応する指標を定義するとつぎに示すようになる。

$$A = \frac{\sum_{k=j}^N \langle \mathbf{y}(k), \hat{\mathbf{y}}(k) \rangle}{\sum_{k=j}^N \|\mathbf{y}(k)\| \|\hat{\mathbf{y}}(k)\|} \tag{4.16}$$

$$B = 1 - \frac{\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|}{\|\mathbf{y}\| + \|\hat{\mathbf{y}}\|} \tag{4.17}$$

ただし、

$$\mathbf{y}(k) = [y(k), y(k+1), \dots, y(k+j)]^T, \hat{\mathbf{y}}(k) = [\hat{y}(k), \hat{y}(k+1), \dots, \hat{y}(k+j)]^T$$

で、j はベクトルの次元である。指標 A は規格化されているが、不等式の両辺同士で和を取っているため、意味をもたせるのが難しい。

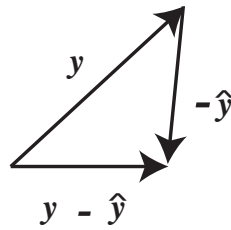


Fig. 4.3 Interpretation of index B

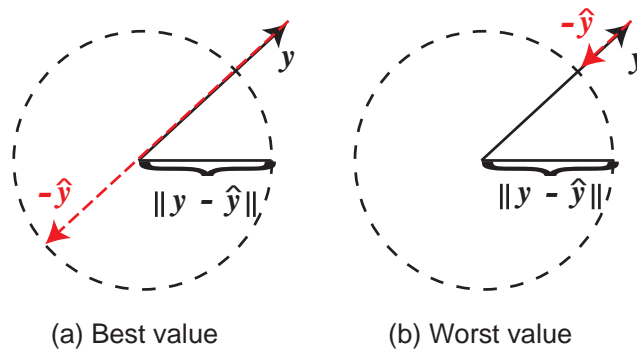


Fig. 4.4 Maximum and minimum value of index B

4.4.1 指標 B の意味

式 (4.17) の指標 B の意味について考察する。なお、簡単のため、ノルムはユークリッドノルムとする。三角不等式の意味は、Fig. 4.3 のように y 、 $-\hat{y}$ 、 $y - \hat{y}$ の三辺で構成される三角形を考えたとき、1 辺よりも他 2 辺の和の方が大きいことを意味する。式 (4.17) は誤差 $\|y - \hat{y}\|$ が同じ値ならば、 $\|\hat{y}\|$ が最も大きいときに指標は最も大きくなる。これは、Fig. 4.4(a) に示すように、 y の原点を中心に半径 $\|y - \hat{y}\|$ の円を描いた場合、 $-\hat{y}$ が赤で示すように、 y と逆方向を向き、かつ、 $\|y\| < \|\hat{y}\|$ の場合に指標が最大化される。これは、 $\hat{y} = \lambda y$ 、 $\lambda > 1$ の場合であり、 y とまったく同じ波形が λ 倍されたものを最も良く評価する。一方、Fig. 4.4(b) に示すように、 y と逆方向を向きかつ、 $\|y\| > \|\hat{y}\|$ の場合に指標が最小化される。これは、 $\hat{y} = \lambda' y$ 、 $\lambda' < 1$ の場合であり、 y とまったく同じ波形が λ' 倍されたものを最も悪く評価する。たとえば、 $\hat{y} = 2y$ と $\hat{y} = 0$ とはともに $\|y - \hat{y}\| = \|\hat{y}\|$ となり、両者の誤差は同じ大きさである。つまり、RMSE や FIT の値は同じである。一方、指標 B を利用すると、 $\hat{y} = 2y$ の場合は $B = 1/3$ 、 $\hat{y} = 0$ の場合は $B = 0$ となり差が生じる。

なお、現実にはまったく同じ波形を λ' 倍したようなシミュレーション結果が得られることは少ない。そこで、Fig. 4.5 に示すように、 y と \hat{y} とが異なる方向を向いている場合を想定す

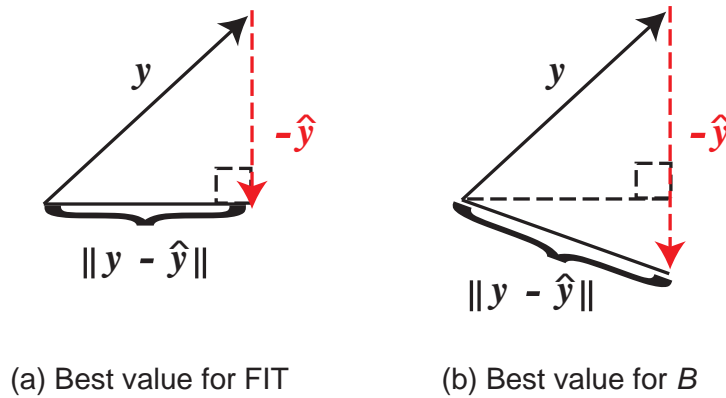


Fig. 4.5 Interpretation of errors of FIT and index B

る。このとき、FIT では、Fig. 4.5(a) に示すように、誤差が最小となる \hat{y} に対して最良値を与える。一方、 B は少なくとも Fig. 4.5(b) のように、誤差が最小となる \hat{y} 以上に $\|y\|$ が大きくなる \hat{y} に対して最良値を与えると考えられる。

指標 B と FIT を比較するため、指標 B に関して典型的な最良値を計算する。 \hat{y} がパラメータ w とデータ U からなる線形回帰モデル

$$\hat{y} = U^T w, \quad w \in \mathbb{R}^{n_b}, \quad U \in \mathbb{R}^{n_b \times N} \quad (4.18)$$

で記述されると仮定する。式 (4.18) を式 (4.17) に代入し、 w で偏微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial w} &= -\frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\|y - U^T w\|}{\|y\| + \|U^T w\|} \right) \\ &= -\left(\frac{U(U^T w - y)}{(\|y\| + \|U^T w\|)\|U^T w - y\|} - \frac{UU^T w \|U^T w - y\|}{(\|y\| + \|U^T w\|)^2 \|U^T w\|} \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$= \frac{(UU^T w \|y\| + Uy \|U^T w\|)(\|y\| - \|U^T w\|)}{(\|y\| + \|U^T w\|)^2 \|U^T w - y\| \|U^T w\|} \quad (4.20)$$

となる。計算過程の式 (4.19) 右辺第 1 項の分子を 0 とする w は最小二乗解であり、指標 B の極値は最小二乗解と異なることがわかる。式 (4.20) 右辺の分子第 1 項^{*1}が 0 となるのは、

$$U^T w = -\lambda y, \quad \lambda > 0 \quad (4.21)$$

の場合である。つまり、測定値と予測値が負の相関をもつ場合である。そして、そのときの値は式 (4.17) に $\hat{y} = -\lambda y$ を代入することで、0 であることがわかる。一般的に測定値と予測値が負の相関をもつ場合は少なく、式 (4.21) が 0 となるケースはほぼ考えなくてよい。

^{*1} 本論文では、分子の左から 1 つ目のカッコ内を分子第 1 項と呼ぶ。同様に分母も左から 1 つ目のカッコ内を分母第 1 項と呼ぶ。

つぎに、式 (4.20) 右辺の分子第 2 項が 0 となるのは、

$$\|U^T \mathbf{w}\| = \|\mathbf{y}\| \quad (4.22)$$

の場合である。つまり、測定値と予測値のノルムが一致した場合である。これを満たす \mathbf{w} は式 (4.22) の両辺を二乗して、

$$\mathbf{w}^T U U^T \mathbf{w} = \mathbf{y}^T \mathbf{y} \quad (4.23)$$

を満たし、複数存在する。式 (4.22) は B に最良値を与えるための必要条件となる。したがって、複数存在する \mathbf{w} のうち、 B に最良値を与えるのは、式 (4.22) の制約の下、式 (4.17) を最大化するものである。式 (4.22) の制約を満たす場合、式 (4.17) の分母は一定値となる。そのため最終的に、式 (4.22) の制約の下、 y と \hat{y} の二乗誤差を最小化する \mathbf{w} が B に最良値を与える。

また、式 (4.20) 右辺の分母第 3 項より、 $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ は微分不可能な点であることもわかる。そして、式 (4.20) 右辺の分母第 2 項が $U^T \mathbf{w} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$ となる、すなわち測定値と予測値が完全に一致する点でも微分不可能である。

以上を確かめるため、 U, \mathbf{y} がそれぞれ 1 次元ベクトル u, y であり、 \mathbf{w} がスカラーである場合として、以下の例題について考察する。

[1] 例題

1 変数の静的システム

$$y = 0.5u + 0.01 \quad (4.24)$$

を仮定する*2。また、このモデルとして

$$\hat{y} = wu \quad (4.25)$$

を考える。ただし、 $u = -1, -0.9, \dots, 1$ とする。

ここで、 w を -2 から 2 まで変化させたときについて、指標 B 、および式 (4.20) による $\partial B / \partial w$ をそれぞれ計算する。

それぞれの計算結果を Fig. 4.6 に示す。上段が w に対する指標 B の値、下段が w に対する $\partial B / \partial w$ である。まず、 $w \approx 0.5$ において B が最大値をとっていることが確かめられる。これは式 (4.20) 右辺の分子第 2 項が 0 かつ、 y と \hat{y} の二乗誤差が最小となることに対応している。また、 $\partial B / \partial w = 0$ となっているとおり、式 (4.20) の計算でも B が極値をとることが確認できる。

一方、 $w \approx -0.5$ においても、式 (4.20) 右辺の分子第 2 項は 0 となる。実際、この例題でも 0 となっているのだが、式 (4.20) 右辺の分子第 1 項が $w < 0$ においてほぼ 0 となる影響で、

*2 式 (4.24) の第 2 項は、測定値と予測値が完全一致することによって微分不可能点が生じることを避けるために加えている。

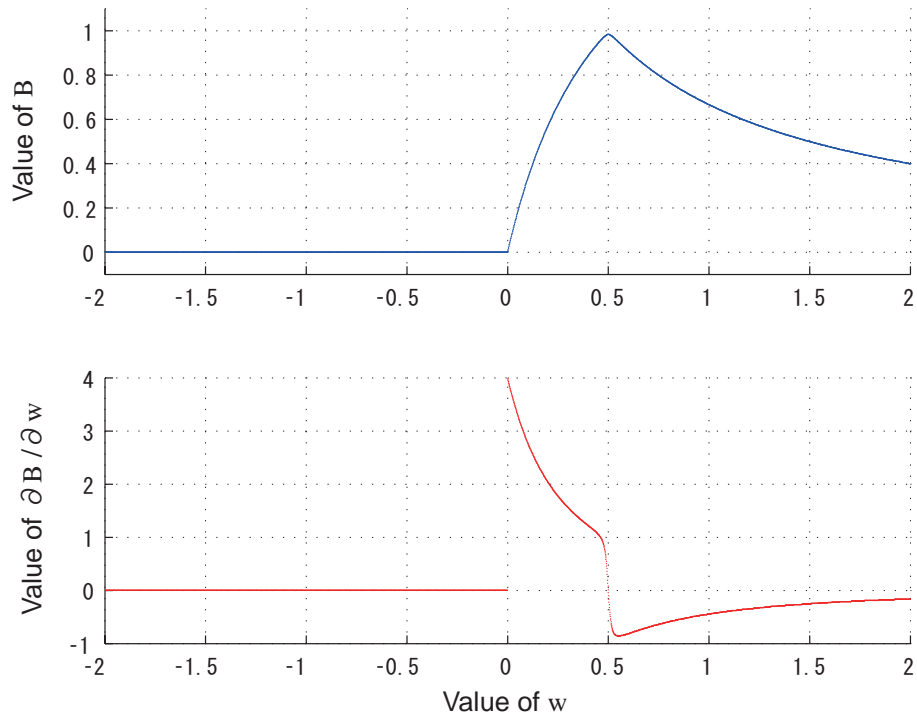
Fig. 4.6 Example of index B and its partial derivative with respect to w

Fig. 4.6 では、極値であることを確認しにくい。なお、 $w \approx -0.5$ においても、指標 B は極大値を取る。

最後に、もともと微分不可能な $w = 0$ の前後において、 $\partial B/\partial w$ が異なる値を取っていることが確認できる。そして、 $w < 0$ においては、測定値と予測値がほぼ負の相関をもつことから、式 (4.20) 右辺の分子第 1 項がほぼ 0 となり、 $\partial B/\partial w \approx 0$ となる。前項で述べたように、 $w = 0$ において B は 0 をとるため、 $w < 0$ は B の値もほぼ 0 となっている。

このように、 w がスカラーである場合の指標 B は、測定値と予測値が負の相関をもつ $w < 0$ の領域ではほぼ 0 を示し、測定値と予測値のノルムが一致する $w \approx 0.5$ で極大値をとる、規格化された指標であることが確認できた。

[2] FIT との関係

w がスカラーの場合について、既存の指標である FIT と指標 B の関係について述べる。なお、ここでは [1] の例題で扱った式 (4.24) と同様、システムは正の係数 w をもつとする。

まず、FIT に最良値を与える最小二乗解は、

$$\hat{w}_{ls} = \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{y}}{\|\mathbf{u}\|^2} \quad (4.26)$$

である。それに対して、指標 B に対して最良値を与える w は、式 (4.22) より

$$\hat{w}_B = \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{u}\|} \quad (4.27)$$

である。よって、

$$\hat{w}_B - \hat{w}_{ls} = \frac{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{y}\| - \mathbf{u}^T \mathbf{y}}{\|\mathbf{u}\|^2} \geq 0 \quad (4.28)$$

となり、1変数かつ $w > 0$ の場合、指標 B を最大化する w は最小二乗解以上の値となる^{*3}。

なお、式 (4.28) の不等号はシュワルツの不等式によるため、この両者が一致するのは等号成立条件が成り立つ、 $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{u}$ 、 $\lambda > 0$ のときである。この結果は、前項で示した Fig. 4.5 の考察を裏付けるものである。

本研究では、指標 B のことを三角不等式に基づく指標という意味を込め、三角指標 (Tri_j) と呼ぶ。ただし、 j は任意の正整数である。ノルムの取り方によって Tri はいくつもの形をもちうるが、一般的に利用されている RMSE を規格化するという意味で、 $j = 2$ とおいた Tri_2 を本研究では考察する。

4.4.2 システム同定結果評価における FIT と Tri_2 の特徴

指標 Tri_2 が最小二乗解と別の解を最良と判断することがわかった。この性質のシステム同定結果評価に対する影響について二つの面から考察する。

[1] 雑音の影響

システム同定結果を評価するうえで、雑音に対する指標の振る舞いは重要である。そこで、つぎのシステムを考える。

$$y(k) = bu(k) + \sigma^2 w(k) \quad (4.29)$$

ただし、 $y(k)$ 、 $u(k)$ 、 $w(k)$ はそれぞれ時刻 k における出力、入力、平均値 0、分散 1 の白色雑音とする。また、 σ は任意の正数とする。ここで、 y 、 u が N サンプル得られているとし、未知パラメータ b を推定する問題を考える。

まず、FIT を最大化する \hat{b}_{ls} は最小二乗推定値であるため、

$$\hat{b}_{ls} = \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{y}}{\|\mathbf{u}\|^2} = \frac{\mathbf{u}^T (b\mathbf{u} + \sigma^2 \mathbf{w})}{\|\mathbf{u}\|^2} \quad (4.30)$$

となる。ただし、 $\mathbf{w} = [w(1), \dots, w(N)]^T$ である。いま、入力 u と白色雑音 w は無相関なので、十分に大きな N をとれば、 $\mathbf{u}^T \mathbf{w}$ の項は消え、

$$\hat{b}_{ls} \approx b \quad (4.31)$$

が得られる。つまり、この場合 FIT は真値を最適と判断できる。

^{*3} システムが負の係数 w をもつ場合も同様の議論により、指標 B を最大化する w は最小二乗解以下の値となることわかる。

つぎに, Tri_2 を最大化する \hat{b}_{tri} は

$$\hat{b}_{tri} = \frac{\|y\|}{\|u\|} = \frac{\|bu + \sigma^2 w\|}{\|u\|} \quad (4.32)$$

となる. \hat{b}_{tri}^2 を計算すると,

$$\hat{b}_{tri}^2 = \frac{(bu + \sigma^2 w)(bu + \sigma^2 w)^T}{\|u\|^2} = \frac{b\|u\|^2 + 2b\sigma^2 u w^T + \sigma^2 \|w\|^2}{\|u\|^2} \quad (4.33)$$

となる. いま, 入力 u と白色雑音 w は無相関なので, 十分に大きな N をとれば, 第二項は消え,

$$\hat{b}_{tri}^2 \approx \frac{b^2 \|u\|^2 + \sigma^2}{\|u\|^2} = b^2 + \frac{\sigma^2}{\|u\|^2} \quad (4.34)$$

となる. これは $\sqrt{\sigma^2/\|u\|^2}$ だけ, \hat{b} が b よりも大きな値となることを示している. よって, 1つのパラメータを推定する問題を考える場合, 真値から外れた値を最適と判断することがわかる.

以上より, 雑音がある場合, FIT は真値近傍を最適解と判断できるが, Tri_2 は真値からバイアスした値を最適解と判断する.

Tri_2 のもつこの性質はシステム同定結果を評価するうえで好ましくない. しかし, σ がある程度既知であれば, バイアスする程度が事前にわかるため, この分を考慮した評価ができると考えられる. なお, 2つ以上のパラメータを推定する場合における雑音の影響は, 後述の数値シミュレーションにおいて特徴を把握する.

[2] むだ時間の影響

ほとんどの物理的な対象には, 入力から出力までの間にむだ時間が存在する. むだ時間の決定法は多く研究されており [17],[53], むだ時間を推定して構造を決定したあと, パラメータを推定するのが一般的である. しかし, 正確にむだ時間を推定できない場合もあり, むだ時間が正確でなくとも, むだ時間以外のパラメータが正しく求まることは好ましい. そこで, つぎのシステムとモデルを考える.

$$\text{システム: } y(k) = bu(k-d), \quad \text{モデル: } \hat{y}(k) = \hat{b}u(k-d_2) \quad (4.35)$$

ただし, d はシステムのむだ時間, d_2 はモデルのむだ時間であり, その他の記号の意味は式 (4.29) と同様である. ここで, システムとモデルのむだ時間が異なる, すなわち $d \neq d_2$ の場合に, パラメータ b を推定する問題を考える. なお, データ数 N は十分大きいとする.

まず, FIT を最大化する \hat{b}_{ls} は

$$\hat{b}_{ls} = \frac{b \sum_{i=1}^N u(i-d)u(i-d_2)}{\sum_{i=1}^N u(i-d_2)^2} \quad (4.36)$$

となる。式(4.36)の右辺は b に、ラグ $d - d_2$ における u の自己相関関数がかかった形となっている。そのため、 u が白色雑音や M 系列ならば $\hat{b}_{ls} \approx 0$ となる。すなわち、FIT は $\hat{b}_{ls} \approx 0$ を最適解として評価する。

一方、 Tri_2 を最大化する \hat{b} は

$$\hat{b} = \frac{b \sum_{i=1}^N u(i-d)^2}{\sum_{i=1}^N u(i-d_2)^2} \approx b \quad (4.37)$$

となる。これは、十分大きく N を取れば、真値が最適解なる。すなわち、 Tri_2 を用いると $\hat{b} \approx b$ を最適解として評価する。

以上から、システムとモデルにむだ時間の差異がある場合、FIT は b と、ラグ $d - d_2$ における u の自己相関関数を乗じた値を最適解と判断し、 Tri_2 は真値を最適解と判断する。

Tri_2 のこの性質はシステム同定結果を評価するうえで好ましい。なお、2つ以上のパラメータを推定する場合におけるむだ時間の影響も、後述の数値シミュレーションにおいて特徴を把握する。

4.4.3 Tri_2 の上下限

Tri_2 は前述のとおり、0 から 1 の間の値を取る。この上下限の意味についてまとめる。

[1] 上限 ($\text{Tri}_2 = 1$)

Tri_2 が上限をとるのは、

$$\text{Tri}_2 = 1 - \frac{\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|}{\|\mathbf{y}\| + \|\hat{\mathbf{y}}\|} \quad (4.38)$$

より、式(4.38)の第二項が 0 となる

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} \quad (4.39)$$

の場合のみ 1 を取る。つまり、出力と同一の波形に対して上限値を与える。

[2] 下限 ($\text{Tri}_2 = 0$)

Tri_2 が下限を取るのは、式(4.38)の第二項が 1 となる、

$$\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\| = \|\mathbf{y}\| + \|\hat{\mathbf{y}}\| \quad (4.40)$$

の場合である。式(4.40)が成り立つ $\hat{\mathbf{y}}$ は、三角不等式の等号成立条件より、

$$\hat{\mathbf{y}} = \lambda \mathbf{y}, \quad \lambda \leq 0 \quad (4.41)$$

の場合である。つまり、出力と正負が入れ替わった波形に対して下限値を与える。また、予測値が発散し

$$\|\hat{y}\| \rightarrow \infty \quad (4.42)$$

となった場合、式(4.38)の第2項は1に漸近するため、 Tri_2 は下限に漸近する。

4.4.4 d_1 と Tri_1

式(4.7)のうち d_1 は

$$\begin{aligned} d_1 &= 1 - \frac{\sum_{k=1}^N |y(k) - \hat{y}(k)|}{\sum_{k=1}^N (|y(k) - \bar{y}| + |\hat{y}(k) - \bar{y}|)} \\ &= 1 - \frac{\|y - \hat{y}\|_1}{\|y - \bar{y}\|_1 + \|\hat{y} - \bar{y}\|_1} \end{aligned}$$

であるため、 Tri_1 と等価であり、Table 4.2においては、Each samples, All samples 両方の分類にも属する。なお、 d_1 は Modified index of Agreement と呼ばれる [45]。

4.5 数値例による無次元指標の特徴把握

本節では、まずシステム同定結果評価を単純化した正弦波の波形を比較する。これにより、前節までに紹介した指標それぞれの基本的な特徴を把握する。つぎに、システム同定結果の評価で重要となる雑音とむだ時間に対する指標の振る舞いを観察する。

4.5.1 周波数応答の時間領域での比較

[1] 問題設定

システム同定結果の比較問題として、以下の連続時間システムとモデルを仮定する。

$$y(t) = G(p)u(t) + v(t) \quad (4.43)$$

$$\hat{y}(t) = \hat{G}(p)u(t) \quad (4.44)$$

ただし、 $G(p)$ 、 $\hat{G}(p)$ はそれぞれ真のシステム、モデルであり、 u, y, \hat{y}, v はそれぞれ、入力、出力測定値、出力予測値、雑音とする。また、 p は微分オペレータである*4。

*4 この例題では、各指標について解析的な解の導出をおこなう。そのため、和分を積分として扱える連続時間システムについて議論する。

u や v はさまざまな周波数成分を含んでいるが、ある周波数 ω に注目するとそれぞれ正弦波で表すことができる。すなわち、

$$y(t) = G(p)a \sin \omega t + b \sin(\omega t + \phi) \quad (4.45)$$

$$\hat{y}(t) = \hat{G}(p)a \sin \omega t \quad (4.46)$$

で表される。ただし、 a, b はそれぞれ周波数 ω における入力 u と雑音 v の振幅、 ϕ は位相差を示す値である。 G の ω におけるゲイン、位相遅れをそれぞれ g_a, g_ϕ 、 \hat{G} の ω におけるゲイン、位相遅れをそれぞれ \hat{g}_a, \hat{g}_ϕ とすれば、 y, \hat{y} は

$$y(t) = c \sin(\omega t - g_\phi + \psi)$$

$$\hat{y}(t) = a \hat{g}_a \sin(\omega t - \hat{g}_\phi)$$

の形になり、入力した正弦波と同じ周波数の正弦波が出力される。ただし、

$$c = \sqrt{(a g_a)^2 + b^2 + 2ab \cos(\phi + g_\phi)}$$

$$\psi = \arctan \frac{b \sin(\phi + g_\phi)}{a + b \cos(\phi + g_\phi)}$$

である。これは線形システムに対する周波数応答の原理として知られている。

周波数応答の原理をもとに、ある周波数 ω の正弦波を印加した際の線形システム同定結果の比較問題について考察する。すなわち、

$$y_1(\theta) = \sin \theta, \quad y_2(\theta) = a \sin(\theta + \phi) \quad (4.47)$$

を仮定する。ただし、 $a \geq 0$ とし、 y_1 を測定値、 y_2 を予測値とする。また、 $0 \leq \theta < 2\pi$ とし、 a と ϕ を変化させたときの各指標値 (FIT, r , E , d_1 , Tri_2) を観察する。なお、この例題では各指標の和分を積分に置き換えて評価する。

[2] 計算結果

各指標を解析的に計算した結果を示す。

■ 適合率 (FIT)

$$\text{FIT} = \left(1 - \frac{\sqrt{\int_0^{2\pi} (\sin \theta - a \sin(\theta + \phi))^2 d\theta}}{\sqrt{\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta}} \right) \times 100$$

$$= \left(1 - \sqrt{a^2 - 2a \cos \phi + 1} \right) \times 100 [\%] \quad (4.48)$$

■相関係数 (r)

$$r = \frac{\int_0^{2\pi} a \sin \theta \sin(\theta + \phi) d\theta}{\sqrt{\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} a^2 \sin^2(\theta + \phi) d\theta}} = \cos \phi \quad (4.49)$$

■Coefficient of Efficiency (E)

$$E = 1 - \frac{\int_0^{2\pi} (\sin \theta - a \sin(\theta + \phi))^2 d\theta}{\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta} = 2a \cos \phi - a^2 \quad (4.50)$$

■三角指標 (Tri_2)

$$\text{Tri} = 1 - \frac{\sqrt{\int_0^{2\pi} (\sin \theta - a \sin(\theta + \phi))^2 d\theta}}{\sqrt{\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta} + \sqrt{\int_0^{2\pi} a^2 \sin^2(\theta + \phi) d\theta}} = 1 - \frac{\sqrt{a^2 - 2a \cos \phi + 1}}{a + 1} \quad (4.51)$$

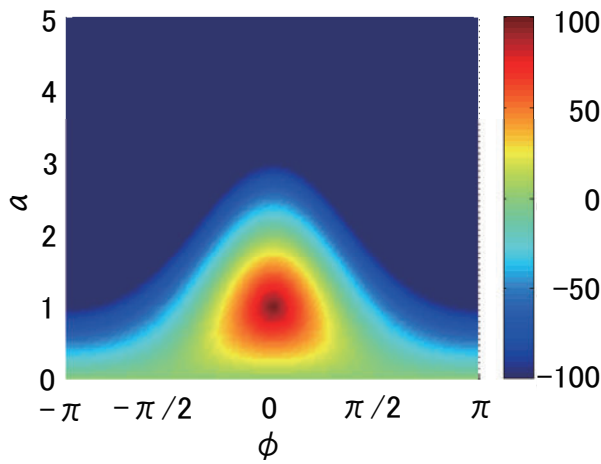


Fig. 4.7 Visualization of FIT on the example (blue shows values less than -100.)

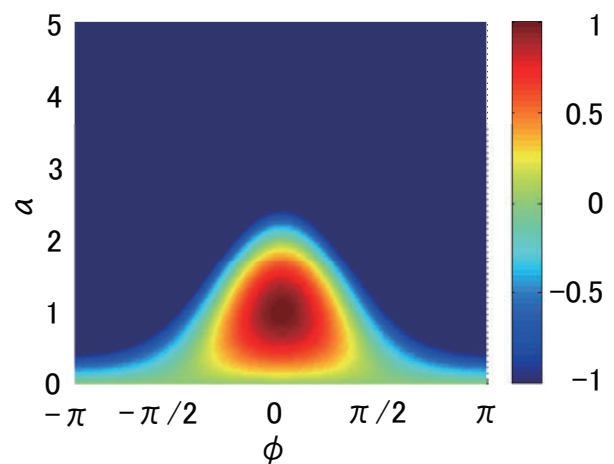


Fig. 4.8 Visualization of E on the example (blue shows values less than -1.)

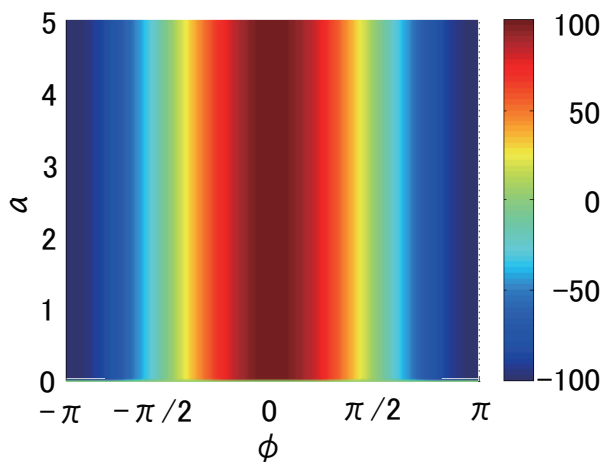


Fig. 4.9 Visualization of r on the example

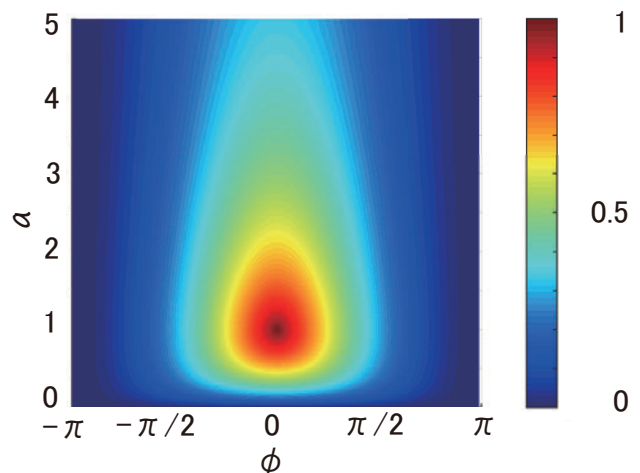


Fig. 4.10 Visualization of Tri_2 on the example

[3] 計算結果の考察

以上で示した各指標の計算結果 (4.48)~(4.51) を、横軸 ϕ 、縦軸 a として、Figs.4.7~4.10 に示した。なお、FIT, E は下限が存在しないため、それぞれ -100 , -1 以下の値は同色で示している。

まず、FIT は Fig. 4.7 より、FIT は a が小さいほど、 ϕ の変化に対して高い値をとりやすいことがわかる。特に、 $a \approx 0$ では位相変化によって負値をとりにくい、 $a = 1$ では $|\phi| > \pi/3$ において負値をとってしまう。この傾向から、FIT は実際のシステムよりもゲインの小さいモデルの方が、ゲインの大きいモデルよりも良い値を与えることが示唆される。また、ゲインが小さいモデルほど、位相のずれに対して値は減少しにくいことも示唆される。これは、式 (4.48)

を a で偏微分すると

$$\frac{\partial \text{FIT}}{\partial a} = -\frac{a - \cos \phi}{\sqrt{a^2 - 2a \cos \phi + 1}} \quad (4.52)$$

となり、 $a = \cos \phi \leq 1$ で式 (4.52) が極値を取ることからも確かめられる。

また、 E は定義である式 (4.6) や Fig. 4.8 から、FIT と同傾向を示す。

r は Fig. 4.9 より、 a の値には無関係で ϕ が直接指標値に現れる。これより、 r は位相のずれに対しての評価に有用である。

Fig. 4.10 は Fig. 4.7 を a 軸に対して引き伸ばしたような形状をしている。特に、 $\phi = 0$ において、 $a = 1$ から $a = 0$ に向かうときに急激に指標値が 0 に近づく点は FIT と大きく異なる。これは、式 (4.20) 右辺の分子第 2 項と分母第 3 項が主に寄与している。以上より、 Tri_2 はゲインの小さいモデルに対して良い値を与えるものではないことが示唆される。これについても式 (4.51) を a で偏微分すると

$$\frac{\partial \text{Tri}_2}{\partial a} = -\frac{(1-a)(1-\cos \phi)}{(a+1)^2 \sqrt{a^2 - 2a \cos \phi + 1}} \quad (4.53)$$

となり、式 (4.53) は $a = 1$ または $\phi = 0$ の場合に極値をとることから確かめられる。

なお、 Tri_2 を最大化する $y = b\hat{y}$ の係数 b を、式 (4.20) を用いて求める問題を考えれば、

$$\|y\| = \|\sin \theta\| = \sqrt{\pi}, \quad \|\hat{y}\| = \|a \sin(\theta + \phi)\| = a\sqrt{\pi} \quad (4.54)$$

より、 Tri_2 を最大化する b は $1/a$ となる。すなわち、 $ab = 1$ であり、 ϕ に関わらず、 Tri_2 は $a = 1$ を最良値とする。言い換えれば、 Tri_2 は、この比較例の場合、位相遅れに関わらず、正しいゲインをもつモデルに最良値を与える、という意味で有用である。

4.5.2 システム同定結果評価に関する特徴把握

本項ではシステム同定結果評価に関して、2つの観点から考察を行う。ひとつは、4.2節で与えた FIT によるシステム同定結果の評価例に対して、 r と Tri_2 による評価を行い、これらと比較することで r と Tri_2 の特徴について理解を深める。もうひとつは、4.4.2項において考察した、システム同定結果に含まれる雑音とむだ時間に対する影響について数値例を通じて観察する。

[1] システム同定結果の評価例

4.2節で取り上げた例題に対して、 r と Tri_2 を計算した結果を Table 4.3 に示す。

r は y_+ と y_- に対しては最大値である 1 を示す一方、 y_p と y_{p-} についてはこれらよりも小さな値を示している。これより、 r は振幅の一致度に対する評価には向かないと考えられる。一方、前節でも示唆したとおり位相の一致度を評価する指標として利用できると考えられる。

Table 4.3 Values of criteria for the example in section 4.2

	FIT [%]	r	Tri ₂
\hat{y}_+	-1.00%	1.00	0.6577
\hat{y}_-	49.00%	1.00	0.6577
\hat{y}_p	-13.55%	0.3627	0.4467
\hat{y}_{p-}	5.62%	0.3627	0.3815
\hat{y}_0	0.00%	NaN	0.00

最後に, Tri₂ は, \hat{y}_+ と \hat{y}_- でほぼ同じ値を取り, \hat{y}_p と \hat{y}_{p-} を比べると \hat{y}_p の方が大きな値を示している. また, \hat{y}_0 に対しては最小値である 0 を示している. よって, このケーススタディにおいては Tri₂ は 4.2 節で挙げた FIT の問題点を克服している.

[2] 雑音の影響

4.4.2 項で考察したように, 測定値が雑音の影響を受けると, それぞれの指標が最適と判断するパラメータは変化する. この数値例では, 雑音がそれぞれの指標が最適と判断する値に及ぼす影響を数値的に確認する.

問題設定

線形時不変システム

$$y(k) = 0.3y(k-1) + 0.5u(k) + w(k) \quad (4.55)$$

を同定する問題を考える. モデルとして,

$$\hat{y}(k) = \hat{a}y(k-1) + \hat{b}u(k) \quad (4.56)$$

を仮定する. ただし, $y(k)$, $u(k)$, $w(k)$, $\hat{y}(k)$ はそれぞれ時刻 k における出力, 入力, 平均値 0, 分散 σ_w^2 の白色雑音, 出力推定値とする. また, σ_w は任意の正数である.

ここで, 各指標 (FIT, r , Tri₂) を損失関数とし, これを最大化するパラメータを求める. これにより, 雑音の影響を受けたデータにおいてそれぞれの指標が最適と判断する値を数値的に求めることができる.

数値実験条件 入力 u は 1 周期 1023 サンプルの M 系列とした. また, それぞれの各指標の最大化方法は Table 4.4 にまとめた. なお, このシミュレーションは 1000 回行い, 1 回ごとに最適解を計算した.

以下では, 分散 $\sigma^2 = 0.5, 1.0$ の 2 つの場合について数値実験を行った.

i) $\sigma_w^2 = 0.5$ の場合 まず, 各指標についての最適解を Fig. 4.11 に示す. また, それぞれの指標に対する最適解の平均値と 3σ 範囲を Table 4.5 にまとめた.

Table 4.4 Maximization methods for criteria

Criterion	Maximization method
FIT	Least-square method
r	Canonical-correlation analysis [54]
Tri_2	Nelder-Mead method [55]

Table 4.5 Optimal Values for the criteria when $\sigma^2 = 0.5$

	\hat{a}	\hat{b}
True	0.300	0.500
FIT	0.300 ± 0.063	0.501 ± 0.046
r	0.299 ± 0.063	0.501 ± 0.046
Tri_2	0.405 ± 0.081	0.677 ± 0.044

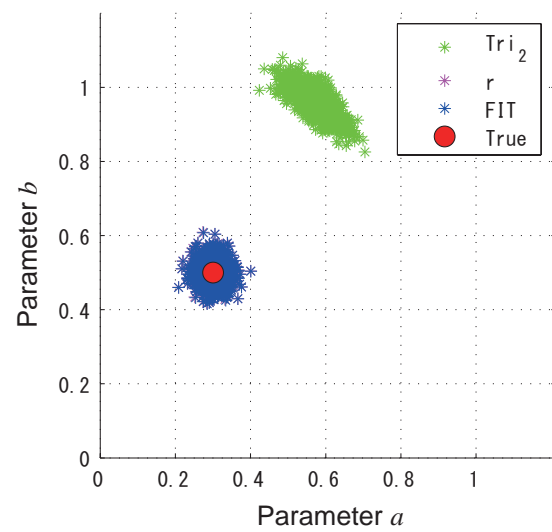
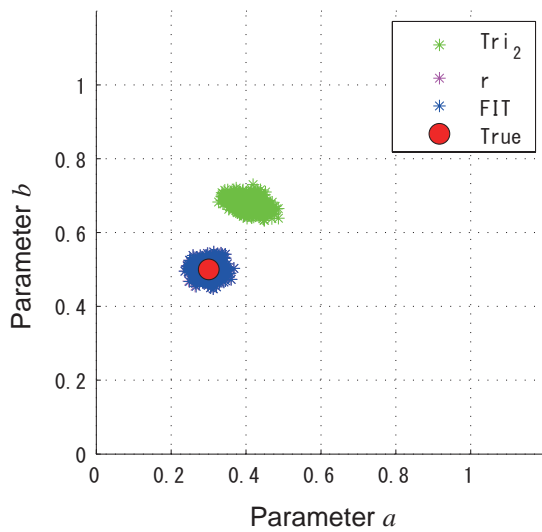


Fig. 4.11 Optimal Values of criteria when $\sigma^2 = 0.5$ Fig. 4.12 Optimal Values of criteria when $\sigma^2 = 1.0$

この例題における FIT の最適解は最小二乗解である。式誤差が白色なので、最小二乗解は真値を中心に分布する。一方、 Tri_2 は 4.4.2 項で考察したとおり、真値に対してバイアスをもっていることがわかる。

なお、 r については、最小二乗解とほぼ同じ解が得られた。これについて、考察する。まず、相関係数を最大化するようパラメータを決定する方法として、正準相関解析 [54] がある。こ

Table 4.6 Optimal Values for the criteria when $\sigma^2 = 1.0$

	\hat{a}	\hat{b}
True	0.300	0.500
FIT	0.300 ± 0.080	0.500 ± 0.093
r	0.300 ± 0.080	0.501 ± 0.093
Tri ₂	0.574 ± 0.129	0.957 ± 0.118

の方法によると、相関係数を最大化する解は

$$\mathbf{V}_{uy} = 2\lambda \mathbf{V}_{uu} \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (4.57)$$

を満たす。ただし、 \mathbf{V}_{uy} , \mathbf{V}_{uu} , はそれぞれ入力と出力の共分散行列、入力の自己共分散行列、 λ はラグランジュ乗数である。式 (4.57) はこの問題においては、 $\mathbf{V}_{uy} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{y}$, $\mathbf{V}_{uu} = \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi}$ であるため、

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{2\lambda} (\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{y} \quad (4.58)$$

となり、結局最小二乗法を解いていることに他ならない。よって、この問題において r を最大化するパラメータは FIT を最大化するパラメータと一致する。

ii) $\sigma_w^2 = 1.0$ の場合 各指標についての最適解を Fig. 4.12 に示す。また、それぞれの指標に対する最適解の平均値と 3σ 範囲を Table 4.6 にまとめた。Fig. 4.11 と Fig. 4.12, および Table 4.5 と Table 4.6 比較すると、Tri₂ は $\sigma^2 = 0.5$ の場合よりも、真値から離れた値を最適解と判断しているといえる。式 (4.34) において 1 パラメータの線形回帰モデルの場合を考察したが、この場合同様に、雑音の分散が大きくなると、Tri₂ についての最適解は真値からバイアスすると考えられる。

このように、Tri₂ は雑音がある状況下では、真値からずれたパラメータを最適と判断する。雑音が大きい状況では Tri₂ を利用すると誤った判断をする可能性がある点は注意しなければならない。

[2] むだ時間の影響

4.4.2 項で考察したように、システムとモデルのむだ時間が異なる場合、それぞれの指標が最適と判断するパラメータは変化する。この数値例では、推定するパラメータが 2 つの場合、むだ時間がそれぞれの指標が最適と判断する値に及ぼす影響を数値的に確認する。

なお、むだ時間が異なることによる、パラメータ推定への影響は極の有無により変わる。そのため、システムに極がない場合とある場合について考察する。

i) 極がない場合：問題設定

確定的な線形時不変システム

$$y(k) = 0.3u(k) + 0.5u(k-1) \quad (4.59)$$

を同定する問題を考える。モデルとして

$$\hat{y}(k) = \hat{a}u(k-2) + \hat{b}u(k-3) \quad (4.60)$$

を仮定する。ただし、記号の意味は式 (4.55), 式 (4.56) と同様である。

前節と同様に、各指標 (FIT, Tri₂) を損失関数とし、これを最大化するパラメータ \hat{a} , \hat{b} を求める。^{*5}これにより、むだ時間の影響を受けたデータにおいてそれぞれの指標が最適と判断する値を数値的に求めることができる。

また、 \hat{a} , \hat{b} それぞれを -2 から 2 まで変化させたときの各指標値 (FIT, Tri₂) を計算し、各指標値がどのようなパラメータに良い値を与えるかを観察する。

なお、指標の最大化方法は前節同様に Table 4.4 に示す方法を用いた。

ii) 極がない場合：結果

Fig. 4.13~Fig. 4.14 は、パラメータ a, b に対する各指標値と、それぞれの値を色で示しており、赤になるほど高い値で、青になるほど低い値を示す。まず、Fig. 4.13 は FIT に最良値を与える最小二乗解が 0 付近にあり、最小二乗解を中心に指標値が減少していることを示している。これは式 (4.59) と式 (4.60) とに共通する時刻の入力が含まれていないことに起因する。4.4.2 項でふれたように、最小二乗解は真のパラメータと、ラグが 1, 2 における入力自己相関関数の乗算となる。入力に M 系列を用いたことで、ラグが 0 でない自己相関関数は、ほぼ 0 となり、その結果最小二乗解が 0 付近となった。

一方、Fig. 4.14 より、Tri₂ は $\hat{a} = 0$, $\hat{b} = 0$ を中心とした同心円状に最適解が分布しており、この中に真値を含んでいることがわかる。これは、4.4.2 項の式 (4.23) により説明できる。入力として M 系列を用いたため、式 (4.23) 左辺の $X^T X \approx NI$ である。そのため、

$$N(b_1^2 + b_2^2) = \|y\|^2 \quad (4.61)$$

が成り立つ。よって、原点を中心とする円上すべてが式 (4.23) を満たす。一方、入力に M 系列を用いたため、式 (4.20) 右辺第 1 項は、

$$\begin{aligned} XX^T w \|y\| + Xy \|X^T w\| &\approx NIw \|y\| + \mathbf{0} \|X^T w\| \\ &= Nw \|y\| \end{aligned} \quad (4.62)$$

となる。したがって、式 (4.62) 第 1 項は w の要素ごとの符号にのみ影響をする。たとえば、 $b_1 > 0$ の場合、 $\|y\| > \|X^T w\|$ のときは式 (4.20) 全体の符号が正になる。また、 $b_1 < 0$ の場合、

^{*5} なお、 r については前節で考察したとおり、FIT と同様の結果を与えるため、本節では扱わない

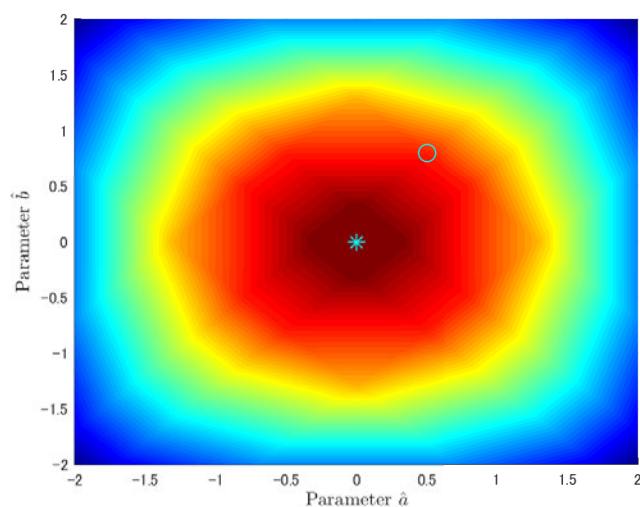


Fig. 4.13 Values of FIT for eq.(4.59) and (4.60) , red indicate higher value, blue indicate lower value, o indicate true parameter

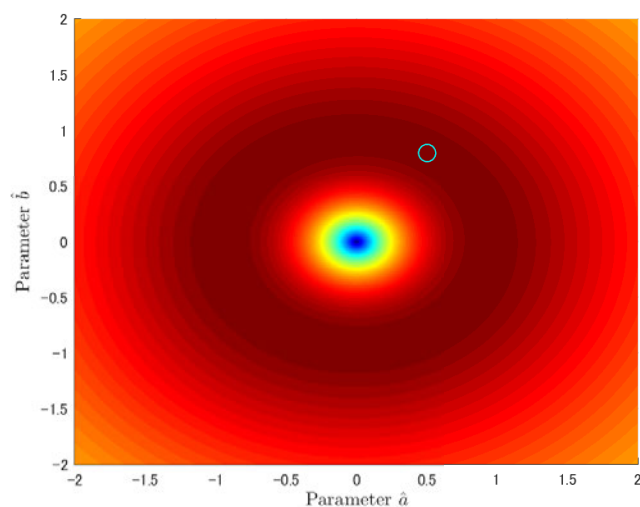


Fig. 4.14 Values of Tri_2 for eq.(4.59) and (4.60) , red indicate higher value, blue indicate lower value, o indicate true parameter

$\|y\| > \|X^T w\|$ のときは式 (4.20) 全体の符号が負になる。これより、式 (4.61) を満たすすべてのパラメータは極大値となる。

以上より、 Tri_2 はこの例題の場合、真値を最適解と判断できる。

iii) 問題設定：極がある場合 確定的な線形時不変システム

$$y(k) = 0.3y(k - 1) + 0.5u(k) \tag{4.63}$$

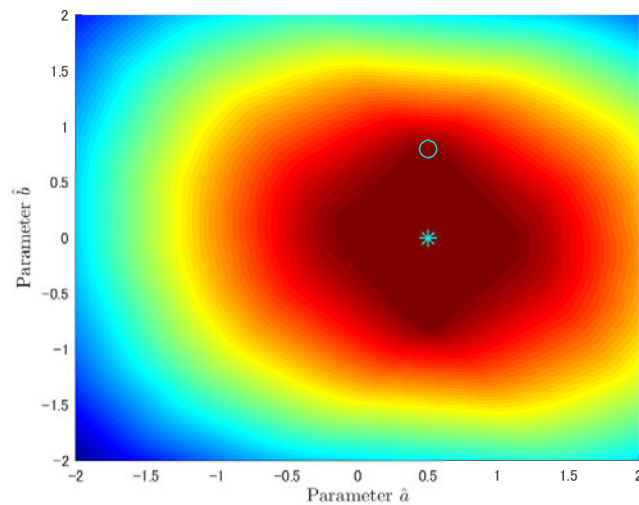


Fig. 4.15 Values of FIT for eq.(4.63) and (4.64), red indicate higher value, blue indicate lower value, o indicate true parameter, * indicate optimal value for FIT

を同定する問題を考える。モデルとしては,

$$\hat{y}(k) = \hat{a}y(k-1) + \hat{b}u(k-4) \quad (4.64)$$

を仮定する。なお、記号の意味は式 (4.55), 式 (4.56) と同様である。極がない場合同様に, \hat{a} , \hat{b} をそれぞれ -2 から 2 まで変化させたときの各指標値 (FIT, Tri_2) を Fig. 4.15~Fig. 4.16 に示す。

iv) 結果: 極がある場合 Fig. 4.15 より, FIT の最良値を与える最小二乗解は $\hat{a} \approx 0.3$, $\hat{b} \approx 0$ となっている。 \hat{b} が 0 に近い値となるのは, 極がないと同様の理由である。一方, \hat{a} が真値に近い値を最良値とするのは, 入力に M 系列を利用しているため, 最小二乗推定値 $\hat{\mathbf{w}}_{ls} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$ の $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ の非対角項が比較的小さい値となるためと考えられる。

Fig. 4.16 より Tri_2 は, 真値からバイアスした値である $\hat{a}_1 \approx 1, \hat{b}_1 = 0$ に対してのみ最良値を与える。まず,

$$\mathbf{y}_k = [y(1), y(2), \dots, y(N)], \mathbf{y}_{k-1} = [y(0), y(1), \dots, y(N-1)] \quad (4.65)$$

とおくと, N が十分大きいとき, $\|\mathbf{y}_k\| \approx \|\mathbf{y}_{k-1}\|$ であるといえる。したがって, 式 (4.23) より, $\hat{a} \approx 1, \hat{b} = 0$ が最良値を与える解の候補であるとわかる。一方, これ以外の解が最良値を与えないところは, 極がない場合と異なる。たとえば, 測定値と予測値のノルムが等しい解として, $\hat{a} \approx -1, \hat{b} = 0$ も挙げられる。しかし, $a < 0$ においては, 測定値と予測値が負の相関に近い関係をもつことになり, 式 (4.20) 右辺第 1 項が 0 に近い値を取ってしまう。よって, $\hat{a} \approx -1, \hat{b} = 0$ は極大値であっても, Tri_2 の値は $\hat{a} \approx 1, \hat{b} = 0$ の場合よりも小さくなる。

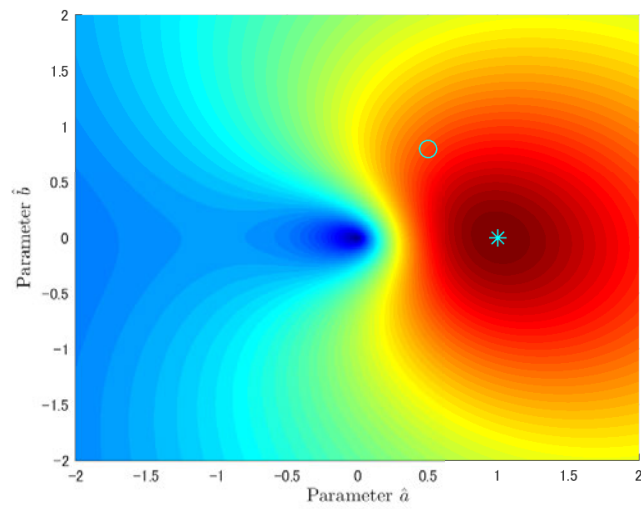


Fig. 4.16 Values of Tri_2 for eq.(4.63) and (4.64), red indicate higher value, blue indicate lower value, o indicate true parameter, * indicate optimal value for Tri_2

以上の結果から、 Tri_2 はむだ時間をもつシステムの評価に有用である可能性はある。しかし、これは測定値と予測値のノルムが等しくなるパラメータを最良とする性質に基づいており、本研究で扱った極がある場合のように、実質意味のないパラメータが最良と判断される危険性がある。したがって、今後どのような場合に有用であるかを見極めなければならない。

4.5.3 無次元指標によるシステム同定結果の評価について

例題を通して考察したように、FIT の最適解は最小二乗解そのものであるため、特に雑音が無視できない場合における評価に有用である。一方、モデル出力 \hat{y} の振幅が出力 y より小さい場合、FIT による評価結果のみをもってモデルの良し悪しを判断するべきではないと考えられる。

r は位相についての評価に有用であると考えられる。しかし、その最適解は線形回帰問題を扱う分には FIT と同様である。つまり、FIT と r での評価はほぼ同じものを評価している。

Tri_2 は測定値と予測値のノルムが一致する解を最適解とみなす指標である。そのため、雑音の影響を特に受ける指標である。雑音が大きい場合はこれらの結果をもっての判断は不適切な場合が多い。一方、雑音の影響が小さい場合は、4.2 節で挙げた FIT の問題点を克服しているため、有用であると考えられる。また、むだ時間系を評価する場合にも、 Tri_2 が有用である可能性がある。

4.6 まとめ

システム同定で用いる無次元指標について議論するために、以前から指標についての議論が盛んであった自然地理学分野で行われていた議論を紹介した。つぎに、提案されてきた指標を分類し、この分類をもとに三角不等式を用いた規格化された指標である Tri_2 を提案した。また、線形回帰モデルを仮定した場合について、 Tri_2 の極値を導き、これに基づいて、 Tri_2 の長所・短所を考察した。最後に、簡単な数値例を用いて、 Tri_2 がむだ時間を有するシステム同定結果の評価指標として有用である可能性を示した。今後の課題は Tri_2 がもつ特徴がシステム同定結果の評価指標として適当なものかを見極めることである。

第 5 章

結論

本論文では，モデルベース開発におけるモデリング手段としてシステム同定を利用しやすい環境を整えるために，以下 2 項目を述べた．

- 【1】 共通極システムを同定する際に印加する M 系列信号の満たすべき条件を提示した
- 【2】 システム同定結果の時間領域における評価指標として Tri_2 を提案し，評価した

5.1 本論文による成果

第 2 章では，本論文の背景となる“システム同定実験の設計”と“モデルの妥当性の評価”の基礎的な事項および従来研究について述べた．

第 3 章では，共通極システムに対する入力設計について述べた．まず，共通極システムに対して，巡回シフト M 系列という二値信号を印加するために満たすべき条件を可同定性の観点から明らかにした．また，条件に基づいた入力設計法を提案し，提案法が適切に機能することをシミュレーションによって確認した．その結果，十分条件はより広い条件の存在が示唆される結果となった．巡回シフト M 系列により共通極システムが確定的可同定となる十分条件を導いたことで，モデルベース開発において多入力系を扱う場合，適切な入出力データを得るために必要な同定実験時間の短縮が見込める．

第 4 章では，システム同定結果の時間領域での評価法について述べた．まず，他分野で行われてきた時間領域での評価についての議論をまとめた．つぎに，適合率 FIT に代わる指標として Tri_2 を提案し，この指標の意味を考察した．最後に，他分野で提案された指標，今回提案した指標について単純な例題を用いて評価し，雑音混入時に真のパラメータからずれた値を最適解と判断すること，およびむだ時間系の評価に Tri_2 が有用である可能性があることを確認した．特に，第 2 章で述べた複雑な物理モデルの低次元化方法としてシステム同定を用いる場合は，雑音混入しない．そのため， Tri_2 を用いても，雑音により最適解がずれることはない．

そのため、 Tri_2 の利点である低振幅の予測波形を過度によく評価しない特徴が、通常システム同定結果の評価に比べて有用であると考えられる。

なお、これらの成果はモデルベース開発のプラントモデリングにおいて、多入力系に対する入力設計と、評価の面で、システム同定を利用しやすい環境の実現に貢献するであろうと考えられる。

5.2 今後の発展性

巡回シフト M 系列により共通極システムが確定的可同定となる必要十分条件を導くことで、巡回シフト M 系列による MISO 系の同定法の確立が期待される。また、提案した巡回シフト M 系列による入力設計法は、確定的可同定性の意味、すなわち同定できるかどうかという面についてしか着目しておらず、パラメータ推定精度面については論じていない。従来研究でも、SISO の FIR モデルのパラメータ推定精度を論じた研究は存在する [32]。しかし、同定入力を二値信号に絞った場合、 M 系列のパラメータ推定精度が他の信号と比較してどの程度であるか、すなわち、最もパラメータ推定精度が高い二値信号が M 系列であるかどうかについて議論した研究はほとんどない。たとえば、文献 [56] では、 M 系列を同定入力としたときの、SISO の FIR モデルのパラメータ推定精度について、誤差共分散行列の最大固有値（以降、最大固有値と略記）をもとに論じている。この文献では、 M 系列を用いた場合の最大固有値と、RBS (Random Binary Signal) を 1000 回生成したときの最大固有値の平均値との比較を行い、 M 系列を用いた方が最大固有値が小さく、RBS よりもパラメータ推定精度がよいとしている。しかし、この比較では M 系列が二値信号の中で最も推定精度が良い、というような結論は出せない。まず、文献 [56] と同じ問題設定において、 M 系列がほかの二値信号と比べてパラメータ推定精度が最もよくなるのかを明らかにしたい。つぎに、多入力の場合について考えたい。多入力の場合、誤差共分散行列はブロック対角行列になり、自己相関関数が対角ブロック、相互相関関数が非対角ブロックに入る。本論文で扱った巡回シフト M 系列の自己相関関数、相互相関関数はともに、他の系列と重なるラグを除くとすべて $-1/N$ となる。つまり、誤差共分散行列の固有値は SISO と同様に、すべて解析的に求められ、SISO 同様に誤差共分散行列の固有値をもとにして、FIR モデルのパラメータ推定精度を論じられると考えられる。

時間領域における評価指標として新たに提案した Tri_2 については、同定結果の評価の意味で良い方向にも悪い方向にも転びうることは、本論文で取り上げた雑音とむだ時間の 2 トピックだけでもわかる。ケースバイケースで指標を使い分けるといった選択肢を含め、有用性を見極めていきたい。

また、時間領域における評価指標は、『何をもって、良い指標とするか?』という根源的な問いについても考察するべきだと思う。著者が参加した IFAC SYSID 2014 で、L.Ljung は FIT は線形回帰と相性が良いと述べた。確かにそのとおりであるが、それでは、最小二乗解を最良

と判断する指標はシステム同定にとって良い指標なのだろうか？なお、同じ会議において行われたパネルディスカッションにおいて、参加者から FIT が負値を取ることに對して疑義が述べられていた。多くの研究者は FIT の課題を認識しているが、アプローチすらできていないと感じた。まずは、評価目的を明確にし、これに對する指標として、既存の指標が利用できるかを改めて考察したい。

モデルベース開発におけるシステム同定の課題として、制御対象の事前情報を取り入れたグレーボックスモデリングが特に注目を集めている [57]。本論文では、システム同定をモデルベース開発に適用する際の課題として入力設計とモデルの妥当性評価に注目したが、これらのグレーボックスモデリングへの適用は考慮すべき課題と考える。まず前者の入力設計について、本論文では可同定性に着目したが、つぎの段階はパラメータ推定精度を高めるための入力設計であると考え。特に、グレーボックスモデリングにおいて、多くの場合は制約条件として事前情報が取り込まれる [58]–[60] が、この際、どのように同定入力設計すればパラメータ推定精度が上がるかについて検証するべきであると考え。また、後者のモデルの妥当性評価についても、グレーボックスモデリングに対する評価はブラックボックスモデリングと異なるものと考えられる。たとえば、制約条件はモデルの一部と考えられ、この妥当性を検証するような方法があってもよいように思う。しかしながら、グレーボックスモデルの評価として実測値と予測値の誤差の評価のみを行っている場合が多く [61], [62]、グレーボックスモデルの特有の評価を扱った研究はあまり見られない。今後は、グレーボックスモデルに特化した評価方法を考察していきたい。

謝辞

本研究は、著者が慶應義塾大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻物理情報システム専修後期博士課程在学中に、同大学理工学部物理情報工学科足立修一教授の指導のもとに行ったものです。学部時代も含めて合計8年間にもわたって、指導教員として、また人生の先輩としてご指導とご鞭撻を頂いた足立先生に深い感謝の意を表します。本論文をまとめるにあたり、有益なご教示とご助言をいただいた副査の慶應義塾大学理工学部物理情報工学科内山孝憲教授、同システムデザイン工学科大森浩充教授、同システムデザイン工学科滑川徹教授には、心から感謝の意を表します。

主査でシステム同定理論がご専門の足立先生には、システム同定の基礎から学术论文の書き方まで幅広くご指導いただきました。

副査で生体計測がご専門の内山先生には、論理のつながりや学术论文の書き方についてご教示いただきました。

副査で適応制御がご専門の大森先生には、巡回シフト M 系列を用いた同定のメリットについてご指摘いただきました。

副査で分散協調制御がご専門の滑川先生には、モデルベース開発と本論文のかかわりに関するご教示をいただきました。

また、在学中、足立研究室に着任された井上正樹助教には、研究や発表について多大なるアドバイスをいただきました。ビールがすべて同じ味だと高をくくっていた著者に、ドイツビールのおいしいを教えていただき、感謝しています。足立研究室秘書の斎藤由美さんには学部時代から非常にお世話になりました。フランクに接して下さってありがとうございます。今まで7年の会社生活の中で、一緒に共同研究を取り組んだ $OB \cdot OG$ の式守崇君、竹下侑君、永井祥子さん、 $M2$ の肥後利晃君に感謝します。式守君には修士時代に著者がやり残したテーマを国際学会で発表できるレベルまでブラッシュアップしていただき感謝しています。竹下君には熱意と根性で、試験機へのモデル予測制御の実装、複写機の同定問題から積分器を含む系の同定問題への水平展開、そして新しい適合度指標についての提案など、幅広い分野で刺激を受けました。永井さんには、10年間の共同研究成果の集大成として論文投稿という大きな仕事をして頂き、さらに著者との世間話など、いろいろとお世話になりました。肥後君には、途中

で共同研究が打ち切られてしまい申し訳ない思いをさせてしまいましたが、連続時間同定とオブザーバ設計という新たな課題に取り組んでいただき、ありがとうございました。著者の後を追うように社会人ドクターに飛び込んだ D3 の川口貴弘君には、学術的なアドバイスから私事の相談まで色々とお話、言葉にできないくらい感謝しております。研究室に帰ってきて著者が唯一受け持った学生である OG の羽鳥萌さんとは、土日にディスカッションをしたり、楽しく添削のやり取りをしたのはいい思い出です。そのほか、著者が博士課程を過ごすにあたって、熱心にディスカッションをしていただいた足立研究室メンバーに感謝します。

著者は社会人博士として入学しました。その間私の活動を支援して頂いた、著者の上司にあたります株式会社リコーの三矢輝章さん、大嶽英宗さん、平井秀二さん、高橋実さん、大慈彌篤哉さん、そして、共同研究時代から長い間お世話になり、同僚として色々とお迷惑をすることもありました加藤真治さん、小松真さん、熊谷優さん、森敦司さんに感謝いたします。

最後に、私の進学を温かく見守っていただいた両親、そして博士課程在学中に生涯の伴侶となった妻さやかに感謝します。

参考文献

- [1] 大島, 古田: モデルベース開発のための複合物理領域モデリング -なぜ、奇妙なモデルが出来てしまうのか?- (MBD Lab Series), TechShare (2012)
- [2] JMAAB: MBD の定義, http://jmaab.mathworks.jp/MBD_definition/index.html (accessed 2016/11/06)
- [3] 岩垂, 上野, 服部, 足立: ディーゼルエンジン吸気システムのモデリングとモデル予測制御による制御系設計, 計測自動制御学会論文集, **46-8**, 456/462 (2010)
- [4] S. Shimada, K. Morishima and S. Oho: Virtual development of automotive control system, IFAC Proceedings Volumes, **46-21**, 243/244 (2013)
- [5] K. Tsujimoto, M. Shimoura, Y. Morita and H. Oyori: Applying model-based development (mbd) to embedded systems, In 55th AIAA/ASMe/ASCE/AHS/SC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, p. 0217 (2014)
- [6] 足立修一: システム同定の基礎, 東京電機大学出版局 (2009)
- [7] L. Ljung: System identification toolbox: user's guide, Mathworks (1995)
- [8] 足立修一: MATLAB による制御のための上級システム同定, 東京電機大学出版局 (2004)
- [9] Y. Zhu: Multivariable system identification for process control, Elsevier (2001)
- [10] 草野, 日高: カーブ走行を含めた模型自動車のモデル設計の検討, 第 53 回自動制御連合講演会, **53**, 170/175 (2010)
- [11] B. W. Boehm: Verifying and validating software requirements and design specifications, IEEE software, **1-1**, 75/88 (1984)
- [12] 石田修一: モデルベースデザインによる制御設計, IIC REVIEW, **54-10**, 67/73 (2015)
- [13] JMAAB: MBD 概論, <http://www.mathworks.com/products/simulink-coder> (accessed 2017/05/22)
- [14] Mathworks: Simulink Coder: Generate C and C++ code from simulink and stateflow models, <http://www.mathworks.com/products/simulink-coder> (accessed 2017/05/22)
- [15] 宮下, 佐々木: ケモメトリックスー化学パターン認識と多変量解析-(1995)
- [16] R. Staley and P. Yue: On system parameter identifiability, Information Sciences, **2-2**,

- 127/138 (1970)
- [17] 相良, 秋月, 中溝, 片山: システム同定, 計測自動制御学会 (1981)
- [18] T. Söderström and P. Stoica: *System identification*, Prentice hall (1989)
- [19] 柏木潤: *M 系列とその応用*, 昭晃堂 (1996)
- [20] D. V. Sarwate and M. B. Pursley: Crosscorrelation properties of pseudorandom and related sequences, *Proceedings of the IEEE*, **68-5**, 593/619 (1980)
- [21] 高橋, 梅原, 川合: 巡回シフト M 系列を使用した準同期 CDMA に関する検討, 電子情報通信学会技術研究報告. SAT, 衛星通信, **102-51**, 1/6 (2002)
- [22] 丸林, 中川, 河野: スペクトル拡散通信とその応用, 電子情報通信学会 (1998)
- [23] R. Gold: Optimal binary sequences for spread spectrum multiplexing (corresp.), *IEEE Transactions on Information Theory*, **13-4**, 619/621 (1967)
- [24] 山内雪路: *デジタル移動通信方式 基本技術から IMT-2000 まで*, 東京電機大学出版局 (2000)
- [25] 山内雪路: *スペクトラム拡散通信 高性能デジタル通信方式に向けて*, 東京電機大学出版局 (2001)
- [26] 永田, 坂本: 住宅の熱特性同定に関する研究:(1) 概要ならびにデルタオペレータモデルの適用, *空気調和・衛生工学会学術講演会論文集*, **11-1**, 101/104 (1999)
- [27] L. Yao, J. Zhao and J. Qian: An improved pseudo-random binary sequence design for multivariable system identification, In *The Sixth World Congress on Intelligent Control and Automation*, **1**, 1768/1772 (2006)
- [28] 竹中, 足立: 最小二乗法による多入力システム同定のための同定入力の生成法, *計測自動制御学会論文集*, **47-6**, 291/293 (2011)
- [29] 金井, 松井, 中山: 入力設計の改良による頭部伝達関数の多方向同時推定の高精度化, *日本音響学会誌*, **71-7**, 316/318 (2015)
- [30] S. Kanai, K. Matsui, Y. Nakayama and S. Adachi: Uncorrelated input signals design and identification with low-complexity for simultaneous estimation of head-related transfer functions, In *Audio Engineering Society Convention 137*, Audio Engineering Society (2014)
- [31] S. Kanai, M. Sugaya, S. Adachi and K. Matsui: Low-complexity simultaneous estimation of head-related transfer functions by prediction error method, *Journal of the Audio Engineering Society*, **64-11**, 895/904 (2016)
- [32] 足立, 佐野: 入力相関行列の悪条件を考慮したインパルス応答の最小 2 乗推定, *計測自動制御学会論文集*, **22-11**, 1156/1161 (1986)
- [33] M. L. Pei: A test matrix for inversion procedures, *Communications of the ACM*, **5-10**, p. 508 (1962)

- [34] A. C. R. Newbery: Pei matrix eigenvectors, *Communications of the ACM*, **6-9**, p. 515 (1963)
- [35] L. Ljung: *System Identification: Theory for the user*, 2nd Ed., PTR Prentice Hall (1999)
- [36] 足立修一: *MATLAB による制御のためのシステム同定*, 東京電機大学出版局 (1996)
- [37] Mathworks: Compare model output and measured output - MATLAB compare, <http://www.mathworks.co.jp/jp/help/ident/ref/compare.html> (accessed 2016/11/06)
- [38] 羽田, 牧野, 金田: 室内音場伝達関数の共通極・零モデル化, *電子情報通信学会技術研究報告. EA, 応用音響*, **93-527**, 19/29 (1994)
- [39] 永井, 室井, 竹下, 小松, 加藤, 足立: モデル予測制御を用いた複写機におけるトナー補給制御システムの設計, *システム制御情報学会論文誌*, **28-11**, 443/451 (2015)
- [40] 金井関利: *多入力システム同定のための入力設計と頭部伝達関数推定への適用*, 慶應義塾大学大学院理工学研究科修士論文 (2014)
- [41] J. E. Nash and J. V. Sutcliffe: River flow forecasting through conceptual models part I—A discussion of principles, *Journal of hydrology*, **10-3**, 282/290 (1970)
- [42] M. Garrick, C. Cunnane and J. Nash: A criterion of efficiency for rainfall-runoff models, *Journal of Hydrology*, **36-3-4**, 375/381 (1978)
- [43] C. J. Willmott: On the validation of models, *Physical geography*, **2-2**, 184/194 (1981)
- [44] C. J. Willmott, S. G. Ackleson, R. E. Davis, J. J. Feddema, K. M. Klink, D. R. Legates, J. O'donnell and C. M. Rowe: Statistics for the evaluation and comparison of models, *Journal of Geophysical Research*, **90-C5**, 8995/9005 (1985)
- [45] D. R. Legates and G. J. McCabe: Evaluating the use of “goodness-of-fit” measures in hydrologic and hydroclimatic model validation, *Water resources research*, **35-1**, 233/241 (1999)
- [46] B. Schaeffli and H. V. Gupta: Do nash values have value?, *Hydrological Processes*, **21-15**, 2075/2080 (2007)
- [47] D. N. Moriasi, J. G. Arnold, M. W. Van Liew, R. L. Bingner, R. D. Harmel and T. L. Veith: Model evaluation guidelines for systematic quantification of accuracy in watershed simulations, *Transactions of the ASABE*, **50-3**, 885/900 (2007)
- [48] C. J. Willmott, S. M. Robeson and K. Matsuura: A refined index of model performance, *International Journal of Climatology*, **32-13**, 2088/2094 (2012)
- [49] D. R. Legates and G. J. McCabe: A refined index of model performance: a rejoinder, *International Journal of Climatology*, **33-4**, 1053/1056 (2013)
- [50] J. Li: Assessing spatial predictive models in the environmental sciences: Accuracy measures, data variation and variance explained, *Environmental Modelling & Software*, **80**, 1/8 (2016)

- [51] C. J. Willmott: Some comments on the evaluation of model performance, *Bulletin of the American Meteorological Society*, **63**-11, 1309/1313 (1982)
- [52] A. T. Committee: Criteria for evaluation of watershed models, *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, **119**-3, 429/442 (1993)
- [53] 大浦, 花崎, 秋月: 閉ループ系の同定におけるむだ時間の推定, *電気学会論文誌 C*, **115**-7, 887/892 (1995)
- [54] 赤穂昭太郎: 正準相関分析入門, *日本神経回路学会誌*, **20**-2, 62/72 (2013)
- [55] J. A. Nelder and R. Mead: A simplex method for function minimization, *The Computer Journal*, **7**-4, 308/313 (1965)
- [56] S. W. Sung and J. H. Lee: Pseudo-random binary sequence design for finite impulse response identification, *Control engineering practice*, **11**-8, 935/947 (2003)
- [57] 大畠明: プラントモデリングの地平線, *計測と制御*, **53**-4, 272/277 (2014)
- [58] 大畠明: 物理構造を利用した実験モデリング, *MSCS 2014 (第1回制御部門マルチシンポジウム)* (2014)
- [59] 松林, 井上, 足立: プリ同定結果を陽に取り入れた2段階システム同定法, *システム制御情報学会論文誌*, **29**-2, 101/103 (2016)
- [60] 阿部, 井上, 松林, 足立: 周波数領域における事前情報を考慮した部分空間同定法, *計測自動制御学会論文集*, **52**-1, 11/18 (2016)
- [61] T. Berthou, P. Stabat, R. Salvazet and D. Marchio: Development and validation of a gray box model to predict thermal behavior of occupied office buildings, *Energy and Buildings*, **74**, 91/100 (2014)
- [62] A. Afram and F. Janabi-Sharifi: Gray-box modeling and validation of residential hvac system for control system design, *Applied Energy*, **137**, 134/150 (2015)

付録 A

研究業績

学位請求に用いる定期刊行誌掲載原著論文

- [1] 室井, 竹下, 足立: 時間領域におけるシステム同定結果の評価指標について, 計測自動制御学会論文集, **51-10**, 736/743 (2015)
- [2] 室井, 足立: 巡回シフト M 系列を用いた多入力 1 出力系のシステム同定, 計測自動制御学会論文集, **52-9**, 467/473 (2016)

学位請求に用いる国際会議発表論文 (査読付き, 発表者*)

- [1] H. Muroi* and S. Adachi: Model validation criteria for system identification in the time domain, The 46th ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications (SSS2014), Kyoto, Japan (2014)
- [2] H. Muroi* and S. Adachi: Model validation criteria for system identification in the time domain, 17th IFAC Symposium on System Identification (SYSID 2015), Beijing, China (2015)

その他の定期刊行誌掲載原著論文

- [1] 室井, 式守, 足立: 局所線形 PLS 法に基づくシステム同定法, 計測自動制御学会論文集, **49-3**, 378/385(2013)
- [2] 永井, 室井, 竹下, 小松, 加藤, 足立: モデル予測制御を用いた複写機におけるトナー補給制御システムの設計, システム制御情報学会論文誌, **28-11**, 443/451 (2015)

その他の国際会議発表論文 (査読付き, 発表者*)

- [1] S. Nagai*, H. Muroi, Y. Takeshita, M. Komatsu, S. Kato and S. Adachi : System Identification and Model Predictive Control Design of Toner Supply System of Photocopier, IEEE Multi-Conference on Systems and Control (MSC2015), Sydney, Australia (2015)

関連する主な国内会議発表（発表者*）

- [1] 羽鳥*, 室井, 丸田, 足立 : 連続時間システム同定によるフレキシブルアームの物理パラメータ推定, 計測自動制御学会 第 1 回制御部門マルチシンポジウム, 東京 (2014)
- [2] 室井*, 竹下, 足立 : 時間領域におけるシステム同定結果の評価法に関する一考察, 第 58 回システム制御情報学会研究発表講演会 (SCI' 14), 京都 (2014)
- [3] 松林*, 井上, 室井, 足立 : 伝達関数のモーメント情報を考慮したシステム同定法, SCI' 15, 大阪 (2015)
- [4] 松林*, 井上, 室井, 足立 : プリ同定で得られた伝達関数のモーメント情報を用いたシステム同定法, MOVIC 2015, 宇都宮 (2015)
- [5] 室井*, 金井, 足立 : 多変数システム同定のための入力信号の設計について, MOVIC 2015, 宇都宮 (2015)
- [6] 室井*, 足立 : 巡回シフト M 系列による多入力 1 出力系の同定入力設計, 第 58 回自動制御連合講演会, 神戸 (2015)
- [7] 室井*, 足立 : 巡回シフト M 系列による多入力 1 出力系に対する同定入力設計, 第 60 回システム制御情報学会研究発表講演会 (SCI' 16), 京都 (2016)

受賞

- [1] 第 58 回自動制御連合講演会 優秀発表賞, 巡回シフト M 系列による多入力 1 出力系の同定入力設計 (2016)
- [2] システム制御情報学会 2016 年度 産業技術賞, モデル予測制御を用いた複写機におけるトナー補給制御システムの設計 (2016)
- [3] 計測自動制御学会 制御部門研究奨励賞, 局所線形 PLS 法による非線形システム同定法 (2011)