

学位論文 博士（工学）

ルベークサンプリングのもとでの
システム同定と状態推定に関する研究

2017 年度

慶應義塾大学大学院理工学研究科

川口 貴弘

目次

第 1 章	緒論	1
1.1	背景	1
1.2	本論文の位置づけと目的	2
1.3	本論文の構成	3
第 2 章	数学的な基礎	5
2.1	統計的な推定の基礎	5
2.2	システム同定	9
2.3	状態推定	12
2.4	確率システムに対する最適制御	20
2.5	ルベークサンプリング	22
2.6	近似ルベークサンプリング	23
2.7	まとめ	26
第 3 章	ルベークサンプリングのもとでのシステム同定法	27
3.1	はじめに	27
3.2	問題設定	28
3.3	ルベークサンプリングを用いたシステム同定法	29
3.4	パラメータ推定値の漸近的性質	32
3.5	数値例	36
3.6	ディスカッション：可変ルベークサンプリング	52
3.7	まとめ	57
第 4 章	ルベークサンプリングのもとでの状態推定法	58
4.1	はじめに	58
4.2	問題設定	59
4.3	ルベークサンプリングのもとでの状態推定法	60

4.4	制御への応用	64
4.5	数値例	65
4.6	ディスカッション：モーメントのマッチングによる状態推定法	76
4.7	まとめ	79
第 5 章	二次電池のシステム同定と状態推定への応用	80
5.1	はじめに	80
5.2	二次電池の充電率推定	81
5.3	二次電池のモデル	83
5.4	二次電池のシステム同定	85
5.5	二次電池の状態推定	88
5.6	数値実験	89
5.7	まとめ	92
第 6 章	結論	96
6.1	本論文による成果	96
6.2	今後の発展性	96
謝辞		99
参考文献		100
付録 A	研究業績	106

目次

1.1	Overview of this thesis	4
2.1	Comparison between Lebesgue and Riemann sampling	23
2.2	Approximate Lebesgue sampling	24
3.1	Block diagram of the objective system in system identification	28
3.2	Input signal	37
3.3	Bode plot of the system to be identified	37
3.4	Output signal sampled for $d = 0.23$	37
3.5	Parameters estimated in 1000 trials	38
3.6	Bode plot of the identified systems	39
3.7	Relationship between the threshold interval d and the size of the data set	41
3.8	Relationship between the threshold interval d and the asymptotic variance of estimates	41
3.9	Relationship between the size of data set and the asymptotic variance of estimate \hat{a}	42
3.10	Relationship between the size of data set and the asymptotic variance of estimate \hat{b}	42
3.11	Histogram of $\det(\mathcal{I}_R^{-1})/\det(\mathcal{I}_L^{-1})$ for 1st-order systems	44
3.12	Histogram of $\det(\mathcal{I}_R^{-1})/\det(\mathcal{I}_L^{-1})$ for 2nd-order systems	44
3.13	Optimized thresholds in various M	47
3.14	Relationship between M and the size of data set \bar{N}	48
3.15	Relationship between M and the value of the cost function (3.47)	48
3.16	Relationship between the size of data set \bar{N} and the value of the cost function (3.47)	49
3.17	Optimized thresholds under the constraint of the size of the data set	50
3.18	Relationship between \bar{N} and the value of the cost function (3.47)	51

3.19	Ellipse in which 99% estimates exist	51
3.20	An example of the output signal incompatible with the Lebesgue sampling	53
3.21	Sampled output by the Lebesgue sampling	54
3.22	Elapsed time since the last sampling under the Lebesgue sampling . . .	54
3.23	Variable Lebesgue sampling for a time series	55
3.24	Sampled output by the variable Lebesgue sampling	56
3.25	Elapsed time since the last sampling under the variable Lebesgue sampling	56
4.1	State estimation over network	59
4.2	Objective system	60
4.3	Likelihood function $p_{\text{ns}}(\phi \mid k, m_k, \mathbf{x}_k)$, where $\eta_{m_{k-1}} = -0.5$ and $\eta_{m_{k-1}+1} = 0.5$	61
4.4	LQG control	65
4.5	The proposed control system under the Lebesgue sampling	66
4.6	An example of the output of the 1st-order system	67
4.7	The results of the state estimation for the 1st-order system	68
4.8	An example of the output of the 2nd-order system	70
4.9	State estimation result for the 2nd-order system by Kalman filter in the full sampling case	70
4.10	State estimation result for the 2nd-order system by the naive method .	71
4.11	State estimation result for the 2nd-order system by the proposed method	71
4.12	Relationship between the sampled ratio $ \mathcal{S} /N$ and the RMSE	73
4.13	Magnetic levitation system	73
4.14	Time series of the states under the LQG control in the full sampling case	74
4.15	Time series of the states under the naive control method	75
4.16	Time series of the states under the proposed control method	75
5.1	An example of SOC-OCV characteristics	82
5.2	Equivalent circuit of a battery	83
5.3	Equivalent circuit of Warburg impedance using Cauer structure	85
5.4	Input current used for numerical experiments	90
5.5	An example of the output voltage of the battery in numerical experiment	90
5.6	Relationship between the sampled ratio $ \mathcal{S} /N$ and the standard deviations of estimated R_d , τ_d , and R_0	93

5.7	Relationship between the sampled ratio $ \mathcal{S} /N$ and the standard deviations of estimated $x_{\text{ch}}(t_0)$ and SOH	94
5.8	Relationship between the sampled ratio $ \mathcal{S} /N$ and the RMSE of estimated SOC	95

表目次

4.1	The RMSE of the state estimations for the 1st-order system	67
4.2	The RMSE of the state estimations for the 2nd-order system	72
4.3	The value of the cost functions in Eq. (4.24)	76
5.1	Estimated parameters of battery	91

記号・術語・用語

$\arg \max_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})$	関数 $f(\boldsymbol{x})$ を最大化する \boldsymbol{x} の値
$\arg \min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})$	関数 $f(\boldsymbol{x})$ を最小化する \boldsymbol{x} の値
$\hat{\boldsymbol{x}}$	\boldsymbol{x} の推定値
$\hat{\boldsymbol{x}}_{i/j}$	時刻 j までの情報を用いた時刻 i での \boldsymbol{x} の推定値
\boldsymbol{A}^\top	行列 \boldsymbol{A} の転置
\boldsymbol{A}^{-1}	行列 \boldsymbol{A} の逆行列
$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta})$	フィッシャー情報行列
$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}$	$f(\boldsymbol{x})$ の \boldsymbol{x} に関する勾配 (列ベクトル)
\mathbb{N}	自然数の集合
\mathbb{R}	実数の集合
\mathbb{R}^d	実数値 d 次元ベクトルの集合
$\mathbb{R}^{i \times j}$	i 行 j 列の実数値行列の集合
\mathbb{Z}	整数の集合
$\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$	集合 \mathcal{A} から集合 \mathcal{B} を除いた集合 (差集合)
$E[\boldsymbol{x} \mid A]$	事象 A のもとでの \boldsymbol{x} の条件付き期待値
$E[\boldsymbol{x}]$	\boldsymbol{x} の期待値
$\boldsymbol{\theta}^*$	パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の真値
$p(A)$	事象 A の起きる確率
$p(A \mid B)$	事象 B のもとで事象 A の起きる条件付き確率
$\delta(\cdot)$	ディラックのデルタ関数
FCC	電池の満充電容量 (Full charge capacity)
MIMO	多入力多出力 (Multi-Input Multi-Output)
OCV	電池の開回路電圧 (Open circuit voltage)
RMSE	平均二乗誤差 (Root Mean Square Error)
SISO	1 入力 1 出力 (Single-Input Single-Output)
SOC	電池の充電率 (State of charge)

SOH 電池の健全度 (State of health)

第 1 章

緒論

本論文は、

- ルベグサンプリングのもとでのシステム同定法の提案
- ルベグサンプリングのもとでの状態推定法の提案とその制御への応用

を目的とした研究成果をまとめたものである。

1.1 背景

近年、計算機の性能向上やクラウド技術の発展、センサの低コスト化などによりさまざまなデータを計測し、蓄積、伝送、監視することが容易になり、あらゆるモノがインターネットに接続される IoT (Internet of Things) の時代へと向かっている。そのなかで、従来では扱うことのなかったような、大量のデータ (big data) を扱うニーズが高まっている。ネットワーク帯域やストレージ容量の増加に伴い、大量のデータを扱うための基盤は整備されてきているが、データ取得の対象が多様化すると、すべてのデータを転送・保存することができない場合も考えられる。そこで、必要なデータのみを扱うことのできる効率的なデータの活用手法が求められている。

自然界に存在する信号の多くは、時間が連続量である連続時間信号である。しかし、信号の計測や処理にはデジタル機器を用いることが多く、連続時間信号をそのまま扱うことは困難である^[1] ため、連続時間信号を離散時間信号に変換するサンプリングが行われる。

もっともよく用いられるサンプリングの方法は、等しい時間の間隔で信号値を収集することである。このときの時間間隔のことをサンプリング周期という。計測・制御の分野において、この時間等間隔のサンプリングを仮定した研究が数多く行われてきた。特に、計測した入出力データを用いてモデリングを行うシステム同定では、等間隔なサンプリング周期を仮定することが一般的である^{[2]-[4]}。また、制御系の設計においても、等間隔サンプリングを仮定したサ

ンプル値制御が広く用いられている [5].

このような等間隔サンプリングを仮定すると、制御系設計や解析が容易である反面、用いるデータの数を制限したいときにサンプリング周期を長くする以外の方法を考えることができない。このことは、効率的なデータの活用を考えるときには不等間隔サンプリングを行う必要があることを意味している。

不等間隔サンプリングのなかで、イベント駆動のサンプリングを行うことが近年注目を集めている [6]–[9]。イベント駆動サンプリングは、あらかじめ決められたイベントが発生したときのみデータの取得を行う方法であり、「必要なデータのみを扱う」という考え方に基づいている。このことから、もとの信号のもつ情報を大きく損なうことなく、データ取得の頻度を下げることができる期待されている。

不等間隔なデータからシステム同定を行う方法として、出力誤差の最小化による離散時間システム同定法が提案されている [10]。また、不等間隔なデータを欠損のある等間隔なデータとみなし、信号の復元を行ったうえでシステム同定を行う方法が提案されている [11]–[14]。さらに、連続時間システムを対象とした連続時間システム同定法を適用することにより不等間隔サンプリングされたデータからシステムを同定することも研究されている [15], [16]。しかし、データ数の削減と同定精度の向上、すなわちデータの効率的な活用といった観点からの検討はほとんど行われていない。また、データがイベント駆動で取得されていることを陽に扱うシステム同定法もほとんど研究されていない。

一方で、イベント駆動サンプリングのもとでの状態推定法が近年注目を集めている [17]。等間隔サンプリングのもとでの状態推定法として広く用いられてきたカルマンフィルタ [18]–[21] をイベント駆動サンプリングに対して修正して適用する方法が提案されている [22]。また、イベント駆動でサンプリングされたデータであることを陽に活用した状態推定法が提案されており、その有用性が確認されている [23]–[25]。

ここで、モデル出力が未知パラメータに関して線形になるようなシステムの同定問題は一種の状態推定問題として解釈することができるが、一般のシステム同定問題を状態推定問題と解釈すると、非線形の状態推定問題となり、問題が複雑化する。このことから、システム同定問題と状態推定問題のそれぞれを別に考える必要があることに注意する。

1.2 本論文の位置づけと目的

本論文では、イベント駆動サンプリングのひとつであるルベীগサンプリングに注目する。ルベীগサンプリングは信号があらかじめ決められた値になったときにサンプリングを行う方法である。たとえば、1次の確率システムの制御に対して、ルベীগサンプリングの有用性が確認されている [26], [27]。このことから、イベント駆動サンプリングのなかでもルベীগサンプリングは有力な方法であることが期待される。

システム同定におけるルベークサンプリングの有用性はほとんど議論されていない。また、システム同定と比較するとイベント駆動サンプリングのもとでの状態推定は盛んに研究が行われている^[17]が、ルベークサンプリングに特化した議論は不十分であると考えられる。

そこで、本論文では、データがルベークサンプリングされたことを陽に活用したシステム同定法と状態推定法、制御系設計法を提案することを目的とする。特に、尤度関数を用いて推定を行う立場をとることにより、ルベークサンプリングされたデータを統一的に扱う。これにより、自動制御のための一連の手続きをルベークサンプリングのもとで行うことが可能になる。また、ルベークサンプリングを用いた場合のデータ数とシステム同定精度・状態推定精度の関係を明らかにし、従来よく用いられる時間等間隔なデータ取得を行った場合との比較を行うことも本論文の目的である。

本論文では、実装や解析の観点から、定義通りのルベークサンプリングではなく、近似したルベークサンプリングによってデータを取得する立場をとる。近似的にルベークサンプリングされた信号の統計的な性質に着目することにより、システム同定と状態推定におけるルベークサンプリングされたデータの扱いに統一的な方法を与えることができる。

1.3 本論文の構成

本論文の構成を Fig. 1.1 に示す。

第2章では、本論文のもとになる数学的な基礎知識について述べる。特に、統計的な推定の基礎とそれに基づいたシステム同定法、状態推定法についてまとめる。

第3章では、ルベークサンプリングのサンプル点間情報に対応する尤度関数を導出し、最尤推定に基づいたシステム同定法を提案する。また、提案法を用いたときのシステム同定結果の統計的な性質を明らかにする。数値例を通して提案法によるシステム同定精度を評価し、サンプル点間情報を用いることの有用性を示す。また、提案法を用いると、時間に関して等間隔なサンプリングを用いた場合に比べてデータ数が減少したときのシステム同定精度を高めることができることを示す。

第4章では、ルベークサンプリングのもとでサンプル点間情報を活用した状態推定法を提案する。ルベークサンプリングのサンプル点間情報を用いると、尤度関数が正規分布でなくなるため、従来の状態推定法を用いることはできない。そこで、非正規分布を扱える粒子フィルタを用いて状態推定を行うことを提案する。サンプル点間情報の活用により状態推定精度が向上することを数値例で示す。

第5章では、提案したシステム同定法と状態推定法の応用例として、二次電池への適用について述べる。本論文で提案したシステム同定法を用いて、二次電池の内部抵抗を特徴付ける未知パラメータの推定を行う。また、提案した状態推定法を用いて二次電池の充電率を推定する。二次電池の電気自動車での利用を模擬した数値実験を行い、提案法の有用性を示す。

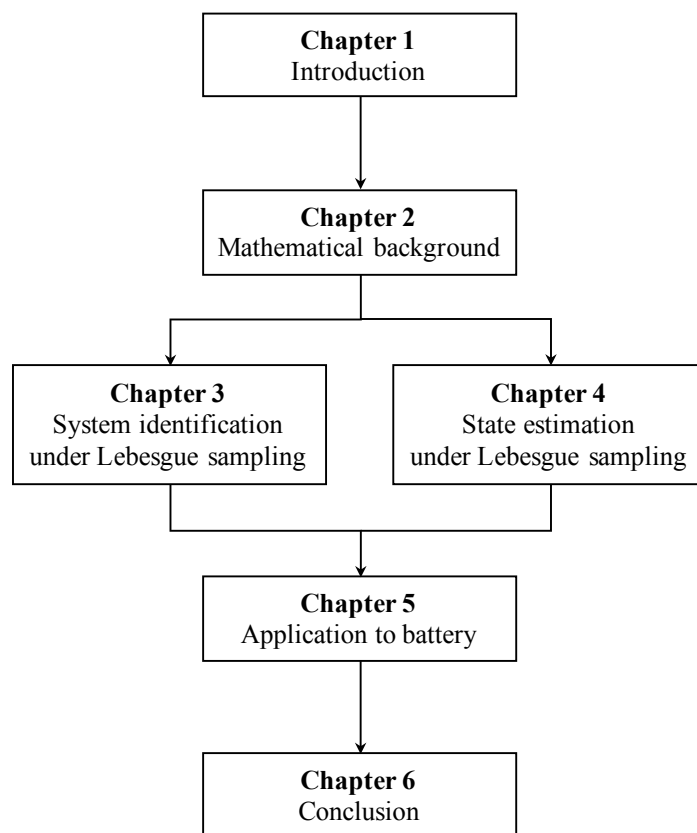


Fig. 1.1: Overview of this thesis

第 6 章では、各章で得られた内容をまとめ、本研究の成果を述べる。

第 2 章

数学的な基礎

本論文では，最尤推定に基づいたシステム同定法と，ベイズ推定に基づいた状態推定法を提案する．そこで本章では，最尤推定とベイズ推定について簡単に述べ，それらに基づいた従来のシステム同定法や状態推定法を紹介する．さらに，本論文で対象とするサンプリング法であるルベージサンプリングについて述べる．

2.1 統計的な推定の基礎

本節では，本論文で議論するシステム同定や状態推定のもとになる統計的な推定の基礎について述べる．システム同定法の多くは最尤推定法と呼ばれる方法によって理解することができる．一方，カルマンフィルタに代表される状態推定法はベイズ推定法と呼ばれる方法に基づいている．そこで，本節ではこれらの推定法について簡潔にまとめる．

2.1.1 最尤推定

パラメータ $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ によって特徴付けられた確率あるいは確率密度関数 $p(\mathcal{Y} | \theta)$ にしたがってデータ $\mathcal{Y} = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N\}$ が得られたとする^{*1}．このとき，データ \mathcal{Y} を用いてパラメータ θ を推定することを考える．

パラメータ θ のもとで観測データ \mathcal{Y} が得られる確率 $p(\mathcal{Y} | \theta)$ を θ の関数とみなしたとき，

$$L(\theta) := p(\mathcal{Y} | \theta)$$

を尤度関数という．データ \mathcal{Y} が与えられたとき，尤度関数 $L(\theta)$ を最大化する

$$\hat{\theta}_{\text{ML}} = \arg \max_{\theta} L(\theta) \tag{2.1}$$

^{*1} 以後，誤解の生じない場合は確率と確率密度関数を区別せず，単に確率とよぶ

を推定値とする方法を最尤推定法という。尤度関数 $L(\boldsymbol{\theta})$ を最大化する $\boldsymbol{\theta}$ は尤度関数の対数 $\ln L(\boldsymbol{\theta})$ を最大化する $\boldsymbol{\theta}$ と等しいため、

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ML}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} [-\ln L(\boldsymbol{\theta})] \quad (2.2)$$

を用いる場合もある。特に、 $L(\boldsymbol{\theta})$ が指数関数を用いて定義されるときには (2.2) 式を用いると便利である。このとき、最尤推定法によって得られる推定値 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ML}}$ を最尤推定値という。

注意 2.1 推定のルールを推定量 (estimator)、推定のルールに具体的な数値を代入したものを推定値 (estimate) と区別することもあるが^[28]、本論文ではすべて推定値という言葉を用いる。

最尤推定値の性質について考えるために、推定値のもつべき性質について述べる。 $\boldsymbol{\theta}^*$ をパラメータの真値として、推定値 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ のバイアスを

$$b(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta}^*) = \text{E} [\hat{\boldsymbol{\theta}}] - \boldsymbol{\theta}^*$$

と定義する。 $b(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta}^*) = 0$ であるとき、推定値 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ は不偏推定値あるいは不偏性をもつという。不偏性は推定値がもつべき第一の性質であるといえる。

推定値が不偏推定値であるとき、推定値のばらつきを表す推定誤差共分散行列

$$\mathbf{V}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta}^*) = \text{E} \left[(\boldsymbol{\theta}^* - \hat{\boldsymbol{\theta}}) (\boldsymbol{\theta}^* - \hat{\boldsymbol{\theta}})^\top \right]$$

について、クラメル・ラオの不等式

$$\mathbf{V}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta}^*) \geq \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}^*) \quad (2.3)$$

が成り立つことが知られている^[29]。ただし、 $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$ は

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = \text{E} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ln L(\boldsymbol{\theta}) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^\top} \ln L(\boldsymbol{\theta}) \right) \middle| \boldsymbol{\theta} \right] \quad (2.4)$$

で定義されるフィッシャー情報行列である。(2.3) 式の等号を成立させる不偏推定値が存在するとき、その不偏推定値を有効推定値という。有効推定値は不偏性を持ち、ばらつきが最小となる推定値であるため、望ましい推定値である。

つぎに、十分性とよばれる統計量の性質について述べる。データ \mathcal{Y} に対して、ある統計量 $T = T(\mathcal{Y})$ を与えたもとでの \mathcal{Y} の条件付き確率分布がパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ に依らないとき、統計量 T をパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ に対する十分統計量という。この直感的な理解は、十分統計量をデータの代わりに用いても、パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の統計的推定に十分であるということである^[30]。いいかえれば、十分統計量がデータから得られる統計的推定に関する情報をすべて含んでいるといえる。任意の不偏推定値に対して、十分統計量に基づく推定値でより分散の小さい不偏推定値が存

在することが知られている^[31]。そのため、推定値としては十分統計量の関数のみを考えればよい。

さらに、データ数 $N \rightarrow \infty$ の極限において推定値がもつべき性質を考える。推定値 $\hat{\theta}$ が真値 θ^* に確率収束する、すなわち、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $|\hat{\theta} - \theta^*| \geq \varepsilon$ となる確率が $N \rightarrow \infty$ で0になるとき、その推定値を一致推定値という。また、一致推定値のなかで、 $N \rightarrow \infty$ で $\sqrt{N}(\hat{\theta} - \theta^*)$ が平均値0の正規分布に分布収束するものを一致漸近正規推定値という。さらに、一致漸近正規推定値のなかで分散が最小であるものを最良漸近正規推定値という。

ここまで、推定値のもつべき性質について述べた。最後に、最尤推定値の性質について述べる。有効推定値が存在するとき、最尤推定値は有効推定値に一致する唯一解をもつことが示されている^{[28], [32]}。ただし、一般に最尤推定値は不偏性をもつとは限らないため、最尤推定値が必ずしも有効推定値とはならないことに注意する。また、十分統計量が存在するとき、最尤推定値は十分統計量の関数となる。さらに、最尤推定値は適当な正則条件のもとで、共分散行列がフィッシャー情報行列の逆行列 $\mathcal{I}^{-1}(\theta^*)$ となる最良漸近正規推定値であることが知られている。このように、最尤推定値は統計的に優れた性質をもつ推定値である。

注意 2.2 有効性や十分性はデータ数が少ないときの推定値の性質であり、一致性や漸近正規性はデータ数が無限に多いときの推定値の性質である。最尤推定値は最良漸近正規推定値であるため、データが大量にあるときには最尤推定は優れた方法である。また、データが少ない場合でも、有効推定値があるとすればそれは最尤推定値であるため、最尤推定を用いる合理性があると考えられる。

注意 2.3 (2.3) 式の等式を成立させる推定値が存在するとは限らない。そのため、存在する推定値の中で最小分散となる不偏推定値を有効推定値とよぶこともある^[33]が、本論文では、(2.3) 式の等式を成立させる推定値を有効推定値とよぶ。

2.1.2 ベイズ推定

最尤推定の理論は頻度主義とよばれる伝統的な統計学のなかで発展したものである^[34]。頻度主義ではパラメータ θ は決定している定数であり、観測されるデータや、それに基づく推定値が確率的にふるまうと考える。これに対して、ベイズ統計学では、パラメータ θ そのものが確率的にふるまうと考える。そして、ベイズの定理に基づいて、 θ に対する事前情報とデータ \mathcal{Y} を組み合わせて θ を推定する方法がベイズ推定である。

事象 A, B に対して、

$$p(A | B) = \frac{p(A)p(B | A)}{p(B)} = \frac{p(A)p(B | A)}{\sum_A p(A)p(B | A)}$$

が成り立つことが知られており、これをベイズの定理という。ただし、 $p(A | B)$ は事象 B のもとでの事象 A の条件付き確率である。データ \mathcal{Y} とパラメータ θ に対してベイズの定理を用いると、

$$p(\theta | \mathcal{Y}) = \frac{p(\theta)p(\mathcal{Y} | \theta)}{p(\mathcal{Y})} \quad (2.5)$$

となる。このとき、 $p(\theta)$ を事前分布、 $p(\theta | \mathcal{Y})$ を事後分布という。また、 $p(\mathcal{Y} | \theta)$ は尤度関数である。(2.5) 式右辺の分母 $p(\mathcal{Y})$ はパラメータ θ に依存しないため、 θ の推定を行う場合、

$$p(\theta | \mathcal{Y}) \propto p(\theta)p(\mathcal{Y} | \theta) \quad (2.6)$$

と書かれることもある。これらの式により、データ \mathcal{Y} が得られたもとでのパラメータ θ の「確率」が得られることになる。(2.6) 式は事前分布を尤度によって修正している、すなわち、事前情報を観測データによって修正していると解釈することができる。

注意 2.4 頻度主義の立場ではパラメータ θ は決定している定数であるため、 θ の値に関する確率 $p(\theta)$ を考えることはできないが、ベイズ統計では $p(\theta)$ を考えることができる。このとき、事前分布 $p(\theta)$ はパラメータ θ に関してユーザのもつ事前情報を反映して設定される。

ベイズの定理によって得られた事後分布から、1つの推定値 $\hat{\theta}$ を決定することを考える [35], [36]。推定値に対する損失関数 $l(\theta, \hat{\theta})$ を定めたとき、その損失の事後分布による期待値

$$R(\hat{\theta}) = \int_{\mathbb{R}^{n_\theta}} l(\theta, \hat{\theta})p(\theta | \mathcal{Y})d\theta \quad (2.7)$$

をベイズリスクという。また、ベイズリスクを最小化する $\hat{\theta}$ を推定値とすることをベイズ推定という。たとえば、損失関数が

$$\begin{aligned} l(\theta, \hat{\theta}) &= \|\theta - \hat{\theta}\|^2 \\ &= (\theta - \hat{\theta})^\top (\theta - \hat{\theta}) \end{aligned}$$

によって与えられている場合を考える。このとき、ベイズリスクは

$$R(\hat{\theta}) = \int_{\mathbb{R}^{n_\theta}} (\theta - \hat{\theta})^\top (\theta - \hat{\theta})p(\theta | \mathcal{Y})d\theta \quad (2.8)$$

となる。このベイズリスクを最小化する推定値は最小分散推定値とよばれる。(2.8) 式のベイズリスクを最小化する $\hat{\theta}$ を求めるために、 $\hat{\theta}$ で偏微分して $\mathbf{0}$ とおくと、

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} R(\hat{\theta}) = -2 \int_{\mathbb{R}^{n_\theta}} (\theta - \hat{\theta})^\top p(\theta | \mathcal{Y})d\theta = \mathbf{0} \quad (2.9)$$

となる。したがって、(2.8) 式のベイズリスクを最小化する $\hat{\theta}$ は、

$$\hat{\theta} = \int_{\mathbb{R}^{n_\theta}} \theta p(\theta | \mathcal{Y}) d\theta \quad (2.10)$$

となる。すなわち、最小分散推定値は事後分布の期待値である。

2.2 システム同定

本節では、本論文で提案するシステム同定法の基礎となる、最尤推定に基づくシステム同定法について述べる。特に、連続時間システムのパラメータを推定する連続時間システム同定について説明する。

2.2.1 システム同定問題

本論文では、1 入力 1 出力 (Single-Input Single-Output: SISO) の安定な連続時間線形時不変システム

$$y^*(t) = G(p, \theta^*)u(t) \quad (2.11)$$

を同定対象とする。ただし、 $u(\cdot) \in \mathbb{R}$ はシステムへの入力、 $y^*(\cdot) \in \mathbb{R}$ は雑音がないときのシステムの実出力である。ここで、入力 $u(t)$ はユーザが設定する既知の信号であり、PE 性 (persistently exciting, 持続的励振) が十分に高いことを仮定する。また、 $G(p, \theta)$ は $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ によってパラメトライズされた微分演算子 $p = \frac{d}{dt}$ の有理関数であり、 θ の真値を $\theta^* \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ とする。

注意 2.5 本論文では、微分演算子とラプラス演算子をそれぞれ p , s とし、初期状態が $\mathbf{0}$ であるシステム $G(p)$ に入力 $u(t)$ を印加したときの応答を

$$G(p)u(t) := \mathcal{L}^{-1}[G(s)] * u(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad (2.12)$$

と表す。ただし、 $\mathcal{L}^{-1}[G]$ は G の逆ラプラス変換、 $f(t) * g(t)$ は $f(t)$ と $g(t)$ のたたみ込み積分である。

時刻 t_k , $k \in \{0, \dots, N\}$ における出力信号が

$$y_k := y^*(t_k) + w_k \quad (2.13)$$

と取得されているとする。ここで、 w_k は平均値 0、分散 σ^2 の正規性白色雑音であると仮定する。また、 N はサンプリングされたデータ数である。このとき、 t_k は等間隔に限定しないことに注意する。本論文で考えるシステム同定問題は、すべての時刻における $u(t)$ とサンプリングされた出力信号の集合 $\mathcal{Y} = \{y_k \mid k \in \{0, \dots, N\}\}$ を用いて θ を推定することである。

2.2.2 最尤推定に基づく連続時間システム同定法

最尤推定に基づいて θ を推定することを考える。雑音 w_k が正規性白色雑音であることから、出力信号の集合 \mathcal{Y} が得られる条件付き確率は

$$\begin{aligned} p(\mathcal{Y} | \theta) &= \prod_{k=1}^N p(y_k | \theta) \\ &= \prod_{k=1}^N \mathcal{N}(y_k, \hat{y}_k(\theta), \sigma^2) \end{aligned} \quad (2.14)$$

となる。ただし、変数 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ が平均値 $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^{n_x}$ 、共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ の正規分布に従うときの確率密度関数を

$$\mathcal{N}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{n_x} \sqrt{\det \boldsymbol{\Sigma}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right) \quad (2.15)$$

とした。特に、スカラー変数 x が平均値 μ 、分散 σ^2 の正規分布に従うときには、

$$\mathcal{N}(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.16)$$

である。また、

$$\hat{y}(t, \theta) = G(p, \theta)u(t)$$

として、

$$\hat{y}_k(\theta) = \hat{y}(t_k, \theta) \quad (2.17)$$

である。(2.14) 式を用いて対数尤度関数を計算すると、

$$\ln L(\theta) = -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=0}^N (y_k - \hat{y}_k(\theta))^2 + \text{const.} \quad (2.18)$$

となる。結局、最尤推定に基づく連続時間システム同定法は、評価関数

$$V(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N (y_k - \hat{y}_k(\theta))^2 \quad (2.19)$$

を最小化するパラメータ θ を見つけることになる。すなわち、出力誤差に関する最小二乗法に帰着される。

一般に、(2.19) 式の評価関数を最小化するパラメータ

$$\hat{\theta}_{\text{ML}} = \arg \min_{\theta} V(\theta) \quad (2.20)$$

は解析的に解けないため、数値的な最適化を行う必要がある。(2.19) 式の評価関数が誤差の二乗和であることに着目すると、ガウス・ニュートン法やレーベンバーグ・マルカート法を用いて最適化を行うことができる [37],[38]。また、一般の評価関数に用いることのできる勾配法である BFGS (Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno) アルゴリズム [39] などを用いることも可能である。

これらの最適化の際、(2.19) 式の評価関数の θ に関する勾配を用いると効率よく最適化問題を解くことができる。そこで、評価関数 $V(\theta)$ のパラメータ θ に関する勾配を計算すると、

$$\frac{\partial V(\theta)}{\partial \theta} = - \sum_{k=0}^N (y_k - \hat{y}_k(\theta)) \varphi_k(\theta) \quad (2.21)$$

となる。ただし、

$$\frac{\partial \hat{y}(t, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial G(p, \theta)}{\partial \theta} u(t) \quad (2.22)$$

とにおいて、

$$\varphi_k(\theta) = \frac{\partial \hat{y}(t_k, \theta)}{\partial \theta} \quad (2.23)$$

である。

注意 2.6 ガウス・ニュートン法を用いて (2.19) 式を解く場合には、本節で述べたシステム同定法は [40] で提案された連続時間システム同定法に一致する。

注意 2.7 本項では線形システムに対する最尤推定法について述べたが、観測される信号が

$$y_k = \hat{y}(t_k, \theta^*) + w_k$$

と記述できる場合にはシステムが非線形であっても同様の推定法を用いることができる [41],[42]。ただし、 $\hat{y}(t_k, \theta)$ はパラメータ θ と入力 $u(t)$ によって決まる確定的なモデル出力である。

2.2.3 推定値の漸近的性質

本項では、前項で述べた最尤推定に基づくシステム同定法によって得られるパラメータ $\hat{\theta}_{\text{ML}}$ の漸近的な性質について述べる。

2.1.1 項で述べたように、最尤推定値の漸近的な共分散行列は (2.4) 式のフィッシャー情報

行列によって評価できる。(2.18)式を用いてフィッシャー情報行列を計算すると、

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}(\boldsymbol{\theta}^*) &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{\sigma^4} \sum_{k=0}^N (y_k - \hat{y}_k(\boldsymbol{\theta}^*)) \boldsymbol{\varphi}_k(\boldsymbol{\theta}^*) \sum_{l=0}^N (y_l - \hat{y}_l(\boldsymbol{\theta}^*)) \boldsymbol{\varphi}_l^\top(\boldsymbol{\theta}^*) \right] \\
 &= \frac{1}{\sigma^4} \sum_{k=0}^N \mathbb{E} \left[(y_k - \hat{y}_k(\boldsymbol{\theta}^*))^2 \right] \boldsymbol{\varphi}_k(\boldsymbol{\theta}^*) \boldsymbol{\varphi}_k^\top(\boldsymbol{\theta}^*) \\
 &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=0}^N \boldsymbol{\varphi}_k(\boldsymbol{\theta}^*) \boldsymbol{\varphi}_k^\top(\boldsymbol{\theta}^*) \tag{2.24}
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $u(t)$ はユーザの決める確定的な信号であることから、 $\boldsymbol{\varphi}_k(\boldsymbol{\theta}^*)$ が確定的であることに注意する。また、 $y_k - \hat{y}_k(\boldsymbol{\theta}^*) = w_k$ と、

$$\mathbb{E}[w_k w_l] = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ \sigma^2 & k = l \end{cases}$$

であることを用いた。

真のパラメータ $\boldsymbol{\theta}^*$ と入力信号 $u(t)$ 、雑音の分散 σ^2 が既知のもとで (2.24) 式を用いると、雑音 w_k の影響によるパラメータ推定値 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ML}}$ のばらつきが評価できる。実用的にはパラメータの真値 $\boldsymbol{\theta}^*$ は得られないが、推定値を用いて近似的な評価が可能である。

2.3 状態推定

本節では、ベイズ推定に基づいた状態推定法として、カルマンフィルタとパーティクルフィルタについて述べる。

2.3.1 カルマンフィルタ

状態推定問題に広く用いられているフィルタとしてカルマンフィルタがある。カルマンフィルタにはさまざまな導出の方法が存在するが、ここではベイズ推定の立場からカルマンフィルタを扱うことにする [20]。

状態空間実現された多入力多出力 (Multi-Input Multi-Output: MIMO) 離散時間線形システム

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_u \mathbf{u}_k + \mathbf{B}_v \mathbf{v}_k \tag{2.25}$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \tag{2.26}$$

を考える。ここで、 $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ はシステムの状態、 $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ は入力、 $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ は出力である。また、システム雑音 $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^{n_v}$ と観測雑音 $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ は平均値 $\mathbf{0}$ 、共分散行列がそれぞれ $\boldsymbol{\Sigma}_v$

と Σ_w の互いに独立な正規性白色雑音であるとする。さらに、 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\mathbf{B}_u \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $\mathbf{B}_v \in \mathbb{R}^{n_x \times n_v}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ はそれぞれシステムのダイナミクスを表す行列である。このとき、カルマンフィルタにおける状態推定問題はつぎのように与えられる。

カルマンフィルタリング問題

時刻 0 から k までの出力を $\mathcal{Y}_k = \{\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_k\}$ とする。このとき、 \mathcal{Y}_k を用いて状態ベクトル \mathbf{x}_k の最小分散推定値、すなわち、ベイズリスク

$$R(\hat{\mathbf{x}}_k) = \mathbb{E} \left[\|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k\|^2 \right] \quad (2.27)$$

を最小化する $\hat{\mathbf{x}}_k$ を与えるフィルタを設計せよ。

この問題に対する解は、2.1.2 項 で述べたように、条件付き期待値

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{x}_k p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k) d\mathbf{x}_k \quad (2.28)$$

によって与えられる。これを用いてカルマンフィルタを導出する。

[1] 条件付き確率密度関数

ベイズの定理から、条件付き確率密度関数 $p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k)$ について、

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k) &= p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_{k-1}, \mathbf{y}_k) \\ &= \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \mathcal{Y}_{k-1}) p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_{k-1})}{p(\mathbf{y}_k | \mathcal{Y}_{k-1})} \\ &= \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_{k-1})}{p(\mathbf{y}_k | \mathcal{Y}_{k-1})} \\ &= \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_{k-1})}{\int_{\mathbb{R}^{n_x}} p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_{k-1}) d\mathbf{x}_k} \end{aligned} \quad (2.29)$$

が成り立つ。ただし、 \mathbf{x}_k が与えられたとき、 \mathbf{y}_k は \mathcal{Y}_{k-1} に依らず決定されることを用いた。ここで、 $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$ が尤度関数であることを注意する。また、

$$p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathcal{Y}_k) = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathcal{Y}_k, \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k) d\mathbf{x}_k \quad (2.30)$$

が成り立つ。

[2] 予測ステップ

$p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k)$ が平均値 $\hat{\mathbf{x}}_{k/k}$, 共分散行列 $\mathbf{P}_{k/k}$ の正規分布で与えられているとすると, (2.30) 式は,

$$p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathcal{Y}_k) = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_u \mathbf{u}_k, \mathbf{B}_v \boldsymbol{\Sigma}_v \mathbf{B}_v^\top) \mathcal{N}(\mathbf{x}_k, \hat{\mathbf{x}}_{k/k}, \mathbf{P}_{k/k}) d\mathbf{x}_k \quad (2.31)$$

となる. ここで, カルマンフィルタの導出に有用なつぎの恒等式^{[20],[21]}を導入する.

命題 1 恒等式

$$\mathcal{N}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{P}) \mathcal{N}(\mathbf{y}, \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \mathbf{R}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{M}) \mathcal{N}(\mathbf{y}, \mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}, \mathbf{V}) \quad (2.32)$$

が成立する. ただし,

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{P}\mathbf{A}^\top \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{A}\boldsymbol{\mu} - \mathbf{b}) \quad (2.33)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^\top + \mathbf{R} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{A}^\top \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A}\mathbf{P} \quad (2.35)$$

である. □

(2.32) 式の恒等式を用いると, (2.31) 式は

$$p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathcal{Y}_k) = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathcal{N}(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\alpha}_k, \mathbf{V}_k) \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k+1}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}, \mathbf{P}_{k+1/k}) d\mathbf{x}_k \quad (2.36)$$

と変形できる. ただし,

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}_u \mathbf{u}_k$$

$$\mathbf{P}_{k+1/k} = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k/k}\mathbf{A}^\top + \mathbf{B}_v \boldsymbol{\Sigma}_v \mathbf{B}_v^\top$$

$$\boldsymbol{\alpha}_k = \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{P}_{k/k}\mathbf{A}^\top \mathbf{P}_{k+1/k}^{-1} (\mathbf{x}_{k+1} - (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}_u \mathbf{u}_k))$$

$$\mathbf{V}_k = \mathbf{P}_{k/k} - \mathbf{P}_{k/k}\mathbf{A}^\top \mathbf{P}_{k+1/k}^{-1} \mathbf{A}\mathbf{P}_{k/k}$$

である. (2.36) 式の右辺の積分を実行することで,

$$p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathcal{Y}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k+1}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}, \mathbf{P}_{k+1/k}) \quad (2.37)$$

と得ることができる.

[3] 更新ステップ

(2.26) 式を用いると, (2.29) 式は

$$p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k) = \frac{\mathcal{N}(\mathbf{y}_k, \mathbf{C}\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\Sigma}_w) \mathcal{N}(\mathbf{x}_k, \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}, \mathbf{P}_{k/k-1})}{\int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathcal{N}(\mathbf{y}_k, \mathbf{C}\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\Sigma}_w) \mathcal{N}(\mathbf{x}_k, \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}, \mathbf{P}_{k/k-1}) d\mathbf{x}_k} \quad (2.38)$$

となる。(2.32)–(2.35) 式を用いて右辺の分子を整理すると,

$$\mathcal{N}(\mathbf{y}_k, \mathbf{C}\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\Sigma}_w) \mathcal{N}(\mathbf{x}_k, \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}, \mathbf{P}_{k/k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{y}_k, \boldsymbol{\beta}_k, \mathbf{U}_k) \mathcal{N}(\mathbf{x}_k, \hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{P}_{k/k}) \quad (2.39)$$

となる。ただし,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}) \\ \mathbf{P}_{k/k} &= \mathbf{P}_{k/k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{C} \mathbf{P}_{k/k-1} \\ \boldsymbol{\beta}_k &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} \\ \mathbf{U}_k &= \boldsymbol{\Sigma}_w + \mathbf{C} \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{C}^\top \end{aligned}$$

である。ここで,

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{C}^\top (\boldsymbol{\Sigma}_w + \mathbf{C} \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{C}^\top)^{-1} \quad (2.40)$$

とおいた。また, (2.38) 式右辺の分母は,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathcal{N}(\mathbf{y}_k, \mathbf{C}\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\Sigma}_w) \mathcal{N}(\mathbf{x}_k, \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}, \mathbf{P}_{k/k-1}) d\mathbf{x}_k \\ = \mathcal{N}(\mathbf{y}_k, \boldsymbol{\beta}_k, \mathbf{U}_k) \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathcal{N}(\mathbf{x}_k, \hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{P}_{k/k}) d\mathbf{x}_k \\ = \mathcal{N}(\mathbf{y}_k, \boldsymbol{\beta}_k, \mathbf{U}_k) \end{aligned} \quad (2.41)$$

である。この結果を用いて (2.38) 式を計算すると,

$$p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k, \hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{P}_{k/k}) \quad (2.42)$$

が得られる。

以上より, 事前分布 $p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathcal{Y}_k)$ と事後分布 $p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k)$ の逐次的な計算が得られた。このとき, (2.27) 式のベイズリスクを最小化する推定値は $p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k)$ の期待値 $\hat{\mathbf{x}}_k$ である。

以上をまとめると, カルマンフィルタのアルゴリズムがつぎのように得られる。

カルマンフィルタ

STEP 0 初期化

$$\hat{\mathbf{x}}_{0/-1} = \mathbf{E}[\mathbf{x}_0], \quad (2.43)$$

$$\mathbf{P}_{0/-1} = \mathbf{E}[(\mathbf{x}_0 - \mathbf{E}[\mathbf{x}_0])(\mathbf{x}_0 - \mathbf{E}[\mathbf{x}_0])^\top] \quad (2.44)$$

STEP 1 更新

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/k} = \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + \mathbf{K}_k \mathbf{e}_k \quad (2.45)$$

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} \quad (2.46)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{C}^\top [\mathbf{C}\mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{C}^\top + \Sigma_w]^{-1} \quad (2.47)$$

$$\mathbf{P}_{k/k} = \mathbf{P}_{k/k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}\mathbf{P}_{k/k-1} \quad (2.48)$$

STEP 2 予測

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k/k} + \mathbf{B}_u \mathbf{u}_k \quad (2.49)$$

$$\mathbf{P}_{k+1/k} = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k/k} \mathbf{A}^\top + \mathbf{B}_v \Sigma_v \mathbf{B}_v^\top \quad (2.50)$$

2.3.2 パーティクルフィルタ

前項で述べたように、カルマンフィルタは事後分布の期待値を求めることにより状態推定値を求める方法である。このとき、対象システムが線形であること、システム雑音 \mathbf{v}_k と観測雑音 \mathbf{w}_k が正規性白色雑音であることにより、事前分布 $p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathcal{Y}_k)$ と事後分布 $p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k)$ が正規分布となることを利用している。

システムが非線形である場合や、システム雑音 \mathbf{v}_k と観測雑音 \mathbf{w}_k が正規分布にしたがわないとき、事前分布 $p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathcal{Y}_k)$ と事後分布 $p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k)$ が正規分布にならないため、カルマンフィルタを適用することができない。そこで本項では、各種の分布に正規性を仮定しないフィルタの1つであるパーティクルフィルタ [20],[43]–[45] について述べる。

一般の離散時間システム

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) \quad (2.51)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k) \quad (2.52)$$

を考える。ここで、 $\mathbf{f}(\cdot, \cdot, \cdot)$ と $\mathbf{h}(\cdot, \cdot)$ はそれぞれシステムのダイナミクスを表す非線形関数である。また、カルマンフィルタの場合と異なり \mathbf{v}_k と \mathbf{w}_k は正規分布に限定しない一般の確率変数であるとする。

パーティクルフィルタの基本的な考え方は、確率分布をその分布から独立に抽出した多数の粒子によって近似的に表現することである。分布を近似する粒子の集合をアンサンブルとよぶ。

[1] 予測ステップ

事後分布 $p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k)$ が L 個の粒子からなるアンサンブル

$$X_{k/k} = \left\{ \mathbf{x}_{k/k}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_{k/k}^{(L)} \right\}$$

によって

$$p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k/k}^{(i)}) \quad (2.53)$$

と近似されているとする。ただし、 $\delta(\cdot)$ は $\mathbf{x} \neq 0$ に対して $\delta(\mathbf{x}) = 0$ を満たし、

$$\int_{\mathbb{R}^{n_x}} \delta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1 \quad (2.54)$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n_x}} g(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}) d\mathbf{x} = g(\mathbf{a}) \quad (2.55)$$

となるディラックのデルタ関数である。このとき、

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathcal{Y}_k) &= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathcal{Y}_k, \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k) d\mathbf{x}_k \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k) d\mathbf{x}_k \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_v}} p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) p(\mathbf{v}_k | \mathbf{x}_k) d\mathbf{v}_k \right) p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k) d\mathbf{x}_k \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n_v}} \int_{\mathbb{R}^{n_x}} p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) p(\mathbf{v}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k) d\mathbf{x}_k d\mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (2.56)$$

が成り立つ。また、 \mathbf{v}_k と \mathcal{Y}_k 、 \mathbf{v}_k と \mathbf{x}_k がそれぞれ独立なので、

$$\begin{aligned} p(\mathbf{v}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k) &= p(\mathbf{v}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k) \\ &= p(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k | \mathcal{Y}_k) \end{aligned} \quad (2.57)$$

となる。これを $p(\mathbf{v}_k)$ から抽出された $\{\mathbf{v}_k^{(i)} | i \in \{1, \dots, L\}\}$ を用いて

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k | \mathcal{Y}_k) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k/k}^{(i)}) \delta(\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_k^{(i)}) \quad (2.58)$$

と近似すると、

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathcal{Y}_k) &= \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_{k/k}^{(i)}, \mathbf{v}_k^{(i)}) \\ &= \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \delta(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_{k+1/k}^{(i)}) \end{aligned} \quad (2.59)$$

となる。ただし、

$$\mathbf{x}_{k+1/k}^{(i)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k/k}^{(i)}, \mathbf{v}_k^{(i)}), \quad i \in \{1, \dots, L\} \quad (2.60)$$

とおいた。これにより、事前分布を予測アンサンブル

$$X_{k+1/k} = \{\mathbf{x}_{k+1/k}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_{k+1/k}^{(L)}\}$$

を用いて近似できた。

[2] 更新ステップ

(2.29) 式に (2.59) 式を代入すると,

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k) &= \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_{k-1})}{\int_{\mathbb{R}^{n_x}} p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_{k-1})d\mathbf{x}_k} \\
&= \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) \sum_{i=1}^L \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k/k-1}^{(i)})}{\sum_{i=1}^L p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{k/k-1}^{(i)})} \\
&= \sum_{i=1}^L \frac{\alpha_k^{(i)}}{\sum_{j=1}^L \alpha_k^{(j)}} \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k/k-1}^{(i)}) \tag{2.61}
\end{aligned}$$

となる. ここで,

$$\alpha_k^{(i)} = p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{k/k-1}^{(i)}), \quad i \in \{1, \dots, L\} \tag{2.62}$$

はデータ \mathbf{y}_k が与えられたときの $\mathbf{x}_{k/k-1}^{(i)}$ の尤度である. (2.61) 式は, $p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k)$ が予測アンサンブルの各粒子に重み $\alpha_k^{(i)} / \sum_{j=1}^L \alpha_k^{(j)}$ をつけたもので近似できることを示している. つぎに,

$$m_k^{(i)} \approx L \frac{\alpha_k^{(i)}}{\sum_{j=1}^L \alpha_k^{(j)}} \tag{2.63}$$

を満たす整数列 $\{m_k^{(i)} \mid i \in \{1, \dots, L\}\}$ を考え, 予測アンサンブルの各粒子が $m_k^{(i)}$ 個ずつ含まれるような新たなアンサンブル $X_{k/k} = \{\mathbf{x}_{k/k}^{(i)} \mid i \in \{1, \dots, L\}\}$ を生成する. 具体的には, 予測アンサンブル $X_{k/k-1}$ の中の各粒子が確率 $\alpha_k^{(i)} / \sum_{j=1}^L \alpha_k^{(j)}$ で抽出されるようにして計 L 個の粒子を復元抽出すれば $X_{k/k}$ を構成することができる. この操作をリサンプリングという. すると, (2.61) 式は

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k) &\approx \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L m_k^{(i)} \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k/k-1}^{(i)}) \\
&= \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{(k/k)}^{(i)}) \tag{2.64}
\end{aligned}$$

と変形できる.

[3] 推定値の計算

最後に、最小分散推定値を与えるのは事後分布の平均値であるから、パーティクルフィルタによる推定値は

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_k &= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{x}_k p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k) d\mathbf{x}_k \\ &= \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{x}_k \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{(k/k)}^{(i)}) d\mathbf{x}_k \\ &= \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathbf{x}_{k/k}^{(i)}\end{aligned}\tag{2.65}$$

となる。

以上をまとめると、パーティクルフィルタのアルゴリズムがつぎのように得られる。

パーティクルフィルタ

STEP 0 初期化

$k = 1$ とし、事前分布 $p(\mathbf{x}_0)$ に従って $\mathbf{x}_{1/0}^{(i)}$, $i \in \{1, \dots, L\}$ を生成し、初期アンサンブル

$$X_{1/0} = \{\mathbf{x}_{1/0}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_{1/0}^{(L)}\}$$

を構成する。ただし、 L はユーザによって設定されるパーティクル数である。

STEP 1 更新

STEP 1.1 尤度の計算

$$\alpha_k^{(i)} = p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{k/k-1}^{(i)}), \quad i \in \{1, \dots, L\}\tag{2.66}$$

により尤度を計算する。

STEP 1.2 リサンプリング

確率 $\alpha_k^{(i)} / \sum_{i=1}^L \alpha_k^{(i)}$ に従って $X_{k/k-1}$ から復元抽出することでパーティクル $\mathbf{x}_{k/k}^{(j)}$, $j \in \{1, \dots, L\}$ を生成する。そして、フィルタリングアンサンブル

$$X_{k/k} = \{\mathbf{x}_{k/k}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_{k/k}^{(L)}\}$$

を構成する。

STEP 1.3 推定値の計算

フィルタリング推定値を

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathbf{x}_{k/k}^{(i)}. \quad (2.67)$$

により計算する.

STEP 2 予測

システム雑音のサンプル $\mathbf{v}_{k-1}^{(i)}$, $i \in \{1, \dots, L\}$ を確率 $p(\mathbf{v}_k)$ に従って生成する.

$$\mathbf{x}_{k+1/k}^{(i)} = \mathbf{f} \left(\mathbf{x}_{k/k}^{(i)}, \mathbf{v}_k^{(i)} \right), \quad i \in \{1, \dots, L\} \quad (2.68)$$

を計算することにより, 予測アンサンブル

$$X_{k+1/k} = \left\{ \mathbf{x}_{k+1/k}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_{k+1/k}^{(L)} \right\} \quad (2.69)$$

を構成する.

k を $k+1$ として, STEP 1 にもどる.

注意 2.8 以上の導出からわかるように, パーティクルフィルタでは (2.52) 式の観測方程式は直接利用されず, 尤度関数 $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$ のみが利用される. このことから, パーティクルフィルタの適用の際には, 観測方程式を尤度関数に書き換える必要がある. たとえば, \mathbf{w}_k が平均値 $\mathbf{0}$, 共分散行列 Σ_w の正規性白色雑音であり,

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{w}_k) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k \quad (2.70)$$

と表されるならば, 尤度関数は

$$p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{y}_k, \mathbf{g}(\mathbf{x}_k), \Sigma_w) \quad (2.71)$$

となる.

2.4 確率システムに対する最適制御

本節では, 状態推定の活用の1つとして, 雑音加わるシステムに対する制御問題について述べる.

状態の平衡点からのずれを速やかに平衡点に戻すための制御系のことをレギュレータという. ここでは, (2.25) 式で表される確率的なシステムに対するレギュレータ問題を考える. 状態 \mathbf{x}_k がすべて観測できるとき, 最適レギュレータ問題はつぎのようになる.

確率システムに対する最適レギュレータ問題

二次形式の評価関数

$$\bar{J}_N = \mathbb{E} \left[\mathbf{x}_N^\top \mathbf{S}_N \mathbf{x}_N + \sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{x}_k^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^\top \mathbf{R} \mathbf{u}_k) \right] \quad (2.72)$$

を最小化する制御入力 \mathbf{u}_k を求めよ。ただし、 $\mathbf{S}_N \geq 0$ 、 $\mathbf{Q} \geq 0$ 、 $\mathbf{R} > 0$ はユーザが与える重みである。

このような制御問題は、対象システムが線形であり、評価関数が二次形式であり、雑音がガウス性の白色雑音であることから、線形二次ガウス型 (Linear Quadratic Gaussian: LQG) 制御問題と呼ばれる^[46]。この問題の解は、対 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_u)$ が可制御であるとき、

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{F}_k \mathbf{x}_k \quad (2.73)$$

で与えられることが知られている^{[5],[47],[48]}。ただし、

$$\mathbf{F}_k = (\mathbf{R} + \mathbf{B}_u^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B}_u)^{-1} \mathbf{B}_u^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A} \quad (2.74)$$

である。ここで、 \mathbf{S}_k は、

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{Q} + \mathbf{A}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A} - \mathbf{A}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B}_u (\mathbf{R} + \mathbf{B}_u^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B}_u)^{-1} \mathbf{B}_u^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A} \quad (2.75)$$

を満たす半正定対称行列である。(2.75) 式の方程式を離散時間 Riccati 方程式という。(2.74)、(2.75) 式を用いてあらかじめ \mathbf{F}_k を求めておくことにより、最適な状態フィードバック制御が実現できる。

評価の区間を無限に長くして、

$$\bar{J} = \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{x}_k^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^\top \mathbf{R} \mathbf{u}_k) \right] \quad (2.76)$$

を最小化することを考えると、最適な制御入力は、

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{F} \mathbf{x}_k \quad (2.77)$$

となる。ただし、定常 Riccati 方程式

$$\mathbf{S} = \mathbf{Q} + \mathbf{A}^\top \mathbf{S} \mathbf{A} - \mathbf{A}^\top \mathbf{S} \mathbf{B}_u (\mathbf{R} + \mathbf{B}_u^\top \mathbf{S} \mathbf{B}_u)^{-1} \mathbf{B}_u^\top \mathbf{S} \mathbf{A} \quad (2.78)$$

の解 \mathbf{S} を用いて

$$\mathbf{F} = (\mathbf{R} + \mathbf{B}_u^\top \mathbf{S} \mathbf{B}_u)^{-1} \mathbf{B}_u^\top \mathbf{S} \mathbf{A} \quad (2.79)$$

である。

つぎに、すべての状態 \mathbf{x}_k が観測できず、(2.26) 式の実出力信号のみが観測できている場合を考える。対 (\mathbf{C}, \mathbf{A}) が可観測であるとき、(2.72) 式の評価関数を最小化する入力信号は、(2.73) 式の \mathbf{x}_k を (2.45) 式のカルマンフィルタによる推定値 $\hat{\mathbf{x}}_{k/k}$ によって置き換えた

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k/k} \quad (2.80)$$

で得られることが知られている。このとき、フィードバックゲイン \mathbf{F}_k はすべての状態 \mathbf{x}_k が観測されている場合と同様に (2.74), (2.75) 式によって与えられる。これは、状態推定器と制御則を独立に設計できることを意味している。このことを分離定理という^[47]。

2.5 ルベীগサンプリング

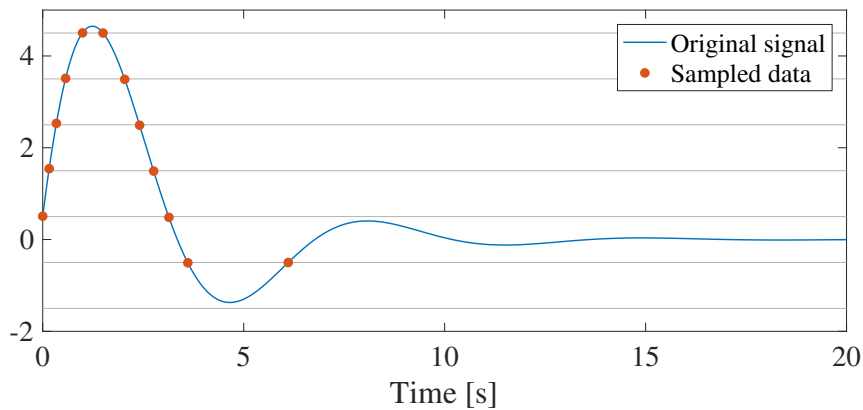
本節では、本研究で扱うルベীগサンプリングについて述べる。

近年の多くの制御系はデジタル演算を用いて実装されるため、連続時間信号をそのまま扱うことは困難であり、離散時間信号に変換する必要がある。このとき、連続時間信号を離散時間信号に変換することをサンプリングという。

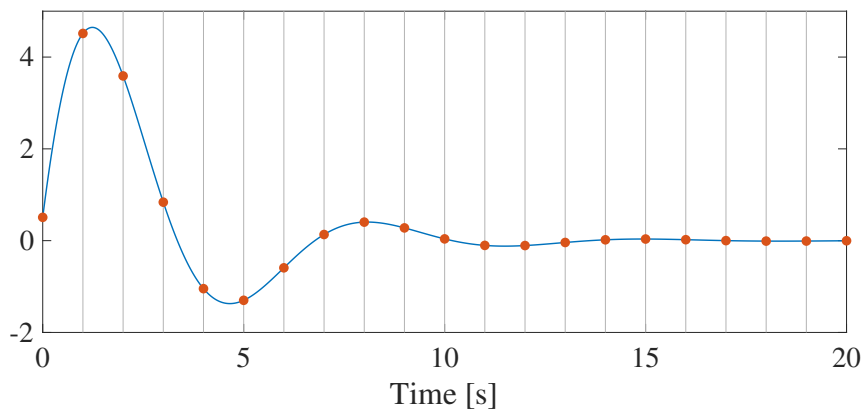
最も多く用いられるサンプリング法は、信号値を等しい時間間隔ごとに取得することである。このようなサンプリング法はリーマンサンプリングとよばれる。また、このときの間隔はサンプリング周期という。離散時間システムを制御対象とするデジタル制御^[5]では、この時間等間隔のサンプリングが仮定されていることが一般的である。

一方で、時間等間隔以外の方法でサンプリングを行うこともできる。本研究では、信号値があらかじめ定めた基準値になったときにサンプリングを行う方法に着目する。このサンプリング法はルベীগサンプリングとよばれる^{[26],[27]}。このときの基準値のことを本論文を通してサンプリングしきい値とよぶ。

Fig. 2.1 にリーマンサンプリングとルベীগサンプリングの比較を示す。図では、青の実線で表される連続時間の信号から、赤点の値をサンプリングする様子を示している。Fig. 2.1(a),(b) ではそれぞれ、ルベীগサンプリングとリーマンサンプリングを示しており、縦軸と横軸に対して等間隔にデータをサンプリングしている。図の 10 秒以降をみると、信号値はほぼ 0 から変化しない。このことから、信号値が大きく変化している 10 秒以前と比較して、10 秒以降の信号のもつ情報は少ないと考えることができる。図は、リーマンサンプリングでは、このような情報の少ない場合でもデータの取得が行われるのに対し、ルベীগサンプリングではデータの取得が行われないことを示している。このことから、ルベীগサンプリングは多くの情報をもつときにサンプリングを行う効率的な方法であると考えることができる。



(a) Lebesgue sampling



(b) Riemann sampling

Fig. 2.1: Comparison between Lebesgue and Riemann sampling

2.6 近似ルベークサンプリング

ルベークサンプリングを実装することを考えると、厳密にしきい値を横切った瞬間を記録することは困難である場合が多い。特に、デジタル型の機器を用いてサンプリングを行う場合、その機器のクロック周期に依存したタイミングでしか信号のサンプリングを行うことはできない。そこで、実装が容易な近似ルベークサンプリング^{[26],[27]}を行ってデータを取得することを考える。以降では、本節で定義する近似ルベークサンプリングを単にルベークサンプリングとよぶことにする。

信号 $y(t)$ をサンプリングすることを考える。機器のクロック周期などによって決定される最小のサンプリング周期を T とする。このサンプリング周期 T を基本サンプリング周期と呼ぶ。このとき、信号をサンプリングすることができる時刻は $t_k = kT$, $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ と表すこ

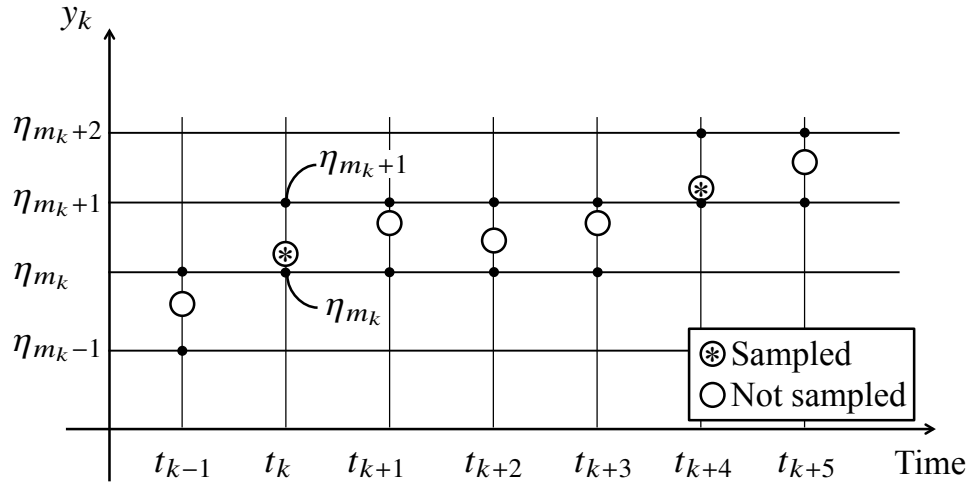


Fig. 2.2: Approximate Lebesgue sampling

とができる．これらの時刻における信号値を

$$y_k = y(kT) \tag{2.81}$$

と書く．近似ルベグサンプリングでは，この y_k のみをサンプリングの対象とし，それぞれの k に対して y_k をサンプリングするかどうか分類する．表記の簡単のため，添字 k に対応する時刻 t_k のことを単に時刻 k とよぶ．

あらかじめ定められた M 点のサンプリングしきい値が η_m , $m \in \{1, 2, \dots, M\}$ であるとする．ただし， $\eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_M$ が満たされているとする．このとき，ある時刻 k における出力 y_k に対して

$$\eta_{m_k} \leq y_k < \eta_{m_k+1} \tag{2.82}$$

を満たす $m_k \in \{0, \dots, M\}$ を見つけることができる．ただし， $\eta_0 = -\infty$, $\eta_{M+1} = \infty$ とする．すると，近似ルベグサンプリングを行うサンプリングは $k = 0$ ，および

$$m_{k-1} \neq m_k \tag{2.83}$$

を満たす k について y_k を取得し，それ以外では信号を取得しない．このようすを Fig. 2.2 に示す．

時刻 k においてルベグサンプリングにより得られるデータを

$$z_k = \begin{cases} y_k, & k \in \mathcal{S} \\ \phi, & k \notin \mathcal{S} \end{cases} \tag{2.84}$$

と記述する。ただし、 ϕ は信号がサンプリングされなかったことを表している。また、 \mathcal{S} は信号がサンプリングされた時刻 k の集合であり、

$$\mathcal{S} := \{0\} \cup \{k \in \mathbb{N} | m_k \neq m_{k-1}\} \quad (2.85)$$

である。

例 2.1 (サンプリングしきい値の設定法) サンプリングしきい値の設定法として、しきい値同士の間隔を d とし、 M を偶数として、

$$\eta_m = \left(m - \frac{M+1}{2} \right) d \quad (2.86)$$

とおくことができる。このとき、サンプリングしきい値は等間隔になる。

注意 2.9 例 2.1 ではサンプリングしきい値は等間隔に設定されるが、本論文ではサンプリングしきい値が等間隔であることを仮定しない。

注意 2.10 出力信号がサンプリングされなかったことを示す ϕ を導入したことにより、ルベグサンプリングされた出力 z_k は時間的に等間隔である。このうち、出力信号がサンプリングされた時刻 $k \in \mathcal{S}$ のみを考えると、不等間隔なデータである。

注意 2.11 2.5 節で述べた理想的なルベグサンプリングによってデータが得られる場合、サンプリングされる信号値はあるしきい値と厳密に一致する。それに対して、近似ルベグサンプリングによってサンプリングされる信号値は厳密にしきい値と一致するとは限らない。また、理想的なルベグサンプリングでは任意の時刻 t にサンプリングが行われるが、近似ルベグサンプリングでは時刻 t_k にのみサンプリングが行われる。これらの意味で、本節で述べたサンプリング法は「近似的」である。基本サンプリング周期 T が十分に小さく、出力信号が滑らかであれば、近似による誤差は小さくなる。

注意 2.12 理想的なルベグサンプリングによってデータが得られている場合にも、短い基本サンプリング周期 T を仮想的に設定し、近似ルベグサンプリングによってデータが得られているとみなすことで、本論文で提案する方法を適用することができる。

注意 2.13 本節で述べたルベグサンプリングを実装する最も単純な方法は、基本サンプリング周期 T で信号を計測し、計測された y_k を用いてサンプリングされるかどうかを判定することである。この場合は、サンプリングされない時刻の y_k はあらかじめ計測されているが、保存や転送が行われないことを意味する。一方で、すべての時刻 k で y_k を計測せず、信号値と $\eta_{m_{k-1}}$, $\eta_{m_{k-1}+1}$ との比較の結果、サンプリングする必要があるときのみ y_k を測定する、という手順でも本節で述べたルベグサンプリングを実装できる。信号値と決められた値の比較は y_k を計測するより低コストで実現できる場合が多い。

注意 2.14 時間等間隔にサンプリングを行うリーマンサンプリングも，以上で述べたルベークサンプリングと同様に定義することができる． k_r を T によって規格化されたサンプリング周期として，リーマンサンプリングによって得られるデータを

$$r_k = \begin{cases} y_k, & k \in \mathcal{S}_r \\ \phi, & k \notin \mathcal{S}_r \end{cases} \quad (2.87)$$

と記述する．ここで， \mathcal{S}_r はサンプリングされる時刻 k の集合であり，

$$\mathcal{S}_r = \{ik_r + 1 \mid i \in \{0\} \cup \mathbb{N}\} \quad (2.88)$$

である．ここで定義したリーマンサンプリングは，基本サンプリング周期の整数倍の時刻でのみサンプリングが行われる近似的なリーマンサンプリングである．

2.7 まとめ

本章では，本論文で提案するシステム同定法や状態推定法のための基礎知識をまとめた．

まず，最尤推定とベイズ推定の基礎的な事項をまとめ，そのどちらにおいても，尤度関数を用いて推定が行われることを説明した．これは，尤度関数がデータと推定をつなぐ重要な役割を担っていることを意味している．

つぎに，最尤推定に基づいた連続時間システム同定法を紹介した．観測雑音が正規性白色雑音であるという仮定のもとで，広く用いられている最小二乗法が最尤推定法として理解できることを示した．そして，パラメータ推定値の漸近的な性質について述べた．

さらに，ベイズ推定に基づいてカルマンフィルタとパーティクルフィルタの2つの状態推定法を導いた．

また，確率システムに対する最適制御について述べ，状態推定と制御則を分離して設計できることを示した．

最後に，本論文で扱うルベークサンプリングについて述べた．

第3章

ルベীগサンプリングのもとでのシステム同定法

本章では、本論文で提案するシステム同定法^{[49]–[51]}について述べる。システム同定に用いることができるデータ数に制限があるときを考え、データの取得法としてルベীগサンプリングに着目する。そして、データがルベীগサンプリングされたことを陽に利用したシステム同定法を提案する。また、提案したシステム同定法によるモデルの統計的な性質を明らかにする。

3.1 はじめに

システム同定は対象システムからサンプリングされた入出力データをもとにモデルを構築する方法である^{[2], [4], [28]}。従来のシステム同定法の多くは時間的に等間隔にデータをサンプリングすることが仮定されている。一方、データはつねに等間隔にサンプリングされているとは限らず、イベント駆動サンプリング^[52]や self-triggered サンプリング^{[7], [53]}、PWM (Pulse Width Modulation) ベースのサンプリング^[54]など、不等間隔なサンプリング法も存在する。このうち、データがルベীগサンプリングされた場合のシステム同定について考える。

等間隔サンプリングが前提の離散時間システム同定の場合、ルベীগサンプリングされたデータを用いてシステム同定を行うことは難しい。この解決策として、連続時間システム同定法^[16]やインパルス応答を推定するカーネル型のシステム同定法^{[55], [56]}などを適用することが考えられる。特に、ルベীগサンプリングされたデータにカーネル型のシステム同定法を適用した結果が藤本らによって報告されている^[57]。しかし、これらの方法では、データがルベীগサンプリングされていることを積極的に活用していないという問題点があった。

そこで本論文では、データのサンプリング法がルベীগサンプリングであることを陽に考慮したシステム同定法を提案する。そのために、**2.6**節で述べたような近似的なルベীগサンプリング

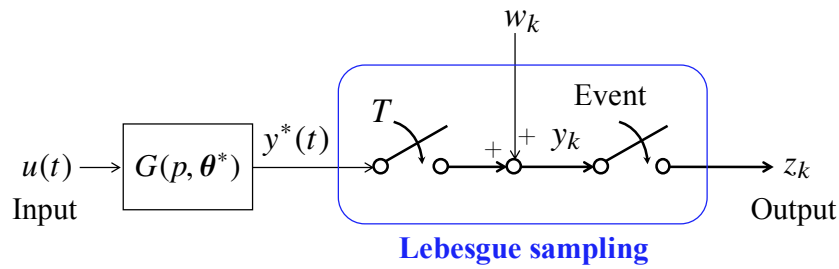


Fig. 3.1: Block diagram of the objective system in system identification

リングが行われていることを仮定する．このようなサンプリング法を考えることにより，データがサンプリングされなかった時刻において，信号がしきい値に達することがなかったという情報が得られる．そこで，本論文では，サンプリングが行われなかった時刻に対する情報も活用する最尤推定に基づいたシステム同定法を提案する．サンプリングが行われなかったときの情報を用いることにより，サンプリングされたデータのみをモデリングに利用する従来法よりも精度が高いモデルを構築できることが期待できる．

さらに，ルベグサンプリングを用いた場合にサンプリングされるデータ数と提案法による同定精度について議論し，それらの解析的な評価法を与える．最後に，数値例を通して提案法の有用性を示す．

3.2 問題設定

本論文では，1 入力 1 出力の安定な連続時間線形時不変システム

$$y^*(t) = G(p, \theta^*)u(t) \quad (3.1)$$

を同定対象とする．ただし， $u(t) \in \mathbb{R}$ はシステムへの入力， $y^*(t) \in \mathbb{R}$ は雑音がないときのシステム出力である．また， $G(p, \theta)$ は $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ によってパラメトライズされた微分演算子 p の有理関数であり， θ の真値を $\theta^* \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ とする．そして，基本サンプリング周期 T ごとのシステム出力信号が

$$y_k = y^*(t_k) + w_k \quad (3.2)$$

と記述されるとする．ただし， $t_k = kT$ ， $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ である．また， w_k は平均値 0，分散 σ^2 の正規性白色雑音である．さらに，システム出力信号 y_k は 2.6 節で述べた (2.84) 式のようにルベグサンプリングされているとする．この問題設定に関するブロック線図を Fig. 3.1 に示す．

本章で考えるシステム同定問題は，すべての時刻における $u(t)$ とルベグサンプリングされた出力 $Z = \{z_k | k \in \{0, \dots, N\}\}$ を用いて θ を推定することである．ただし， $N \in \mathbb{R}$ は

システム同定実験の長さによって決まる量である。

例 3.1 (対象システムのパラメトライズ) 同定対象のシステム $G(p, \theta)$ のパラメトライズの1つとして、有理伝達関数

$$G(p, \theta) = \frac{b_0 p^{n_g} + b_1 p^{n_g-1} + \dots + b_{n_g}}{p^{n_g} + a_1 p^{n_g-1} + \dots + a_{n_g}} \quad (3.3)$$

を用いることができる。ただし、 n_g はシステムの次数である。また、パラメータは

$$\theta = [a_1 \quad \dots \quad a_{n_g} \quad b_0 \quad \dots \quad b_{n_g}]^\top \quad (3.4)$$

である。

注意 3.1 本論文では、(3.1) 式の連続時間システムを対象とするが、提案法は近似的なルベークサンプリングを用いることを前提とするため、基本サンプリング周期で離散化した離散時間システムに対しても容易に適用できる。

3.3 ルベークサンプリングを用いたシステム同定法

本節では、データがルベークサンプリングによって得られることを陽に考慮したシステム同定法を提案する。ルベークサンプリングを用いる場合、サンプリングが行われなかった時刻 t_k , $k \notin \mathcal{S}$ についても「出力信号がサンプリングしきい値に達することがなかった」という情報を得ることができる。この情報を活用し、最尤推定に基づいたパラメータ推定法を考える。

まず、時刻 $k \in \mathcal{S}$ においてサンプリングされた値がパラメータ θ のもとで y_k となる確率は、確率密度関数

$$\begin{aligned} p_s(y_k | k, \theta) &= \mathcal{N}(y_k, \hat{y}_k(\theta), \sigma^2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_k - \hat{y}_k(\theta))^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

に比例する。ただし、

$$\hat{y}(t, \theta) = G(p, \theta)u(t) \quad (3.6)$$

とし、

$$\hat{y}_k(\theta) = \hat{y}(t_k, \theta) \quad (3.7)$$

とおいた。

つぎに、サンプリングが行われなかった時刻 $k \notin \mathcal{S}$ について考える。このとき、「信号がサンプリングしきい値に達することがなかった」という情報を得ることができる。時刻 $k \notin \mathcal{S}$ では $z_k = \phi$ であり、信号値 y_k は得られていないが、

$$\eta_{m_{k-1}} \leq y_k < \eta_{m_{k-1}+1} \quad (3.8)$$

が満たされていることが保証される。この情報を本論文では「サンプル点間情報」とよぶ。パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ のもとで (3.8) 式の事象が起きる確率は、

$$p_{\text{ns}}(\phi | k, m, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} f_k(m, \boldsymbol{\theta}) \quad (3.9)$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} f_k(m, \boldsymbol{\theta}) &= \int_{\eta_m}^{\eta_{m+1}} \mathcal{N}(y_k, \hat{y}_k(\boldsymbol{\theta}), \sigma^2) dy_k \\ &= \text{erf}\left(\frac{\eta_{m+1} - \hat{y}_k(\boldsymbol{\theta})}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) - \text{erf}\left(\frac{\eta_m - \hat{y}_k(\boldsymbol{\theta})}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

とおいた。ここで、 $\text{erf}(\cdot)$ は

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt \quad (3.11)$$

で表される誤差関数である。このとき、(3.9) 式はもはや正規分布でないことに注意する。

観測雑音の白色性から、パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ のもとで与えられたデータセット \mathcal{Z} が観測される条件付き確率は

$$\begin{aligned} p(\mathcal{Z} | \boldsymbol{\theta}) &= \prod_{k=1}^N p(z_k | k, \boldsymbol{\theta}) \\ &= \prod_{k \in \mathcal{S}} p_s(y_k | k, \boldsymbol{\theta}) \prod_{k \in \bar{\mathcal{S}}} p_{\text{ns}}(\phi | k, m_{k-1}, \boldsymbol{\theta}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

に比例する。ただし、 $\bar{\mathcal{S}} = \{1, \dots, N\} \setminus \mathcal{S}$ である。また、この評価に用いる $\hat{y}_k(\cdot)$ は

$$\hat{y}(t, \boldsymbol{\theta}) = G(p, \boldsymbol{\theta})u(t) \quad (3.13)$$

を用いて

$$\hat{y}_k(\boldsymbol{\theta}) = \hat{y}(t_k, \boldsymbol{\theta}) \quad (3.14)$$

である。

最尤推定法による推定値は (3.12) 式の $p(\mathcal{Z} | \boldsymbol{\theta})$ を最大化することによって得ることができる。この負の対数を最小化することを考えると、以下のシステム同定問題を得る。

ルベグサンプリングのもとでのシステム同定問題

連続時間入力 $u(t)$ とルベグサンプリングされた出力 z_k が与えられたもとで、

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \{V_s(\boldsymbol{\theta}) + V_{ns}(\boldsymbol{\theta})\} \quad (3.15)$$

を満たすパラメータ推定値 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ を求めよ。ただし、

$$f_k(m, \boldsymbol{\theta}) = \operatorname{erf} \left(\frac{\eta_{m+1} - \hat{y}_k(\boldsymbol{\theta})}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\eta_m - \hat{y}_k(\boldsymbol{\theta})}{\sqrt{2\sigma^2}} \right)$$

を用いて

$$V_s(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{k \in \mathcal{S}} \frac{(y_k - \hat{y}_k(\boldsymbol{\theta}))^2}{2\sigma^2} \quad (3.16)$$

$$V_{ns}(\boldsymbol{\theta}) = - \sum_{k \in \bar{\mathcal{S}}} \ln(f_k(m_{k-1}, \boldsymbol{\theta})) \quad (3.17)$$

である。

(3.15) 式の最適化問題は解析的に解けないため、BFGS (Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno) アルゴリズム^[39]などの反復解法を用いる必要がある。このとき、(3.15) 式右辺の評価関数の $\boldsymbol{\theta}$ に関する勾配を用いると効率よく最適化問題を解くことができる。そこで、評価関数 $V_s(\boldsymbol{\theta})$ と $V_{ns}(\boldsymbol{\theta})$ のパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ に関する勾配を計算すると、それぞれ、

$$\frac{\partial V_s(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = - \sum_{k \in \mathcal{S}} \frac{1}{\sigma^2} (y_k - \hat{y}_k(\boldsymbol{\theta})) \boldsymbol{\varphi}_k(\boldsymbol{\theta}) \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial V_{ns}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \sum_{k \in \bar{\mathcal{S}}} \frac{g_k(m_{k-1}, \boldsymbol{\theta})}{f_k(m_{k-1}, \boldsymbol{\theta})} \boldsymbol{\varphi}_k(\boldsymbol{\theta}) \quad (3.19)$$

となる。ただし、

$$g_k(m, \boldsymbol{\theta}) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \left\{ \exp \left(-\frac{(\eta_{m+1} - \hat{y}_k(\boldsymbol{\theta}))^2}{2\sigma^2} \right) - \exp \left(-\frac{(\eta_m - \hat{y}_k(\boldsymbol{\theta}))^2}{2\sigma^2} \right) \right\} \quad (3.20)$$

である。また、

$$\frac{\partial \hat{y}(t, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial G(p, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} u(t) \quad (3.21)$$

とにおいて、

$$\boldsymbol{\varphi}_k(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \hat{y}(t_k, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \quad (3.22)$$

Algorithm 1 System identification algorithm under Lebesgue sampling**Require:** $\boldsymbol{\theta}_0$ and \mathbf{H}_0 $i \leftarrow 0$ **while** Termination condition not reached **do**

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i \leftarrow -\mathbf{H}_i \left(\frac{\partial V_s(\boldsymbol{\theta}_i)}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial V_{\text{ns}}(\boldsymbol{\theta}_i)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)$$

$$\alpha_i \leftarrow \arg \min_{\alpha} (V_s(\boldsymbol{\theta}_i + \alpha \boldsymbol{\varepsilon}_i) + V_{\text{ns}}(\boldsymbol{\theta}_i + \alpha \boldsymbol{\varepsilon}_i))$$

$$\boldsymbol{\theta}_{i+1} \leftarrow \boldsymbol{\theta}_i + \alpha_i \boldsymbol{\varepsilon}_i$$

$$\mathbf{s}_i \leftarrow \boldsymbol{\theta}_{i+1} - \boldsymbol{\theta}_i$$

$$\mathbf{d}_i \leftarrow \left(\frac{\partial V_s(\boldsymbol{\theta}_{i+1})}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial V_{\text{ns}}(\boldsymbol{\theta}_{i+1})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right) - \left(\frac{\partial V_s(\boldsymbol{\theta}_i)}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial V_{\text{ns}}(\boldsymbol{\theta}_i)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)$$

$$\mathbf{H}_{i+1} \leftarrow \left[\mathbf{I} - \frac{\mathbf{s}_i \mathbf{d}_i^\top}{\mathbf{d}_i^\top \mathbf{s}_i} \right] \mathbf{H}_i \left[\mathbf{I} - \frac{\mathbf{d}_i \mathbf{s}_i^\top}{\mathbf{d}_i^\top \mathbf{s}_i} \right] + \frac{\mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^\top}{\mathbf{d}_i^\top \mathbf{s}_i}$$

 $i \leftarrow i + 1$ **end while** $\hat{\boldsymbol{\theta}} \leftarrow \boldsymbol{\theta}_i$ **return** $\hat{\boldsymbol{\theta}}$

である。

BFGS アルゴリズムを用いた最適化を行うことにより、ルベークサンプリングのもとでのシステム同定法は Algorithm 1 となる。

3.4 パラメータ推定値の漸近的性質

本節では、前節で提案したシステム同定法を用いて得られるパラメータ推定値の漸近的な性質について議論する。

提案したシステム同定法は最尤推定に基づいているので、確率分布に対する、あるゆるい条件のもとで、推定値は真値に確率収束する。また、推定値の分布はフィッシャー情報行列の逆行列を共分散行列とする正規分布に分布収束することが知られている [29], [32]。そこで、本節ではルベークサンプリングによって得られたデータに対するフィッシャー情報行列を導出する。

また、ルベークサンプリングを用いた場合にサンプリングされるデータ数の期待値も導出する。これにより、サンプリングされるデータ数とパラメータ推定精度の関係についての議論が可能になる。

3.4.1 フィッシャー情報行列の評価

ルベグサンプリングによって出力信号がサンプリングされる時、フィッシャー情報行列は

$$\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ln p(\mathcal{Z} | \boldsymbol{\theta}) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ln p(\mathcal{Z} | \boldsymbol{\theta}) \right)^\top \middle| \boldsymbol{\theta} \right] \quad (3.23)$$

と定義される。このとき、つぎの定理が成り立つ。

定理 3.1 ルベグサンプリングのもとでのパラメータ推定値に関するフィッシャー情報行列は、

$$\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta}^*) = \frac{1}{\sigma^2} \boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{\theta}^*) \boldsymbol{\varphi}_0^\top(\boldsymbol{\theta}^*) + \sum_{k=1}^N \sum_{m=0}^M \frac{f_{k-1}(m, \boldsymbol{\theta}^*)}{2} h_k(m, \boldsymbol{\theta}^*) \boldsymbol{\varphi}_k(\boldsymbol{\theta}^*) \boldsymbol{\varphi}_k^\top(\boldsymbol{\theta}^*) \quad (3.24)$$

で与えられる。ただし、

$$h_k(m, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sigma^2} - \frac{f_k(m, \boldsymbol{\theta})}{2\sigma^2} + \frac{l_k(m, \boldsymbol{\theta})}{\sigma^2} + \frac{g_k^2(m, \boldsymbol{\theta})}{2f_k(m, \boldsymbol{\theta})} \quad (3.25)$$

$$l_k(m, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\eta_{m+1} - \hat{y}_k(\boldsymbol{\theta})}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\eta_{m+1} - \hat{y}_k(\boldsymbol{\theta}))^2}{2\sigma^2}\right) - \frac{\eta_m - \hat{y}_k(\boldsymbol{\theta})}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\eta_m - \hat{y}_k(\boldsymbol{\theta}))^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.26)$$

である。

証明 ルベグサンプリングによって、あるデータ \mathcal{Z} が得られる確率は、

$$p(\mathcal{Z} | \boldsymbol{\theta}) = p_s(y_0 | 0, \boldsymbol{\theta}) \prod_{k=1}^N p(z_k | y_{k-1}, \boldsymbol{\theta}) \quad (3.27)$$

のように書き表すことができる。ただし、

$$p(z_k | y_{k-1}, \boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} p_s(y_k | k, \boldsymbol{\theta}), & z_k = y_k \\ p_{\text{ns}}(\phi | k, m_{k-1}, \boldsymbol{\theta}), & z_k = \phi \end{cases} \quad (3.28)$$

である。ここで、 m_{k-1} は y_{k-1} に依存して決まることに注意する。これを $\boldsymbol{\theta}$ で微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ln p(z_k | y_{k-1}, \boldsymbol{\theta}) = q_k(m_{k-1}, \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\varphi}_k(\boldsymbol{\theta}) \quad (3.29)$$

となる。ただし,

$$q_k(m, \boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} \frac{y_k - \hat{y}_k(\boldsymbol{\theta})}{\sigma^2}, & z_k = y_k \\ -\frac{g_k(m, \boldsymbol{\theta})}{f_k(m, \boldsymbol{\theta})}, & z_k = \phi \end{cases} \quad (3.30)$$

とおいた。また,

$$q_0(\boldsymbol{\theta}) = \frac{y_0 - \hat{y}_0(\boldsymbol{\theta})}{\sigma^2} \quad (3.31)$$

とおくと,

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ln p_s(y_0 | 0, \boldsymbol{\theta}) = q_0(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{\theta}) \quad (3.32)$$

とかける。このとき,

$$\mathbb{E}[q_0(\boldsymbol{\theta}^*) q_k(m_{k-1}, \boldsymbol{\theta}^*)] = 0 \quad (3.33)$$

が成り立つことと, $k \neq l$ に対して

$$\mathbb{E}[q_k(m_{k-1}, \boldsymbol{\theta}^*) q_l(m_{l-1}, \boldsymbol{\theta}^*)] = 0 \quad (3.34)$$

が成り立つことを用いると, フィッシャー情報行列は

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}^*) = \mathbb{E}[q_0^2(\boldsymbol{\theta}^*)] \boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{\theta}^*) \boldsymbol{\varphi}_0^\top(\boldsymbol{\theta}^*) + \sum_{k=1}^N \mathbb{E}[q_k^2(m_{k-1}, \boldsymbol{\theta}^*)] \boldsymbol{\varphi}_k(\boldsymbol{\theta}^*) \boldsymbol{\varphi}_k^\top(\boldsymbol{\theta}^*) \quad (3.35)$$

となる。ここで, 明らかに

$$\mathbb{E}[q_0^2(\boldsymbol{\theta}^*)] = \frac{1}{\sigma^2} \quad (3.36)$$

である。さらに, $q_k(m_{k-1}, \boldsymbol{\theta}^*)$ が y_k と y_{k-1} に依存することに注意すると,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[q_k^2(m_{k-1}, \boldsymbol{\theta}^*)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q_k^2(m_{k-1}, \boldsymbol{\theta}^*) p_s(y_k | k, \boldsymbol{\theta}^*) p_s(y_{k-1} | k-1, \boldsymbol{\theta}^*) dy_k dy_{k-1} \\ &= \sum_{m=0}^M \frac{f_{k-1}(m, \boldsymbol{\theta}^*)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} q_k^2(m, \boldsymbol{\theta}^*) p_s(y_k | k, \boldsymbol{\theta}^*) dy_k \end{aligned} \quad (3.37)$$

となる。最後に q_k の場合分けに注意しながら y_k に関して積分を行うと,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} q_k^2(m, \boldsymbol{\theta}^*) p_s(y_k | k, \boldsymbol{\theta}^*) dy_k &= \int_{\eta_m}^{\eta_{m+1}} \frac{g_k^2(m, \boldsymbol{\theta}^*)}{f_k^2(m, \boldsymbol{\theta}^*)} p_s(y_k | k, \boldsymbol{\theta}^*) dy_k \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\eta_m} \frac{(y_k - \hat{y}_k(\boldsymbol{\theta}^*))^2}{\sigma^4} p_s(y_k | k, \boldsymbol{\theta}^*) dy_k \\ &\quad + \int_{\eta_{m+1}}^{\infty} \frac{(y_k - \hat{y}_k(\boldsymbol{\theta}^*))^2}{\sigma^4} p_s(y_k | k, \boldsymbol{\theta}^*) dy_k \end{aligned} \quad (3.38)$$

となる。この積分を実行し、(3.35)–(3.37)式を用いることにより、(3.24)式を得ることができる。□

定理 3.1 により、真のシステムと入力信号、ルベグサンプリングのしきい値の組と雑音の分散が与えられたとき、フィッシャー情報行列が解析的に評価できる。そして、その逆行列をとることにより、パラメータ推定値の漸近的な共分散行列が求められる。

3.4.2 ルベグサンプリングを用いたときのデータ数

つぎに、ルベグサンプリングを用いた場合にサンプリングされるデータ数を評価する。サンプリングされるデータ数について、つぎの定理 3.2 が成り立つ。

定理 3.2 $k = 0, \dots, N$ においてルベグサンプリングでデータを取得するとき、サンプリングされるデータ数の期待値は

$$\bar{N} = N + 1 - \sum_{k=1}^N \sum_{m=0}^M \frac{f_{k-1}(m, \theta^*) f_k(m, \theta^*)}{4} \quad (3.39)$$

で与えられる。

証明 $k \neq 1$ の時刻 t_k について、 y_{k-1} が与えられたもとで出力信号がサンプリングされない確率は、

$$p(\phi | y_{k-1}) = \frac{1}{2} f_k(m_{k-1}, \theta^*) \quad (3.40)$$

となる。このとき、 y_{k-1} について積分消去すると、時刻 t_k において出力信号がサンプリングされない確率は、

$$p(\phi | k) = \sum_{m=0}^M \frac{f_{k-1}(m, \theta^*) f_k(m, \theta^*)}{4} \quad (3.41)$$

となる。これを用いて、サンプリングされるデータ数の期待値は

$$\bar{N} = 1 + \sum_{k=1}^N (1 - p(\phi | k)) \quad (3.42)$$

となる。これにより、定理 3.2 が得られる。□

定理 3.2 を用いると、真のシステムと入力信号、ルベグサンプリングのしきい値の組と雑音の分散が与えられたときにサンプリングされるデータ数の期待値が評価できる。このことか

ら，データの通信容量などの制約によってサンプリングされるデータ数を制限しなければならないときにしきい値をどのように設定すべきかについて議論することができる．このとき，実用的には真のシステムは未知であるが，おおよそのシステムの特徴を用いてデータ数を予測することが可能である．

3.5 数値例

本節では，数値例を用いて提案法の有用性を示す．また，前節のパラメータ推定値の漸近的性質の評価結果が妥当であることを示す．

3.5.1 1次系に対する解析例

対象システムを1次系

$$G(s) = \frac{b}{s+a} \quad (3.43)$$

とし，平均値0，分散1の正規性白色雑音を0.1秒ごとにサンプル，ホールドした Fig. 3.2 の入力を加えた．ただし，真のパラメータは $a = 1$ ， $b = 1$ とした．このときの $G(s)$ のボード線図を Fig. 3.3 に示す．また，観測雑音は平均値0，分散 0.1^2 の入力信号と独立な正規性白色雑音とした．このときの出力の一例を Fig. 3.4 に示す．このとき，サンプリングのしきい値は (2.86) 式を用いて設定した．また，基本サンプリング周期 $T = 0.1$ とし，100秒分のデータを取得した．すなわち，すべてのデータを用いた場合のデータ数は $N = 1000$ である．

(3.39) 式を評価したとき， \bar{N} が約500となるように $d = 0.23$ と設定し，異なる観測雑音を用いて1000回のパラメータ推定を行った．また，比較のためにサンプル点間情報を用いない出力誤差法を用いてパラメータ推定を行った．これは，サンプリングされたデータ点のみを用いて (3.16) 式を最小化する方法である．このときのパラメータ推定値を Fig. 3.5 に示す．Fig. 3.5(a) に示した出力誤差法のパラメータ推定値が真値から偏っているのに対し，Fig. 3.5(b) に示した提案法のパラメータ推定値は真値の周りに偏りなく分布している．また，推定されたパラメータに対応するボード線図を Fig. 3.6 に示す．Fig. 3.6(a) のボード線図が真のシステムから偏っているのに対し，提案法による Fig. 3.6(b) のボード線図は真のシステムの周りに偏りなく分布している．これらのことから，ルベークサンプリングのもとでは，サンプリングされた点だけでなくサンプル点間情報も扱う提案法が有用であることが確かめられた．

注意 3.2 出力 y_k がサンプリングされるかどうかは過去の入力と雑音 w_k によって決定される．そのため，ルベークサンプリングされたデータ点に含まれる w_k ， $k \in \mathcal{S}$ と入力信号は相関をもつ．このことから，ルベークサンプリングされた点のみを用いたシステム同定法では推

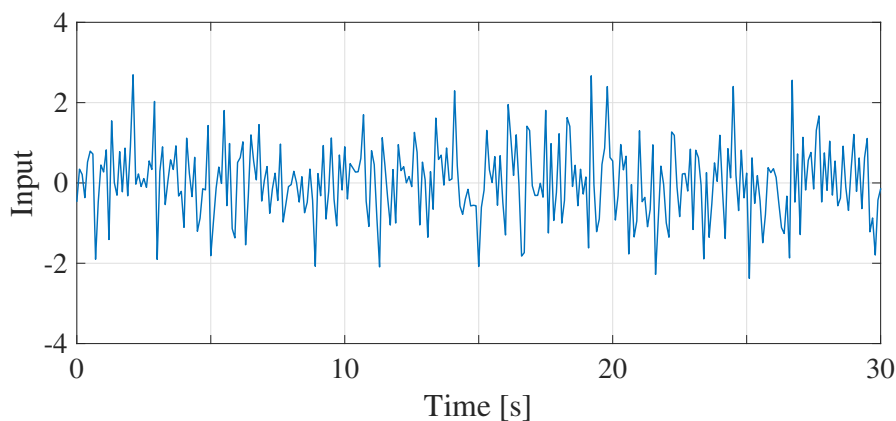


Fig. 3.2: Input signal

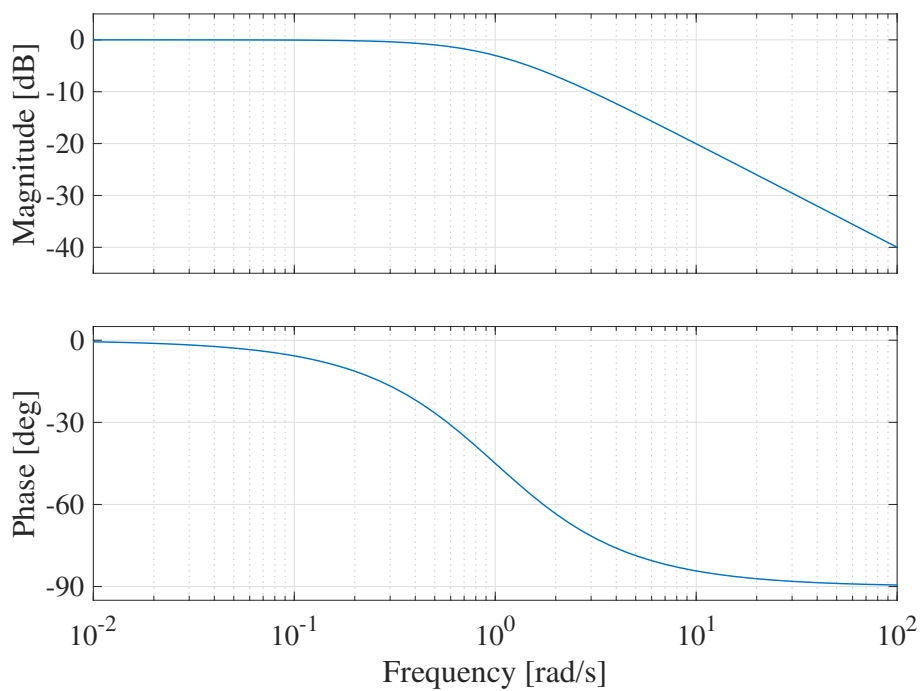


Fig. 3.3: Bode plot of the system to be identified

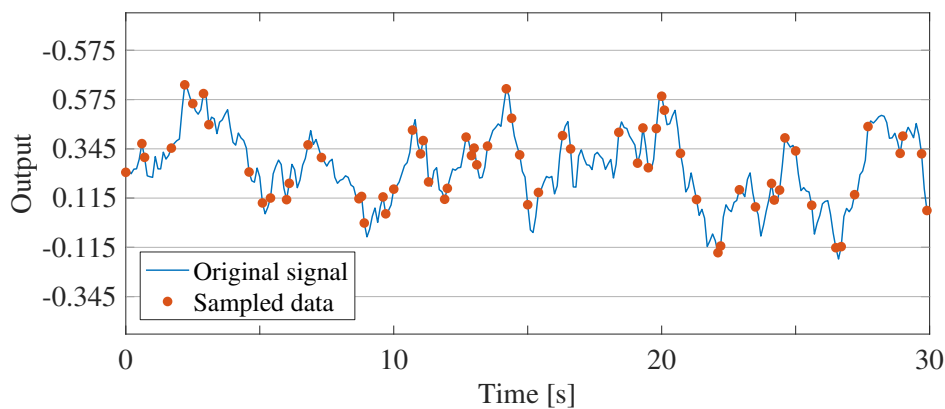
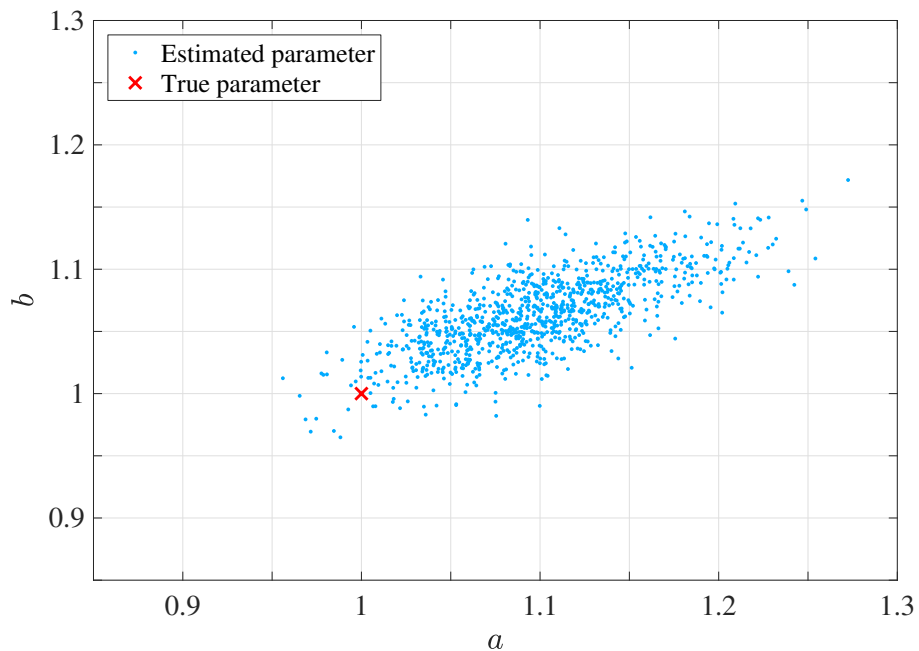
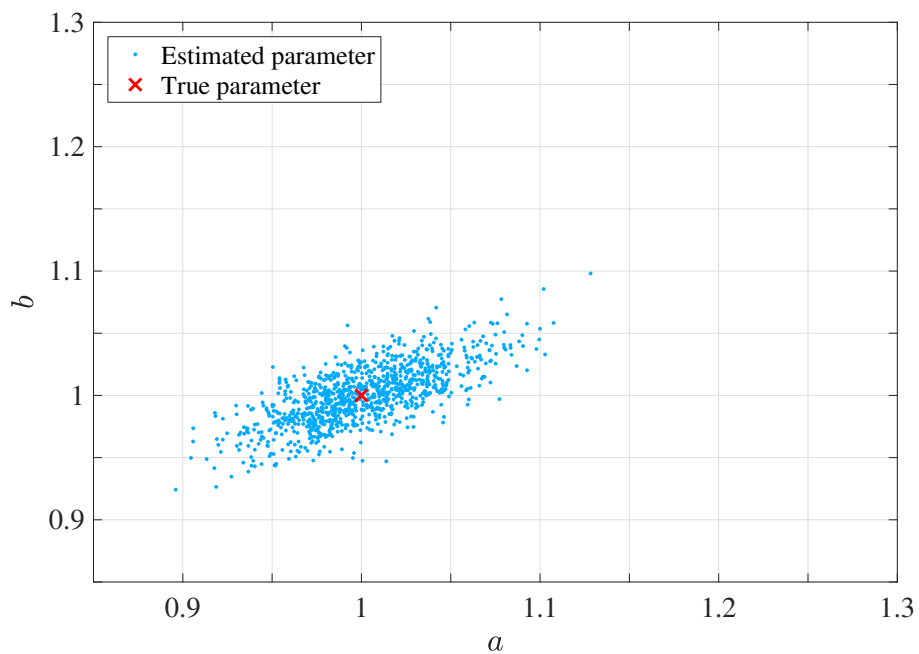


Fig. 3.4: Output signal sampled for $d = 0.23$

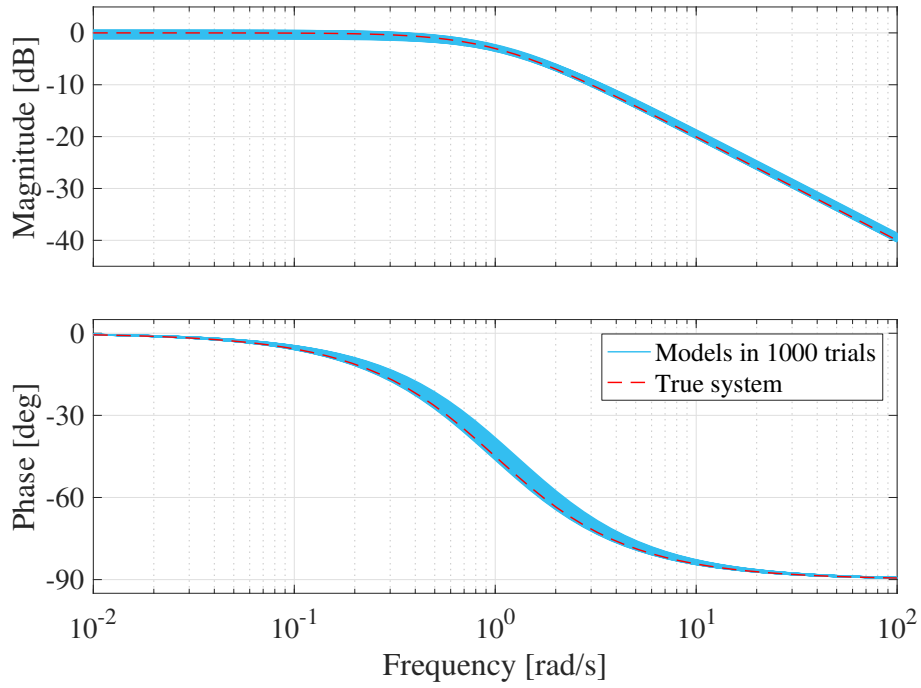


(a) Output error method

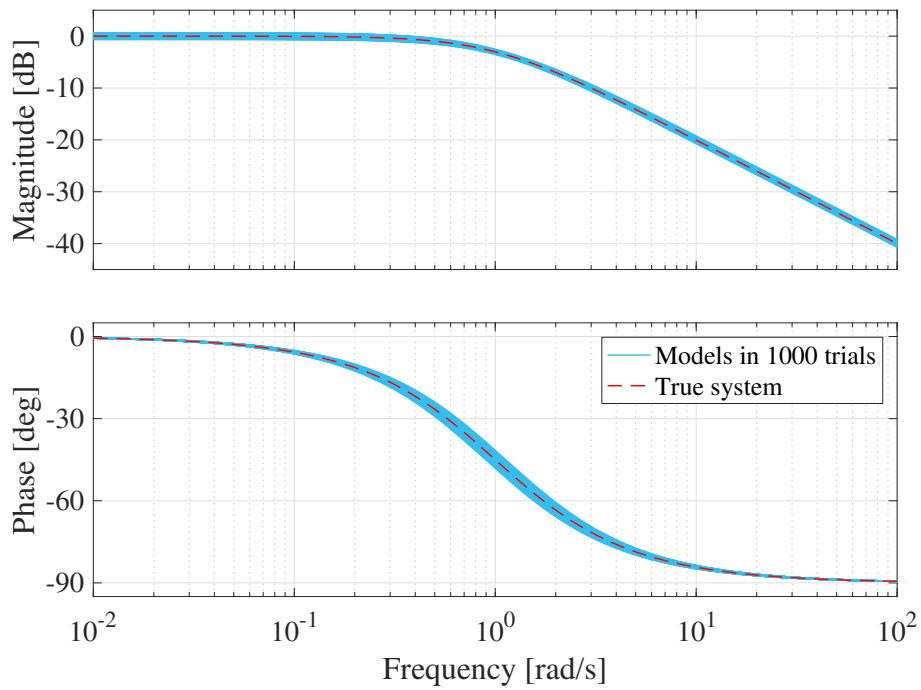


(b) Proposed method

Fig. 3.5: Parameters estimated in 1000 trials



(a) Output error method



(b) Proposed method

Fig. 3.6: Bode plot of the identified systems

定値にバイアスが生じる。

つぎに、3.4節で導出したパラメータ推定値の漸近的性質の妥当性を確かめる。サンプリングしきい値同士の間隔 d を変化させながら (3.39) 式のデータ数の期待値と (3.24) 式のフィッシャー情報行列を評価した。そして、フィッシャー情報行列の逆行列 $\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}^*)$ の (1,1) 要素と (2,2) 要素によってパラメータ a , b の漸近的な分散を評価した。また、それぞれの d について異なる観測雑音を用いた 1000 回のパラメータ推定実験を行い、そのときのサンプリングされたデータ数の平均値とパラメータ推定値の標本分散を評価した。これらの結果を Fig. 3.7 と Fig. 3.8 に示す。Fig. 3.7 ではさまざまな d について、実験によって求めたデータ数が解析的に求めたデータ数と近い値をとっている。また、Fig. 3.8 でもさまざまな d について、実験によって得られたパラメータの分散と、解析的に求めた漸近的な分散がパラメータ a と b のどちらについても近い値となっている。これらのことから、解析結果によって数値実験で得られたデータ数とパラメータの分散をよく説明できることが確かめられた。

注意 3.3 フィッシャー情報行列による分散の評価は、クラメール・ラオの不等式の下界である。実験によって得られた分散がこれとよく整合することは、提案法による推定値が有効推定値になっていることを示している。

最後に、出力信号を (2.87) 式を用いてリーマンサンプリングした場合についても同様のパラメータ推定実験を行った。リーマンサンプリングされた時刻 $k \in \mathcal{S}_r$ について、(3.16) 式と同様の評価関数を最小化し、パラメータ推定値を得た。

サンプリング周期 k_r を変化させてデータ数 i_{\max} とパラメータ推定値の分散の関係を調べ、ルベグサンプリングと比較したものを Fig. 3.9 と Fig. 3.10 に示す。これらの図の横軸は、同定に使われるデータ数 $|\mathcal{S}|$ の平均値であり、ルベグサンプリングでは \bar{N} 、リーマンサンプリングでは i_{\max} である。これらの図は、サンプリングしきい値の間隔やサンプリング周期を粗くすることでデータ数を N から少なくしていったとき、ルベグサンプリングを用いた方が推定精度の劣化を抑えられることを示している。これは、ルベグサンプリングではサンプル間の情報を用いることができるからだと考えられる。このことから、保存するデータ数に制約がある場合にはルベグサンプリングを用いたほうがパラメータ推定精度を向上することができることが示された。

3.5.2 ランダムなシステムに対する解析例

前項では、ある 1 次系の解析例においてルベグサンプリングがリーマンサンプリングよりも同じデータ数のもとでのパラメータ推定精度が高くなることを示した。本項では 1 次遅れ進み系の集合に対してルベグサンプリングとリーマンサンプリングの比較を行う。

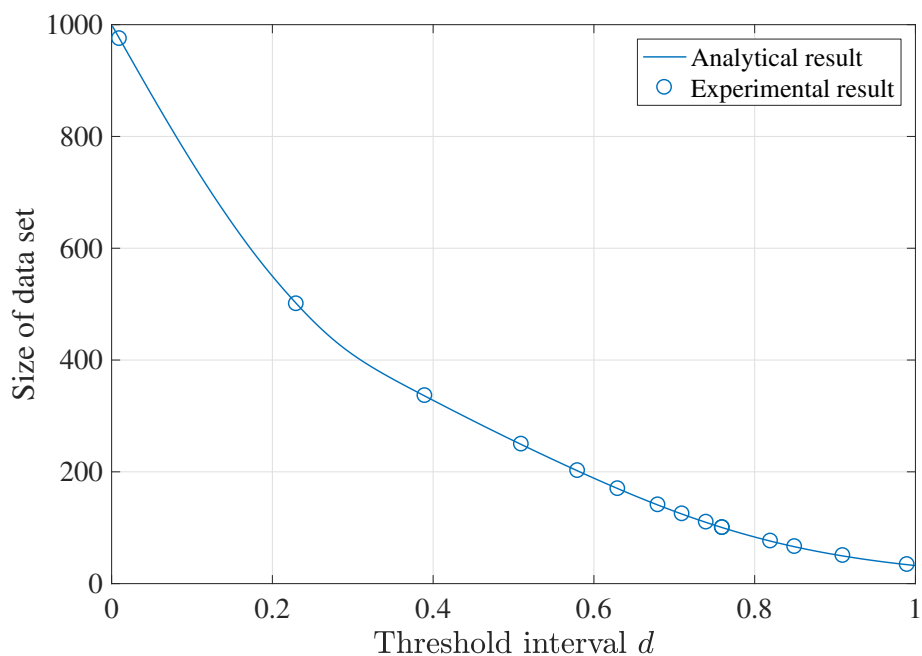


Fig. 3.7: Relationship between the threshold interval d and the size of the data set

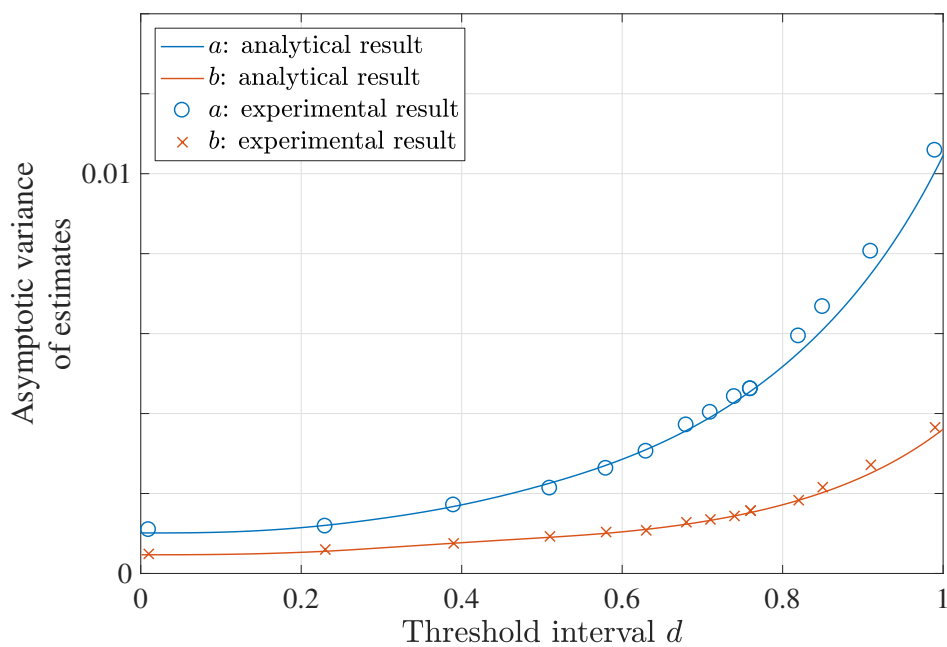


Fig. 3.8: Relationship between the threshold interval d and the asymptotic variance of estimates

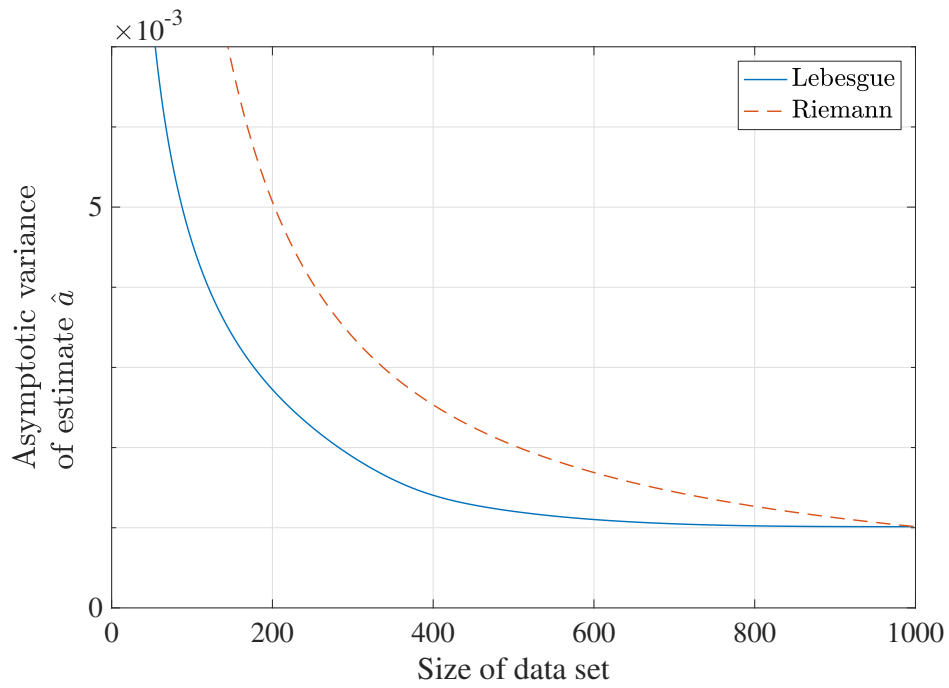


Fig. 3.9: Relationship between the size of data set and the asymptotic variance of estimate \hat{a}

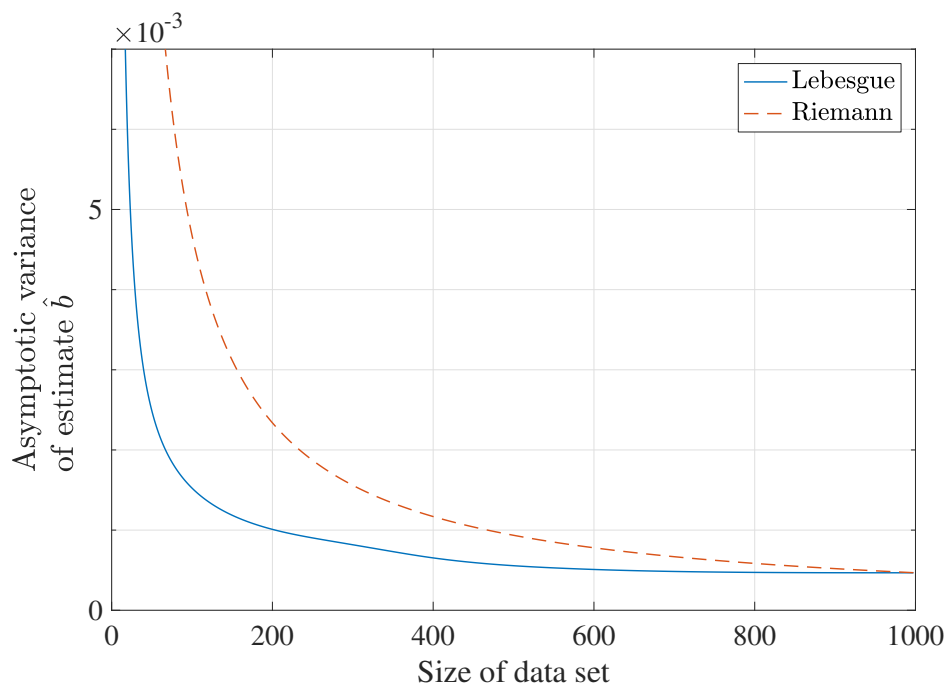


Fig. 3.10: Relationship between the size of data set and the asymptotic variance of estimate \hat{b}

まず、ランダムに 1000 通りの安定な 1 次系

$$G(s) = \frac{b_0 s + b_1}{s + a_1} \quad (3.44)$$

を生成し、そのそれぞれに対して、しきい値の間隔と観測雑音の分散をそれぞれ $d = 2\alpha\sigma_y$, $\sigma^2 = \beta\sigma_y^2$ と設定した。ただし、 α, β は区間 $[0, 1]$ の一様乱数とし、また、

$$\bar{y}^* = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N (y^*(t_k))$$

を用いて

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N (y^*(t_k) - \bar{y}^*)^2$$

とした。ここで、対象システムは安定であるが、最小位相とは限らないことに注意する。このとき、システムの未知パラメータを $\theta = [a_1 \ b_0 \ b_1]^\top$ とした場合のフィッシャー情報行列を Fig. 3.2 の入力に対して評価した。そして、ルベークサンプリングを用いた場合のフィッシャー情報行列を \mathbf{I}_L 、リーマンサンプリングを用いた場合のフィッシャー情報行列を \mathbf{I}_R とするときの一般化分散の比 $\det(\mathbf{I}_R^{-1})/\det(\mathbf{I}_L^{-1})$ を求めた。このとき、 $i_{\max} = \bar{N}$ となるように k_r を決定することで、リーマンサンプリングされるデータ数がルベークサンプリングと等しくなるように設定した。 $\det(\mathbf{I}_R^{-1})/\det(\mathbf{I}_L^{-1})$ に関するヒストグラムを Fig. 3.11 に示す。図において、縦線よりも右側は $\det(\mathbf{I}_L^{-1}) < \det(\mathbf{I}_R^{-1})$ であり、1000 回すべての場合においてルベークサンプリングを用いた場合の一般化分散が小さくなることが示された。

つぎに、安定な 2 次系の集合

$$G(s) = \frac{b_0 s^2 + b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2} \quad (3.45)$$

についても同様の数値実験と評価を行った。ただし、未知パラメータベクトルは $\theta = [a_1 \ a_2 \ b_0 \ b_1 \ b_2]^\top$ とした。このときの結果を Fig. 3.12 に示す。図は、2 次系を対象とした場合についても 1000 回すべての場合においてルベークサンプリングを用いた場合の一般化分散が小さくなることを示している。

以上より、安定な 1 次系や 2 次系を同定対象とし、入力が正規性白色である場合、保存するデータ数が等しいという条件のもとで、ルベークサンプリングのほうがリーマンサンプリングよりもパラメータ推定値の分散を小さくする意味で優れていることが数値的に確かめられた。

注意 3.4 ルベークサンプリングを用いる場合、サンプリングの判定処理が必要になる。また、提案法においても、サンプリングされなかった時刻に関する評価の計算量が増加している。この処理の増加に対してデータ数の制約が大きいとき、言い換えればデータ数が少ないときに提案法が特に有用である。

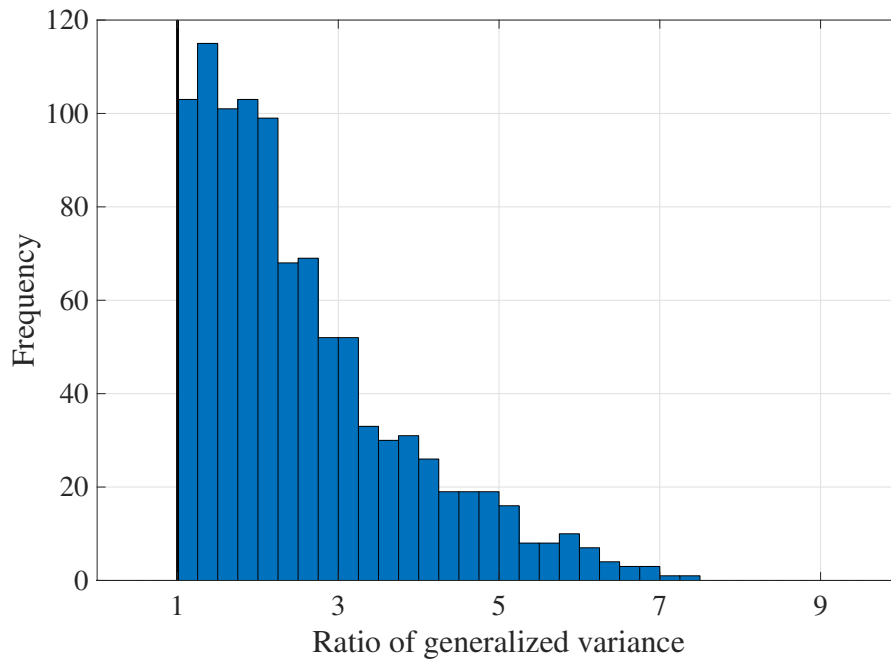


Fig. 3.11: Histogram of $\det(\mathcal{I}_R^{-1})/\det(\mathcal{I}_L^{-1})$ for 1st-order systems

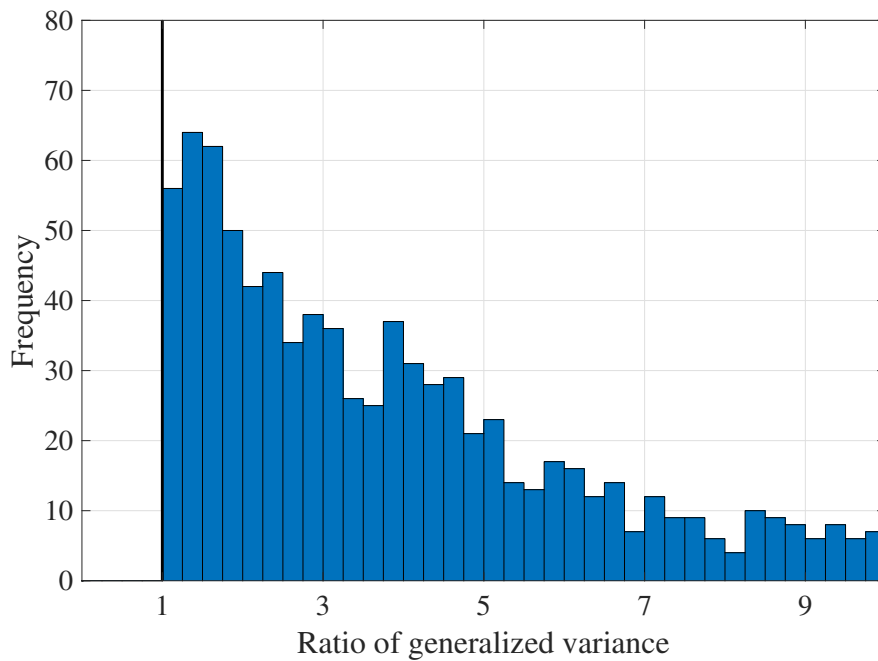


Fig. 3.12: Histogram of $\det(\mathcal{I}_R^{-1})/\det(\mathcal{I}_L^{-1})$ for 2nd-order systems

3.5.3 最適なサンプリングしきい値の設定

本項では、最適なサンプリングしきい値の設定について議論する。特に、サンプリングしきい値を等間隔にしたときと、不等間隔にしたときの同定精度を比較する。

本項の数値例では、同定対象を 3.5.1 項と同様の (3.43) 式とし、Fig. 3.2 の入力を加えたときのフィッシャー情報行列の逆行列 $\mathcal{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}^*)$ を最小化するサンプリングしきい値を求める。このとき、フィッシャー情報行列の大きさの評価として $\det(\mathcal{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}^*))$ を用いることにする。すなわち、本項で扱う問題は、

$$\hat{\eta} = \arg \min_{\eta} \det(\mathcal{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}^*)) \quad (3.46)$$

を求めることである。本項では、これと等価な

$$\hat{\eta} = \arg \min_{\eta} [-\ln(\det(\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta}^*)))] \quad (3.47)$$

を解くことにする。ここで、簡単のために、不等間隔なしきい値は原点を中心に対象であるとき、すなわち M を偶数として、

$$\eta_{M/2+1+i} = \eta_{M/2-i}, \quad i \in \left\{0, 1, \dots, \frac{M}{2} - 1\right\} \quad (3.48)$$

であるときを考える。また、等間隔なサンプリングしきい値は間隔 d を用いて (2.86) 式で与えられる。

[1] サンプリングしきい値の数に制約がある場合

ルベージサンプリングを実装するにあたり、信号値とサンプリングしきい値の比較器が必要である。コストなどの問題で、この比較器の個数に制約がある場合が考えられる。そこで、サンプリングしきい値の数に制約がある場合のシステム同定精度について考える。

サンプリングしきい値の数 M を変えながら、等間隔と不等間隔のサンプリングしきい値について (3.47) 式の問題を内点法 [58], [59] を用いて解いた。このとき得られたサンプリングしきい値を Fig. 3.13 に示す。図では、制約のサンプリングしきい値の数 M と、そのときの最適なサンプリングしきい値の位置の関係が示されている。たとえば、 $M = 2$ のときには、2つのサンプリングしきい値の値が得られていることに注意する。Fig. 3.13 の (a) と (b) を比較すると、サンプリングしきい値を等間隔にしたときと不等間隔にしたときで類似した結果が得られた。つぎに、このサンプリングしきい値を用いたときにサンプリングされるデータ数の期待値 \bar{N} と、(3.47) 式の評価関数値をそれぞれ Fig. 3.14 と Fig. 3.15 に示す。Fig. 3.14 は、同じサンプリングしきい値の数のもとでは不等間隔である場合のほうが多くのデータをサンプリングできることを示している。一方で、Fig. 3.15 の評価関数の意味では等

間隔と不等間隔の場合でほとんど差がない。さらに、サンプリングされるデータ数と評価関数値の関係を Fig. 3.16 に示す。図では、参考のためにリーマンサンプリングを用いた場合のデータ数と評価関数値の関係も併せてプロットした。図より、リーマンサンプリングをルベグサンプリングにする効果は大きいですが、サンプリングしきい値を等間隔から不等間隔にする効果はほとんどないといえる。

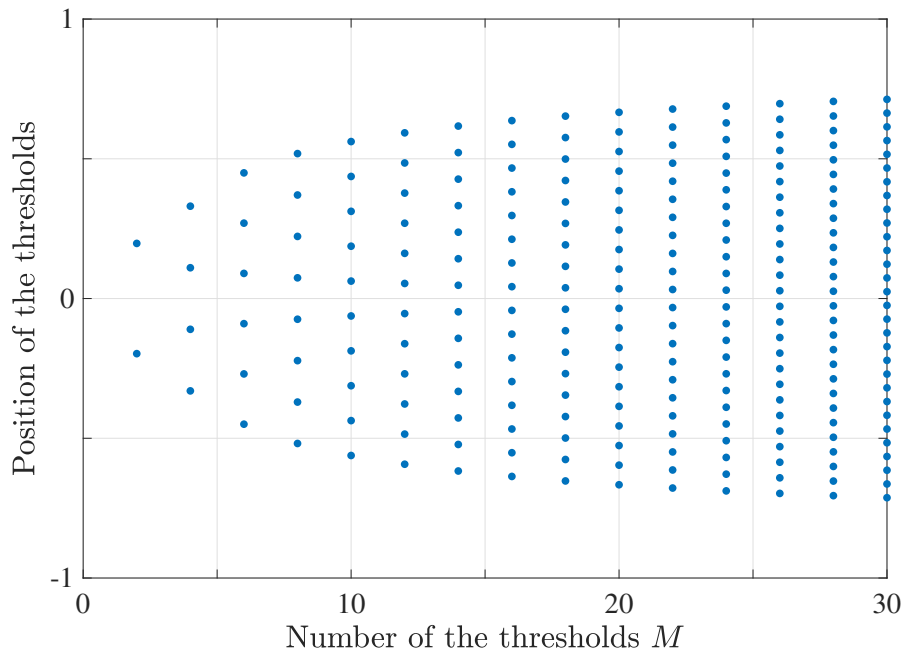
[2] データ数に制約がある場合

つぎに、データを転送するときの通信容量や、データを蓄積するストレージの制約などから、利用できるデータ数に制約がある状況を考える。そのために、利用できるデータ数 N_c が与えられたとき、

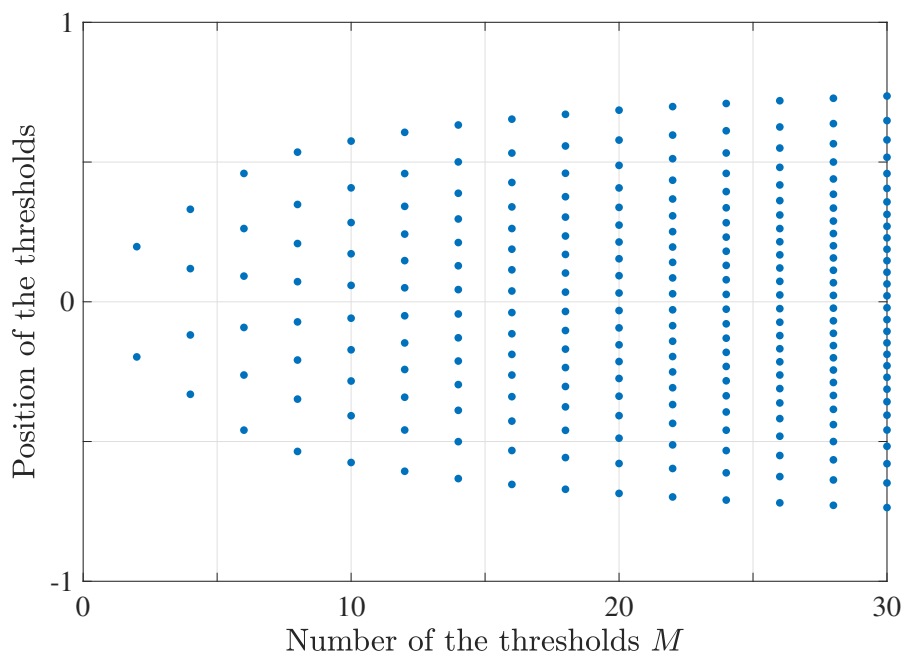
$$\bar{N} \leq N_c$$

の制約のもとで (3.47) 式の最適化問題を解いた。ここで、サンプリングしきい値の数は $M = 50$ とした。このとき得られたサンプリングしきい値を Fig. 3.17 に示す。また、このサンプリングしきい値を用いたときにサンプリングされるデータ数の期待値 \bar{N} と、(3.47) 式の評価関数値の関係を Fig. 3.18 に示す。図にリーマンサンプリングを用いた場合のデータ数と評価関数値の関係も参考のために併せてプロットした。図は、サンプリングしきい値を不等間隔にすると評価関数値を小さくできることを示している。つぎに、データ数 \bar{N} のときの最適なサンプリングしきい値を用いたときのフィッシャー情報行列を評価した。その結果から得られたパラメータ推定値の 99% が存在する範囲を Fig. 3.19 に示す。図より、不等間隔のサンプリングしきい値を用いることで、確かにパラメータ推定値のばらつきを等間隔のサンプリングしきい値を用いた場合よりも小さくすることができることが確かめられた。

注意 3.5 サンプリングしきい値が等間隔と不等間隔であるときの差は小さい一方で、等間隔のサンプリングしきい値は設定パラメータが d の 1 つだけであり、不等間隔の場合と比較してチューニングが容易である。このことから、実用上は等間隔なサンプリングしきい値を用いることが最も妥当である場合がある。



(a) Uniform thresholds



(b) Non-uniform thresholds

Fig. 3.13: Optimized thresholds in various M

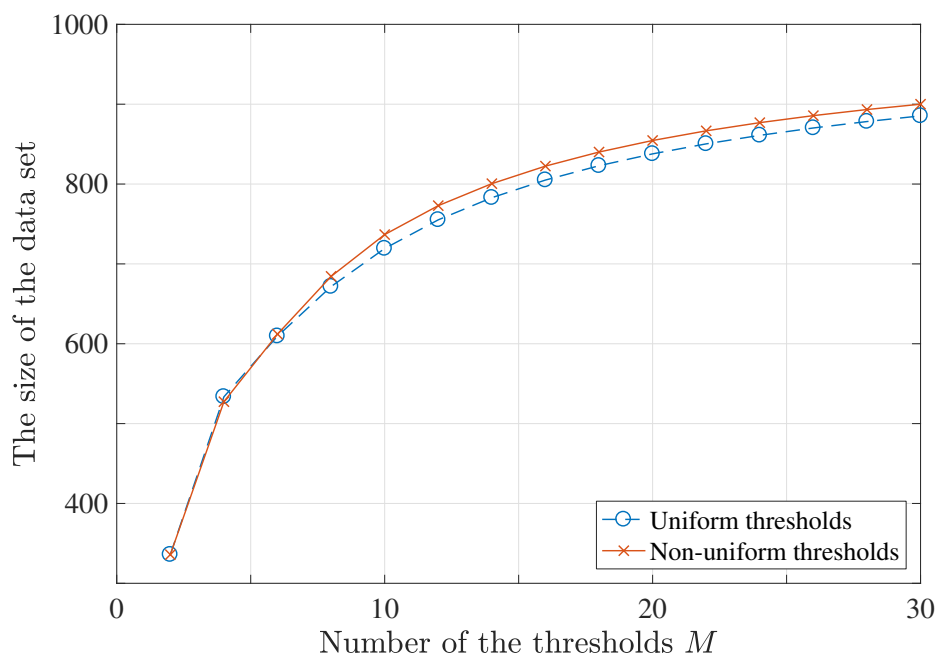


Fig. 3.14: Relationship between M and the size of data set \bar{N}

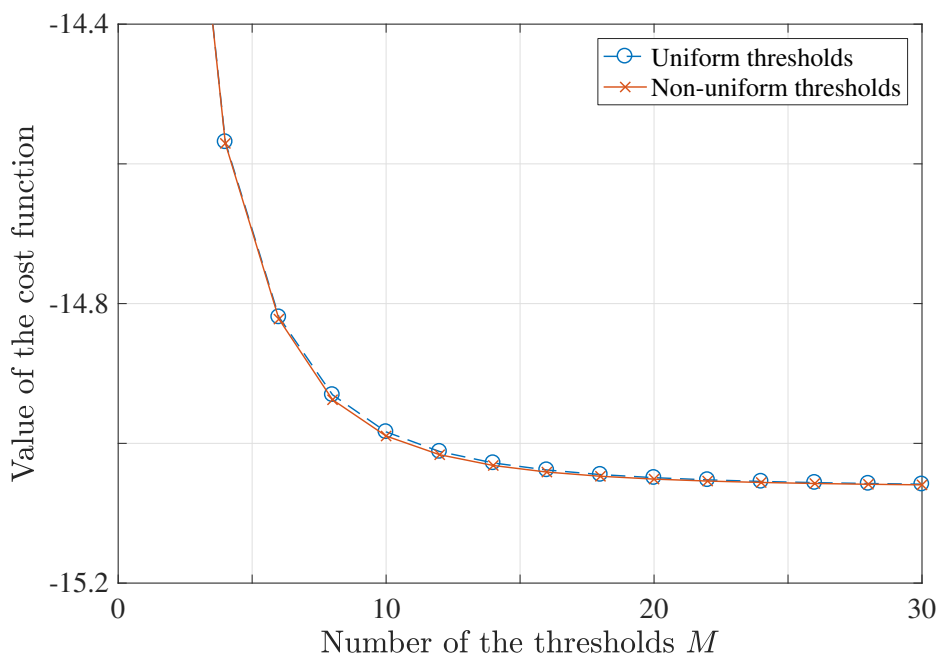


Fig. 3.15: Relationship between M and the value of the cost function (3.47)

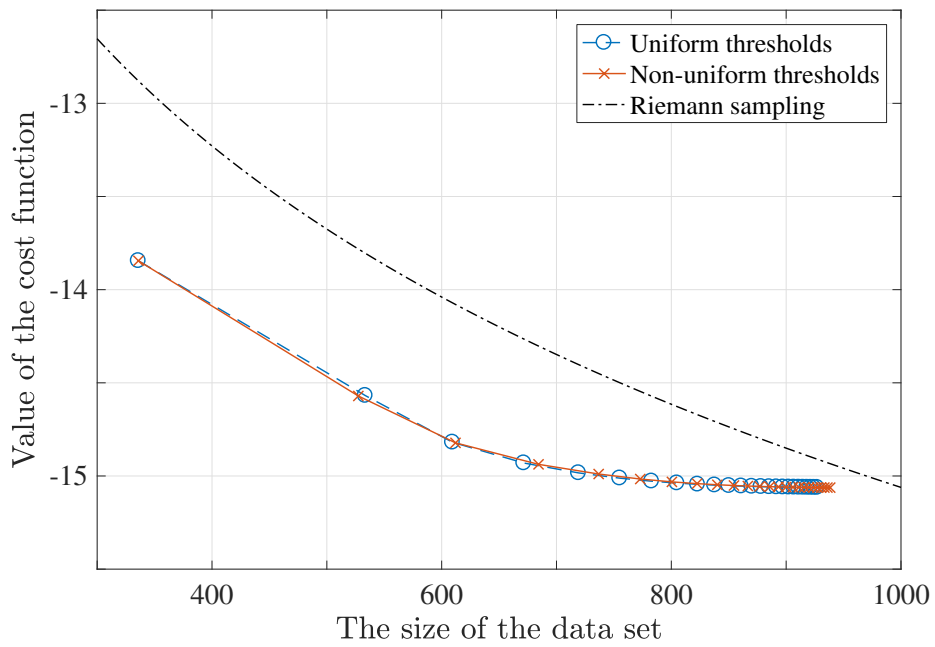
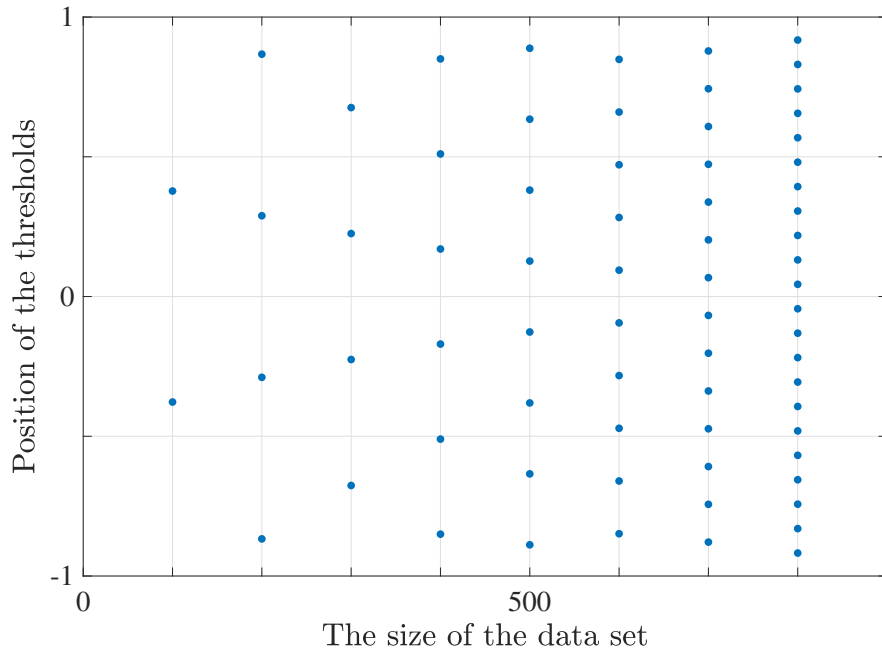
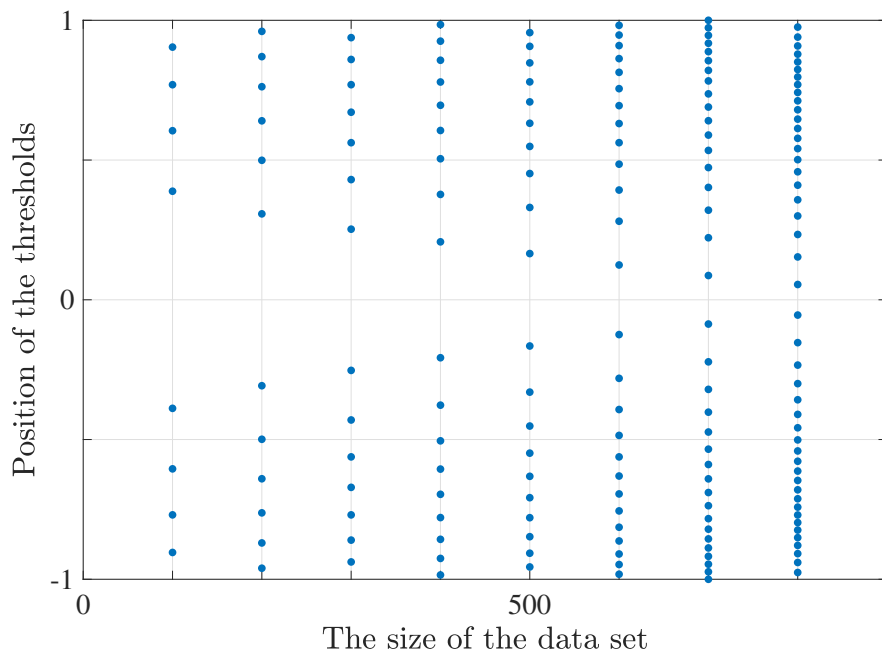


Fig. 3.16: Relationship between the size of data set \bar{N} and the value of the cost function (3.47)



(a) Uniform threshold



(b) Non-uniform threshold

Fig. 3.17: Optimized thresholds under the constraint of the size of the data set

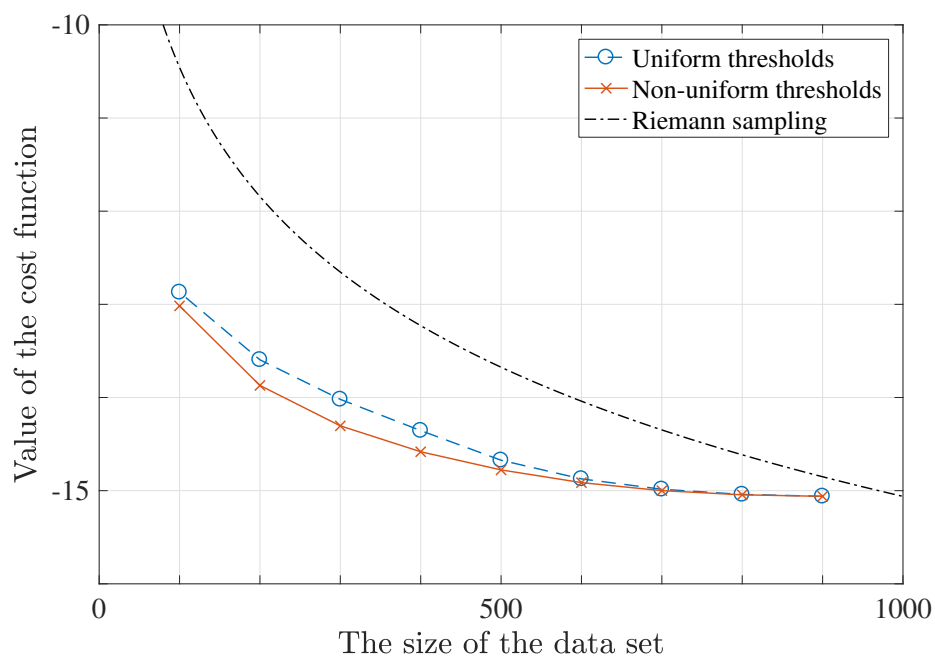


Fig. 3.18: Relationship between \bar{N} and the value of the cost function (3.47)

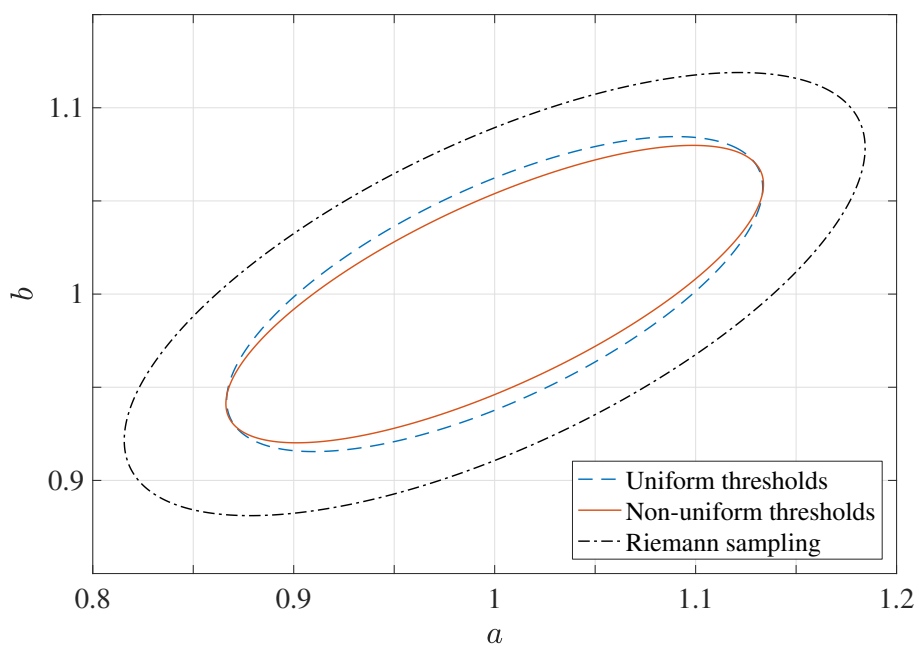


Fig. 3.19: Ellipse in which 99% estimates exist

3.6 ディスカッション：可変ルベークサンプリング

本章では、固定されたサンプリングしきい値を用いたルベークサンプリングを考え、そのもとでのシステム同定法を提案した。本節ではさらなる発展性の1つとして、2.6節で述べたルベークサンプリングを修正し、時変のサンプリングしきい値をもつ可変ルベークサンプリングを提案する。

3.6.1 ルベークサンプリングの問題点

本項では、出力信号の性質によって、ルベークサンプリングが適切でない場合があることを説明する。

たとえば、Fig. 3.20 のような数時間単位の遅い変動成分と、数秒単位の速い変動成分をもつ信号をサンプリングすることを考える。 $d = 0.1$ とした (2.86) 式の等間隔なサンプリングしきい値を用いてルベークサンプリングすると、Fig. 3.21 となる。図では、サンプリングが頻繁に行われるときと、あまり行われないうちが交互に現れている。このとき、最後にサンプリングが行われてからの経過時間は Fig. 3.22 となる。図は、最大で 800 秒以上サンプリングが行われていない場合が存在する一方で、頻繁にサンプリングが行われる場合もあることを示している。このように、遅い変動と速い変動をもつ信号をルベークサンプリングすると、サンプリングが多く行われるときと、あまり行われないうちの差が大きくなってしまう場合がある。サンプリングされるデータ数の削減を目的としてルベークサンプリングを用いる場合、このような性質は望ましくない。なぜなら、たとえば Fig. 3.20 の初めの 1 時間のみのデータを用いたときなど、多くのデータをサンプリングしてしまう場合があるからである。

3.6.2 可変ルベークサンプリング

ルベークサンプリングのポイントとなる考え方は、「出力信号が大きく変化したときにサンプリングを行う」ということである。Fig. 3.20 のような信号をサンプリングするとき、出力信号そのものの変化の大きさを基準としてサンプリングを行うと、遅い応答の存在の影響で前述したような問題が起きてしまう。そこで、短時間での局所的な信号の変化量を基準としてサンプリングを行うことが望ましい。本節では、このことを考えた新たなサンプリング法を提案する。

時刻 k において、出力 y_k をサンプリングするかどうかを判定することを考える。時刻 $k-1$ までにサンプリングが行われた時刻の集合を \mathcal{S}_{k-1} とし、 s_k を時刻 $k-1$ までに最後にサンプ

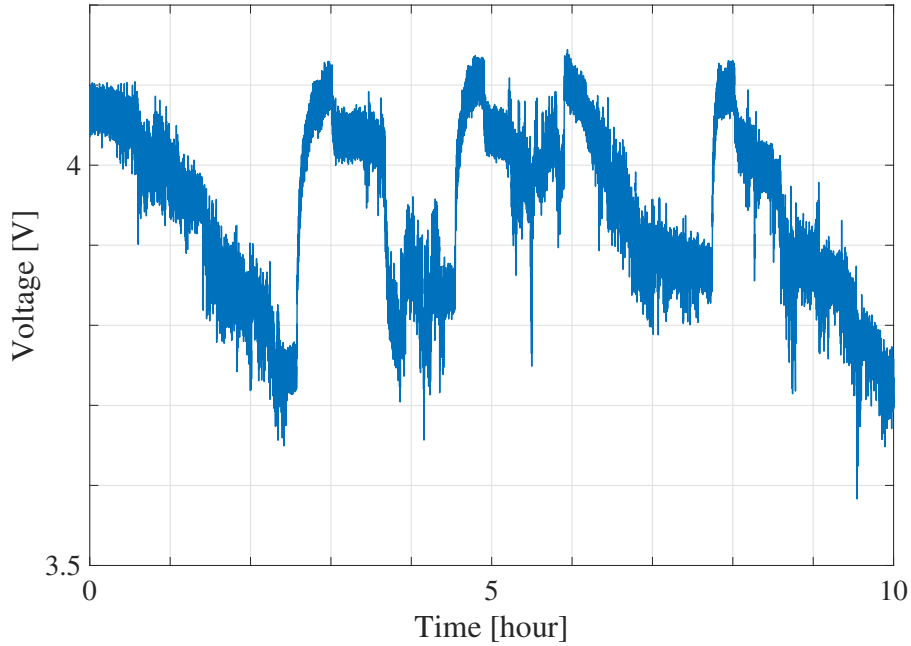


Fig. 3.20: An example of the output signal incompatible with the Lebesgue sampling

リングされた時刻，すなわち，

$$s_k = \max_{i \in \mathcal{S}_{k-1}} i \quad (3.49)$$

とする．このとき，提案するサンプリング法では Fig. 3.23 に示すように， k が

$$y_{s_k} - \delta \leq y_k < y_{s_k} + \delta \quad (3.50)$$

を満たすとき， y_k をサンプリングせず，それ以外の場合は y_k をサンプリングする．ただし， $\delta > 0$ はユーザが設定するパラメータである．すなわち，

$$\mathcal{S}_k = \begin{cases} \mathcal{S}_{k-1}, & y_{s_k} - \delta \leq y_k < y_{s_k} + \delta \\ \mathcal{S}_{k-1} \cup \{k\}, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.51)$$

となる．ただし， $k = 1$ では出力信号は必ずサンプリングされるものとし，

$$\mathcal{S}_1 = \{1\} \quad (3.52)$$

である．また，このときサンプリングされる出力は，

$$z_k = \begin{cases} y_k, & k \in \mathcal{S}_k \\ \phi, & k \notin \mathcal{S}_k \end{cases} \quad (3.53)$$

と記述できる．

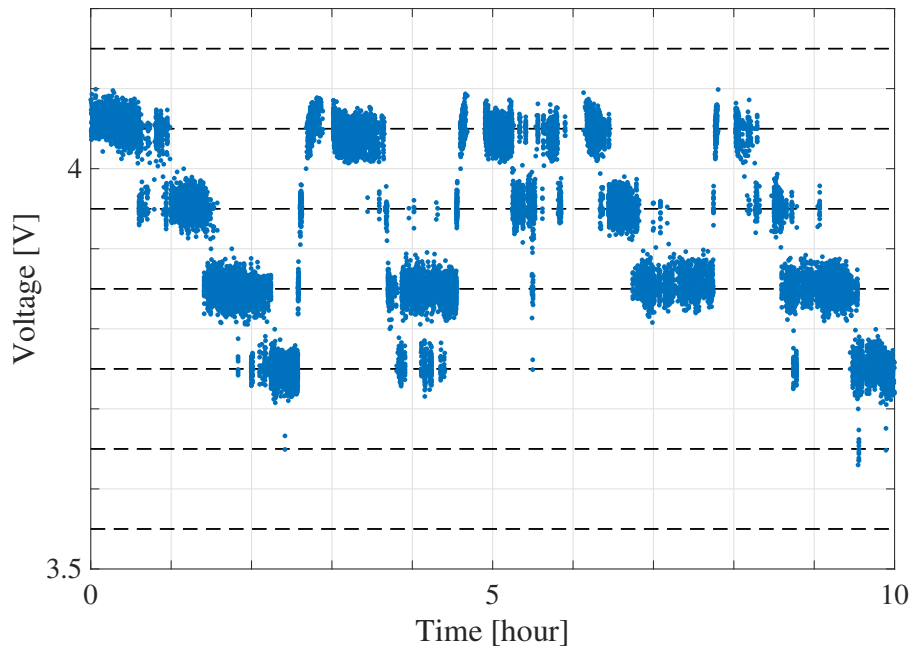


Fig. 3.21: Sampled output by the Lebesgue sampling

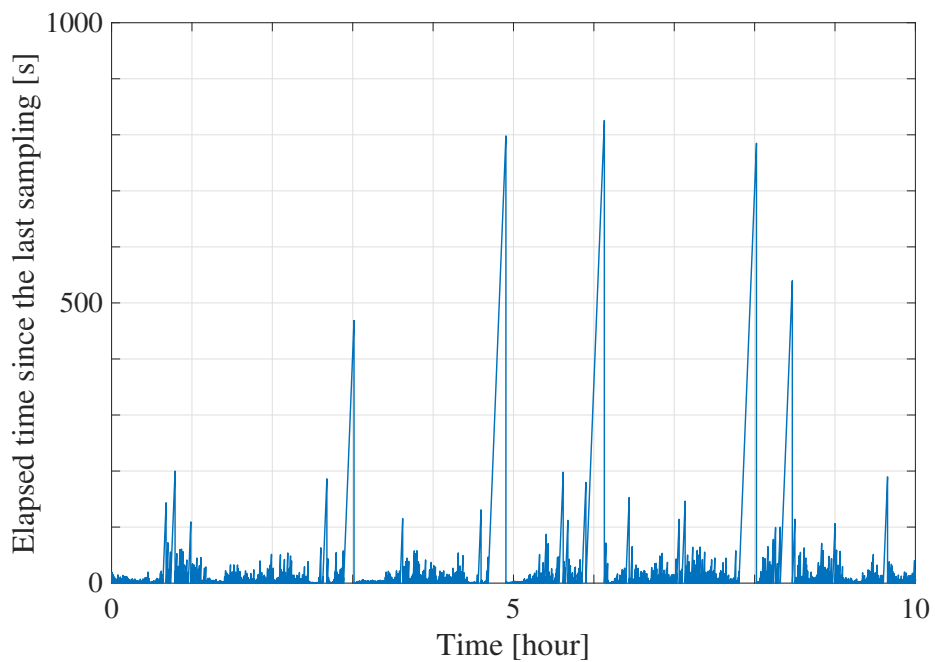


Fig. 3.22: Elapsed time since the last sampling under the Lebesgue sampling

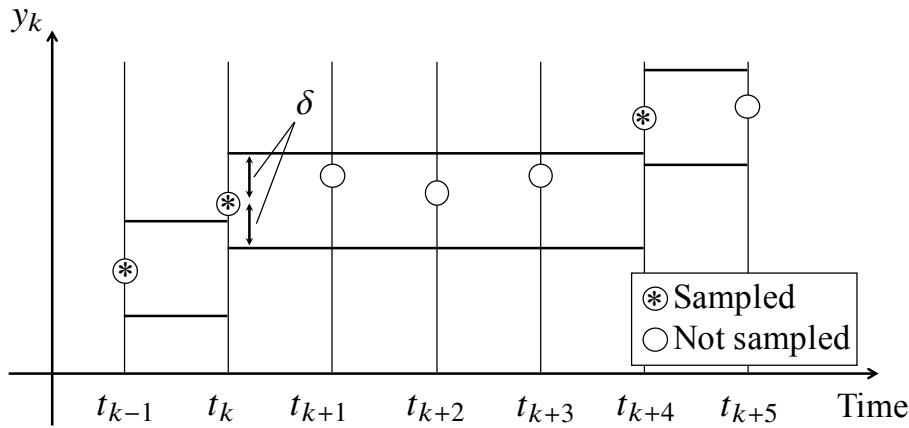


Fig. 3.23: Variable Lebesgue sampling for a time series

このサンプリング法を用いて Fig. 3.20 の出力信号をサンプリングすると, Fig. 3.24 となる. また, 最後にサンプリングが行われてからの経過時間を Fig. 3.25 に示す. このとき, サンプリングのために設定する δ は, サンプリングされるデータ数が Fig. 3.21 とほぼ同数となるように $\delta = 0.023$ と選んだ. Fig. 3.24 では, Fig. 3.21 にあったようなサンプリングされるデータ数が著しく少ない部分がない. また, Fig. 3.25 でも, 最後にサンプリングが行われてからの経過時間は最大でも 30 秒程度に抑えられている. これらのことから, 提案したサンプリング法はより適切に信号をサンプリングすることができたと考えられる.

本節で述べたサンプリング法は, 時刻 k によってサンプリングしきい値の位置が変化するルベグサンプリングであると解釈することができる. そこで, 本論文ではこのサンプリングの方法を可変ルベグサンプリングとよぶ.

3.6.3 可変ルベグサンプリングのもとでのシステム同定

本節では, 前項で述べた可変ルベグサンプリングのもとでのシステム同定を提案する. 可変ルベグサンプリングを用いた場合でも, 信号がサンプリングされなかった時刻において,

$$y_{s_k} - \delta \leq y_k < y_{s_k} + \delta$$

が保証される. パラメータ θ のもとでこの不等式が満たされる確率は,

$$\begin{aligned} p_{\text{ns}}(\phi | k, y_{s_k}, \theta) &= \int_{y_{s_k} - \delta}^{y_{s_k} + \delta} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_k - \hat{y}_k(\theta))^2}{2\sigma^2}\right) dy_k \\ &= \frac{1}{2} f_k(s_k, \theta) \end{aligned} \tag{3.54}$$

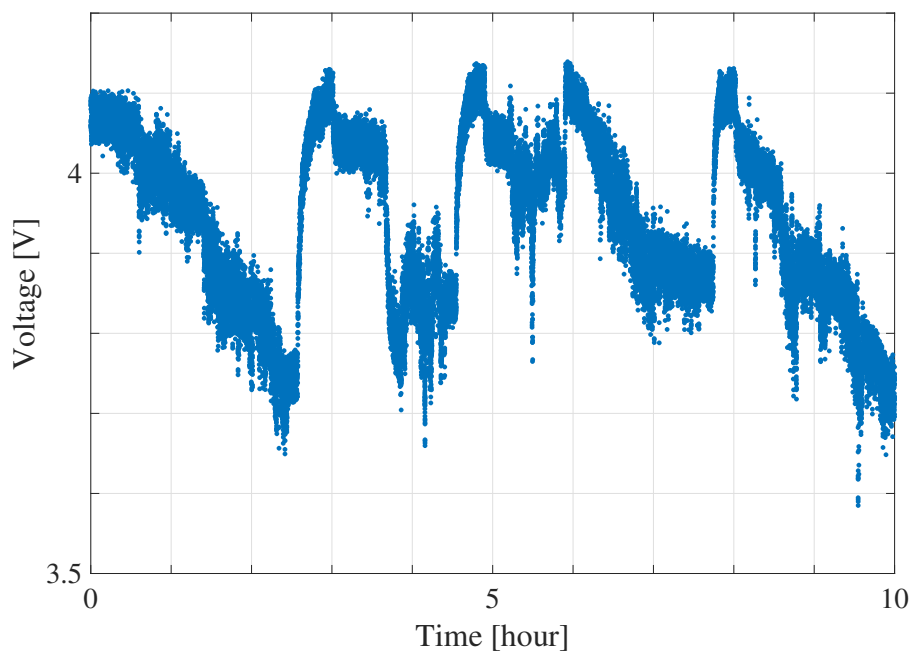


Fig. 3.24: Sampled output by the variable Lebesgue sampling

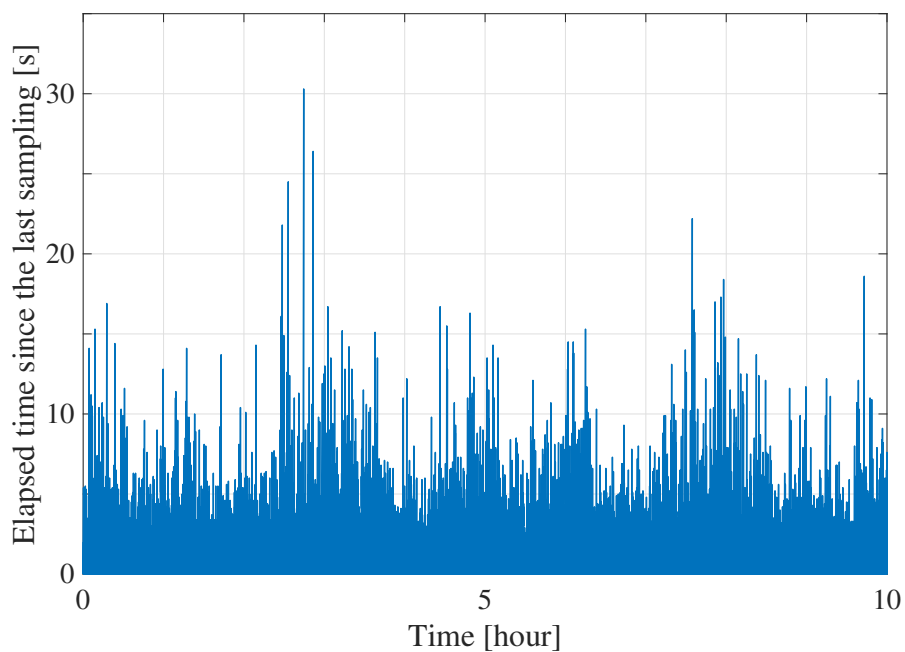


Fig. 3.25: Elapsed time since the last sampling under the variable Lebesgue sampling

となる。ただし、

$$f_k(s, \theta) = \operatorname{erf} \left(\frac{y_s + \delta - \hat{y}_k(\xi)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{y_s - \delta - \hat{y}_k(\theta)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) \quad (3.55)$$

である。

本章で提案したシステム同定法において、(3.9) 式の尤度関数を (3.54) 式におきかえることで、サンプル点間情報を用いたシステム同定を行うことができる。

3.7 まとめ

本章では、ルベージサンプリングのもとでのシステム同定法を提案した。提案法では、データがサンプリングされない時刻のサンプル点間情報を評価に取り入れるることにより、モデルのパラメータ推定精度を向上することができる。また、提案法によって得られるパラメータ推定値の漸近的な性質について議論した。

さらに、数値例を通して提案法の有用性を確認した。まず、ルベージサンプリングを用いた場合、サンプル点間情報を用いないとパラメータ推定値にバイアスが生じてしまうが、提案法ではバイアスのない推定値が得られることが示された。また、理論解析によって得られたパラメータ推定値の漸近的な性質が実験結果をよく説明することも確かめられた。さらに、ルベージサンプリングとリーマンサンプリングを比較すると、データ数が同じときにルベージサンプリングのほうがパラメータ推定精度を高くできることが示された。最適なサンプリングしきい値の設定についても議論した。等間隔なサンプリングしきい値と比較して、不等間隔なサンプリングしきい値では推定精度を向上することができるが、その差はそれほど小さくなく、実用的にはチューニングの容易な等間隔サンプリングしきい値も有用であることが確かめられた。

最後に、今後の発展性のひとつとして、新たなルベージサンプリングである可変ルベージサンプリングを提案し、そのもとでのシステム同定法について説明した。この方法に対する解析などは今後の課題としたい。

第4章

ルベীগサンプリングのもとでの状態推定法

本章では、本論文で提案する状態推定法 [60]–[62] について述べる。状態推定に用いることのできるシステムの観測値がルベীগサンプリングされているとし、サンプル点間情報を利用した状態推定を提案する。さらに、提案した状態推定法を制御問題へと応用することを提案する。

4.1 はじめに

時系列の状態推定問題は観測された出力信号を用いて動的システムの内部状態を推定する問題である。雑音のない確定的なシステムの状態推定を行うときには、オブザーバが用いられる。また、雑音を考慮した確率的なシステムに対する状態推定法として、カルマンフィルタ [18] がよく知られている。オブザーバをデジタル演算を用いて実装するとき、時間等間隔なサンプリングを仮定することが一般的である [5]。また、カルマンフィルタを用いる場合にも、離散時間システムを対象とし、時間的に等間隔にデータが取得されることを前提としていることが多い。しかしながら、現実のシステムで状態推定を行うとき、データを取得する機器の計算資源やデータを転送する通信容量が限られていることも多く、必ずしも等間隔にデータを取得することができるとは限らない。たとえば、Fig. 4.1 のように、システムと状態推定器がネットワークを通じて接続されているとき、通信可能なデータの容量はネットワークの負荷などによって決定されるため、等間隔なデータ取得が困難な場合がある。

このような問題の一つの解決策として、等間隔でデータの観測を行い、大量のデータを取得するのではなく、必要なときのみデータの観測を行うイベント駆動サンプリングが注目されている [7]–[9]。本研究では、イベント駆動のサンプリング法の 1 つであるルベীগサンプリング [26] に着目し、そのもとでの状態推定法を提案する。

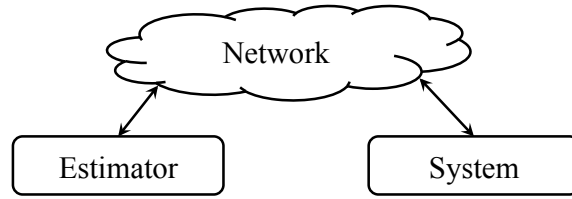


Fig. 4.1: State estimation over network

ルベージングを用いる場合、観測点と観測点のあいだの時刻についても、「観測されなかった」というサンプル点間情報を有している。そこで、本研究では観測点のあいだで観測されなかったという情報を取り入れた状態推定法を考える。文献 [24] では、一般のイベント駆動サンプリングに対して、サンプル点間情報を用いた状態推定法が提案されている。文献 [24] で提案された状態推定法では、状態推定値を正規分布に近似しているが、その近似の影響についてはあまり議論されていない。そこで、本研究では、文献 [24] とは異なる方法でサンプル点間情報を取り入れ、状態推定を行うことを提案する。提案法では、パーティクルフィルタを用いることで、状態推定値を正規分布に近似することなく状態推定を行うことができる。

さらに、提案した状態推定法を最適レギュレータと組み合わせる制御法を提案する。提案法は、ルベージングのもとでのイベント駆動制御へのひとつの有力なアプローチになると考えられる。

最後に、数値例を通して、提案する状態推定法と制御法の有用性を示す。

4.2 問題設定

本節では、本論文で考える状態推定問題の設定を与える。

スカラー時系列データ y_k が離散時間状態空間モデル

$$\Sigma : \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_u\mathbf{u}_k + \mathbf{B}_v\mathbf{v}_k & (4.1) \\ y_k = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_k + w_k & (4.2) \end{cases}$$

によって記述されるとする。ここで、 $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ はシステムの状態であり、 $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ は入力である。また、 $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^{n_v}$ はシステム雑音であり、平均値 $\mathbf{0}$ 、共分散行列 Σ_v の正規性白色雑音とする。また、 $w_k \in \mathbb{R}$ は観測雑音であり、平均値 0 、分散 σ^2 の正規性白色雑音であるとする。 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ 、 $\mathbf{B}_u \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ 、 $\mathbf{B}_v \in \mathbb{R}^{n_x \times n_v}$ 、 $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n_x \times 1}$ はそれぞれシステムのダイナミクスを表す行列である。

Fig. 4.2 に示すように、システムの入力 \mathbf{u}_k はルベージングされ、 z_k が得られるとする。このとき、本論文で考える状態推定問題は、時刻 k までに得られた出力 $\mathcal{Z}_k = \{z_i \mid i = 0, \dots, k\}$ を用いて \mathbf{x}_k を推定するフィルタを設計することである。

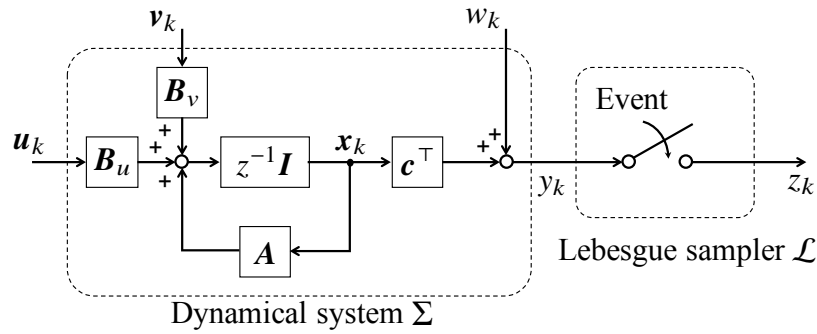


Fig. 4.2: Objective system

注意 4.1 本論文で扱う状態推定問題では、出力信号がサンプリングされない $k \notin \mathcal{S}$ の時刻についても \mathbf{x}_k を推定する。

4.3 ルベークサンプリングのもとでの状態推定法

本節では、ルベークサンプリングのもつサンプル点間情報を用いた状態推定法を提案する。

ルベークサンプリングを用いた場合には、サンプリングが行われなかった時刻 $k \notin \mathcal{S}$ においても、「出力がしきい値に達することがなかった」というサンプル間情報を有している。本論文では、ベイズの定理に基づいて状態推定を行うことで、この情報を活用した状態推定を行うことを提案する。

ベイズの定理に基づいて状態推定を行うとき、データのもつ情報は尤度関数として推定に用いられる。そこで、ルベークサンプリングされたデータに対する尤度関数を考える。

まず、状態 \mathbf{x}_k が与えられたもとで、サンプリングが行われ、 $z_k = y_k$ となる確率は、

$$\begin{aligned} p_s(y_k | k, \mathbf{x}_k) &= \mathcal{N}(y_k, \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_k, \sigma^2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_k - \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_k)^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

と表される。つぎに、状態 \mathbf{x}_k が与えられたもとで、サンプリングが行われない確率は、

$$\begin{aligned} p_{ns}(\phi | k, m_k, \mathbf{x}_k) &= \int_{\eta_{m_k}}^{\eta_{m_k+1}} \mathcal{N}(y_k, \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_k, \sigma^2) dy_k \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erf}\left(\frac{\eta_{m_k+1} - \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_k}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\eta_{m_k} - \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_k}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) \right\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

となる。これらの尤度関数を用いて状態推定を行うことで、サンプル点間情報を用いた状態推定が可能になる。尤度関数が正規分布であるとき、カルマンフィルタ [18] によって状態推定を行うことができる。しかし、(4.4) 式の尤度関数は Fig. 4.3 に示すように、もはや正規分布で

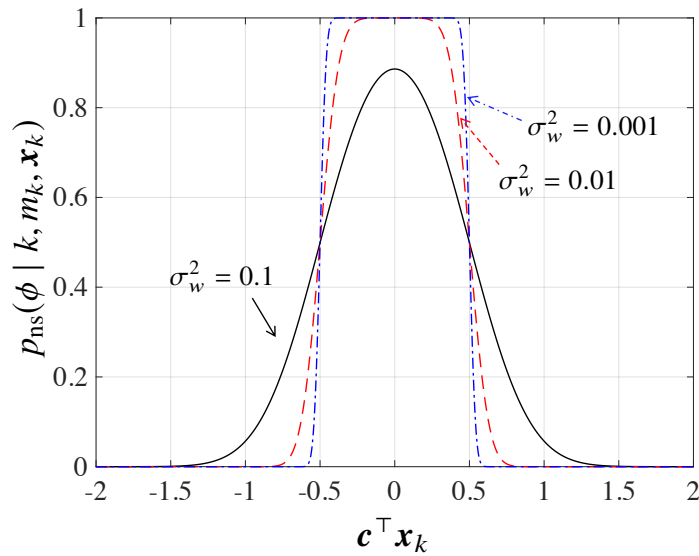


Fig. 4.3: Likelihood function $p_{\text{ns}}(\phi | k, m_k, \mathbf{x}_k)$, where $\eta_{m_{k-1}} = -0.5$ and $\eta_{m_{k-1}+1} = 0.5$.

ない。特に、雑音 σ^2 が小さい場合には尤度関数が正規分布と大きく異なる形状になる。このことから、カルマンフィルタを用いた場合にはサンプル点間情報を用いることができない。

そこで、本論文では、パーティクルフィルタを用いて状態推定を行うことを提案する。パーティクルフィルタは尤度関数に正規分布を仮定しないため、(4.4) 式の尤度関数を用いてサンプル点間情報を活用することが可能となる。

本論文で提案する状態推定法をつぎにまとめる。

ルベグサンプリングされたデータに対するパーティクルフィルタ

STEP 0 初期化

$k = 1$ とし、適当な事前分布 $p(\mathbf{x}_0)$ を設定する。事前分布 $p(\mathbf{x}_0)$ に従って $\mathbf{x}_{1/0}^{(i)}$, $i \in \{1, \dots, L\}$ を生成し、初期アンサンブル

$$X_{1/0} = \left\{ \mathbf{x}_{1/0}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_{1/0}^{(L)} \right\}$$

を構成する。ただし、 L はユーザによって設定されるパーティクル数である。

STEP 1 更新

STEP 1.1 尤度の計算

ルベグサンプリングによる出力信号が $z_k = y_k$ のとき、

$$\alpha_k^{(i)} = p_s \left(y_k \mid k, \mathbf{x}_{k/k-1}^{(i)} \right), \quad i \in \{1, \dots, L\} \quad (4.5)$$

により尤度を計算し, $z_k = \phi$ のとき,

$$\alpha_k^{(i)} = p_{\text{ns}} \left(\phi \mid k, m_{k-1}, \mathbf{x}_{k/k-1}^{(i)} \right), \quad i \in \{1, \dots, L\} \quad (4.6)$$

により尤度を計算する.

STEP 1.2 リサンプリング

確率 $\alpha_k^{(i)} / \sum_{i=1}^L \alpha_k^{(i)}$ に従って $X_{k/k-1}$ から復元抽出することでパーティクル $\mathbf{x}_{k/k}^{(j)}$, $j \in \{1, \dots, L\}$ を生成する. そして, フィルタリングアンサンブル

$$X_{k/k} = \left\{ \mathbf{x}_{k/k}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_{k/k}^{(L)} \right\}$$

を構成する.

STEP 1.3 推定値の計算

フィルタリング推定値を

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathbf{x}_{k/k}^{(i)} \quad (4.7)$$

により計算する.

STEP 2 予測

システム雑音のサンプル $v_k^{(i)}$, $i \in \{1, \dots, L\}$ を確率

$$p(\mathbf{v}_k) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{n_v} \sqrt{\det \Sigma_v}} \exp \left(-\frac{1}{2} \mathbf{v}_k^\top \Sigma_v^{-1} \mathbf{v}_k \right) \quad (4.8)$$

に従って生成する. パーティクル

$$\mathbf{x}_{k+1/k}^{(i)} = \mathbf{A} \mathbf{x}_{k/k}^{(i)} + \mathbf{B}_u \mathbf{u}_k + \mathbf{B}_v \mathbf{v}_k^{(i)}, \quad i \in \{1, \dots, L\} \quad (4.9)$$

を計算することにより, つぎのステップで利用する予測アンサンブル

$$X_{k+1/k} = \left\{ \mathbf{x}_{k+1/k}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_{k+1/k}^{(L)} \right\}$$

を構成する.

k を $k+1$ として, STEP 1 にもどる.

Algorithm 2 State estimation algorithm under Lebesgue sampling

Require: $X_{1/0} = \{\mathbf{x}_{1/0}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_{1/0}^{(L)}\}$ and L

$k \leftarrow 1$

loop

if $z_k = y_k$ **then**

for $i \in \{1, \dots, L\}$ **do**

$\alpha_k^{(i)} \leftarrow p_s(y_k \mid k, \mathbf{x}_{k/k-1}^{(i)})$

end for

else

for $i \in \{1, \dots, L\}$ **do**

$\alpha_k^{(i)} \leftarrow p_{ns}(\phi \mid k, m_{k-1}, \mathbf{x}_{k/k-1}^{(i)})$

end for

end if

for $i \in \{1, \dots, L\}$ **do**

 draw $j \in \{1, \dots, L\}$ with probability $\propto \alpha_k^{(j)} / \sum_{l=1}^L \alpha_k^{(l)}$

 add $\mathbf{x}_{k/k-1}^{(j)}$ to $X_{k/k}$

$\mathbf{v}_k^{(i)} \sim p(\mathbf{v}_k)$

$\mathbf{x}_{k+1/k}^{(i)} \leftarrow \mathbf{A}\mathbf{x}_{k/k}^{(i)} + \mathbf{B}_u \mathbf{u}_k + \mathbf{B}_v \mathbf{v}_k^{(i)}$

 add $\mathbf{x}_{k+1/k}^{(i)}$ to $X_{k+1/k}$

end for

 compute estimate $\hat{\mathbf{x}}_k = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathbf{x}_{k/k}^{(i)}$

$k \leftarrow k + 1$

end loop

提案法において、STEP 1 と STEP 2 が逐次的に実行される。また、時刻 k における推定値は (4.7) 式の $\hat{\mathbf{x}}_k$ である。以上をまとめると、Algorithm 2 となる。

注意 4.2 提案法との比較のため、サンプル点間情報を用いない状態推定法を考える。サンプル点間情報を用いない状態推定法では、出力信号 y_k が得られないとき、STEP 1 の更新を行わず、状態推定値を予測アンサンブルから

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathbf{x}_{k/k-1}^{(i)} \quad (4.10)$$

によって計算する。提案法では、この方法に比べて STEP 1.1 の (4.6) 式でサンプル点間情報を活用することにより、状態推定精度を向上できることが期待される。

注意 4.3 線形システム (4.1), (4.2) 式の状態推定問題において, すべての時刻 k で出力信号がサンプリングされるとき, カルマンフィルタが最小分散推定値を与えることがよく知られている [63]. 本論文では, これを全サンプルカルマンフィルタとよぶ. 全サンプルカルマンフィルタは本論文の問題設定において, 分散の意味で推定精度の上限を与えることに注意する.

注意 4.4 本論文では (4.1), (4.2) 式の線形システムを対象としているが, 提案する状態推定法はパーティクルフィルタを用いているため, 非線形システムにも適用可能である. 非線形システムに適用する場合, より大きいパーティクル数 L が必要になる [44], [64].

注意 4.5 提案法の計算時間はパーティクル数 L に線形に依存する. 正確な推定に必要なパーティクル数はシステムの次数が増えるにつれて増加することが知られている. これらのことから, 提案法を大規模なシステムの状態推定問題に直接適用することは困難であることに注意する.

注意 4.6 本節で提案したルベグサンプリングのもとでの状態推定法はサンプリングしきい値が固定されていることを仮定したが, 3.6 節で提案した可変ルベグサンプリングにも容易に拡張できる. システム同定のとときと同様, (4.4) 式を

$$p_{\text{ns}}(\phi | k, m_k, \mathbf{x}_k) = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{y_s + \delta - \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_k}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{y_s - \delta - \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_k}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) \right\} \quad (4.11)$$

と置き換えることにより, 可変ルベグサンプリングのもとでサンプル点間情報を活用した状態推定を行うことができる.

4.4 制御への応用

本節では, 前節で提案した状態推定法をルベグサンプリングのもとでの制御問題に適用する.

制御対象の動的システム Σ と状態推定器はネットワークを介して接続されているとし, 状態推定器へ送られる Σ の出力信号がルベグサンプリングされているとする. それに対して, 制御に用いられる制御器とアクチュエータ, 状態推定器はネットワークを介さずに接続されていると仮定する. この仮定により, システム Σ から状態推定器へ信号が送信されない場合にも制御入力を変化させることができる. この仮定は文献 [65] の最適制御問題とは異なることに注意する.

制御対象 Σ は状態方程式 (4.1), (4.2) 式で記述される. このとき, 本節で扱う制御問題は評

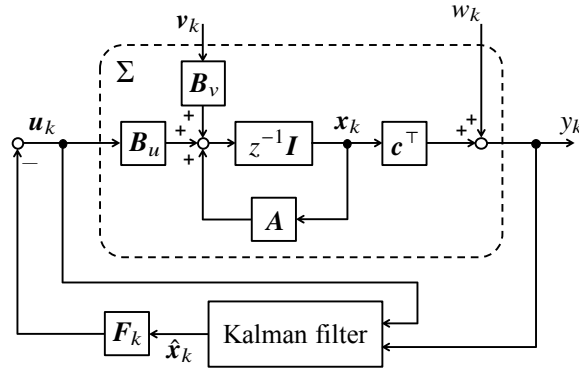


Fig. 4.4: LQG control

価関数

$$J_1 = E \left[\mathbf{x}_N^T \mathbf{S}_N \mathbf{x}_N + \sum_{k=1}^{N-1} (\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k) \right] \quad (4.12)$$

を最小化する入力 \mathbf{u}_k を見つけることである。ここで、 N は評価する時間の長さであり、 \mathbf{S}_N 、 \mathbf{Q} 、 \mathbf{R} はユーザによって設定される重みである。

Σ の出力がすべての k で観測される場合を考えると、制御問題の解はよく知られた LQG 制御に帰着される。LQG 制御とのアナロジーから、 Σ の出力信号がルベークサンプリングされているときに $\hat{\mathbf{x}}_k$ を前節で提案した状態推定器による推定値として、制御入力を

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{F}_k^T \hat{\mathbf{x}}_k$$

とすることを提案する。ただし、

$$\mathbf{F}_k = (\mathbf{R} + \mathbf{B}_u^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B}_u)^{-1} \mathbf{B}_u^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A} \quad (4.13)$$

である。ここで、 \mathbf{S}_k は、

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B}_u (\mathbf{R} + \mathbf{B}_u^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B}_u)^{-1} \mathbf{B}_u^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A}$$

を満たす半正定対称行列である。このときの制御系は Fig. 4.5 となる。提案する制御法において、状態推定にサンプル点間情報を用いたことにより、(4.12) 式の評価関数を小さくする意味で、制御性能の向上が期待される。

4.5 数値例

本節では、数値例を通して提案した状態推定法の有用性を示す。

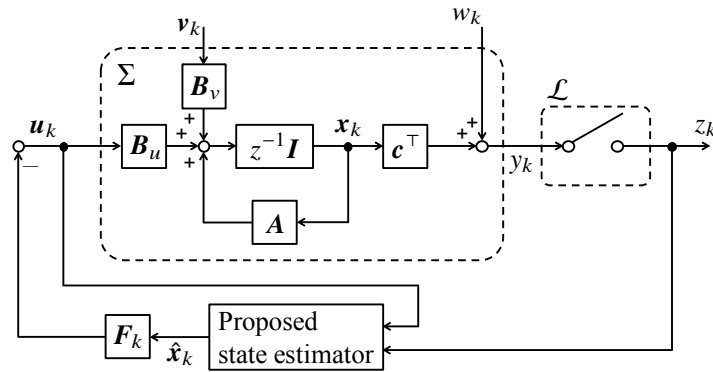


Fig. 4.5: The proposed control system under the Lebesgue sampling

4.5.1 1次系に対する状態推定

本項では,

$$x_{k+1} = ax_k + bv_k, \quad (4.14)$$

$$y_k = cx_k + w_k \quad (4.15)$$

で表される 1 次系に対して提案した状態推定法を適用した結果について述べる. ただし, 数値例において,

$$y(t) = \frac{1}{p+1}u(t) \quad (4.16)$$

を状態空間実現し, 離散化した $a = 0.9048$, $b = 0.25$, $c = 0.3807$ を用いた. また, v_k と w_k の分散はそれぞれ $\sigma_v^2 = 1$ と $\sigma^2 = 0.1^2$ とした. さらに, サンプリングしきい値は (2.86) 式とし, $d = 0.23$ とした. 数値例で用いた出力信号の一例を Fig. 4.6 に示す. 図において, 縦の点線はサンプリングが行われた時刻を表している. 異なる 1000 通りの v_k と w_k の実現に対して状態推定実験を行った. それぞれの実験においては, 提案法を (4.14), (4.15) 式に対して適用した. このとき, パーティクル数は $L = 200$ とした. また, 注意 4.3 の全サンプルカルマンフィルタ, 注意 4.2 のサンプル点間情報を用いない状態推定法と提案法を比較した. 全サンプルカルマンフィルタ, サンプル点間情報を用いない状態推定法, 提案法による状態推定結果の一例をそれぞれ Fig. 4.7 の (a), (b), (c) に示す. 今後, 図のキャプションになどにおいては, 注意 4.2 のサンプル点間情報を用いない状態推定法を Naive method と表記する.

Fig. 4.7(b) と Fig. 4.7(a) を比較すると, サンプル点間情報を用いない状態推定法では全サンプルカルマンフィルタに比べて推定精度が劣化している. 特に, 出力信号 y_k が長くサンプリングされない $k \in [6, 11]$ や $k \in [34, 44]$ において劣化が顕著に表れている. 一方, Fig. 4.7(c) の提案法では, このような期間に推定精度の劣化が抑えられている.

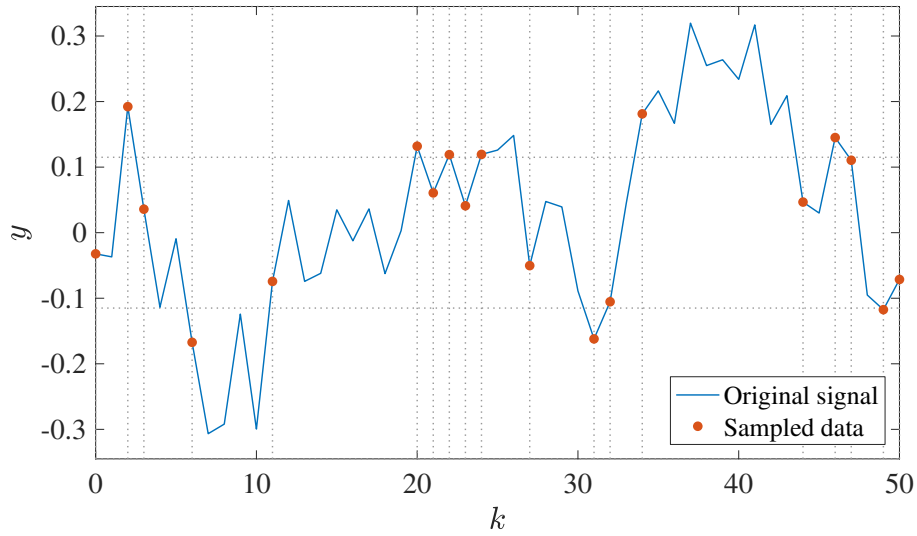


Fig. 4.6: An example of the output of the 1st-order system

Table 4.1: The RMSE of the state estimations for the 1st-order system

	Mean	Standard deviation
Proposed method	0.2117	0.0251
Naive method	0.2444	0.0389
Kalman filter with full sampling	0.1990	0.0236

つぎに、1000回の試行におけるRMSEの平均値と標準偏差を評価した結果をTable 4.1に示す。表より、提案法のRMSEはサンプル点間情報を用いない状態推定法のRMSEよりも小さくなっており、ルベージサンプリングのもとで提案法が有用であることが確かめられた。

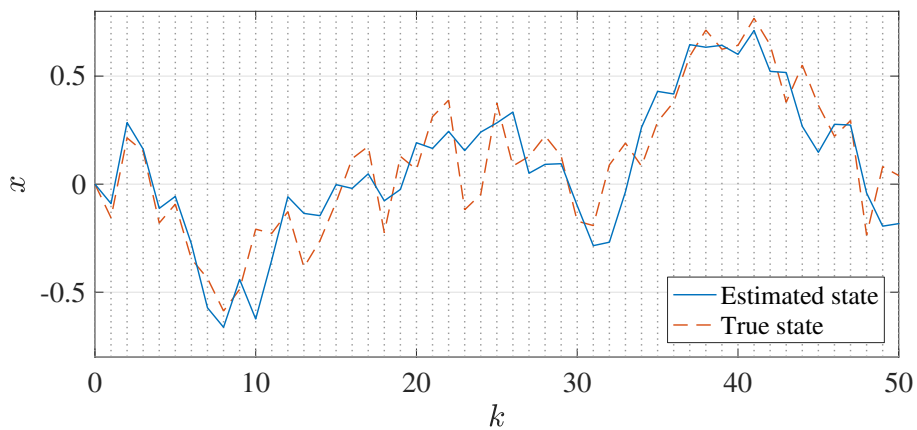
4.5.2 2次系に対する状態推定

前項では、1次系に対する状態推定において提案法を用いると、状態推定精度が向上することが確かめられた。1次系に対する状態推定を行う場合、観測雑音は印加されているものの、すべての状態変数が観測されていた。つぎに、観測されていない状態が存在する場合にも提案法が有用であることを確かめるため、2次系に対する状態推定を考える。

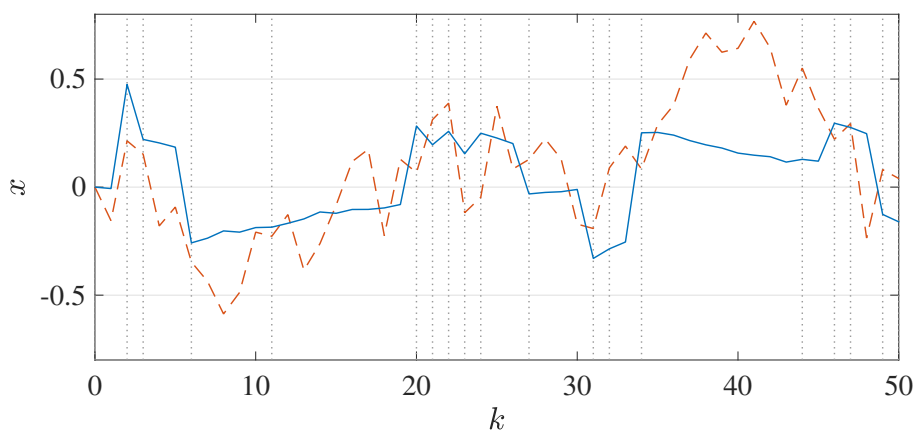
対象システムを

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}_v v_k \quad (4.17)$$

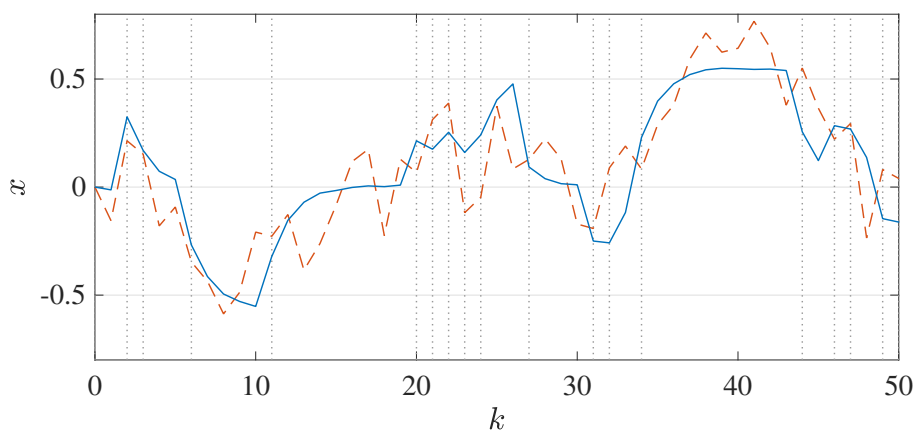
$$y_k = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_k + w_k \quad (4.18)$$



(a) Kalman filter in the full sampling case



(b) Naive method



(c) Proposed method

Fig. 4.7: The results of the state estimation for the 1st-order system

とする。ただし、

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \exp(\mathbf{A}'T) \\ \mathbf{b}_v &= \int_0^T \exp(\mathbf{A}'\tau) \mathbf{b}' d\tau \\ \mathbf{c} &= [0 \quad 1]^\top \end{aligned}$$

とした。ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{b}' &= [1 \quad 0]^\top \end{aligned}$$

を用いた。ここで、 T はサンプリング周期であり、 $T = 0.5$ とした。 v_k と w_k の分散をそれぞれ $\sigma_v^2 = 1$ と $\sigma^2 = 0.02^2$ とした。さらに、サンプリングしきい値は (2.86) 式とし、 $d = 0.2$ とした。このときの出力の一例を Fig. 4.8 に示す。

パーティクル数を $L = 500$ とし、1000 通りの v_k と w_k について状態推定を行った。全サンプルカルマンフィルタ、サンプル点間情報を用いない状態推定法、提案法による状態推定結果の一例をそれぞれ Figs. 4.9–4.11 に示す。ここで、状態変数の第 2 要素は観測されているが、第 1 要素は観測されていないことに注意する。Fig. 4.9 と Fig. 4.10 を比較すると、サンプル点間情報を用いない状態推定法を用いた場合にはサンプリングが行われない時刻に状態推定精度が劣化している。これに対し、Fig. 4.11 では観測されている状態、観測されていない状態ともに状態推定精度の劣化が抑えられていることが確かめられた。

つぎに、1000 回の試行における RMSE の平均値と標準偏差を評価した結果を Table 4.2 に示す。表は、観測されている状態、観測されていない状態ともに提案法の RMSE がサンプル点間情報を用いない状態推定法の RMSE よりも小さくなっていることを示している。このことから、提案法によって観測されていない状態の推定精度も向上させることができることが確かめられた。

4.5.3 リーマンサンプリングとルベークサンプリングの比較

本項では、サンプリングされるデータ数と状態推定精度の観点から、リーマンサンプリングとルベークサンプリングの比較を行う。

4.5.1 項と同様の 1 次系に対し、さまざまなサンプリングしきい値の間隔 d を用いたルベークサンプリングを行って状態推定を行い、サンプリングされるデータ数と状態推定精度を評価した。また、注意 2.14 で定義したリーマンサンプリングを行ってデータをサンプリングした場合についても状態推定を行った。このとき、 $k \notin \mathcal{S}_r$ の場合のサンプル点間情報は存在しないため、注意 4.2 と同様のサンプル点間情報を用いない状態推定法を用いた。ルベークサンプリング

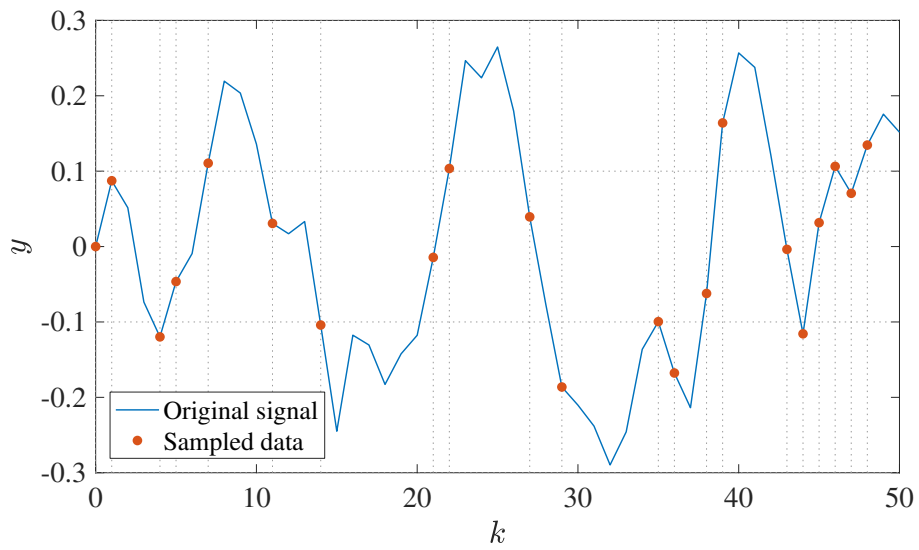


Fig. 4.8: An example of the output of the 2nd-order system

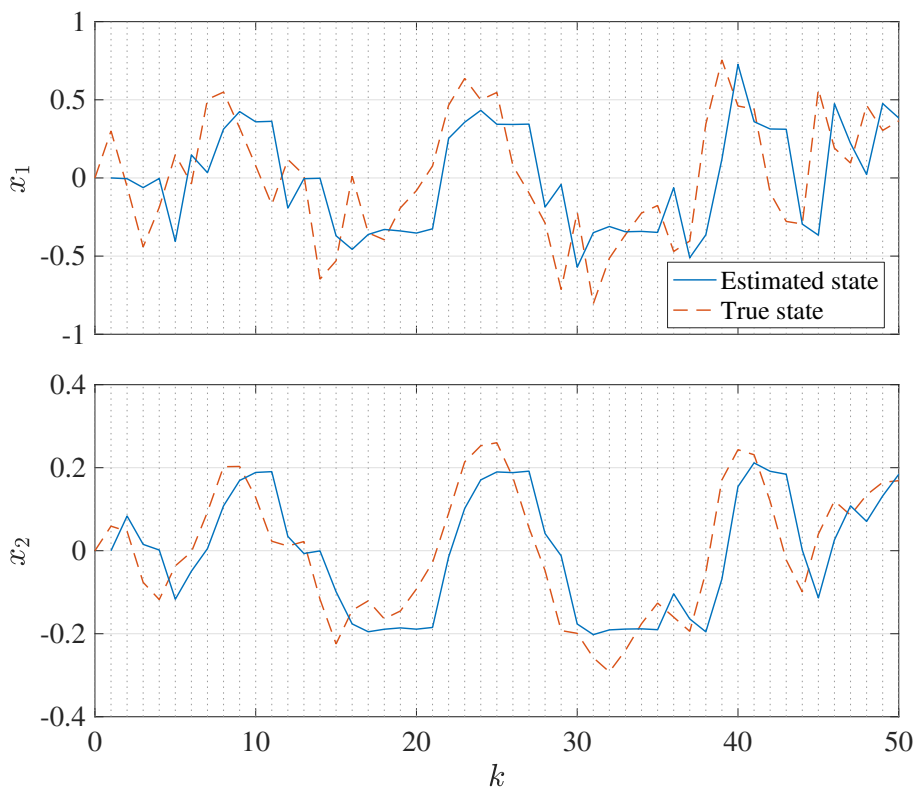


Fig. 4.9: State estimation result for the 2nd-order system by Kalman filter in the full sampling case

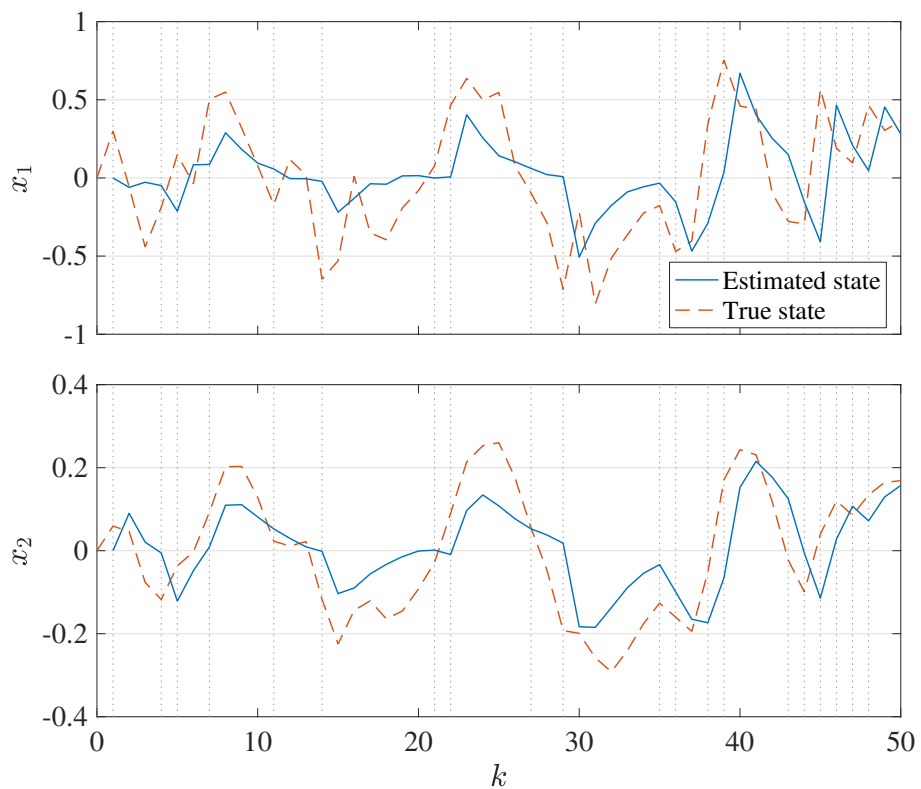


Fig. 4.10: State estimation result for the 2nd-order system by the naive method

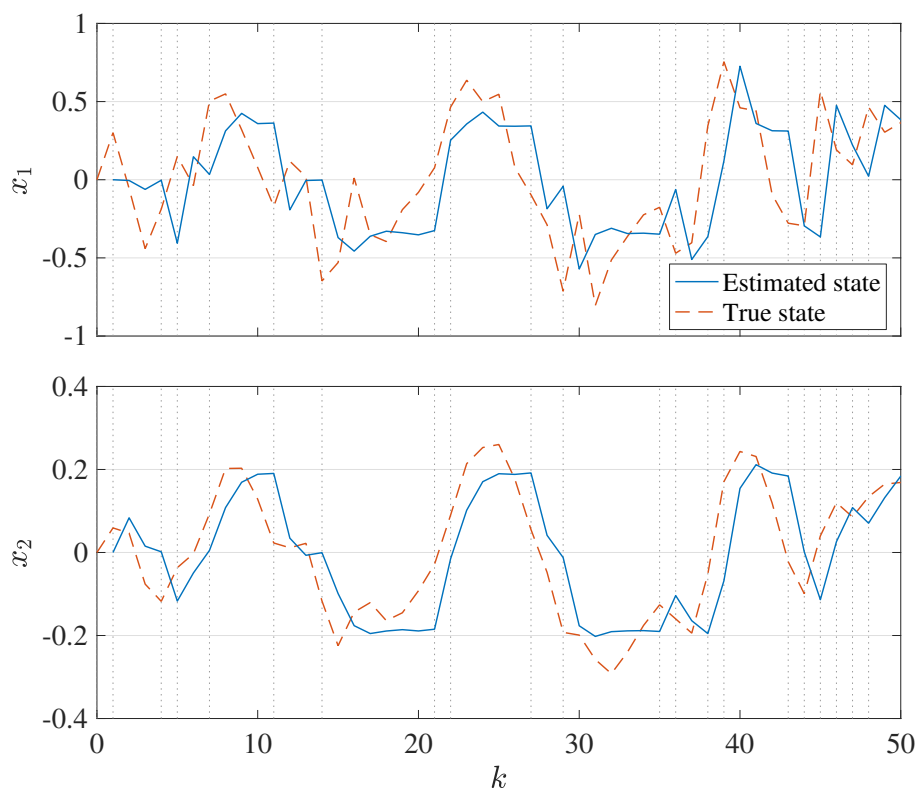


Fig. 4.11: State estimation result for the 2nd-order system by the proposed method

Table 4.2: The RMSE of the state estimations for the 2nd-order system

	x_1		x_2	
	Mean	Standard deviation	Mean	Standard deviation
Proposed method	0.2252	0.0248	0.0430	0.0050
Naive method	0.2845	0.0389	0.0748	0.0204
Kalman filter with full sampling	0.1371	0.0203	0.0193	0.0020

リングと同様に，さまざまなサンプリング周期 k_r に対して，サンプリングされるデータ数と状態推定精度を評価した．ルベークサンプリングとリーマンサンプリングのどちらについても， $N = 10^4$ とし， $k \in \{1, \dots, N\}$ において状態推定を行った．

ルベークサンプリングとリーマンサンプリングを用いた場合について，データ数と RMSE の関係を Fig. 4.12 に示す．図において，横軸はルベークサンプリングを用いた場合は $|S|/N$ ，リーマンサンプリングを用いた場合は $|S_r|/N$ である．図は，ルベークサンプリングやリーマンサンプリングを用いたサンプル点間情報を用いない状態推定法では，サンプリングされるデータ数が少なくなるにつれて RMSE が劣化していくのに対し，提案法を用いた場合には RMSE の劣化を小さく抑えることができていることを示している．この結果から，リーマンサンプリングと比較して，サンプル点間情報を用いることができるルベークサンプリングが有用であることが確かめられた．

4.5.4 ルベークサンプリングのもとでの制御問題

本項では，数値例を通して 4.4 節で提案した制御法の有用性を示す．

Fig. 4.13 のような磁気浮上系の制御をを模擬した数値実験を行う．磁気浮上系では，電磁石の吸引力を制御することにより，質量 M の鉄球を浮上させる．制御対象を線形システム (4.1), (4.2) 式とする．ただし，

$$\mathbf{A} = \exp(\mathbf{A}'T) \quad (4.19)$$

$$\mathbf{b}_u = \mathbf{b}_v = \int_0^T \exp(\mathbf{A}'\tau) \mathbf{b}' d\tau \quad (4.20)$$

$$\mathbf{c} = [1 \quad 0]^\top \quad (4.21)$$

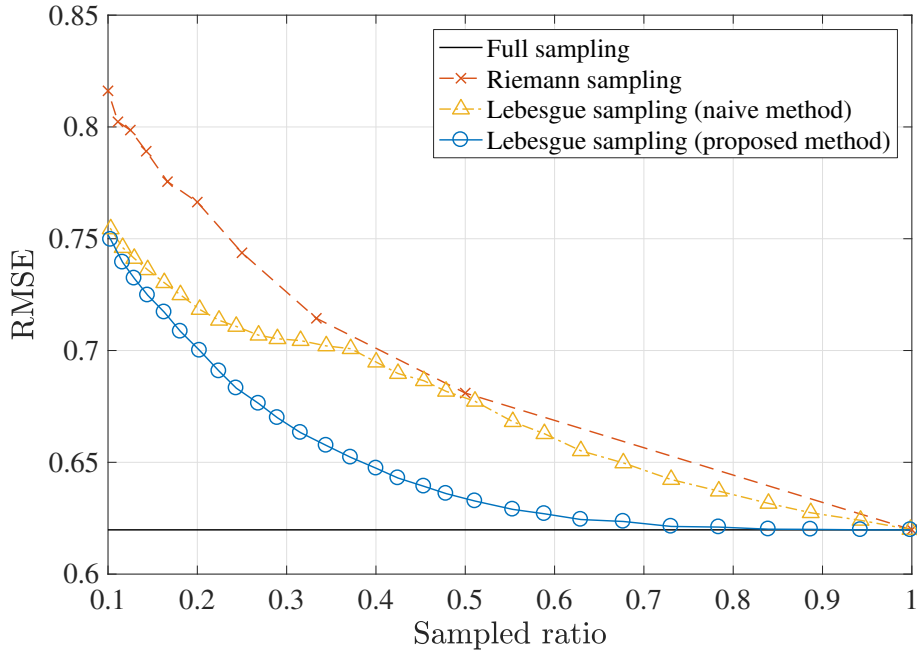


Fig. 4.12: Relationship between the sampled ratio $|\mathcal{S}|/N$ and the RMSE

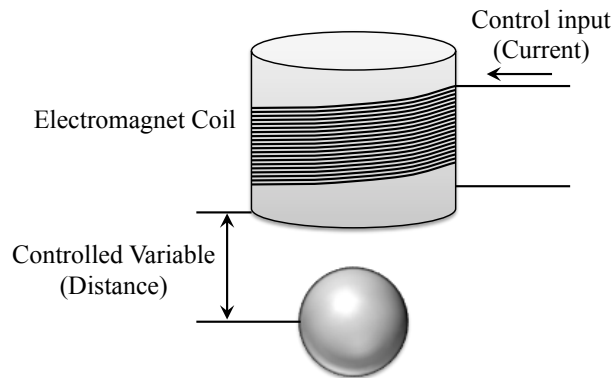


Fig. 4.13: Magnetic levitation system

である。ここで、

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ K_x/M & 0 \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

$$\mathbf{b}' = [0 \quad -K_i/M]^\top. \tag{4.23}$$

とおいた。これは、磁気浮上系を平衡点のまわりで線形化したものである。本項で扱う数値例では、非線形な磁気浮上系でなく、線形化したシステムを制御対象とすることに注意する。また、 \mathbf{A}' の固有値が $\pm\sqrt{K_x/M}$ であることから、このシステムは不安定であることに注意する。(4.19)–(4.23) 式において、 T は基本サンプリング周期、 K_x と K_i は平衡点によって決まる電氣的吸引力に関する定数である。本項の数値例では、それぞれの定数を $T = 10^{-3}$,

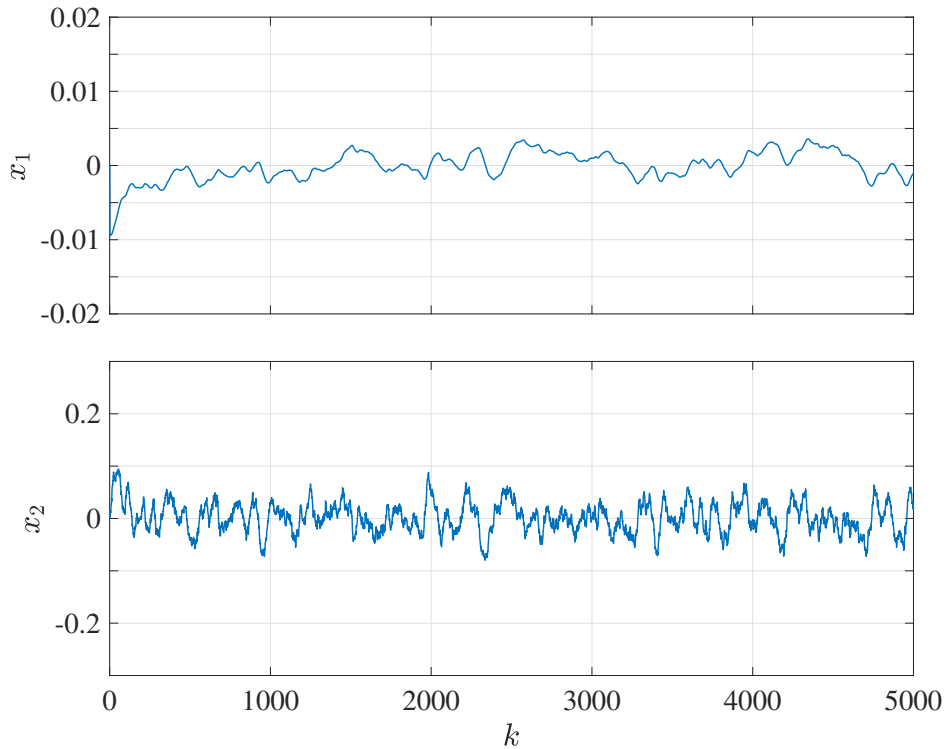


Fig. 4.14: Time series of the states under the LQG control in the full sampling case

$K_x = 177$, $K_i = 5.187$, $M = 0.358$ とした. また, v_k と w_k は平均値 0, 分散がそれぞれ 0.1 と 10^{-6} の正規性白色雑音とした. サンプリングしきい値は (2.86) 式によって定義されるとし, $d = 10^{-2}$ とした. さらに, 状態フィードバックゲインは, $S_N = \mathbf{I}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, $\mathbf{R} = 0.1$ としたときの (4.13) 式とした.

状態推定器として全サンプルカルマンフィルタを用いた LQG 制御, サンプル点間情報を用いない状態推定法を用いた制御方法, 提案法の制御結果をそれぞれ Figs. 4.14–4.16 に示す. 図の x_1 , x_2 はそれぞれ状態 \mathbf{x}_k の第 1 要素と第 2 要素であり, 鉄球の位置と速度に対応している. Fig. 4.15 では, 状態の変動が Fig. 4.14 に比べて大きくなっており, 制御性能が劣化している. 一方, Fig. 4.16 に示した提案法の結果では, サンプル点間情報を用いない状態推定法を用いた場合に比べて変動が小さくなっており, 制御性能が向上したといえる.

つぎに, 評価関数

$$J_2 = \sum_{k=1}^{N-1} (\mathbf{x}_k^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + r u_k^2) \quad (4.24)$$

を評価した結果を Table 4.3 に示す. 提案法による評価関数値がサンプル点間情報を用いない状態推定法を用いた場合に比べて小さくなっていることから, 提案法の有用性が確かめられた.

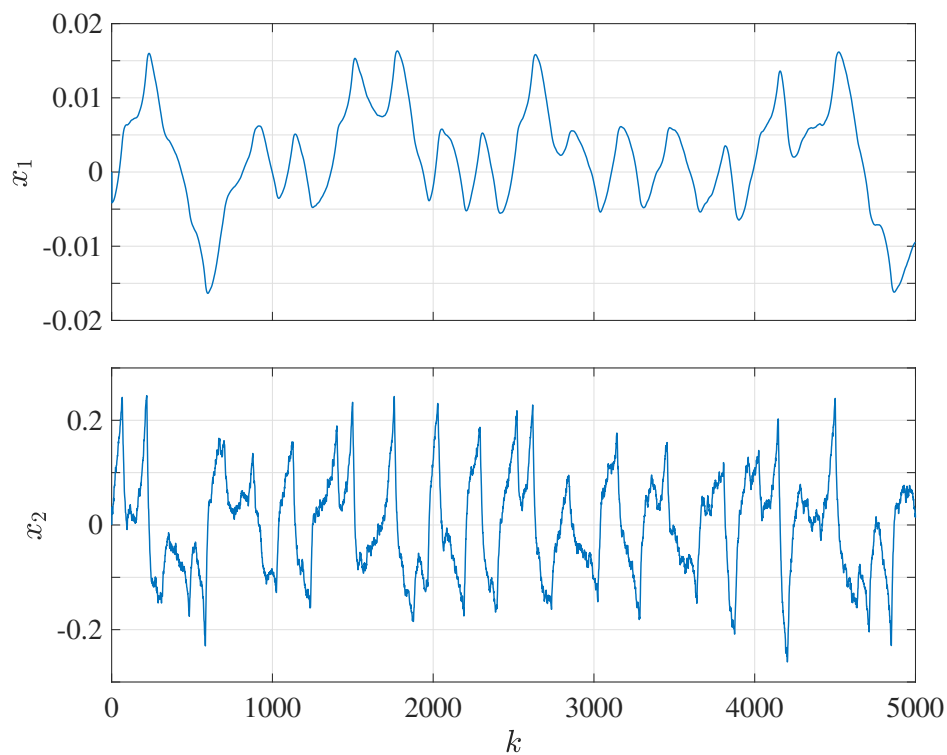


Fig. 4.15: Time series of the states under the naive control method

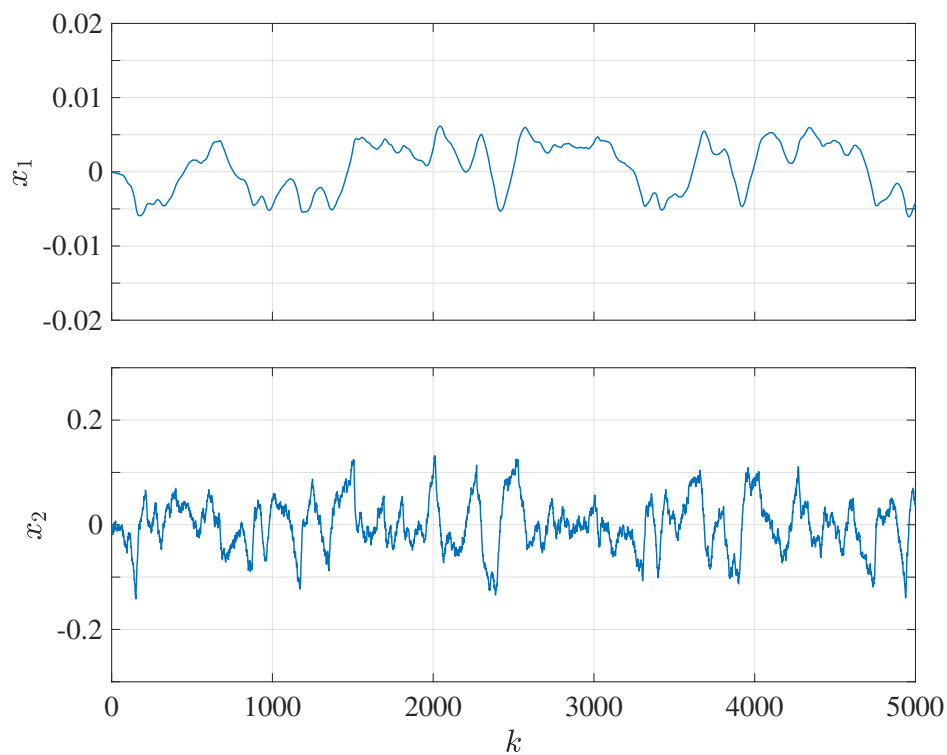


Fig. 4.16: Time series of the states under the proposed control method

Table 4.3: The value of the cost functions in Eq. (4.24)

Proposed method	223.5
Naive method	962.4
Kalman filter with full sampling	78.2

4.6 ディスカッション：モーメントのマッチングによる状態推定法

4.3 節で提案した状態推定法は，状態推定値の非正規性の課題をパーティクルフィルタを用いて克服した．本節では，それとは別の，各時刻において，状態の事後分布を2次までのモーメントを一致させた正規分布で近似する状態推定法について考察する．

時刻 k における状態の事後分布 $p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_k)$ が平均値 $\mathbf{x}_{k/k}$ ，共分散行列 $\mathbf{P}_{k/k}$ の正規分布

$$p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k/k}, \mathbf{P}_{k/k}) \quad (4.25)$$

であるとする．このとき，時刻 $k+1$ の状態の事前分布は，

$$p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathcal{Z}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k+1}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}, \mathbf{P}_{k+1/k}) \quad (4.26)$$

となる．ただし，

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}_u \mathbf{u}_k \\ \mathbf{P}_{k+1/k} &= \mathbf{A}\mathbf{P}_{k/k}\mathbf{A}^\top + \mathbf{B}_v \boldsymbol{\Sigma}_v \mathbf{B}_v^\top \end{aligned}$$

である．また，時刻 $k+1$ における状態の事後分布は，

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_k) &= p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_{k-1}, z_k) \\ &= \frac{p(z_k | \mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_{k-1})}{\int_{\mathbb{R}^{n_x}} p(z_k | \mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_{k-1})d\mathbf{x}_k} \end{aligned}$$

となる．時刻 k において y_k がサンプリングされたとき，

$$p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k, \hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{P}_{k/k}) \quad (4.27)$$

となる．ただし，

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + \mathbf{k}_k (y_k - \mathbf{c}^\top \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}) \\ \mathbf{P}_{k/k} &= \mathbf{P}_{k/k-1} - \mathbf{k}_k \mathbf{c}^\top \mathbf{P}_{k/k-1} \\ \mathbf{k}_k &= \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{c} (\sigma^2 + \mathbf{c}^\top \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{c})^{-1} \end{aligned}$$

である。また、時刻 k においてサンプリングが行われなかったとき、

$$p(z_k | \mathbf{x}_k) = \int_{\eta_{m_k}}^{\eta_{m_k+1}} \mathcal{N}(y_k, \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_k, \sigma^2) dy_k$$

であることを用いると、

$$p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}_k) = \frac{\int_{\eta_{m_k}}^{\eta_{m_k+1}} \mathcal{N}(\mathbf{x}_k, \hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{P}_{k/k}) \mathcal{N}(y_k, \hat{y}_{k/k-1}, U_k) dy_k}{\int_{\eta_{m_k}}^{\eta_{m_k+1}} \mathcal{N}(y_k, \hat{y}_{k/k-1}, U_k) dy_k} \quad (4.28)$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k/k-1} &= \mathbf{c}^\top \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} \\ U_k &= \sigma^2 + \mathbf{c}^\top \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{c} \end{aligned}$$

である。

つぎに、(4.28) 式の確率分布の平均値と共分散行列を求める。(4.28) 式の平均値は、

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_k &= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{x}_k \frac{\int_{\eta_{m_k}}^{\eta_{m_k+1}} \mathcal{N}(\mathbf{x}_k, \hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{P}_{k/k}) \mathcal{N}(y_k, \hat{y}_{k/k-1}, U_k) dy_k}{\int_{\eta_{m_k}}^{\eta_{m_k+1}} \mathcal{N}(y_k, \hat{y}_{k/k-1}, U_k) dy_k} d\mathbf{x}_k \\ &= \frac{\int_{\eta_{m_k}}^{\eta_{m_k+1}} \hat{\mathbf{x}}_k \mathcal{N}(y_k, \hat{y}_{k/k-1}, U_k) dy_k}{\int_{\eta_{m_k}}^{\eta_{m_k+1}} \mathcal{N}(y_k, \hat{y}_{k/k-1}, U_k) dy_k} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{k}_k \mathbf{c}^\top) \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + \mathbf{k}_k \frac{\int_{\eta_{m_k}}^{\eta_{m_k+1}} y_k \mathcal{N}(y_k, \hat{y}_{k/k-1}, U_k) dy_k}{\int_{\eta_{m_k}}^{\eta_{m_k+1}} \mathcal{N}(y_k, \hat{y}_{k/k-1}, U_k) dy_k} \\ &= \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} - U_k \mathbf{k}_k \frac{n_k}{d_k} \end{aligned} \quad (4.29)$$

となる。ここで、

$$n_k = \mathcal{N}(\eta_{m_k+1}, \hat{y}_{k/k-1}, U_k) - \mathcal{N}(\eta_{m_k}, \hat{y}_{k/k-1}, U_k) \quad (4.30)$$

$$d_k = \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\eta_{m_k+1} - \hat{y}_k}{\sqrt{2U_k}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\eta_{m_k} - \hat{y}_k}{\sqrt{2U_k}} \right) \right) \quad (4.31)$$

とおいた。また、共分散行列は、

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}_k &= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} (\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)^\top \frac{\int_{\eta_{m_k}}^{\eta_{m_k+1}} \mathcal{N}(\mathbf{x}_k, \hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{P}_{k/k}) \mathcal{N}(y_k, \hat{y}_{k/k-1}, U_k) dy_k}{\int_{\eta_{m_k}}^{\eta_{m_k+1}} \mathcal{N}(y_k, \hat{y}_{k/k-1}, U_k) dy_k} d\mathbf{x}_k \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^\top \frac{\int_{\eta_{m_k}}^{\eta_{m_k+1}} \mathcal{N}(\mathbf{x}_k, \hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{P}_{k/k}) \mathcal{N}(y_k, \hat{y}_{k/k-1}, U_k) dy_k}{\int_{\eta_{m_k}}^{\eta_{m_k+1}} \mathcal{N}(y_k, \hat{y}_{k/k-1}, U_k) dy_k} d\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k \bar{\mathbf{x}}_k^\top \\ &= \mathbf{P}_{k/k} - \bar{\mathbf{x}}_k \bar{\mathbf{x}}_k^\top + \frac{\int_{\eta_{m_k}}^{\eta_{m_k+1}} \hat{\mathbf{x}}_k \hat{\mathbf{x}}_k^\top \mathcal{N}(y_k, \hat{y}_{k/k-1}, U_k) dy_k}{\int_{\eta_{m_k}}^{\eta_{m_k+1}} \mathcal{N}(y_k, \hat{y}_{k/k-1}, U_k) dy_k} \\ &= \mathbf{P}_{k/k-1} - \left(\frac{U_k n_k^2}{d_k^2} + \frac{n'_k}{d_k} \right) \mathbf{k}_k \mathbf{c}^\top \mathbf{P}_{k/k-1} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Algorithm 3 State estimation algorithm under Lebesgue sampling using moment matching

Require: $\hat{\mathbf{x}}_{1/0}$ and $\mathbf{P}_{1/0}$

$k \leftarrow 1$

loop

if $z_k = y_k$ **then**

$$\mathbf{k}_k \leftarrow \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{c} (\sigma^2 + \mathbf{c}^\top \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{c})^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + \mathbf{k}_k (y_k - \mathbf{c}^\top \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1})$$

$$\mathbf{P}_{k/k} \leftarrow \mathbf{P}_{k/k-1} - \mathbf{k}_k \mathbf{c}^\top \mathbf{P}_{k/k-1}$$

else

$$\hat{y}_{k/k-1} \leftarrow \mathbf{c}^\top \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}$$

$$U_k \leftarrow \sigma^2 + \mathbf{c}^\top \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{c}$$

$$n_k \leftarrow \mathcal{N}(\eta_{m_k+1}, \hat{y}_{k/k-1}, U_k) - \mathcal{N}(\eta_{m_k}, \hat{y}_{k/k-1}, U_k)$$

$$d_k \leftarrow \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{\eta_{m_k+1} - \hat{y}_k}{\sqrt{2U_k}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\eta_{m_k} - \hat{y}_k}{\sqrt{2U_k}} \right)$$

$$n'_k \leftarrow (\eta_{m_k+1} - \hat{y}_{k/k-1}) \mathcal{N}(\eta_{m_k+1}, \hat{y}_{k/k-1}, U_k) - (\eta_{m_k} - \hat{y}_{k/k-1}) \mathcal{N}(\eta_{m_k}, \hat{y}_{k/k-1}, U_k)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + U_k \mathbf{k}_k \frac{n_k}{d_k}$$

$$\mathbf{P}_{k/k} \leftarrow \mathbf{P}_{k/k-1} - \left(\frac{U_k n_k^2}{d_k^2} + \frac{n'_k}{d_k} \right) \mathbf{k}_k \mathbf{c}^\top \mathbf{P}_{k/k-1}$$

end if

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} \leftarrow \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}_u \mathbf{u}_k$$

$$\mathbf{P}_{k+1/k} \leftarrow \mathbf{A} \mathbf{P}_{k/k} \mathbf{A}^\top + \mathbf{B}_v \boldsymbol{\Sigma}_v \mathbf{B}_v^\top$$

$k \leftarrow k + 1$

end loop

となる。ここで、

$$n'_k = (\eta_{m_k+1} - \hat{y}_{k/k-1}) \mathcal{N}(\eta_{m_k+1}, \hat{y}_{k/k-1}, U_k) - (\eta_{m_k} - \hat{y}_{k/k-1}) \mathcal{N}(\eta_{m_k}, \hat{y}_{k/k-1}, U_k) \quad (4.33)$$

とおいた。以上の結果から、毎時刻 k で事後分布を2次モーメントまで一致させた正規分布で近似すると、Algorithm 3 が得られる。

このアルゴリズムを用いて 4.5.1 項と同様の数値実験を行い、推定値の RMSE を評価すると、0.2122 となった。Table 4.1 と比較すると、パーティクルフィルタを用いた提案法に近い精度で推定が可能であるといえる。このアルゴリズムは、各 k において、推定値の事後分布を正規分布で近似して得られたものである。この近似の影響が大きくなる例ではパーティクルフィルタを用いた提案法のほうが高精度になると考えられる。一方で、本節で提案した方法では、アンサンブルの計算を必要としないことから、計算負荷は小さく抑えられる利点がある。

計算負荷と分布の近似精度のあいだのトレードオフによりどちらの方法を用いるか選択することが望ましいと考えられる。より詳細な検討は今後の課題としたい。

4.7 まとめ

本章では、ルベージサンプリングのもとでの状態推定法とその制御問題への応用を提案した。提案した状態推定法では、サンプル点間情報を用いるためにパーティクルフィルタを適用した。また、提案した状態推定法を最適レギュレータと組み合わせる制御系設計法を提案した。数値例では、サンプル点間情報を用いることにより、状態推定精度を向上させることができた。また、その状態推定値を用いることにより、制御性能も向上させることができた。

第 5 章

二次電池のシステム同定と状態推定への応用

本章では、第 3 章と第 4 章で提案したシステム同定法と状態推定法の実応用可能性を検討するために、二次電池のモデリングと状態推定への適用を考える。二次電池のモデルをシステム同定によって構築し、それをを用いて充電率の推定を行う方法について述べる。

5.1 はじめに

近年の環境問題やエネルギー問題への関心の高まりの中で再生可能エネルギーの活用が注目されている。また、環境負荷の小さい自動車として、化石燃料を使わない電気自動車への期待が高まっている。そのなかで、電気エネルギーを貯蔵するデバイスである二次電池は重要な役割を担っている [66]。

二次電池を安全かつ効率的に扱うために、電池の充電率 (State Of Charge: SOC) を正確に評価することが重要である。SOC は測定することができないため、測定可能な電流や電圧から推定する必要がある。

SOC を推定するための有力なアプローチとしてモデルに基づく状態推定器を用いる方法がある。Plett は、二次電池のシステム同定と拡張カルマンフィルタを用いた SOC 推定を提案した [67]–[69]。それ以降、二次電池のモデリングと状態推定について、システム制御的な立場から、さまざまな研究が行われてきた。カルマンフィルタを用いるためには電池の正確なモデルが必要であるが、電池の第一原理モデリングでは、状態推定に適したモデルを構築することが困難であるため、システム同定によるモデリングが研究されてきた [42], [68], [70]。また、モデルに基づいて状態推定を行う研究も数多くなされてきた [71]–[73]。

これらの方法では、電池のモデリングや状態推定を精度よく行うことができるが、実用上、扱うデータ数が問題になる場合がある。特に、電気自動車への応用を考えた場合、低コスト化

の観点から搭載されるプロセッサやメモリの性能に制約があることが多い。そこで、モデリングや状態推定の精度を落とさずにデータ数を削減する技術が求められている。

そこで、本章では、ルベグサンプリングを用いて電池の出力信号をサンプリングし、本論文で提案したシステム同定法と状態推定法を適用することを考える。電池は時定数の大きく異なる遅い応答と速い応答をもつシステムであるため、通常のルベグサンプリングでは適切にサンプリングが行えない場合がある。本章では、電池のデータを適切にルベグサンプリングするために可変ルベグサンプリングを用いることを提案する。数値例によって提案したそれぞれの方法の有用性を示す。

5.2 二次電池の充電率推定

5.2.1 電池の充電率に関する用語

電池残量を見積もるモデルを考える。充電率 SOC は電池残量 (Remaining Capacity: RC) の満充電容量 (Full Charge Capacity: FCC) に対する割合で表される。すなわち、

$$\text{SOC} = \frac{\text{RC}}{\text{FCC}} \quad (5.1)$$

である。電池は繰り返し使用するうちに劣化して容量が小さくなっていく。劣化の度合いは

$$\text{SOH} = \frac{\text{FCC}}{\text{FCC}_0} \quad (5.2)$$

で定義される健全度 (State Of Health: SOH) ^[67] で表される。ただし、 FCC_0 は電池の劣化がないときの FCC である。したがって劣化のある場合の SOC は、

$$\text{SOC} = \frac{\text{RC}}{\text{FCC}_0 \cdot \text{SOH}} \quad (5.3)$$

と表される。

5.2.2 電流積算法による充電率推定

SOC は直接測定することができないので、測定可能な物理量である電流や電圧から推定することが必要となる。SOC を推定する最も一般的な方法は電流積算 (クーロンカウント) 法である ^[66]。これは

$$x_{\text{ch}}(t) = x_{\text{ch}}(t_0) + \frac{1}{\text{FCC}_0 \cdot \text{SOH}} \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau \quad (5.4)$$

を用いて SOC を算出する方法である。ただし、時刻 t の SOC を $x_{\text{ch}}(t)$ とした。また、電池を流れる電流を $u(t)$ とした。このとき、電池に流入する方向を正とした。 t_0 は推定を開始する時刻である。

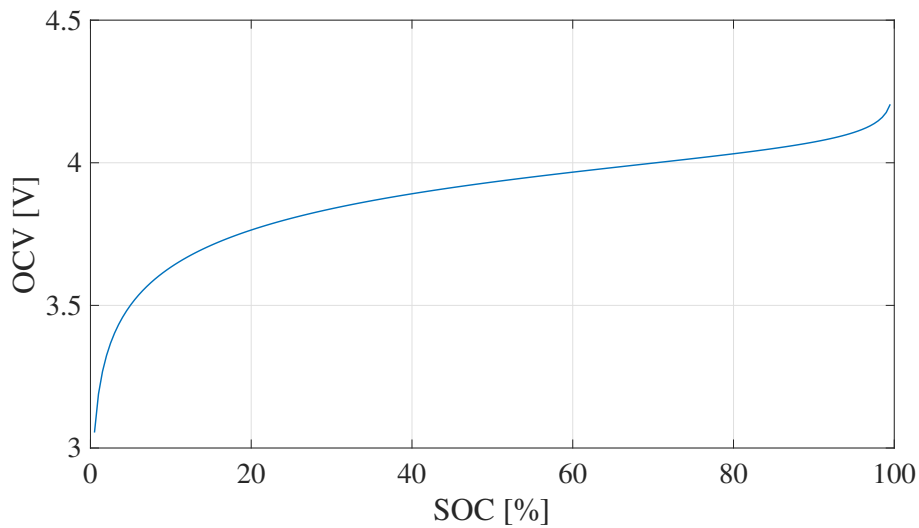


Fig. 5.1: An example of SOC-OCV characteristics

電流積算法はその計算方法の性質上，入力電流の計測誤差を蓄積してしまうという問題点を有している．また，SOCの初期値 $x_{ch}(t_0)$ の決め方が難しいうえ，一度SOCの推定値が真の値と一致しなくなったときにそれを修正することができないという問題点もある．したがって，より高精度なSOC推定法が求められている．

5.2.3 開回路電圧法による充電率推定

電池のSOCの推定方法として，開回路電圧（Open Circuit Voltage: OCV）法と呼ばれる方法も存在する [66]．ここで，OCVは，電池が電気化学的平衡状態にあるときの端子電圧である．SOCとOCVの間には一対一の対応関係があり，たとえば Fig. 5.1 で表されるような非線形関数 $f_{ocv}(\cdot)$ を用いて，

$$OCV(t) = f_{ocv}(x_{ch}(t)) \quad (5.5)$$

と記述できる [74]–[76]．このとき，非線形関数 $f_{ocv}(\cdot)$ を SOC-OCV 特性とよぶ．SOC-OCV 特性は温度や電池の劣化にほとんど依存しないことが知られている [77], [78] ので，電池の OCV を測定すれば SOC を推定することが可能になる．これを開回路電圧法という．この方法は電流積算法のような誤差の蓄積が存在せず，高精度に SOC を推定することができる点で優れている．しかし，開回路電圧を測定するためには電池を無負荷で長時間放置することが必要であるので，開回路電圧法を利用できるのはごく限られた環境のみである．

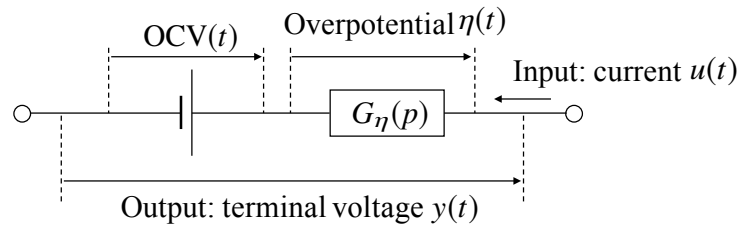


Fig. 5.2: Equivalent circuit of a battery

5.2.4 モデルに基づいた充電率推定

前項で説明した開回路電圧法は SOC を推定するのに十分に長時間電池を放置する必要がある。二次電池の実使用中に SOC を推定するためには、OCV を推定することが必要である。電池のモデルを用いて OCV 推定を行う手法が考えられている。

OCV の推定のために用いられるモデルの多くは電池の端子電圧 $y(t)$ を

$$y(t) = \text{OCV}(t) + \eta(t) \quad (5.6)$$

と記述する^[79]。これを等価回路で表すと Fig. 5.2 となる。ただし、 $\eta(t)$ は電池の内部抵抗による電圧降下であり、過電圧 (Overpotential) と呼ばれる。過電圧 $\eta(t)$ のダイナミクスを記述するモデルが得られているとき、たとえば、

$$\text{OCV}(t) = y(t) - \eta(t) \quad (5.7)$$

を計算することにより OCV を推定することができる。すると、SOC-OCV 特性の逆関数を用いることで SOC の推定を行うことができる。また、SOC を状態変数としたモデルを構築し、カルマンフィルタなどの状態推定器を用いることにより、より正確に SOC を推定することができる。

電流積算法が電流のみを用いた SOC 推定法であるのに対し、モデルに基づいた SOC 推定法は測定した電流と電圧の両方を利用している。このことから、電流積算法のもつ問題点を解決できると期待される。

5.3 二次電池のモデル

前節で述べたように、二次電池の充電率を推定するために、二次電池のモデルが必要である。ここで、SOC-OCV 特性は事前に測定可能であるので、過電圧を表現するモデルが重要である。筆者らは過電圧がイオンの拡散によって記述されることに着目したグレーボックスモデリング法を提案した^[42]。本節では拡散を考慮した二次電池のモデルについて述べる。

二次電池の過電圧のモデリングについて考える．過電圧は電解液などの抵抗，電極と電解質の界面の電荷移動過程，電極内部のイオンの拡散過程の3つの要素に分けることができる．電荷移動過程は時定数が数ミリ秒の速い応答であり，拡散過程は時定数が数百秒に及ぶ遅い応答である．本論文ではデータのサンプリング周期などの関係から電荷移動過程は無視できるとし，過電圧を

$$\eta(t) = G_\eta(p)u(t) \quad (5.8)$$

と表す．ただし，過電圧部分のインピーダンスを

$$G_\eta(s) = R_0 + G_w(s) \quad (5.9)$$

とした．ここで， R_0 は電解液などの抵抗を表しており， $G_w(s)$ はワールブルグインピーダンスと呼ばれる拡散過程のインピーダンスである．ワールブルグインピーダンスは

$$G_w(s) = \frac{R_d}{\sqrt{\tau_d s}} \tanh(\sqrt{\tau_d s}) \quad (5.10)$$

と表される^[80]．ただし， R_d は直流電流に対する拡散抵抗である．また， τ_d は拡散過程の時定数を表す量であり， δ を拡散層の厚み， D を拡散定数とすると $\tau_d = \delta^2/D$ を満たす．

(5.10) 式のインピーダンスには $s^{-1/2}$ という非整数階積分が含まれていて扱いにくいのが，分布定数回路を用いて近似することができる^{[42],[72],[81]}．本論文では， $\tanh(\cdot)$ の連分数展開を用いた

$$G_w(s) = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{\frac{1}{sC_1} + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{\frac{1}{sC_2} + \dots}}}}} \quad (5.11)$$

に対応する Fig. 5.3 のようなカウエル型の等価回路を扱う．ただし，

$$R_n = \frac{R_d}{4n-3} \quad (5.12)$$

$$C_n = \frac{\tau_d}{R_d(4n-1)} \quad (5.13)$$

である．また，(5.11) 式は次数が無限大のシステムであることに注意する．実用上は無限次元のモデルを扱うことができないので，適切な次数 n_w で連分数を打ち切ることになる．

注意 5.1 Fig. 5.3 の等価回路は一般には抵抗とコンデンサの $2n_w$ 個のパラメータで記述される．一方で，(5.11) 式のモデルは等価回路の抵抗やコンデンサが打ち切り次数 n_w によら

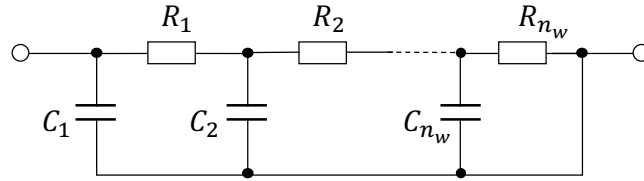


Fig. 5.3: Equivalent circuit of Warburg impedance using Caue structure

ず、2つの物理パラメータ R_d , τ_d のみで決定されることが重要である。(5.11) 式のモデルは (5.10) 式のワールブルグインピーダンスから導かれているため、パラメータ R_d , τ_d の値を用いて電気化学的な意味付けがしやすいことが特徴である。

以上をまとめると、電池に流れる電流 $u(t)$ と端子電圧 $y(t)$ のあいだの関係は、雑音を考えないとき、

$$y(t) = f_{ocv}(x_{ch}(t)) + G_\eta(p)u(t) + R_0u(t) \quad (5.14)$$

となる。

5.4 二次電池のシステム同定

二次電池は使用するうちに劣化し、その特性が変化するため、電池の使用中にモデルを更新する必要がある。そこで、本節では、前節で述べた二次電池のモデルを、入出力データから推定することを考える。

前節で述べた二次電池のモデルにおいて、 $f_{ocv}(\cdot)$ は変化しないことを仮定したため、推定すべきパラメータは SOH と R_0 , R_d , τ_d である。ここで、SOH は本来パラメータではなく状態と考えるべきであるが、十分に変化が遅いことを仮定し、本論文ではパラメータとして扱う。また、(5.4) 式で記述されるように、 $x_{ch}(t)$ は入力 $u(t)$ を積分したものである。そのため、十分に長い実験時間をとっても初期値 $x_{ch}(t_0)$ の影響を無視することができない。実使用中において、 $x_{ch}(t_0)$ の正確な値は明らかでないことが一般的であるため、 $x_{ch}(t_0)$ も推定するパラメータに含めることにする。以上をまとめると、二次電池のモデルにおいて、推定する必要がある未知パラメータは

$$\theta = [R_0 \quad R_d \quad \tau_d \quad x_{ch}(t_0) \quad \text{SOH}]^\top \quad (5.15)$$

となる。実験によって得られた入出力データを用いてこの未知パラメータ θ を推定することが本節で考える問題である。

出力データがルベグサンプリングされていることを仮定し、第3章で提案したシステム

同定法を用いて θ を推定することを考える。このとき、最適化のために (5.14) 式の未知パラメータに関する勾配を求める必要がある。

まず、 $x_{\text{ch}}(t_0)$ 、SOH に関して次式が成り立つ。

$$\frac{\partial \hat{y}(t)}{\partial x_{\text{ch}}(t_0)} = g_{\text{ocv}}(x_{\text{ch}}(t)) \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial \hat{y}(t)}{\partial \text{SOH}} = -\frac{g_{\text{ocv}}(x_{\text{ch}}(t))}{\text{FCC}_0 \cdot \text{SOH}^2} \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau \quad (5.17)$$

ただし、 $g_{\text{ocv}}(\cdot)$ は

$$g_{\text{ocv}}(x_{\text{ch}}) = \frac{df_{\text{ocv}}(x_{\text{ch}})}{dx_{\text{ch}}} \quad (5.18)$$

であり、これはあらかじめ計算できる。また、 $x_{\text{ch}}(t)$ は (5.4) 式によって求める。

つぎに、 R_0 に関して、

$$\frac{\partial \hat{y}(t)}{\partial R_0} = u(t) \quad (5.19)$$

となる。

さらに、 R_d と τ_d に関する勾配について考える。ワールブルグインピーダンスの動特性

$$\hat{y}_w(t) = G_w(p)u(t)$$

を状態空間実現すると、

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_w(t) = \mathbf{A}_w \mathbf{x}_w(t) + \mathbf{b}_w u(t) \quad (5.20)$$

$$\hat{y}_w(t) = \mathbf{c}_w^\top \mathbf{x}_w(t) \quad (5.21)$$

によって表すことができる。ただし、状態変数は

$$\mathbf{x}_w = [v_1 \quad \dots \quad v_{n_w}]^\top \quad (5.22)$$

であり、 $v_j (j = 1, 2, \dots, n_w)$ はそれぞれ Fig. 5.3 におけるコンデンサ C_j の両端電圧である。また、

$$\mathbf{A}_w = -\frac{1}{\tau_d} \mathbf{L} \mathbf{U} \quad (5.23)$$

$$\mathbf{b}_w = \frac{R_d}{\tau_d} [3 \quad 7 \quad \dots \quad 4n_w - 1]^\top \quad (5.24)$$

$$\mathbf{c}_w = [1 \quad \dots \quad 1]^\top \quad (5.25)$$

である。ここで、

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 7 & 7 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 4n_w - 5 & \cdots & \cdots & 4n_w - 5 & 0 \\ 4n_w - 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 4n_w - 1 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 5 & 5 & \cdots & 5 \\ 0 & 0 & 9 & \cdots & 9 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 4n_w - 3 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

とおいた。(5.20), (5.21) 式の両辺を R_d によって偏微分すると、それぞれ、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_w(t)}{\partial R_d} \right) = \frac{\partial \mathbf{A}_w}{\partial R_d} \mathbf{x}_w(t) + \mathbf{A}_w \frac{\partial \mathbf{x}_w(t)}{\partial R_d} + \frac{\partial \mathbf{b}_w}{\partial R_d} u(t) \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial \hat{y}_w(t)}{\partial R_d} = \mathbf{c}_w^\top \frac{\partial \mathbf{x}_w(t)}{\partial R_d} \quad (5.29)$$

が得られる。また、 τ_d による偏微分も同様である。したがって、拡大系

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_w(t) \\ \frac{\partial \mathbf{x}_w(t)}{\partial R_d} \\ \frac{\partial \mathbf{x}_w(t)}{\partial \tau_d} \end{bmatrix} = \overline{\mathbf{A}}_w \begin{bmatrix} \mathbf{x}_w(t) \\ \frac{\partial \mathbf{x}_w(t)}{\partial R_d} \\ \frac{\partial \mathbf{x}_w(t)}{\partial \tau_d} \end{bmatrix} + \overline{\mathbf{B}}_w u(t) \quad (5.30)$$

$$\begin{bmatrix} y_w(t) \\ \frac{\partial y_w(t)}{\partial R_d} \\ \frac{\partial y_w(t)}{\partial \tau_d} \end{bmatrix} = \overline{\mathbf{C}}_w \begin{bmatrix} \mathbf{x}_w(t) \\ \frac{\partial \mathbf{x}_w(t)}{\partial R_d} \\ \frac{\partial \mathbf{x}_w(t)}{\partial \tau_d} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

の応答を計算すれば、 R_d と τ_d に関する勾配

$$\frac{\partial \hat{y}(t)}{\partial R_d} = \frac{\partial y_w(t)}{\partial R_d} \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial \hat{y}(t)}{\partial \tau_d} = \frac{\partial y_w(t)}{\partial \tau_d} \quad (5.33)$$

が得られる。ただし、

$$\bar{\mathbf{A}}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_w & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_w & \mathbf{O} \\ -\frac{1}{\tau_d} \mathbf{A}(\theta) & \mathbf{O} & \mathbf{A}_w \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_w \\ \frac{1}{R_d} \mathbf{b}_w \\ -\frac{1}{\tau_d} \mathbf{b}_w \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

$$\bar{\mathbf{C}}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_w^\top & \mathbf{o}^\top & \mathbf{o}^\top \\ \mathbf{o}^\top & \mathbf{c}_w^\top & \mathbf{o}^\top \\ \mathbf{o}^\top & \mathbf{o}^\top & \mathbf{c}_w^\top \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

である。ここで、 \mathbf{O} と \mathbf{o} はそれぞれ、要素がすべて 0 の適切なサイズの行列とベクトルである。

以上より、未知パラメータに関する勾配が求められたので、第 3 章で提案したシステム同定法を適用することができる。

5.5 二次電池の状態推定

本節では、二次電池の状態推定を行うことを考える。特に、SOC を推定することを考える。出力データがルベグサンプリングされていることを仮定し、第 4 章で提案した状態推定法を適用する。

第 4 章で提案した状態推定法は離散時間状態空間モデルを対象としている。そこで、5.3 節で述べた二次電池のモデルを状態空間実現する。

まず、 $x_{\text{ch}}(t)$ は、(5.4) 式で示したように入力電流 $u(t)$ の積分によって得られる。このことから、 $x_{\text{ch}}(t)$ のしたがう微分方程式は、

$$\frac{d}{dt} x_{\text{ch}}(t) = \frac{1}{\text{FCC}_0 \cdot \text{SOH}} u(t) \quad (5.37)$$

となる。また、ワールブルグインピーダンスの動特性は、(5.20)、(5.21) 式と表される。したがって、電池の入出力の関係は

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x} + \mathbf{b}_c u(t) \quad (5.38)$$

$$y(t) = h(\mathbf{x}(t), u(t)) \quad (5.39)$$

となる。ただし、状態変数を

$$\mathbf{x}(t) = [x_{\text{ch}}(t) \quad \mathbf{x}_w^\top(t)]^\top \quad (5.40)$$

とおいた。また、

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{o}^\top \\ \mathbf{o} & \mathbf{A}_w \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_c = \begin{bmatrix} 1 & \\ \text{FCC} & \mathbf{b}_w^\top \end{bmatrix}^\top \quad (5.41)$$

である。さらに、

$$h(\mathbf{x}, u) = f_{\text{ocv}}(\mathbf{c}_1^\top \mathbf{x}) + \mathbf{c}_2^\top \mathbf{x} + R_0 u \quad (5.42)$$

である。ここで、

$$\mathbf{c}_1 = [1 \quad \mathbf{o}^\top]^\top, \quad \mathbf{c}_2 = [0 \quad \mathbf{c}_w^\top]^\top \quad (5.43)$$

とした。

(5.38), (5.39) 式を離散化し、システム雑音 \mathbf{v}_k , 観測雑音 w_k を導入すると、離散時間状態空間モデル

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}u_k + \mathbf{v}_k \quad (5.44)$$

$$y_k = h(\mathbf{x}_k, u_k) + w_k \quad (5.45)$$

が得られる。ただし、 \mathbf{A} と \mathbf{b} は \mathbf{A}_c と \mathbf{b}_c を適切に離散化して得られる行列である。たとえばゼロ次ホールドを用いて

$$\mathbf{A} = \exp(\mathbf{A}_c T)$$

$$\mathbf{b} = \int_0^T \exp(\mathbf{A}_c \tau) \mathbf{b}_c d\tau$$

となる。ただし、 T は基本サンプリング周期である。

以上より、電池の入出力関係を離散時間状態空間実現することができた。この状態 \mathbf{x}_k を第4章で提案した方法で推定し、その第1要素をとることにより充電率を推定することができる。

5.6 数値実験

本節では、ルベグサンプリングのもとで電池のシステム同定と状態推定を行う数値実験について述べる。

5.6.1 問題設定

本項では、数値実験の問題設定について述べる。

数値実験では、 $R_0 = 0.6 \text{ m}\Omega$, $R_d = 1 \text{ m}\Omega$, $\tau_d = 200 \text{ s}$, $x_{\text{ch}}(t_0) = 90 \%$, $\text{SOH} = 95 \%$ と設定した計算機上のモデルを対象システムとする。このシステムに電気自動車の走行を模擬

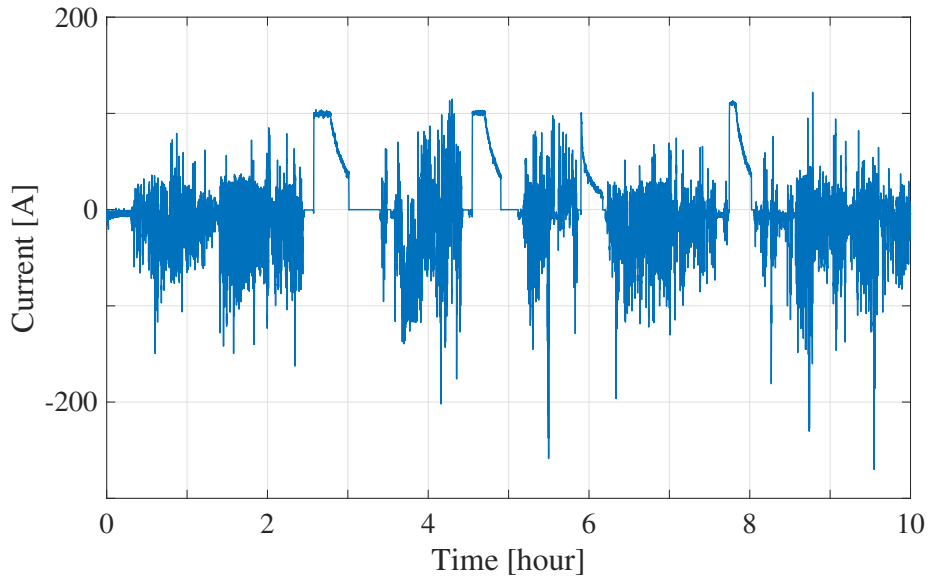


Fig. 5.4: Input current used for numerical experiments

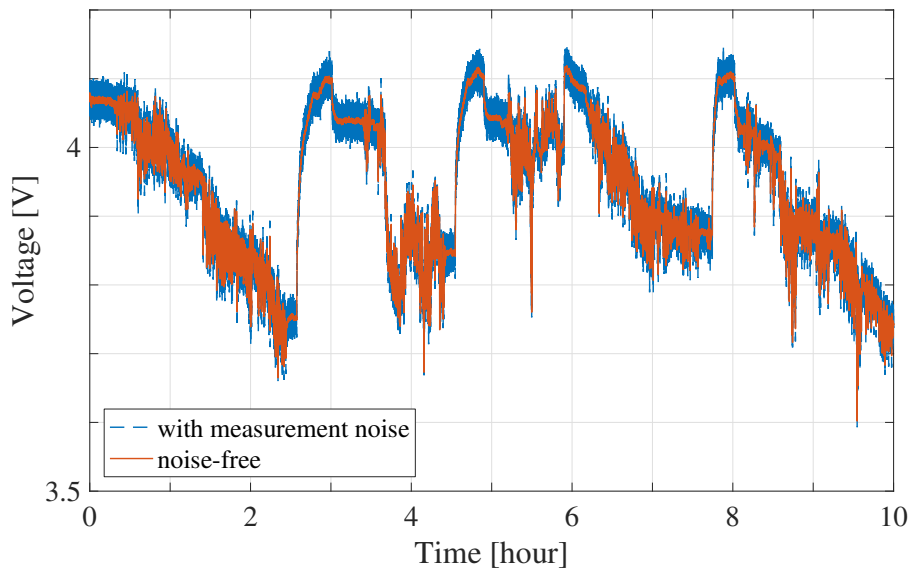


Fig. 5.5: An example of the output voltage of the battery in numerical experiment

した Fig. 5.4 の入力を印加し, Fig. 5.5 の出力を得た. このとき, 基本サンプリング周期は 0.1 秒とした. また, 観測値には平均値 0, 分散 10^{-4} の正規性白色雑音加わるとした. ここで, Fig. 5.4 と Fig. 5.5 の入出力データのうち, はじめの 2 時間分のデータを用いてシステム同定を行い, 残りのデータを用いて状態推定を行うこととした.

本節の数値実験では, Fig. 5.5 の出力信号をリーマンサンプリングしたとき, ルベグサンプリングしたとき, 可変ルベグサンプリングしたときのシステム同定結果と状態推定結果を比較し, データ数に制約があるときにどのようなサンプリングを行うべきであることを検討した. ここで, ルベグサンプリングに用いるしきい値は等間隔な (2.86) 式を用いた.

Table 5.1: Estimated parameters of battery

	True	Riemann	Lebesgue	Variable Lebesgue
R_0 [m Ω]	0.6	0.600 ± 0.0063	0.600 ± 0.0037	0.600 ± 0.0034
R_d [m Ω]	1	1.00 ± 0.0118	0.99 ± 0.0069	1.00 ± 0.0066
τ_d [s]	200	200 ± 7.92	199 ± 4.8	200 ± 4.4
$x_{\text{ch}}(t_0)$ [%]	90	90.0 ± 0.0461	90.0 ± 0.0538	90.0 ± 0.0289
SOH [%]	95	95.0 ± 0.21	94.9 ± 0.20	95.0 ± 0.13

5.6.2 ルベীগサンプリングのもとでのシステム同定

本項では、システム同定の数値実験を行った結果について述べる。

まず、用いることのできるデータ数が基本サンプリング周期を用いたときの全サンプルの1/10に制約されていることを仮定する。このとき、リーマンサンプリングではサンプリング周期1秒でサンプリングを行うことになる。また、ルベীগサンプリングと可変ルベীগサンプリングでこの条件を満たすサンプリングしきい値を見つけると、それぞれ $d = 84$ mV, $\delta = 25$ mV となった。このとき、異なる雑音を用いた1000組の入出力データに対して、システム同定を行った。その結果を Table 5.1 に示す。表では、1000回の試行で得られた推定値の平均値 \pm 標準偏差が示されている。それぞれのサンプリング法でのパラメータ推定値の平均値をみると、どの方法でも真値に近い値が得られている。このことから、電池を対象とした場合でも提案法によって適切にパラメータ推定が行えることが確かめられた。また、それぞれの方法のパラメータの標準偏差を比較すると、可変ルベীগサンプリングを用いた場合がすべてのパラメータにおいて標準偏差が最も小さくなっている。このことから、データ数に制約がある場合の二次電池のシステム同定では、可変ルベীগサンプリングがパラメータ推定値のばらつきを小さくする意味で優れていることが確かめられた。

同様に、リーマンサンプリング、ルベীগサンプリング、可変ルベীগサンプリングのそれぞれについて、さまざまなサンプリング周期、 d 、 δ を選んでシステム同定実験を行った。それぞれの条件に対して、サンプリングされたデータ数とパラメータ推定値の標準偏差を評価した。その結果を Figs. 5.6, 5.7 に示す。図において、縦軸は全データ N のうちサンプリングされたデータ数の割合 $|S|/N$ を表している。図は、どのパラメータに対しても、データ数の割合を小さくしていったときの標準偏差の増加が最も小さいのは可変ルベীগサンプリングであることを示している。たとえば Fig. 5.6(a) において、標準偏差を0.005以下に抑えようとしたとき、リーマンサンプリングを用いた場合には全サンプルの50%が必要なのに対し、可変

ルベグサンプリングを用いた場合には 22 % 程度で十分である。この結果から、データ数の制約のもとで、可変ルベグサンプリングを用いると精度よくパラメータ推定が行えることが確かめられた。

5.6.3 ルベグサンプリングのもとでの状態推定

本項では、二次電池の状態推定の数値実験を行った結果について述べる。本項では特に、充電率の推定精度について議論する。

システム同定のときと同様に、リーマンサンプリング、ルベグサンプリング、可変ルベグサンプリングのそれぞれについて、さまざまなサンプリング周期、 d 、 δ を選んで出力のサンプリングを行い、得られた入出力データに対して状態推定実験を行った。このとき、それぞれの条件に対してサンプリングされたデータ数を評価した。また、真の SOC と推定された SOC のあいだの RMSE を評価した。サンプリングされたデータ数と RMSE の関係を Fig. 5.8 に示す。図は、サンプリングされるデータ数を少なくしていったとき、可変ルベグサンプリングを用いた場合が最も RMSE を小さくできることを示している。また、ルベグサンプリングを用いた場合には、リーマンサンプリングを用いたときよりも RMSE が大きくなってしまいう場合がある。

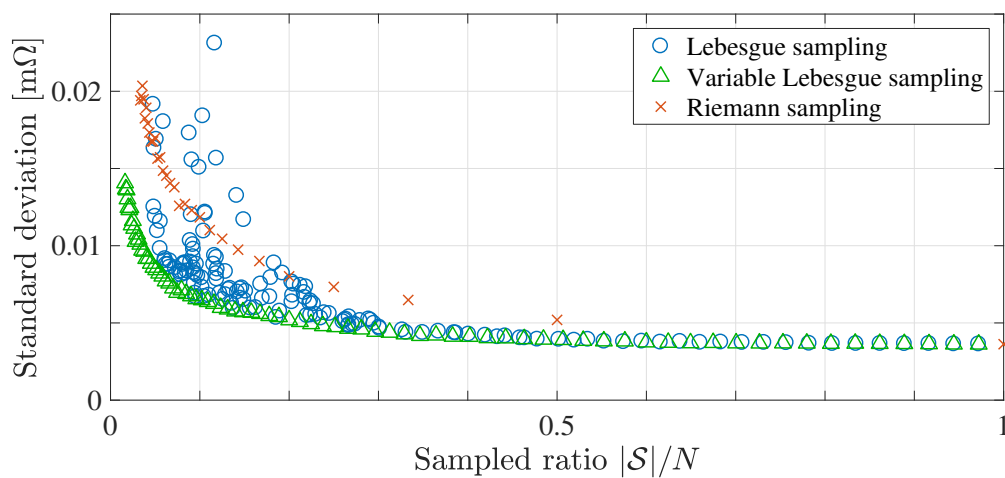
このことから、二次電池の充電率推定には固定されたサンプリングしきい値をもつルベグサンプリングは適していないといえる。一方で、可変ルベグサンプリングを用いることでデータ数の減少に対する状態推定精度の低下を抑えられることが確かめられた。

5.7 まとめ

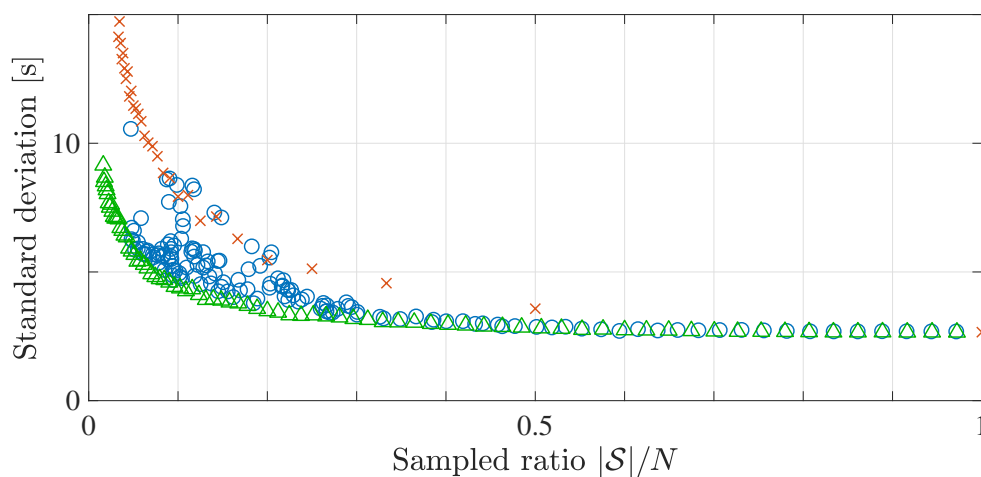
本章では、本論文で提案したシステム同定法と状態推定法を二次電池に対して適用する例を示した。

二次電池のモデルとして、電極内部のイオンの拡散現象を用いて、そのパラメータを推定した。また、構築したモデルを用いて状態推定器を設計し、充電率の推定を行った。

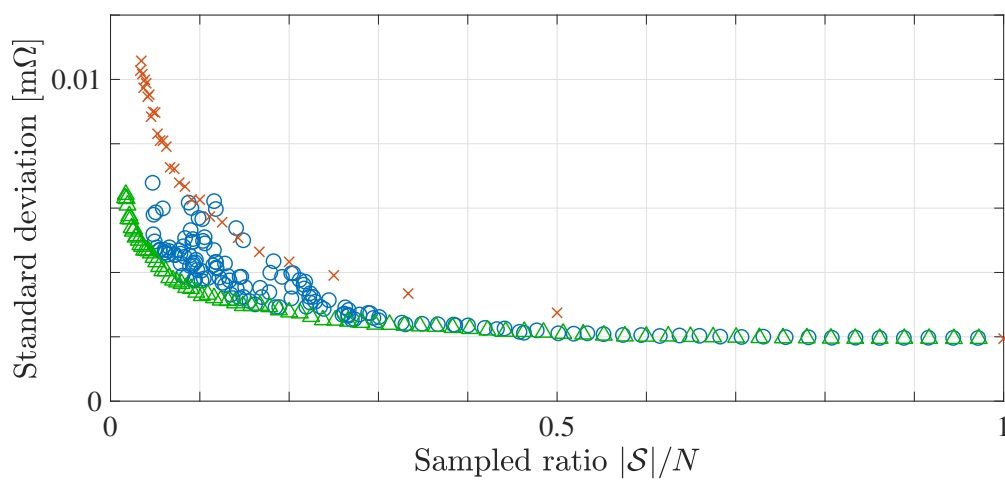
数値実験では、リーマンサンプリングとルベグサンプリング、可変ルベグサンプリングについて比較を行った。電池の応答には開回路電圧に起因する遅い応答と、過電圧に起因する速い応答が含まれており、通常のルベグサンプリングでは適切なサンプリングを行うことができない場合があることがわかった。また、リーマンサンプリングを用いた場合と比較して、可変ルベグサンプリングを用いるとデータ数の減少にともなうシステム同定精度と状態推定精度の劣化が抑えられることが示された。



(a) R_d

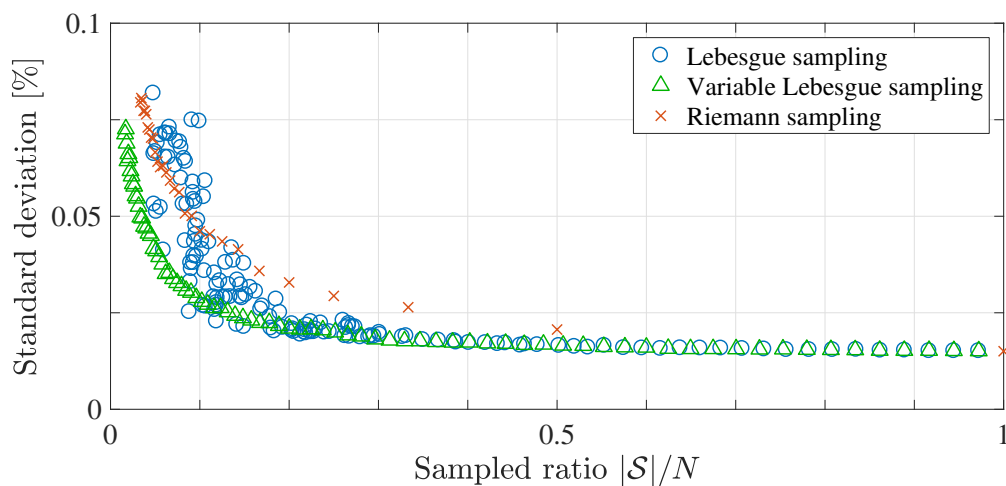


(b) τ_d

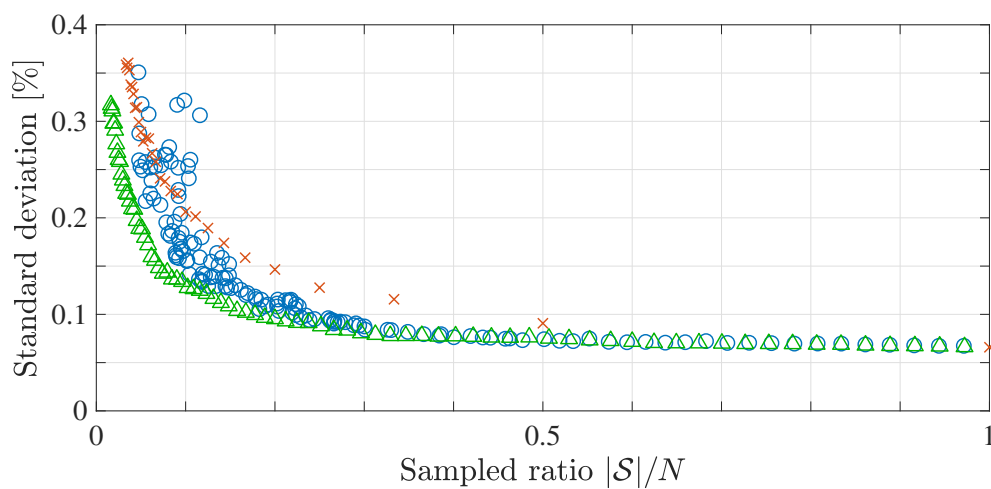


(c) R_0

Fig. 5.6: Relationship between the sampled ratio $|\mathcal{S}|/N$ and the standard deviations of estimated R_d , τ_d , and R_0



(a) $x_{ch}(t_0)$



(b) SOH

Fig. 5.7: Relationship between the sampled ratio $|\mathcal{S}|/N$ and the standard deviations of estimated $x_{ch}(t_0)$ and SOH

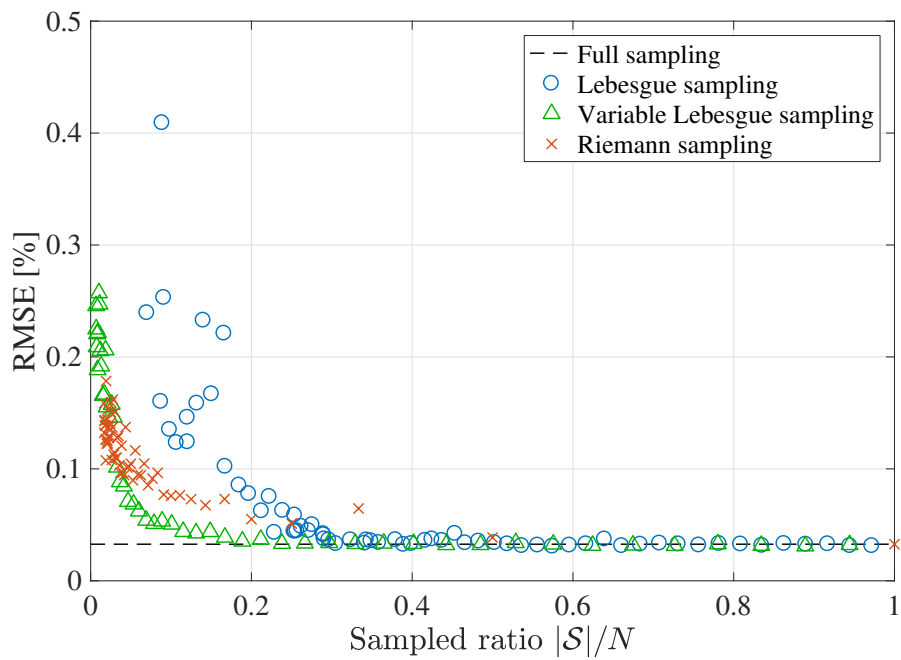


Fig. 5.8: Relationship between the sampled ratio $|\mathcal{S}|/N$ and the RMSE of estimated SOC

第6章

結論

6.1 本論文による成果

本論文では、まず、ルベークサンプリングのもとでのシステム同定法を提案した。また、提案法により得られたパラメータ推定値の漸近的な性質を導出した。ルベークサンプリングのもとで、従来のシステム同定法を用いてシステム同定を行うとパラメータ推定値にバイアスが生じてしまうが、提案法により、バイアスなく推定を行うことが可能になった。また、パラメータ推定値の漸近的な性質を時間的に等間隔なサンプリング方法を用いた場合と比較し、ルベークサンプリングの優位性を示すことができた。

つぎに、ルベークサンプリングのもとでの状態推定法を提案した。また、提案した状態推定法を応用した制御の方法も提案した。提案法では、サンプル間情報を用いて状態推定や制御を行うことにより、状態推定精度や、制御性能を向上することに成功した。

さらに、提案したシステム同定法と状態推定法の応用として、二次電池への適用について述べた。電極内部のイオンの拡散現象を用いて、そのパラメータを推定した。また、構築したモデルを用いて状態推定器を設計し、充電率の推定を行った。数値実験を通して、リーマンサンプリングとルベークサンプリングの比較を行い、可変ルベークサンプリングを用いるとデータ数の減少にともなうシステム同定精度と状態推定精度の劣化が抑えられることが示された。

以上、提案法によれば、ルベークサンプリングによってデータを取得したもとで、システム同定、状態推定を精度よく行うことができた。

6.2 今後の発展性

提案したシステム同定法や状態推定法は、ルベークサンプリングのもとでサンプル点間情報を用いるものであるが、サンプル点間情報の考え方はルベークサンプリングに限らず、任意のイベント駆動サンプリング方法に適用可能であると考えられる。イベント駆動サンプリングの

より一般的な記述と、それを用いたときのパラメータ推定精度，状態推定精度についての解析を行い，対象によってどのようなサンプリング法を用いるべきかのより深い考察を行うことが今後の課題である．特に，可変ルベグサンプリングのもとでのシステム同定法や状態推定法は電池への応用に有力な方法であることが示唆された一方で，詳細な理論解析は行えていない．この理論解析は重要な課題である．

本論文において，計算機上の数値実験によってルベグサンプリングの有用性が確かめられた．これからのビッグデータ時代において，サンプル点間情報を用いて効率的にデータ数を削減できるルベグサンプリングは有力な手法となると思われる．本論文で提案した手法が特に有用になる応用例の検討と，実問題への適用も今後の課題である．

謝辞

本研究は、著者が慶應義塾大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻物理情報システム専修後期博士課程在学中に、同大学理工学部物理情報工学科足立修一教授の指導のもとに行ったものです。指導教員として終始懇切なるご指導とご鞭撻、審査の主査をしていただいた足立先生には、謹んで感謝の意を表します。また、本論文をまとめるにあたり、有益なご教示とご助言をいただいた副査の慶應義塾大学理工学部システムデザイン工学科大森浩充教授，同物理情報工学科内山孝憲教授，同システムデザイン工学科滑川徹教授には，心から感謝の意を評します。

主査でシステム同定・カルマンフィルタ理論がご専門の足立先生には，システム同定・状態推定の基礎から，学術論文の書き方まで，幅広くご指導いただきました。また，前期博士課程修了後，社会人として働きながら後期博士課程に在籍していた著者が，後期博士課程に専念することを決心する後押しをしていただいたうえ，さまざまなサポートをしていただきました。

副査で適応制御の理論がご専門の大森先生には，システム同定と状態推定に関連する統計的な推定について，熱心に議論していただくとともに，論文中の記述について詳細にチェックしていただきました。

生体計測とシステム同定がご専門の内山先生には，提案した方法の実用的な課題について鋭いご指摘をいただきました。

分散強調制御の理論がご専門の滑川先生には，理論的な観点や，従来のイベント駆動制御との関係などについて鋭いご指摘をいただきました。

また，日々の研究において，さまざまなディスカッションをしていただいた慶應義塾大学理工学部物理情報工学科井上正樹助教に深く感謝いたします。著者が軽視しがちであった，理論的な解析や保証の重要性についてご教示いただきました。また，著者とは異なる専門性からの観点で議論していただくなかで，より幅広い知識を得ることができました。

さらに，システム同定について，さまざまなご指導をいただきました京都大学大学院工学研究科航空宇宙工学専攻制御工学分野丸田一郎講師に深く感謝いたします。丸田先生からご教示いただいた連続時間システム同定の知識無しにはこの研究は成し得ませんでした。ここにお礼申し上げます。

また，電池のモデリングと状態推定についての議論や，博士論文の書き方について助言をい

ただきました足立研究室 OB の馬場厚志博士に感謝いたします。

本論文の成果は、足立研究室 OB 彦野壮三郎君が在学中に行った研究の上に成り立っております。ここに深く感謝の意を表します。

また、常日頃から研究環境を整えるために大変ご尽力下さった秘書斉藤由美氏に感謝いたします。

足立研究室の学生諸君は、社会人から後期博士課程への専念を決めた著者を暖かく迎え入れてくれました。特に、八田羽謙一君は、研究・その他についてのさまざまな議論だけでなく、事務手続きなどについて幾度となく助けてくれました。深く感謝いたします。

また、電池のシステム同定と状態推定について、共同研究を通じて多くの助言をいただいたカルソニックカンセイ株式会社の皆様に感謝いたします。

さらに、社会人と並行して研究を行っていた際に、さまざまな励まし、アドバイスをいただいた株式会社東芝研究開発センターシステム技術ラボラトリーの皆様に感謝いたします。

最後に、会社を辞め、博士課程に専念することを理解し、サポートを行ってくれた家族に深く感謝いたします。

2017年7月 川口貴弘

参考文献

- [1] 足立修一：信号・システム理論の基礎 – フーリエ解析，ラプラス変換， z 変換を系統的に学ぶ –，コロナ社 (2014)
- [2] L. Ljung: System Identification: Theory for the User, 2nd edition, Prentice Hall (1999)
- [3] M. Verhaegen and V. Verdult: Filtering and System Identification: A Least Squares Approach, Cambridge University Press (2012)
- [4] 足立修一：システム同定の基礎，東京電機大学出版局 (2009)
- [5] 萩原朋道：デジタル制御入門，コロナ社 (1999)
- [6] M. Miskowicz: Send-on-delta concept: an event-based data reporting strategy, Sensors, **6-1**, 49/63 (2006)
- [7] W. P. M. H. Heemels, K. H. Johansson and P. Tabuada: An introduction to event-triggered and self-triggered control, In Proceedings of the 51st IEEE Conference on Decision and Control, 3270/3285, Maui, Hawaii, USA (2012)
- [8] D. V. Dimarogonas, E. Frazzoli and K. H. Johansson: Distributed event-triggered control for multi-agent systems, IEEE Transactions on Automatic Control, **57-5**, 1291/1297 (2012)
- [9] Q. Liu, Z. Wang, X. He and D. Zhou: A survey of event-based strategies on control and estimation, Systems Science & Control Engineering, **2-1**, 90/97 (2014)
- [10] Y. Zhu, H. Telkamp, J. Wang and Q. Fu: System identification using slow and irregular output samples, Journal of Process Control, **19-1**, 58/67 (2009)
- [11] 足立，丹治：欠損データ推定に基づく不等間隔サンプリングデータに対するシステム同定法，電気学会論文誌 C, **122-8**, 1383/1384 (2002)
- [12] 足立修一：MATLAB による制御のための上級システム同定，東京電機大学出版局 (2004)
- [13] 小西，土屋，国田，藤井，宇田，黒田：細胞内シグナル伝達の不等間隔データに対する非線形 ARX システム同定，第 58 回自動制御連合講演会，神戸大学 (2015)

- [14] 小西, 土屋, 国田, 藤井, 宇田, 黒田: 不等間隔サンプリングデータによるシステム同定のための繰り返し核ノルム最小化法, 第 60 回システム制御情報学会研究発表講演会, 京都 (2016)
- [15] E. K. Larsson, M. Mossberg and T. Söderström: Identification of continuous-time ARX larsso models from irregularly sampled data, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **52**-3, 417/427 (2007)
- [16] H. Garnier and L. Wang: *Identification of Continuous-time Models from Sampled Data*, Springer (2008)
- [17] D. Shi, L. Shi and T. Chen: *Event-Based State Estimation: A Stochastic Perspective*, Springer (2015)
- [18] R. E. Kalman: A new approach to linear filtering and prediction problems, *ASME Journal of Basic Engineering*, **82**-1, 35/45 (1960)
- [19] 有本 卓: カルマン・フィルター, 産業図書 (1977)
- [20] 片山 徹: 非線形カルマンフィルタ, 朝倉書店 (2011)
- [21] 足立, 丸田: カルマンフィルタの基礎, 東京電機大学出版局 (2012)
- [22] A. Le and R. McCann: Event-based measurement updating Kalman filter in network control systems, In 2007 IEEE Region 5 Technical Conference, 138/141, Fayetteville, Arkansas, USA (2007)
- [23] V. H. Nguyen and Y. S. Suh: Improving estimation performance in networked control systems applying the send-on-delta transmission method, *Sensors*, **7**-10, 2128/2138 (2007)
- [24] J. Sijs and M. Lazar: Event based state estimation with time synchronous updates, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **57**-10, 2650/2655 (2012)
- [25] J. Wu, Q. S. Jia, K. H. Johansson and L. Shi: Event-based sensor data scheduling: Trade-off between communication rate and estimation quality, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **58**-4, 1041/1046 (2013)
- [26] K. J. Åström and B. M. Bernhardsson: Comparison of Riemann and Lebesgue sampling for first order stochastic systems, In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, **2**, 2011/2016, Las Vegas, USA (2002)
- [27] K. J. Åström and B. Bernhardsson: Systems with lebesgue sampling, In *Directions in Mathematical Systems Theory and Optimization*, Springer, 1/13 (2003)
- [28] 片山 徹: システム同定入門, 朝倉書店 (1994)
- [29] 杉原左右一: 統計学, 晃洋書房 (2014)
- [30] 吉村 功: 数理統計学, 培風館 (1969)
- [31] 竹内 啓: 数理統計学 - データ解析の方法, 東洋経済新報社 (1963)

- [32] H. Cramér: *Mathematical models of statistics*, Princeton University Press (1946)
- [33] C. R. Rao: *Linear Statistical Inference and its Applications*, 2nd edition, Wiley (1973)
- [34] K. P. Murphy: *Machine Learning: A Probabilistic Perspective*, The MIT Press (2012)
- [35] 松原 望 : 入門ベイズ統計 - 意思決定の理論と発展, 東京図書 (2008)
- [36] 松原 望 : ベイズ統計学概説 - フィッシャーからベイズへ, 培風館 (2010)
- [37] R. Fletcher: *A modified Marquardt subroutine for nonlinear least squares*, Technical Report TP 476, A.E.R.E. Harwell (1971)
- [38] 中川, 小柳 : 最小二乗法による実験データ解析, 東京大学出版会 (1982)
- [39] J. Nocedal and S. Wright: *Numerical Optimization*, Springer (2006)
- [40] 丸田, 杉江 : 反復実験の不要な射影型連続時間システム同定, 計測自動制御学会論文集, **46-3**, 133/138 (2010)
- [41] L. Ljung: *Prediction error estimation methods*, *Circuits, Systems and Signal Processing*, **21-1**, 11/21 (2002)
- [42] 川口, 丸田, 馬場, 足立 : 拡散現象を考慮した電気自動車用二次電池の連続時間システム同定, 計測自動制御学会論文集, **49-7**, 670/677 (2013)
- [43] N. J. Gordon, D. J. Salmond and A. F. M. Smith: *Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation*, *IEE Proceedings F - Radar and Signal Processing*, **140-2**, 107/113 (1993)
- [44] B. Ristic, S. Arulampalam and N. Gordon: *Beyond the Kalman Filter: Particle Filters for Tracking Applications*, Artech House (2004)
- [45] 樋口知之 : データ同化入門, 朝倉書店 (2011)
- [46] 日本機械学会 : 機械工学便覧 (デザイン編 *β6* 制御システム), 日本機械学会 (2006)
- [47] H. Kwakernaak and R. Sivan: *Linear Optimal Control Systems*, Wiley-Interscience (1972)
- [48] 大塚敏之 : 非線形最適制御入門, コロナ社 (2011)
- [49] 川口, 彦野, 丸田, 足立 : ルベークサンプリングを用いたシステム同定法とその統計的性質, 第3回計測自動制御学会制御部門マルチシンポジウム, 南山大学 (2016)
- [50] T. Kawaguchi, S. Hikono, I. Maruta and S. Adachi: *System identification under Lebesgue sampling and its asymptotic property*, In *Proceedings of the 55th IEEE Conference on Decision and Control*, 2079/2084, Las Vegas, USA (2016)
- [51] 川口, 彦野, 丸田, 足立 : ルベークサンプリングのもとでのシステム同定, 計測自動制御学会論文集, **53-3**, 236/243 (2017)
- [52] K.-E. Årzén: *A simple event-based pid controller*, In *Proceedings of the 14th IFAC*

- World Congress, **18**, 423/428, Beijing, China (1999)
- [53] M. Velasco, J. Fuertes and P. Marti: The self triggered task model for real-time control systems, In Work-in-Progress Session of the 24th IEEE Real-Time Systems Symposium, **384**, Cancun, Mexico (2003)
- [54] L. Y. Wang, W. Feng and G. G. Yin: Joint state and event observers for linear switching systems under irregular sampling, *Automatica*, **49-4**, 894/905 (2013)
- [55] G. Pillonetto and G. D. Nicolao: A new kernel-based approach for linear system identification, *Automatica*, **46-1**, 81/93 (2010)
- [56] G. Pillonetto, F. Dinuzzo, T. Chen, G. D. Nicolao and L. Ljung: Kernel methods in system identification, machine learning and function estimation: A survey, *Automatica*, **50-3**, 657/682 (2014)
- [57] 藤本, 杉江: ルベークサンプル値データを用いたカーネル法に基づくシステム同定, 第3回計測自動制御学会制御部門マルチシンポジウム, 南山大学 (2016)
- [58] R. H. Byrd, M. E. Hribar and J. Nocedal: An interior point algorithm for large-scale nonlinear programming, *SIAM Journal on Optimization*, **9-4**, 877/900 (1999)
- [59] R. Waltz, J. Morales, J. Nocedal and D. Orban: An interior algorithm for nonlinear optimization that combines line search and trust region steps, *Mathematical Programming*, **107-3**, 391/408 (2006)
- [60] 川口, 井上, 足立: ルベークサンプリングのもとでのパーティクルフィルタによる状態推定, 第60回システム制御情報学会研究発表講演会, 京都 (2016)
- [61] T. Kawaguchi, M. Inoue and S. Adachi: State estimation by particle filter under Lebesgue sampling, In SICE Annual Conference, 1714/1717, Tsukuba, Japan (2016)
- [62] T. Kawaguchi, M. Inoue and S. Adachi: State estimation under Lebesgue sampling and an approach to event-triggered control, *SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration*, **10-3**, 259/265 (2017)
- [63] I. Rhodes: A tutorial introduction to estimation and filtering, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **16-6**, 688/706 (1971)
- [64] T. Li, S. Sun and T. P. Sattar: Adapting sample size in particle filters through KLD-resampling, *Electronics Letters*, **49-12**, 740/742 (2013)
- [65] Y. K. Xu and X. R. Cao: Lebesgue-sampling-based optimal control problems with time aggregation, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **56-5**, 1097/1109 (2011)
- [66] 足立, 廣田, 押上, 馬場, 丸田, 三原: バッテリマネジメント工学, 東京電機大学出版局 (2015)
- [67] G. L. Plett: Extended Kalman filtering for battery management systems of LiPB-

- based hev battery packs: Part 1. background, *Journal of Power Sources*, **134-2**, 252/261 (2004)
- [68] G. L. Plett: Extended Kalman filtering for battery management systems of LiPB-based hev battery packs: Part 2. modeling and identification, *Journal of Power Sources*, **134-2**, 262/276 (2004)
- [69] G. L. Plett: Extended Kalman filtering for battery management systems of LiPB-based hev battery packs: Part 3. state and parameter estimation, *Journal of Power Sources*, **134-2**, 277/292 (2004)
- [70] B. Xia, X. Zhao, R. de Callafon, H. Garnier, T. Nguyen and C. Mi: Accurate Lithium-ion battery parameter estimation with continuous-time system identification methods, *Applied Energy*, **179**, 426/436 (2016)
- [71] F. Sun, X. Hu, Y. Zou and S. Li: Adaptive unscented Kalman filtering for state of charge estimation of a lithium-ion battery for electric vehicles, *Energy*, **36-5**, 3531/3540 (2011)
- [72] 馬場, 足立: 対数化 UKF を用いたリチウムイオン電池の状態とパラメータの同時推定, *電気学会論文誌D*, **133-12**, 1139/1147 (2013)
- [73] S. J. Moura: Estimation and control of battery electrochemistry models: A tutorial, In *Proceedings of the 54th IEEE Conference on Decision and Control*, 3906/3912, Osaka, Japan (2015)
- [74] I. Snihir, W. Rey, E. Verbitskiy, A. Belfadhel-Ayeb and P. H. Notten: Battery open-circuit voltage estimation by a method of statistical analysis, *Journal of Power Sources*, **159-2**, 1484/1487 (2006)
- [75] V. Pop, H. Bergveld, J. V. op het, P. Regtien, D. Danilov and P. Notten: Modeling battery behavior for accurate state-of-charge indication, *Journal of the Electrochemical Society*, **153-11**, A2013/A2022 (2006)
- [76] M. Dubarry, V. Svoboda, R. Hwu and B. Y. Liaw: Capacity loss in rechargeable lithium cells during cycle life testing: The importance of determining state-of-charge, *Journal of Power Sources*, **174-2**, 1121/1125 (2007)
- [77] 廣田, 小笠原, 船渡, 三原, 出口, 初田: *電気自動車工学 - EV 設計とシステムインテグレーションの基礎*, 森北出版 (2010)
- [78] Y. Hu and S. Yurkovich: Battery cell state-of-charge estimation using linear parameter varying system techniques, *Journal of Power Sources*, **198**, 338/350 (2012)
- [79] L. Lu, X. Han, J. Li, J. Hua and M. Ouyang: A review on the key issues for lithium-ion battery management in electric vehicles, *Journal of Power Sources*, **226-0**, 272/288 (2013)

-
- [80] 板垣昌幸：電気化学インピーダンス法：原理・測定・解析，第2版，丸善出版 (2012)
- [81] E. Kuhn, C. Forgez and G. Friedrich: Modeling diffusive phenomena using non integer derivatives, *The European Physical Journal Applied Physics*, **25**-03, 183/190 (2004)

付録 A

研究業績

学位請求に用いる定期刊行誌掲載原著論文

- [1] 川口, 彦野, 丸田, 足立: ルベグサンプリングのもとでのシステム同定, 計測自動制御学会論文集, **53-3**, 236/243 (2017)
- [2] T. Kawaguchi, M. Inoue and S. Adachi: State Estimation under Lebesgue Sampling and an Approach to Event-Triggered Control, SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration, **10-3**, 259/265 (2017)

学位請求に用いる国際会議発表論文 (査読付き, 発表者*)

- [1] T. Kawaguchi*, M. Inoue and S. Adachi: State estimation by particle filter under Lebesgue sampling, in SICE Annual Conference, Tsukuba, 1714/1717, Japan (2016)
- [2] T. Kawaguchi*, S. Hikono, I. Maruta and S. Adachi: System identification under Lebesgue sampling and its asymptotic property, in Proceedings of the 55th IEEE Conference on Decision and Control, 2079/2084, Las Vegas, USA(2016)

関連する定期刊行誌掲載原著論文

- [1] 川口, 丸田, 馬場, 足立: 拡散現象を考慮した電気自動車用二次電池の連続時間システム同定, 計測自動制御学会論文集, **49-7**, 670/677 (2013)

その他の定期刊行誌掲載原著論文

- [1] 竹下, 川口, 足立: 積分器を有するシステムの同定について, 計測自動制御学会論文集, 50-4, 342/347 (2014)

関連する国際会議発表論文 (査読付き, 発表者*)

- [1] S. Hikono*, A. Sugiura, T. Kawaguchi, A. Baba, I. Maruta and S. Adachi: Continuous-time system identification of rechargeable battery in electric vehicles in consideration of temperature characteristics, in IEEE Multi-Conference on Systems and Control 2015, 1939/1944, Sydney, Australia (2015)

関連する主な国内会議発表 (発表者*)

- [1] 川口*, 彦野, 丸田, 足立: ルベグサンプリングを用いたシステム同定法とその統計的性質, 第3回計測自動制御学会制御部門マルチシンポジウム, 南山大学 (2016)
 - [2] 川口*, 井上, 足立: ルベグサンプリングのもとでのパーティクルフィルタによる状態推定, 第60回システム制御情報学会研究発表講演会, 京都テルサ (2016)
 - [3] 川口, 杉浦*, 丸田, 馬場: 拡散現象を考慮した電気自動車用二次電池のモデリングとその充電率推定への応用, 第57回システム制御情報学会研究発表講演会, システム制御情報学会, 神戸 (2013)
 - [4] 川口*, 丸田, 馬場, 足立: 連続時間システム同定による電気自動車用二次電池のモデリング, 第55回自動制御連合講演会, 京都大学 (2012)
- 他 13 件

受賞

- [1] 川口貴弘: 第61回システム制御情報学会研究発表講演会 学生発表賞, 入力に対して斉次な非線形要素をもつシステムの同定法とその電池への応用 (2017)
- [2] 川口貴弘: 第60回システム制御情報学会研究発表講演会 学生発表賞, ルベグサンプリングのもとでのパーティクルフィルタによる状態推定 (2016)
- [3] 川口貴弘: 計測自動制御学会制御部門研究奨励賞, 電気自動車用二次電池の連続時間グレーボックスモデリング (2013)
- [4] 川口貴弘: 第55回自動制御連合講演会 優秀発表賞, 連続時間システム同定による電気自動車用二次電池のモデリング (2012)

-
- [5] 馬場, 板橋, 寺西, 福永, 川口, 足立 : 計測自動制御学会制御部門大会技術賞, カルマンフィルタを用いた EV/HEV 向け電池の内部状態推定 (2012)