

学位論文 博士（工学）

分数階微積分を有する非線形制御系と
適応制御系の設計

2016 年度

慶應義塾大学大学院理工学研究科

高松 尚宏

要旨

分数階微積分とは、階数を整数から実数に拡張した一般化された微積分である。分数階微積分をシステムの数理モデルに用いることで、粘弾性体やリチウムイオン電池の応答などの複雑な現象を簡潔に精度よくモデル化できる。また、分数階積分器を導入した制御系は、制御則の設計に自由度が増えることから、優れた性能を発揮できる。しかし、分数階微積分は通常の微積分と異なる性質を持つため、分数階システムに対して整数階システムを対象とした制御系設計法を直接適用できず、微分連鎖則や実現などの課題を解決する必要がある。そこで本研究では、分数階に拡張された非線形制御系および適応制御系の設計法に関し研究を行い、これらの課題の解決を目的とした。

第1章では、本研究の研究背景と従来研究について概説している。

第2章では、本研究の基本となる分数階微積分の諸定義と演算に関し説明を行う。

第3章では、従来のバックステッピング法を非整数階に拡張した手法を開発するとともに、非線形分数階システムを対象として、バックステッピング法に基づいたスライディングモード制御系の設計を行う。さらに、数値実験により、提案した制御系が確定外乱を有する場合においても有効であることを確認する。

第4章では、未知パラメータを含む線形分数階システムを対象とした Kreisselmeier 型適応観測器の設計を行う。さらに、リチウムイオンの拡散現象に由来してリチウムイオン電池の電気的な動特性が分数階の微積分によって記述されることを示す。リチウムイオン電池のハーフセルを模擬したシステムを対象として数値実験を行い、提案した適応観測器の有用性を確認する。

第5章では、モデル規範型制御系の適応調整則に分数階積分器を導入した制御系を構成するとともに、構成されたシステムの安定性について、分数階積分器の偏微分方程式系への実現を通し、分布定数型のリアプノフ関数を用いて証明を行う。さらに、提案した制御系に対し従来の整数階の適応調整則では過渡応答が乱れる高ゲイン調整則を構成し、数値実験にて従来のモデル規範型制御系と比較する。数値実験の結果から、モデルマッチング条件を満たさない場合でも、分数階積分調整則により、モデル規範型適応制御系の応答が改善できる事を示す。

第6章では、各章で得られた結果を総括的にまとめ、本研究の成果について述べる。

Abstract

Fractional calculus is the generalized calculus expanding the order of differentiation and integration from integer to arbitrary number. By applying the fractional calculus to the mathematical model, a certain complicated dynamics can be described as simple model more accurately, for example, viscoelasticity's response, Li-ion battery's response, etc. Control systems introducing the fractional integrator can get the great performance because of the flexibility of the design of control law. However, because fractional calculus has the different properties from conventional calculus, the design method of control system for integer order system cannot be applied to the fractional order system directly, and it is needed to solve the issues like the chain-rule and the realization, etc. In this study, to solve these issues, nonlinear control system and adaptive control system containing fractional calculus is researched.

In chapter 1, the background and previous studies are summarized.

In chapter 2, Some basic definition and operation of the fractional calculus are described.

In chapter 3, the backstepping method extended to fractional order is researched, and the sliding mode control system for nonlinear fractional order system is designed through the backstepping method. By the numerical simulation, the effectiveness of the proposed control system is confirmed in case the deterministic disturbance exists.

In chapter 4, for the linear fractional order system containing unknown parameters, the Kreisselmeier type adaptive observer is researched. And, it is shown that the electrical dynamics of the Li-ion battery is described by the fractional calculus because of the diffusion phenomenon of the lithium ion. By the numerical experiment for the system simulating the half-cell of the Li-ion battery, the usefulness of the proposed adaptive observer is confirmed.

In chapter 5, the control system introducing fractional order integrator to the control law of the model reference adaptive control system is designed, and the stability of the designed system is proofed by distributed constant type Lyapunov function through realizing fractional order integrator to distributed parameter system. The high gain adaptation law which disturbs the transient response in case conventional integer order adaptation law is designed for the proposed control system, and the performance of control system is compared with the conventional model reference adaptive control system by numerical simulation. From the result of the numerical simulation, it is shown that the response of the model reference control system could be improved by fractional order integral adaptation law also in case model matching condition is not satisfied.

In Chapter 6, the results of this research are summarized.

目次

第 1 章	緒論	5
1.1	分数階微積分とは	5
1.2	分数階微積分を用いた制御系に関する研究動向	7
1.3	本研究の目的と概要	10
第 2 章	分数階微積分	13
2.1	分数階微積分の定義	13
2.1.1	Rieman-Liouville の分数階積分	13
2.1.2	Rieman-Liouville の分数階微分	15
2.1.3	Caputo の分数階微分	19
2.2	線形分数階システムの安定性・可制御性・可観測性	24
2.3	分数階微積分の近似手法	25
第 3 章	分数階システムに対するバックステッピング法による SMC の設計	33
3.1	はじめに	33
3.2	問題の定式化	34
3.3	バックステッピング法	34
3.3.1	従来のバックステッピング法	34
3.3.2	分数階システムを対象としたバックステッピング法	37
3.4	分数階システムを対象としたスライディングモード制御	46
3.5	分数階システムを対象としたバックステップ法を用いたスライディングモード制御系設計	50
3.6	むすび	55
第 4 章	分数階システムを対象とした適応観測器の設計	56
4.1	はじめに	56
4.2	問題の定式化	57

4.3	適応観測器の設計	58
4.4	リチウムイオン電池	67
4.4.1	Warburg インピーダンス	67
4.4.2	リチウムイオン電池の等価回路モデル	69
4.5	数値シミュレーション	71
4.6	むすび	76
第 5 章	直接法による分数階調整則を持つ MRACS の設計	77
5.1	はじめに	77
5.2	問題の定式化	77
5.3	分数階調整則を持つ MRACS の構成	78
5.3.1	MRACS の構成	78
5.3.2	1/2 階積分型適応調整則とリアプノフ安定性	80
5.4	数値シミュレーション	87
5.5	むすび	90
第 6 章	結論	91
	謝辞	93
	本研究に関する発表論文	94
	参考文献	97

第 1 章

緒論

1.1 分数階微積分とは

熱拡散問題などの偏微分方程式で記述される問題をはじめとして、粘弾性流体の流れ、粘弾性体の力学的応答、アモルファス半導体の電氣的応答、経済の過去との相関関係など、複雑なシステムを分数階微積分によって簡潔・正確にモデル化できることが近年の研究で分かってきている [1, 2, 3, 4, 5]. 分数階微積分とは非整数の階数をもった微積分作用素のことであり、その歴史を扱った多くの文献によれば、1695 年に L'Hopital が Leibniz に宛てた書簡のなかで、(Leibniz が用いた微分を表す記法について)「 $d^n y/dx^n$ は $n = 1/2$ のとき、どういう意味を持つか」を尋ねたことが記録に残っている最初の議論として紹介され、Leibniz はその返信に「そこからはパラドックスが導かれる」としながらも「この明白なパラドックスから、いつの日か、有用な結果が引き出されるだろう」と述べたとされる [6, 7, 8].

微積分の考え方には大きく分けて 2 つあり、物理現象の解析に関連付けた考え方、曲線の関係に関連付けた考え方がある。「位置の 1 階の時間微分が速度であり、2 階の時間微分が加速度である。」というように、時間の微積分を物体の運動と関連付けて解析する考え方は、「ニュートンの慣性法則」で知られる I. Newton から始まる。一方で、Newton の考え方とは別に、「2 次関数を 1 階微分した関数は 1 次関数 (直線) として与えられる」というように、曲線と微積分を関連付ける考え方は G. W. Leibniz から始まる。

前者の考え方をそのまま用いて、分数階微積分と物理的なパラメータとの対応関係を考えようとした場合、「位置の分数階時間微分は位置・速度の中間的なパラメータである」となってしまう、その意味が不明瞭となってしまう。一方、後者の考え方から分数階微積分を考えると、「2 次関数を分数階微分した関数は 2 次関数 (2 次曲線) と 1 次関数 (直線) の中間的な曲線を表す関数である」というように、その意味は明瞭となる。

L'Hopital, S. F. Lacroix, J. L. Lagrange, P. S. Laplace, J. Foulmer などの数学者達は分数階微積分がどのように表現できるかを考察し、様々な定義を生み出していった [9][10].

S. F. Lacroix は階乗を実数へと拡張した関数であるガンマ関数を用い、 x を m 乗した関数 x^m を実数 n で微分する分数階微分を次のように表現した [11].

$$\frac{d^n}{dx^n} x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}. \quad (1.1.1)$$

一方、Fourier は分数階の微分を周波数の位相をずらす形として次のように表現した [12].

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz \int_{-\infty}^{\infty} \cos(px - pz + \frac{n\pi}{2}) dp. \quad (1.1.2)$$

J. Liouville は $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}$ というように関数 $f(x)$ を指数関数の組み合わせで考え、次のように分数階微分を表現した [13].

$$\frac{d^\nu f(x)}{dx^\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^\nu e^{a_n x}. \quad (1.1.3)$$

また、Liouville は畳み込み積分を用いて、分数階積分を次のように表現している。

$$\int^\mu F(x) dx^\mu = \frac{1}{(-1)^\mu \Gamma(\mu)} \int_0^\infty F(x-\alpha) \alpha^{\mu-1} d\alpha. \quad (1.1.4)$$

N. Y. Sonin, A. V. Letnikov, H. Laurent, P. A. Nekrasove, K. Nishimoto は、Cauchy の積分公式を実数に拡張して次式を得ている [14, 15, 16, 17, 18].

$$D^\nu f(z) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i} \int_c \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{\nu+1}} d\xi. \quad (1.1.5)$$

このように、微分の数理的な解釈から様々な定義が提案されてきた。

一方、応用面では、「質点が曲線に沿って曲線状の一点から定点まで重力のみで滑り降りるとき、所要時間と曲線はどのような関係で与えられるか」という物理的な問題の解を与える Abel の積分方程式

$$\int_a^x \frac{f(\eta)}{\sqrt{x-\eta}} d\eta = T(x) f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{T(\eta)}{\sqrt{x-\eta}} d\eta = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} {}_a D_x^{1/2} [T(x)]^{RL}, \quad (1.1.6)$$

が分数階の微積分で表現されることや、粘弾性体の力学的な応答が周波数のべき乗で与えられる [19] (分数階の微積分でモデル化できる) など、分数階微積分によって実際に存在する物理的問題の解が与えられたり、従来の整数階の微積分ではモデル化が困難であったものをモデル化できることが分かっており、計算機の性能の向上とともに、この分野の研究が活発となってきている。

1.2 分数階微積分を用いた制御系に関する研究動向

整数階 (IO : Integer Order) の微積分で構成される従来の制御系について, その微積分を分数階 (FO : Fractional Order) の微積分へと一般化した場合, 制御系は次の4つのシステムに大きく分類されることになる.

- 整数階プラント+整数階コントローラ (IO+IO システム)
- 整数階プラント+分数階コントローラ (IO+FO システム)
- 分数階プラント+整数階コントローラ (FO+IO システム)
- 分数階プラント+分数階コントローラ (FO+FO システム)

IO+IO システムは従来のシステムと同義であり, IO+FO システムは性能向上を目的として制御用デバイスに分数階微積分を導入したシステムである. 一方, FO+IO システムは分数階微積分で一般化されたプラントを整数階微積分のみを用いた従来の制御用デバイスで取り扱うシステムであり, FO+FO システムは分数次数で表されるプラントを分数階に拡張された制御用デバイスで取り扱うシステムである.

分数階微積分は少ないパラメータで高次のシステムを表現することから, 少ないパラメータで高次のコントローラを構成できると言える. 分数階微積分をコントローラに導入した研究の一つとして, PID 制御系の微分器と積分器を分数階微積分により一般化した $PI^\lambda D^\mu$ 制御系に関する研究が知られているが [20, 21], ISE (Integral squared error) や ITAE (Integral time-weighted absolute error) に基づいて最適なパラメータチューニングを施した場合, IO プラントと FO プラントの両方で, 最適化された PID 制御系に比べ $PI^\lambda D^\mu$ 制御系がより優れた制御性能を発揮可能であることが報告されている [22].

このように従来の PID 制御系のような古典制御系に対し分数階微積分をコントローラに取り込んだシステムは, 大きく分けて次の4つのグループが存在する.

1. TID(Tilted Integral Derivative) 制御システム.
2. CRONE(Controle Robust d'Ordre Non Entier : 仏語で non-integer order robust control の意) システム.
3. $PI^\lambda D^\mu$ 制御システム.
4. 分数階位相補償器.

TID 制御システムは, PID 制御器の比例制御の項を $s^{-1/n}$ で置き換えたシステムであり, 以下の構造を持つ.

$$C(s) = K_t s^{-1/n} + K_i s^{-1} + K_d s, \quad (1.2.1)$$

ここで $n \neq 0$ であり, 通常は $2 \leq n \leq 3$ として設定される. TID 制御システムは $PI^\lambda D^\mu$ 制御システムと比較してパラメータのチューニングが簡便でありながら, 従来の PID 制御系と比較して外乱やパラメータ変動についてよりロバストな性能を発揮できるなど, 優れたパフォーマンスを有する制御システムである.

CRONE は A. Oustaloup によって提案された制御システムであり, 分数階微積分を制御に応用した早期の代表的な研究のひとつである [23]. CRONE には第一世代から第三世代の分類が存在する. 第一世代の CRONE は次式で表されるコントローラを取り扱ったものであった.

$$C(s) = C_0 s^\alpha, \quad (1.2.2)$$

ここで, C_0 と α は実数を表す. このコントローラを設計するために A. Oustaloup は s^α をボード線図上で近似する手法を開発したが, この手法は現在でも多くの分数階微積分を制御系に応用した研究で用いられている. 第二世代の CRONE の研究では, 制御系の一巡伝達関数 $F(s)$ を次のように設計した場合の安定性について, 主にニコルス線図を用いて解析が行われた.

$$F(s) = C(s)G(s) = \left(\frac{\omega_{cg}}{s}\right)^\alpha, \quad (1.2.3)$$

ここで $G(s)$ は制御対象の伝達関数を表す. 第三世代の CRONE では, 開ループ系が上記で表されるシステムについての解析を, 閉ループ系の解析へと拡張し, 制御系のロバスト性を考慮した制御系設計について周波数ベースで研究された.

PID 制御系は簡易な構成でありながらもロバストな性能を有しており, パラメータチューニングのためのアルゴリズムが充実していることから, 現在, 最も産業で普及している制御系である. PID 制御系の基本構造を踏襲して微積分階数を実数に拡張した制御系が $PI^\lambda D^\mu$ 制御系であり, そのコントローラの構造は次式で与えられる.

$$C(s) = K_p + T_i s^{-\lambda} + T_d s^\mu, \quad (1.2.4)$$

ここで, K_p , T_i , T_d はそれぞれ比例ゲイン, 傾斜積分ゲイン, 傾斜微分ゲインであり, λ , μ はそれぞれ積分階数と微分階数を表す実数である. $PI^\lambda D^\mu$ 制御系は TID 制御系とよく似た構造を持つが, TID 制御系を構成するパラメータが K_t , K_i , K_d , $1/n$ の 4 つであるのに対し, $PI^\lambda D^\mu$ 制御系は K_p , T_i , T_d , λ , μ の 5 つのパラメータで構成されており, TID 制御系よりも若干複雑な制御系であるといえる. PID 制御系や TID 制御系に比較し, コントローラをより自由に構成できることから, この制御系のパラメータチューニングに関する研究が活発になされている [24, 25].

分数階位相補償器は次式のような構造を有するコントローラである.

$$C(s) = C_0 \left(\frac{1 + \omega_b^{-1}s}{1 + \omega_h^{-1}s}\right)^\alpha, \quad (1.2.5)$$

ここで、 $C_0 > 0$ 、 $-1 < \alpha < 1$ であり、 ω_b 、 ω_h は $0 < \omega_b < \omega_h$ であり、位相を補償する周波数の下界と上界を表す。 $\alpha > 0$ のとき、この補償器は位相進み補償器として振る舞い、 $\alpha < 0$ のとき、この補償器は位相遅れ補償器として振る舞う。分数階微積分を用いることで、より自由度の高い補償器の設計が可能となることから、この補償器のパラメータチューニングが適切に行われることで、優れたパフォーマンスを持つ制御系を構成することができる。

このような分数階微積分を古典制御系に導入して拡張した制御系は、PID 制御のように現在広く普及している制御系を更に発展させるものとして期待されており、応用面に関しても活発に研究がなされている。例えば、近年では、分数階微積分を有する PID コントローラをスマートグリッドの研究領域に用いた S. Sondhi ら、S. Ghasemi らや I. Pan らの研究が知られている [26, 27]。S. Sondhi らは一基の発電機の負荷周波数制御に対し $PI^\lambda D^\mu$ 制御系を設計し、I. Pan らは異なる種類の ESS (Energy Storage System) で構成されるシステムの充放電制御にファジー $PI^\lambda D^\mu$ 制御系を設計を行い、それぞれ、従来の PID 型の制御系を用いた場合よりも制御性能が向上することを示している。

しかし、実は、このような制御系の有効性についての言及はかなり早期に為されており、古典制御理論の黎明期である 1940 年時点で、“分数階微積分” という表現はなされていないが H. Bode が“理想的なカットオフ特性”として、ナイキスト線図を描いたときに原点を通る斜めの直線を描くシステムについて述べている [28]。このシステムは $G(s) = (\omega_{cg}/s)^\alpha$ という分数階微積分で表される伝達関数と同一のものであり、ゲインによらず、位相余裕 ϕ_m を $\phi_m = \pi - \frac{\alpha\pi}{2}$ とするものである。

分数階微積分を制御系に導入した初期の研究は周波数制御を対象としており、その先駆的な研究として、1960 年代の真鍋の研究が知られている [29, 30]。同様に古典制御理論の拡張として、A. Oustaloup の CRONE, I. Podlubny の $PI^\lambda D^\mu$ 制御系の研究がなされてきた [23, 20]。しかし、このような古典制御理論への分数階微積分の応用に関する研究から、システムの状態空間表現に基づく現代制御理論への分数階微積分の応用への発展は、分数階微積分を有する状態空間表現されたシステムの安定性や可制御性・可観測性が不明瞭であったこともあり、長らくなされていなかった。しかし、1990 年代後半に、D. Matignon らによって状態空間表現された分数階システムの安定性・可制御性・可観測性が示されたことで、分数階微積分を現代制御理論に応用する研究がなされるようになっていった [31, 32]。

現代制御理論を非整数階に拡張した近年の研究のひとつとして、D. Sierociuk らによる分数階システムを対象としたカルマンフィルタの設計 [33] に関する研究が挙げられる。また、分数階微積分システムを対象とした最適制御問題に関して、O. P. Agrawal による FOCP (Fractional Optimal Control Problem) の解法に関する研究 [34] や Y. Li らによる最適レギュレータ問題の研究 [35] などが行われている。日本における研究では、池田らによる最適レギュレータの設計や同一次元観測器の設計などが行われている [36, 37, 38]。

更に、モデルベース制御の領域だけではなく、近年、ILC (Iterative Learning Control) や極値制御など、モデルフリー制御系へ分数階微積分を導入した研究も行われるようになってきている [39, 40]. D.Pan らは入出力のみがわかるブラックボックスなシステムに $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 型のアルゴリズムを用いた ILC を設計し収束性を評価しており、H. Malek らは極値制御系のローパスフィルターとハイパスフィルターに分数階微積分を導入した制御系をダイナモメーターを用いたベンチマークに対して設計し、従来の極値制御系と比較して極値への収束がはやくなることを示している。

このように、従来の制御系を分数階に拡張した制御系の設計に関する研究は、まだ、発展途上であり、主に PID 制御系において、分数階数に制御系が拡張することで制御性能が向上することが報告されていることから、従来の制御系を分数階数に拡張した制御系を開発することにより、将来的に有用な制御系が設計可能となることが期待される。

1.3 本研究の目的と概要

前節にて、分数階微積分作用素を用いた制御系の設計の既存研究について述べた。整数階から分数階へと拡張されることにより、制御系は、

- IO プラント + IO 制御器
- IO プラント + FO 制御器
- FO プラント + IO 制御器
- FO プラント + FO 制御器

の4種類に分類されることを述べたが、非線形分数階プラントに対する制御系設計について、スライディングモード制御系を非線形分数階システムに対して構築した A. Si-Ammour らや A. Pisano らの研究 [41, 42], 分数階微積分の加法性に基づいたバックステッピング法に関する Z. Wang の研究 [43] などがあるものの、事例がまだ少なく、分数階微積分に関して微分連鎖則や微分のライプニッツ法則などの諸法則が整数階の微積分で成立するものと異なることから、従来の非線形制御系設計手法を整数階から分数階に一般化した設計法を開発することにはいまだ課題点が多い。例えば、Wang の用いたバックステッピング法は分数階微積分の加法性に基づいているため、多数の方程式で記述される非線形分数階システムに対して用いることは困難となる。更に、未知パラメータを含む線形システムに関して適応制御系にに分数階微積分を導入して検討を行った B. M. Vinagre らによる報告 [44] などがなされているが、制御系の安定性に関する詳細な検討などは行われておらず、分数階微積分を含んだ制御系の安定性の証明法の新たな開発などが必要となる。また、粘弾性体やリチウムイオン電池の動特性など、複雑なシステムを線形分数階システムとして簡潔に少ないパラメータで記述することができることから、未知パラメータを含む線形分数階システムのパラメータと状態

のオンライン同定手法は工学的に大きな意味を持つものと考えられる。

従来の研究では，ポスト現代制御の枠組みを整数階から分数階へと拡張した制御アルゴリズムの実装が，計算機の性能の問題もあり困難であったが，近年，スマートフォンの普及に伴い，高性能で小型な計算機が急速に普及していることから，計算コストの制約が取り払われてきている．このことから，非線形制御系や適応制御系を整数階システムから分数階システムへと拡張した制御理論について，ハードウェアの性能の向上に伴い，応用上の実現可能性が高まってきている．更に，線形システム及び非線形システムの解析に分数階微積分を導入するモデル化の研究も進展していることから，未知パラメータを含む分数階システムや，非線形分数階システムを取り扱うことのできる制御理論の開発を行い，理論を発展させる上で課題となる分数階微積分の特殊性に由来する問題を解決することは，工学的に重要な意味を持つと考えられる．

そこで本研究では，

1. 非線形分数階システムを対象とし，整数階から分数階に一般化された非線形制御系設計法の開発
2. 未知パラメータを含む線形分数階システムに対して適用可能な適応観測器の設計法を開発，及びリチウムイオン電池のパラメータと状態のオンライン同定に対する応用可能性の検討
3. 未知パラメータを含む線形システムを対象として分数階適応調整則を有するモデル規範型適応制御系を構築，その安定性の証明

を行い，これらについて研究を通し，従来の制御系を分数階に拡張する上での課題点の解決することを目指した．

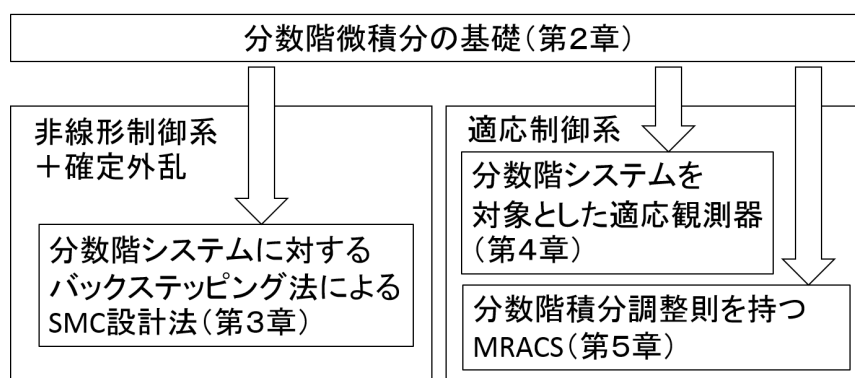


図 1.3.1 Configuration of thesis

図 1.3.1 に本論文における各章の位置付けを示す．

本論文では，分数階微積分を有する系を対象とした制御器の設計法，観測器の設計法，および調整則に分数階微積分を有する系における制御系の構成法に関して述べており，それら

を非線形制御系と適応制御系とでそれぞれ並列に取り扱っている。

本論文の構成は以下の通りである。

第2章では、本論文の基礎となる分数階微積分の定義と近似手法について示す。

第3章では、確定的な有界外乱が存在する非線形分数階システムに対して有効なバックステッピング法を用いたスライディングモード制御系を提案する。3.2節において、問題の定式化を行い、3.3節にて、従来の整数階システムを対象としたバックステッピング法と共に非線形分数階システムを対象とするバックステッピング法について記述するとともに、3.4節にて分数階システムに対するスライディングモード制御器の構成法について述べ、3.5節にて数値シミュレーションにより提案手法の有効性を確認する。

第4章では、未知パラメータを含む線形分数階システムに対して有効な適応観測システムを提案する。4.2節で問題の定式化を行い、4.3節で分数階システムを対象とした Kreisselmeier 型適応観測器の設計を行う。4.4節では、リチウムイオン電池の動特性が線形分数階システムとして表されることを述べ、4.5節では提案した適応観測器の有用性について、数値シミュレーションを行い確認する。

第5章では、分数階の微積分を制御器の調整則に導入した適応制御系を提案する。5.2節で問題の定式化を行い、5.3節で分数階調整則を有するモデル規範型適応制御系の構成法を示すとともに、分数階積分器を分布定数系へ実現することを通し、そのリアプノフ安定性に関して証明を与える。5.4節では、提案したモデル規範型適応制御系の有効性について数値実験を用いて確認を行う。

第6章は結論であり、本論文で得られた成果を総括的にまとめている。

第 2 章

分数階微積分

2.1 分数階微積分の定義

2.1.1 Riemann-Liouville の分数階積分

関数 $f(t)$ の $[a, t]$ の 1 階の積分は次式のように与えられる.

$$D^{-1}f(t) = \int_a^t f(\tau)d\tau. \quad (2.1.1)$$

同様に 2 階の積分は次式のように与えられる.

$$D^{-2}f(t) = \int_a^t \int_a^{\tau_1} f(\tau_2)d\tau_2d\tau_1 = \int_a^t (t - \tau)f(\tau)d\tau. \quad (2.1.2)$$

同様にして, n 階 (ここでは n は整数とする) の積分を計算すると,

$$D^{-n}f(t) = \int_a^t \frac{(t - \tau)^{n-1}}{(n - 1)!} f(\tau)d\tau = f(t) * \frac{t^{n-1}}{(n - 1)!}. \quad (2.1.3)$$

ここで, $*$ は畳み込み積分を表し,

$$f(t) * g(t) = \int_a^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau, \quad (2.1.4)$$

とする.

このとき, n 階の積分において $(n - 1)!$ という形で階乗が表れていることが分かる. もし階乗を整数のみでなく分数においても定義することが可能であれば, 分数階の積分を表現することが可能であると考えられる. 階乗を整数から実数へと拡張するためには, $0!, 1!, 2!, \dots$ を滑らかにつなぐ関数を考えればよいといえる. そのような「階乗を整数から実数に拡張するための関数」として, Gamma 関数が定義されている.

Gamma 関数の代表的な表現式として, Euler の第二種積分とも呼ばれる次式が知られている.

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{z-1} dx, \quad \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (2.1.5)$$

Gamma 関数は次の基本的な性質を持っている.

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (2.1.6)$$

もし, z が正の整数 n ならば, Gamma 関数は $\Gamma(n) = (n-1)!$ と等しくなる. 正の実数の領域において, 凸関数となる Gamma 関数が一意に定まることは証明されているが, 負の実数の領域においては凸な Gamma 関数は一意に定まっておらず, 解析接続を用いて (2.1.6) 式を満たすような関数を探すしかない. 負の実数領域でのガンマ関数を計算する表現として次式が知られている.

$$\Gamma(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^k \frac{k^z k!}{z-k}. \quad (2.1.7)$$

Gamma 関数を用いて, 先程の $f(t)$ を n 階積分した (2.1.3) 式を書き直すと次式が得られる.

$$D^{-n} f(t) = \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{\Gamma(n)} f(\tau) d\tau = f(t) * \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}, \quad (2.1.8)$$

このとき, 畳み込み積分の式に $\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}$ が表れているが, この関数をラプラス変換すると,

$$\mathcal{L} \left[\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)} \right] = s^{-n}, \quad (2.1.9)$$

が得られ, ラプラス変換記号 $\mathcal{L}[\cdot]$ を用いて,

$$D^{-n} f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)s^{-n}], \quad (2.1.10)$$

という表現でも $f(t)$ を n 階積分した式を表すことができる.

このような考え方から, Riemann-Liouville の分数階積分が次式のように定義される.

定義 1. Riemann-Liouville の分数階積分

$f(t)$ の n 階積分の式を実数に拡張し, q 階の Riemann-Liouville の分数階積分の式が次式のように定義される.

$${}_a D_t^{-q} [f(t)]^{RL} = \int_a^t \frac{(t-\tau)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(\tau) d\tau. \quad (2.1.11)$$

この積分において, 積分階数の加法性が次のように成立することが知られている.

$${}_a D_t^{-q_2} \left[{}_a D_t^{-q_1} [f(t)]^{RL} \right]^{RL} = {}_a D_t^{-q_1-q_2} [f(t)]^{RL}. \quad (2.1.12)$$

2.1.2 Rieman-Liouville の分数階微分

Rieman-Liouville の分数階積分について、Gamma 関数による階乗の実数への拡張とともに説明を行った。

積分の逆操作を微分と見なすことができるならば、分数階微分は分数階の積分階数を負にしたものと考えることができるが、前述した Rieman-Liouville の分数階積分の積分階数を負の値にして計算を行っても解を得ることはできない。以下にその計算例を示す。

$${}_a D_t^q [f(t)]^{RL} = \int_a^t \frac{(t-\tau)^{-q-1}}{\Gamma(-q)} f(\tau) d\tau. \quad (2.1.13)$$

$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ より、

$$\int_a^t \frac{(t-\tau)^{-q-1}}{\Gamma(-q)} f(\tau) d\tau = \int_a^t \frac{(t-\tau)^{-q-1}}{(-q)^{-1}\Gamma(1-q)} f(\tau) d\tau. \quad (2.1.14)$$

部分積分を用いて、

$$\int_a^t \frac{(t-\tau)^{-q-1}}{(-q)^{-1}\Gamma(1-q)} f(\tau) d\tau = \left[\frac{(t-\tau)^{-q}}{\Gamma(1-q)} f(\tau) \right]_a^t - \int_a^t \frac{(t-\tau)^{-q}}{\Gamma(1-q)} f^{(1)}(\tau) d\tau, \quad (2.1.15)$$

ここで、 $(t-\tau)^{-q}$ に t をそのまま代入すると無限大になってしまい、このままでは分数階微分の公式を得ることができない。

だが、Abel の積分方程式の解法を用いることで、分数階微分の公式を得ることが可能となる。Abel の積分方程式の解法はもともと「ある曲線上に質点を配置してその質点がある高さ x を滑り降りる時間 $T(x)$ を設計パラメータとしたとき、曲線 $C(x)$ をどのように設計するか」という工学上の要求から研究されたものであり、この問題の解は次式を満たす解を得ることで解けることが知られていた。

$$\int_a^x \frac{f(\eta)}{\sqrt{x-\eta}} d\eta = T(x), \quad (2.1.16)$$

ただし、 $f(x) = \left(\frac{1+c(x)^2}{2g} \right)^{\frac{1}{2}}$ 、 $c(x) = \frac{dC(x)}{dx}$ であり、 g は重力加速度である。Abel はこの問題を解くことで、滑り降りる時間を一定とした場合（等時曲線問題）、その解がサイクロイドとなることを示している。

(2.1.16) 式は曲線の決定問題であるが、分数階微分の公式を同様の形式の問題に置き換えて導出する事ができる。簡単化のために $0 < p < 1$ として、以下のように既知の関数 $g(t)$ と未知の関数 $f(t)$ が与えられるとする。

$$\int_a^t \frac{(t-\tau)^{p-1}}{\Gamma(p)} f(\tau) d\tau = g(t), \quad (2.1.17)$$

このとき、 $g(t)$ は $f(t)$ を分数階積分した関数 ($g(t) = {}_a I_t^p [f(t)]^{RL}$) とみなすことができ、 $f(t)$ は $g(t)$ を分数階微分した関数 ($f(t) = {}_a D_t^p [g(t)]^{RL}$) と考えることができる。つまり、 $g(t)$ にどのような演算を行えば $f(t)$ が表せるかを示すことで、分数階の微分が表現できるといえる。ここから、Abel の積分方程式の解法に従って $g(t)$ を用いて $f(t)$ を表す。

最初に、(2.1.17) 式の両辺を t^{-p} で $[t, a]$ の区間で畳み込み積分する。

$$\int_a^t (t - \tau_1)^{-p} \int_a^{\tau_1} \frac{(\tau_1 - \tau_2)^{p-1}}{\Gamma(p)} f(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 = \int_a^t (t - \tau)^{-p} g(\tau) d\tau. \quad (2.1.18)$$

次に、左辺の積分順序を交換すると

$$\int_a^t \frac{f(\tau_2)}{\Gamma(p)} \int_{\tau_2}^t (t - \tau_1)^{-p} (\tau_1 - \tau_2)^{p-1} d\tau_1 d\tau_2 = \int_a^t (t - \tau)^{-p} g(\tau) d\tau. \quad (2.1.19)$$

ここで、 $\eta = \tau_1 - \tau_2$ と置き換えると、

$$\int_a^t \frac{f(\tau_2)}{\Gamma(p)} \int_0^{t-\tau_2} (t - \tau_2 - \eta)^{-p} \eta^{p-1} d\eta d\tau_2 = \int_a^t (t - \tau)^{-p} g(\tau) d\tau. \quad (2.1.20)$$

更に、 $\xi = \frac{\eta}{t - \tau_2}$ と置き換えを行うと、

$$\int_a^t \frac{f(\tau_2)}{\Gamma(p)} \int_0^1 (1 - \xi)^{-p} \xi^{p-1} d\xi d\tau_2 = \int_a^t (t - \tau)^{-p} g(\tau) d\tau. \quad (2.1.21)$$

ここで左辺の ξ による積分に注目すると、この積分は Beta 関数となっている。Beta 関数は次式のように与えられる。

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 (1 - \xi)^{\alpha-1} \xi^{\beta-1} d\xi = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}. \quad (2.1.22)$$

ここから、次式が得られる。

$$\int_a^t \Gamma(1 - p) f(\tau) d\tau = \int_a^t (t - \tau)^{-p} g(\tau) d\tau. \quad (2.1.23)$$

よって、 $g(t)$ を用いて $f(t)$ は次式のように表される。

$$f(t) = \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{(t - \tau)^{-p}}{\Gamma(1 - p)} g(\tau) d\tau. \quad (2.1.24)$$

このようにして、 $g(t)$ を分数階微分した式 $f(t)$ を得ることができた。この式の形を見ると、 $f(t)$ は $g(t)$ を $1 - p$ 階積分した後に 1 階微分した式となっていることが分かる。ここから分数階微分について、次の定義が得られる。

定義 2. Riemann-Liouville の分数階微分

関数 $f(t)$ が $[a, \infty)$ において区間連続かつ積分可能であるとする。このとき、 $f(t)$ の q 階の Riemann-Liouville の分数階微分は次式で定義される。

$$\begin{aligned} {}_a D_t^q [f(t)]^{RL} &= \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-q-1}}{\Gamma(n-q)} g(\tau) d\tau \\ &= \frac{d^n}{dt^n} [f(t) * \Phi_{n-q}(t)] \\ &= \frac{d^n}{dt^n} [{}_a D_t^{-(n-q)} [g(t)]^{RL}], \end{aligned} \quad (2.1.25)$$

ただし、 $n < q < n+1$ である。

Riemann-Liouville の分数階積分と分数階微分の定義をひとつにまとめることができる。

定義 3. Riemann-Liouville の分数階微積分の定義

関数 $f(t)$ が $[a, \infty)$ において区間連続かつ積分可能であるとする。このとき、 $f(t)$ の q 階の Riemann-Liouville の分数階微積分は次式で定義される。

$${}_a D_t^q [f(t)]^{RL} = \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-q-1}}{\Gamma(n-q)} f(\tau) d\tau. \quad (2.1.26)$$

積分の際には $n = 0$, $q < 0$ であり、微分の際には $n < q < n+1$ である。

指数関数とべき乗関数を Riemann-Liouville の分数階微積分の定義にしたがって計算した結果を図 2.1.1 から図 2.1.4 に示す。

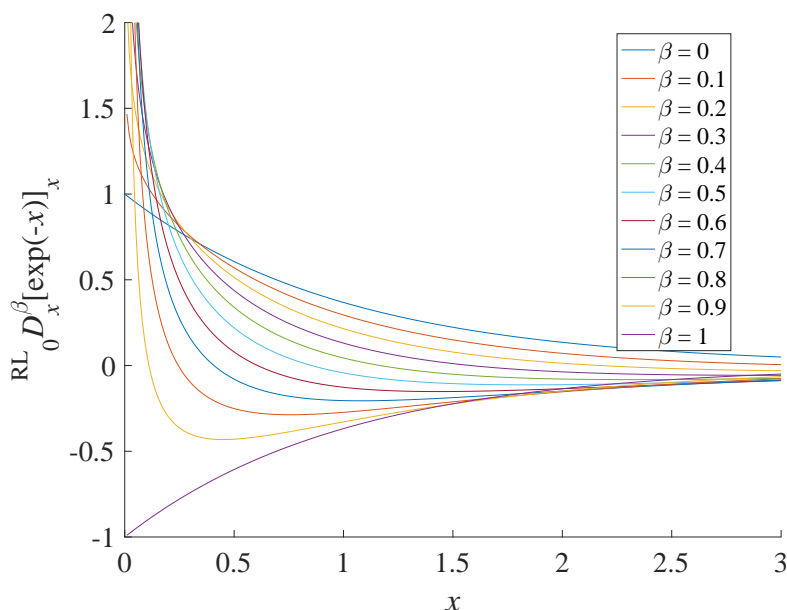


図 2.1.1 2D plot of ${}_0 D_x^\beta [e^{-x}]_x^{RL}$

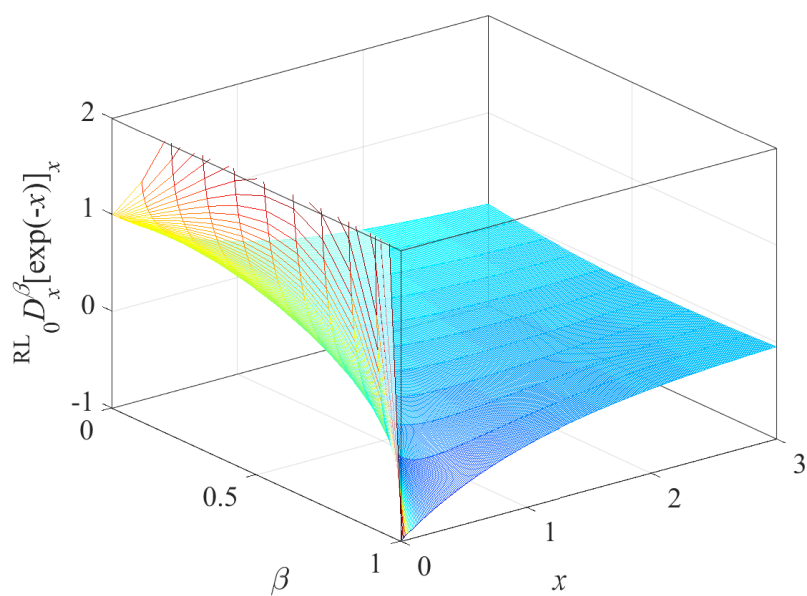


圖 2.1.2 3D plot of ${}_0D_x^\beta [e^{-x}]_x^{RL}$

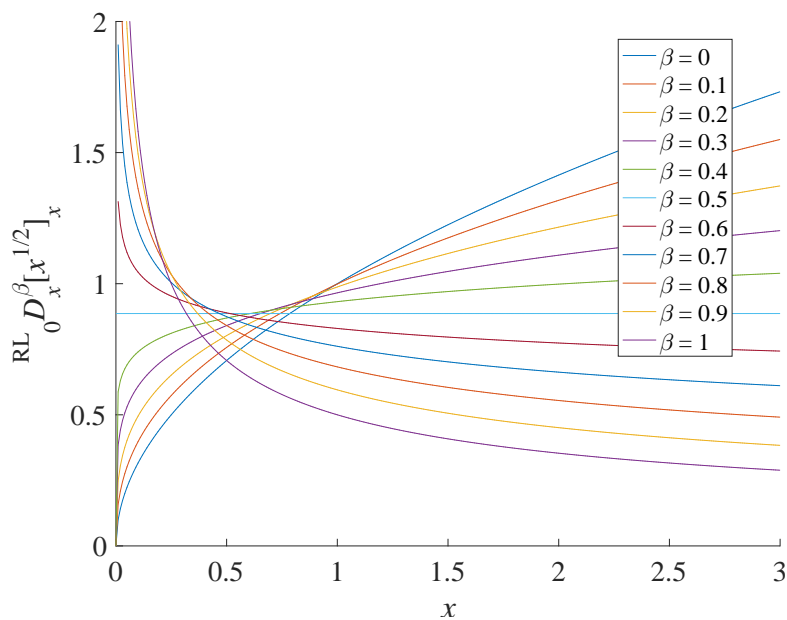


圖 2.1.3 2D plot of ${}_0D_x^\beta [x^{1/2}]_x^{RL}$

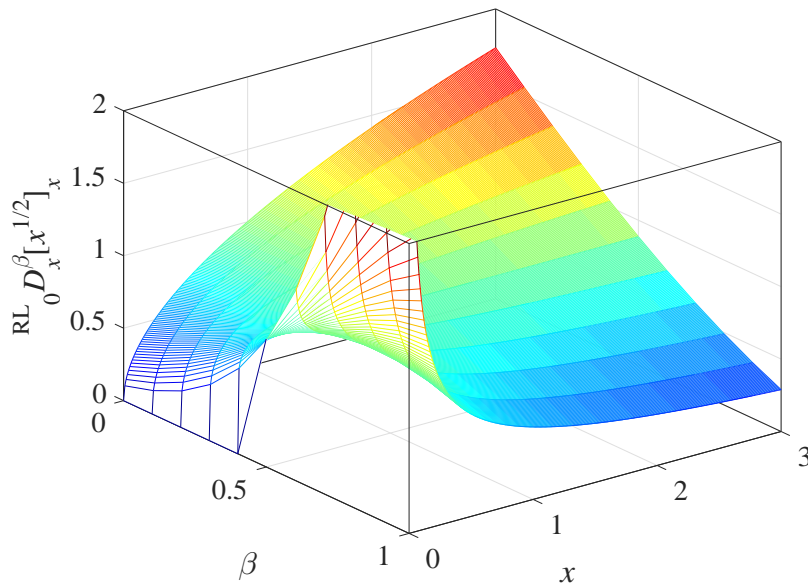


図 2.1.4 3D plot of ${}_0^{\text{RL}}D_x^\beta [x^{1/2}]_x^{\text{RL}}$

2.1.3 Caputo の分数階微分

ここまで、Riemann-Liouville の分数階微積分に関して説明を行ってきたが、微積分の開始点の値が 0 でない関数に対しては、この分数階微積分の初期値が有界とならないという問題があり、物理現象に Riemann-Liouville の分数階微積分を導入しようとした時、物理的な対応関係に不明瞭な点が出るという問題があった。Caputo の分数階微積分はこの初期値問題を解決するために提案された定義である。Riemann-Liouville の分数階微積分は Abel の積分方程式の解法から導出されたが、Caputo は負の実数領域のガンマ関数に対し、ガンマ関数の基本的性質に矛盾が出ない範囲で新たな性質を仮定することで、初期値問題のない分数階微積分の定義式を導出した。

彼は Riemann-Liouville の分数階積分の畳み込み積分に現れるガンマ関数を含んだ関数 $\Phi_p(t) = \frac{t^{p-1}}{\Gamma(p)}$ が次式の性質を満たすものと仮定した。

$$\lim_{p \rightarrow -k} \Phi_p = \delta^{(k)}(t), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.1.27)$$

ここで、 $\delta(t)$ は Dirac のデルタ関数である。

Caputo の分数階微積分の定義式の導出の前に、次の補題を証明する。

補題 4. 任意の実数 p, q に対して次式が成立する。ただし、 $*$ は a から t までの畳み込み積分を表す。

$$\Phi_p(t-a) * \Phi_q(t) = \Phi_{p+q}(t-a). \quad (2.1.28)$$

Proof. 畳み込み積分

$$\Phi_p(t-a) * \Phi_q(t) = \int_a^t \frac{(\tau-a)^{p-1}}{\Gamma(p)} \frac{\tau^{q-1}}{\Gamma(q)} d\tau, \quad (2.1.29)$$

を変数変換 $\tau = (t-a)\eta + a$ によって右辺を書き換えると,

$$\begin{aligned} \int_a^t \frac{(\tau-a)^{p-1}}{\Gamma(p)} \frac{\tau^{q-1}}{\Gamma(q)} d\tau &= \frac{(t-a)^{p+q-1}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^1 \eta^{p-1}(1-\eta)^{q-1} d\eta \\ &= \frac{(t-a)^{p+q-1}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} B(p, q) \\ &= \frac{(t-a)^{p+q-1}}{\Gamma(p+q)}. \end{aligned} \quad (2.1.30)$$

解析接続したガンマ関数を用いることで, 任意の実数 p, q において成立する. \square

Caputo が仮定した新たな性質とここで証明した性質を用いて, Rieman-Liouville の分数階積分の積分階数を負 $p = -q$ として計算を行う. (微分階数を正の実数 q とした微分に相当する) まず, $\Phi_p(t)$ の畳み込み積分の性質を用いて, ${}_a I_t^{-q} [f(t)]^{RL} = {}_a D_t^q [f(t)]^C$ を次式のように書き直す.

$${}_a D_t^q [f(t)]^C = f(t) * \Phi_{-q}(t) = (f(t) * \Phi_{-n}(t)) * \Phi_{n-q}(t). \quad (2.1.31)$$

Caputo の仮定した性質

$$\Phi_{-n}(t) = \lim_{p \rightarrow -n} \delta^{(n)}(t), \quad (2.1.32)$$

を用い, 更に, デルタ関数を n 階微分した関数 $\delta^{(n)}$ との畳み込み積分が

$$f(t) * \delta^{(n)} = \mathcal{L}^{-1} [F(s)s^n] = \frac{d^n}{dt^n} f(t), \quad (2.1.33)$$

というように微分作用素の役割を果たすことから, 次式が³出される.

$$\begin{aligned} {}_a D_t^q [f(t)]^C &= (f(t) * \Phi_{-n}(t)) * \Phi_{n-q}(t) \\ &= (f(t) * \delta^{(n)}) * \Phi_{n-q}(t) \\ &= f^{(n)}(t) * \Phi_{n-q}(t) = \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-q-1}}{\Gamma(n-q)} f^{(n)}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.1.34)$$

(2.1.34) 式を見ると, Rieman-Liouville の分数階微分は「 $n-q$ 階積分した関数を n 階微分する」操作によって分数階の微分を表現したものだ³のに対して, Caputo の導出した分数階微分の表現は「 n 階微分した関数を $n-q$ 階積分する」という形になっていることが分かる. 以上から Caputo の分数階微分を次のように定義する.

定義 5. Caputo の分数階微分の定義

$f(t)$ が区間 $[a, t]$ で C^n 級関数であるとき, q 階微分する Caputo の分数階微分は次式で表される.

$$\begin{aligned} {}_a D_t^q [f(t)]^C &= \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-q-1}}{\Gamma(n-q)} f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= {}_a I_t^{n-q} \left[f^{(n)}(t) \right]^{RL}, \end{aligned} \quad (2.1.35)$$

ただし, $n = [q]$ であり, a は積分の開始点を表す.

また Caputo の分数階微分では微分階数の加法性が成立する.

定理 6. Caputo の分数階微分の微分階数の加法性

$t < a$ において $f(t) = 0$ となる関数 $f(t)$ に対して, Caputo の分数階微分は任意の実数 α, β で次式が成立する.

$${}_a D_t^\beta \left[{}_a D_t^\alpha [f(t)]^C \right]^C = {}_a D_t^\alpha \left[{}_a D_t^\beta [f(t)]^C \right]^C = {}_a D_t^{\alpha+\beta} [f(t)]^C. \quad (2.1.36)$$

Proof. $\Phi_p(t)$ の畳み込み積分に関する性質を用いて証明することができる.

$$(f(t) * \Phi_\alpha(t)) * \Phi_\beta(t) = f(t) * (\Phi_\alpha(t) * \Phi_\beta(t)) = f(t) * \Phi_{\alpha+\beta}(t). \quad (2.1.37)$$

□

Caputo の分数階微分の定義は, Riemann-Liouville の分数階微分の定義と異なり, 初期値の問題があらわれないことから, 広く工学的な分野において採用されている. 本論文では, 分数階の微分に Caputo の定義を採用するものとし, $D^q [f(t)], f^{(q)}, df^q/dt^q$ などと微分の定義が明示的に記述されていない場合には, 暗黙のうちに Caputo の定義を用いるものとする.

指数関数とべき乗関数を Caputo の分数階微分の定義にしたがって計算した結果を図 2.1.5 から図 2.1.8 に示す. 図 2.1.1 から図 2.1.4 に示された Riemann-Liouville の分数階微分の結果と比較すると, Caputo の分数階微分の定義を用いることで, 元の関数が積分の開始点で初期値が 0 とならない場合, 演算結果の関数の初期値が 0 となることが確認できる. また, 元の関数において, 積分の開始点の値が 0 の場合には, Riemann-Liouville の分数階微分の結果と一致することがわかる.

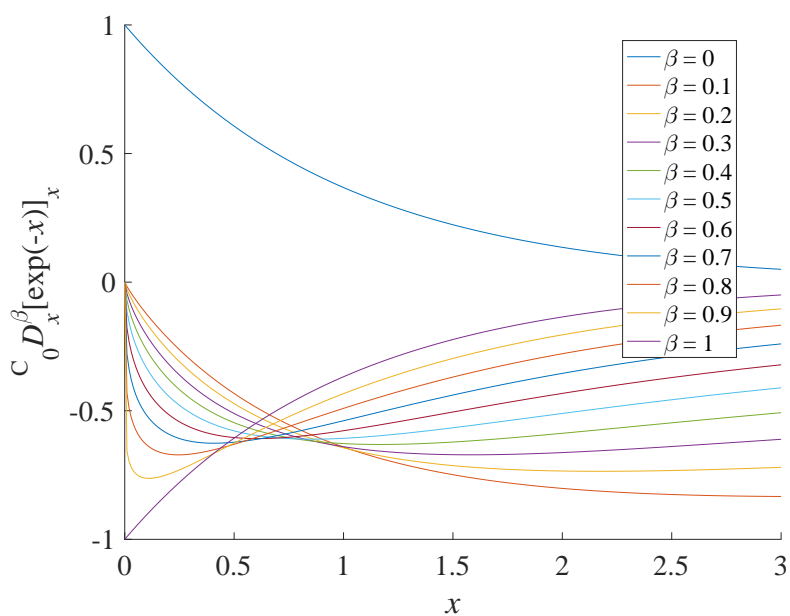


圖 2.1.5 2D plot of ${}_0^C D_x^\beta [e^{-x}]_x$

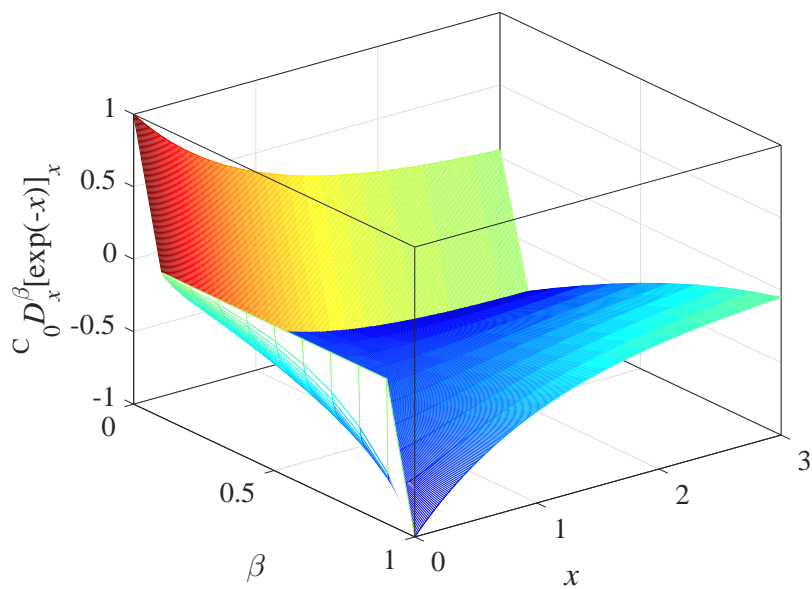


圖 2.1.6 3D plot of ${}_0^C D_x^\beta [e^{-x}]_x$

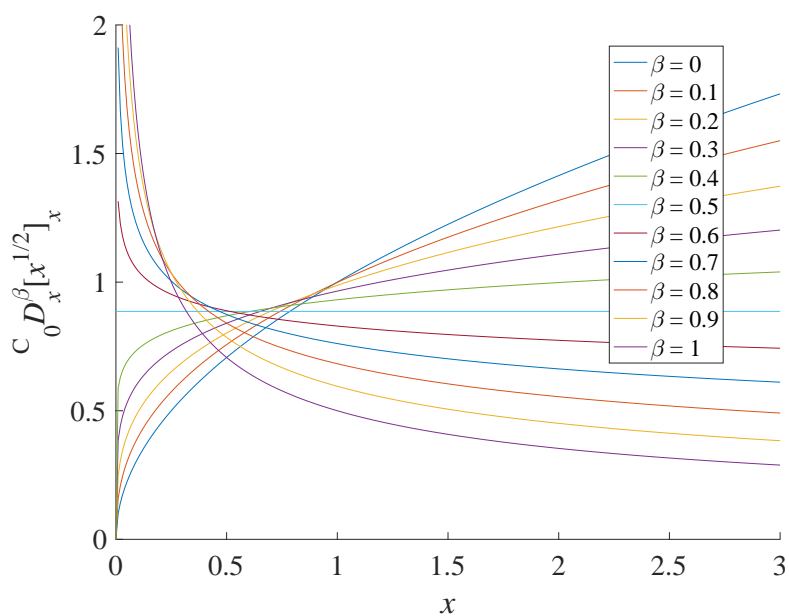


圖 2.1.7 2D plot of ${}_0D_x^\beta [x^{1/2}]_x^C$

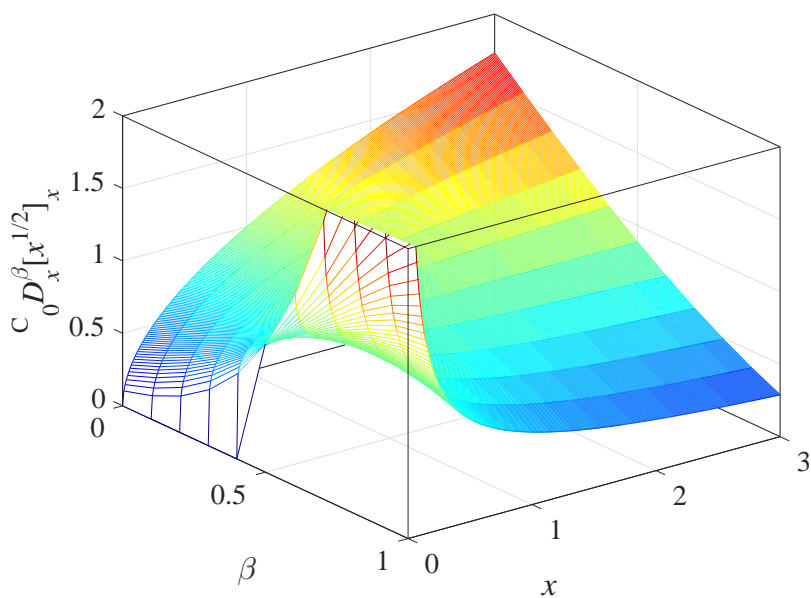


圖 2.1.8 3D plot of ${}_0D_x^\beta [x^{1/2}]_x^C$

2.2 線形分数階システムの安定性・可制御性・可観測性

線形分数階システムの安定性・可制御性・可観測性に関し、以下の補題が成立することが知られている [50].

補題 7. 線形分数階システムの安定性

線形時不変な自由系 (ただし, $0 < q \leq 1$)

$$D^q \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.2.1)$$

において、任意の初期値 \mathbf{x}_0 に対して、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_0\| = 0$ が成立する (漸近安定となる) 必要十分条件は、行列 \mathbf{A} の固有値 $\lambda_i, (i = 1, 2, \dots, n)$ の偏角が次式を満たすことである.

$$|\arg(\lambda_i)| > \frac{q\pi}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2.2)$$

補題 8. 線形分数階システムの可制御性

線形時不変な分数階システムが,

$$D^q \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.2.3)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (2.2.4)$$

として与えられたとき、以下の条件は等価である.

1. (2.2.3) 式で与えられたシステムについて、任意に与えられた初期状態 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ 、時刻 $t_1 > 0$ および目標状態 \mathbf{x}_1 に対し、解が $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$ を満たす入力が存在する (可制御)
2. 次の可制御性行列のランクが n である.

$$\mathbf{N}_C = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]. \quad (2.2.5)$$

補題 9. 線形分数階システムの可観測性

以下の条件は等価である.

1. (2.2.3) 式と (2.2.4) 式で与えられたシステムについて、任意に与えられた時刻 $t_1 > 0$ に対し、時間区間 $[0, t_1]$ における入力 $u(t)$ と出力 $y(t)$ の時間応答から初期状態 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ を決定できる (可観測)
2. 次の可制御性行列のランクが n である.

$$\mathbf{N}_O = [\mathbf{C}^\top \quad (\mathbf{C}\mathbf{A})^\top \quad \dots \quad (\mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1})^\top]^\top. \quad (2.2.6)$$

補題7から補題9より，線形分数階システムは微分階数が $0 < q < 1$ のとき，極の安定領域が線形整数階システムと比較して広がりとともに，可制御条件・可観測条件が線形整数階システムと同一の条件となることがわかる。

2.3 分数階微積分の近似手法

分数階微積分を使用した制御則を構成した場合，解析的に制御入力を合成するためには，初期時刻からの畳み込み積分の計算をする必要が生じ，膨大な計算時間がかかってしまう。そのため，実数べき乗の伝達関数 (s^{-q}) として表される分数階微積分の演算を $P(s)/Q(s)$ ($P(s)$, $Q(s)$ は s の多項式関数を表す) で表される有理関数として近似し，計算時間を短縮する必要がある。

このような近似を行った早期の研究のひとつとして，G. Carlson と C. Halijak による近似手法 (Carlson 法) が知られている [47]。G. Carlson らは $a^{1/n}$ を近似する関数をニュートン法を用いて与えることで，べき乗の伝達関数を有理関数として表した。しかし，Carlson 法による近似は，近似できる関数を $a^{1/n} = s^{-1/n}$ に限定せず自由に設定できる利点があるものの，近似範囲や精度に課題がある [52]。

G. Carlson らの方法と異なる手法として，べき乗伝達関数をボード線図上でフィッティングを行うことで非整数階微積分を近似する方法がある。このような方法での分数階微積分の近似は，日本では真鍋により提案され，A. Charef, A. Oustaloup らも同様な方法でボード線図上で近似することで分数階微積分を表現する近似方法を提案している [45, 48, 23]。真鍋によって提案された近似法は真鍋アプローチとも呼ばれ，項数や近似精度などのパラメータから間接的に指定した周波数帯域において高い近似精度を実現することができる手法である。

分数階積分作用素 s^{-q} のボード線図を，整数階の伝達関数によって折れ線近似する範囲が広く精度が高いほど近似伝達関数は高次となる。真鍋はこの折れ線近似により，次式で表される近似式を導出した。

$$\frac{1}{s^q} \approx \frac{1}{s} \prod_{i=1}^j \frac{s + a_i}{s + b_i} \times \prod_{i=1}^k \frac{1 + b_i s}{1 + a_i s}, \quad \Omega_{low} \leq \omega \leq \Omega_{high}, \quad (2.3.1)$$

ただし，

$$1 < q < 2, \quad (2.3.2)$$

$$\delta = 20 \log_{10} \alpha, \quad (2.3.3)$$

$$\beta = \alpha^{-\frac{2}{(2-q)(q-1)}}, \quad (2.3.4)$$

$$a_1 = \alpha^{-\frac{1}{q-1}}, \quad (2.3.5)$$

$$a_{i+1} = a_i \beta, \quad (2.3.6)$$

$$b_i = a_i \alpha^{-\frac{2}{2-q}}, \quad (2.3.7)$$

$$\Omega_{low} = a_{j+1}, \quad (2.3.8)$$

$$\Omega_{high} = \frac{1}{a_{k+1}}, \quad (2.3.9)$$

$[\Omega_{low}, \Omega_{high}]$ は近似される周波数範囲を表している.

もし, $\frac{1}{s^\gamma}$, ($0 < \gamma < 1$) を得たいのであれば, (2.3.1) 式に対し s を乗ずればよく,

$$\frac{1}{s^\gamma} = \frac{1}{s^q} \times s = \prod_{i=1}^j \frac{s + a_i}{s + b_i} \times \prod_{i=1}^k \frac{1 + b_i s}{1 + a_i s}, \quad (2.3.10)$$

として得られる. 次の5パターンについて $s^{-\gamma}$ のボード線図とナイキスト線図を描いた結果を図 2.3.2 から図 2.3.11 に示す.

1. $\gamma = \frac{1}{2}$, $\delta = 1.2$ とし, $j = k = 3$, $j = k = 5$, $j = k = 7$ と近似項数を変えた場合.
2. $\gamma = \frac{1}{2}$, $\delta = 1.2$, $j = 3$ とし, $k = 3$, $k = 5$, $k = 7$ と近似項数を変えた場合.
3. $\gamma = \frac{1}{2}$, $\delta = 1.2$, $k = 3$ とし, $j = 3$, $j = 5$, $j = 7$ と近似項数を変えた場合.
4. $\gamma = \frac{1}{2}$, $j = k = 7$ とし, $\delta = 1.2$, $\delta = 2.4$, $\delta = 3.6$ とした場合.
5. $\delta = 1.2$, $j = k = 7$ とし, $\gamma = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{3}{4}$ とした場合.

図 2.3.2 から図 2.3.11 より, 低周波数側に近似範囲を拡大したい場合に k を大きくすればよく, 高周波数側に近似範囲を拡大したい場合に j を大きくすればよいことが分かる. また, 近似精度を高めたい場合に δ を小さくし, 近似範囲を拡大したい場合に δ を大きくすればよい. さらに微分階数を $1/4$, $1/2$, $3/4$ にしても近似が行えていることもわかる.

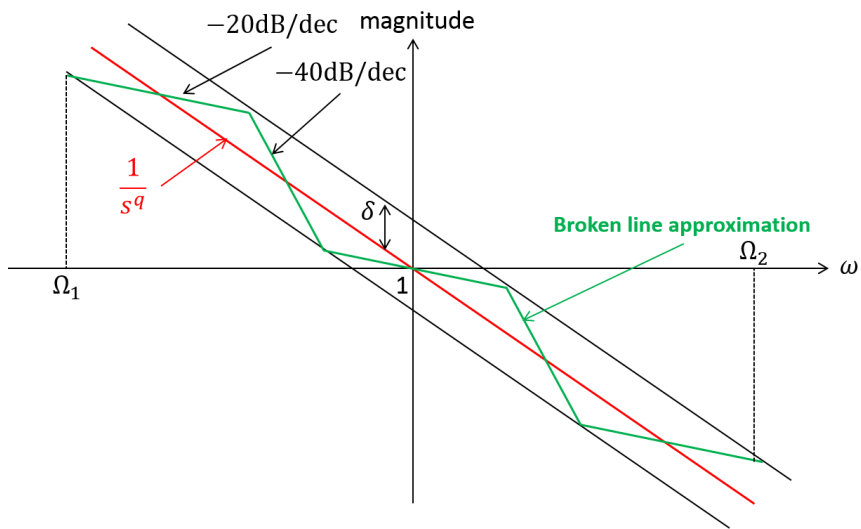


图 2.3.1 Broken line approximation of fractional calculus

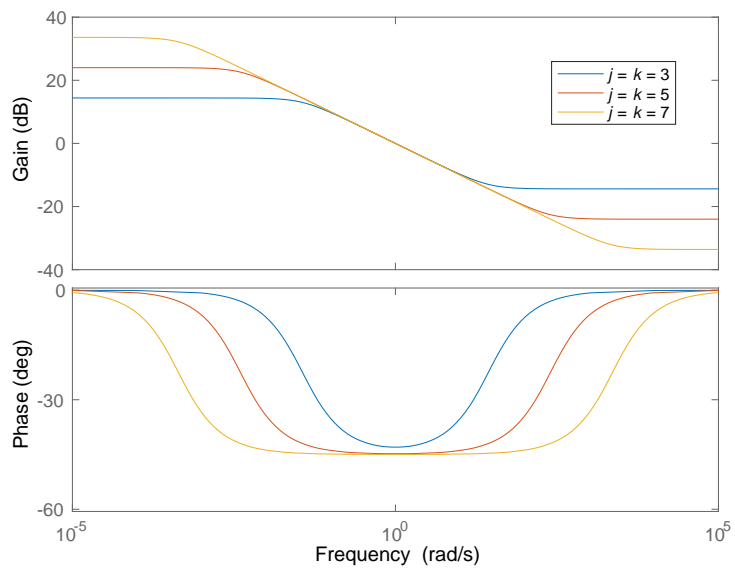


图 2.3.2 Bode diagram of $s^{-\frac{1}{2}}$ changing j, k

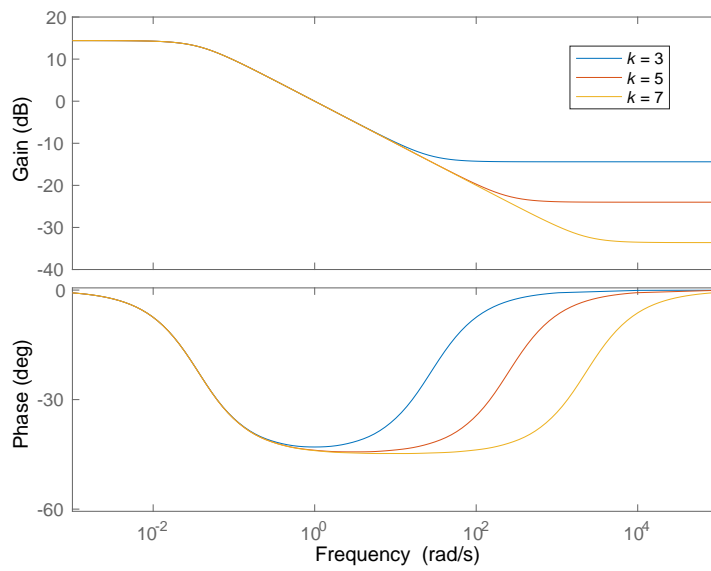


图 2.3.3 Bode diagram of $s^{-\frac{1}{2}}$ changing k

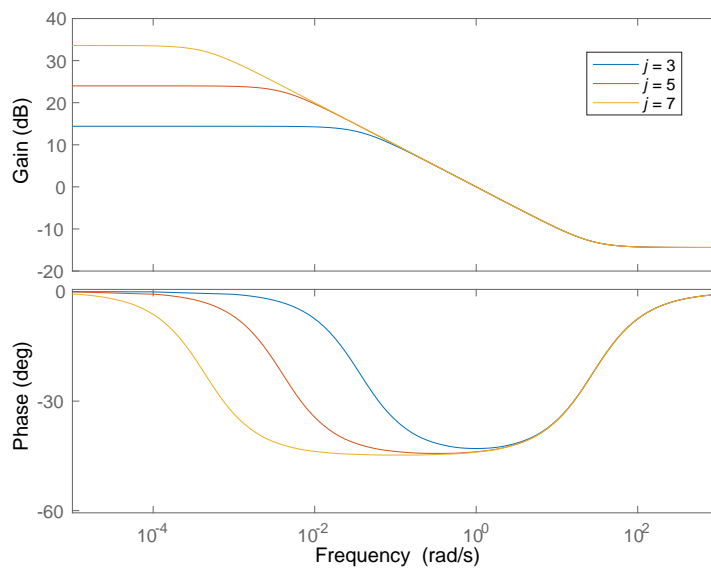


图 2.3.4 Bode diagram of $s^{-\frac{1}{2}}$ changing j

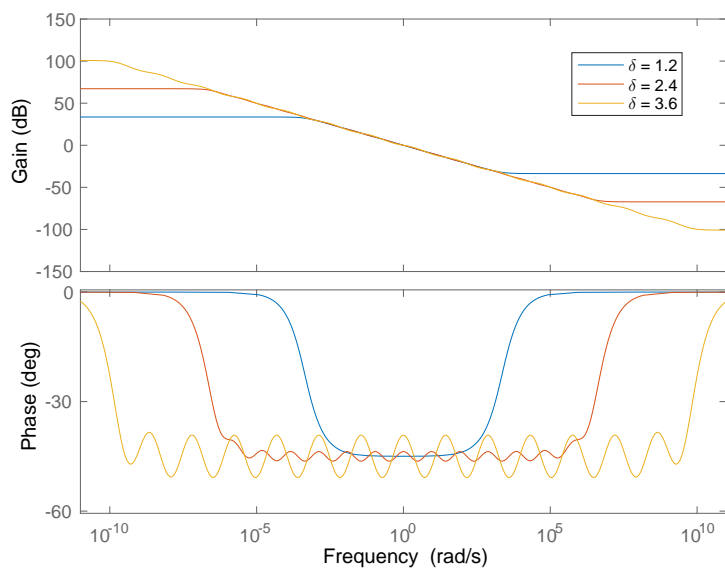


図 2.3.5 Bode diagram of $s^{-\frac{1}{2}}$ changing δ

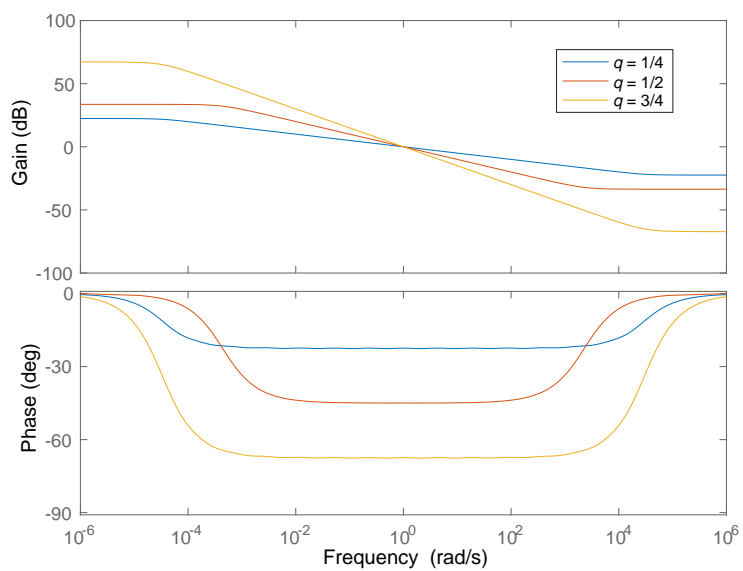


図 2.3.6 Bode diagram of $s^{-\frac{1}{2}}$ changing q

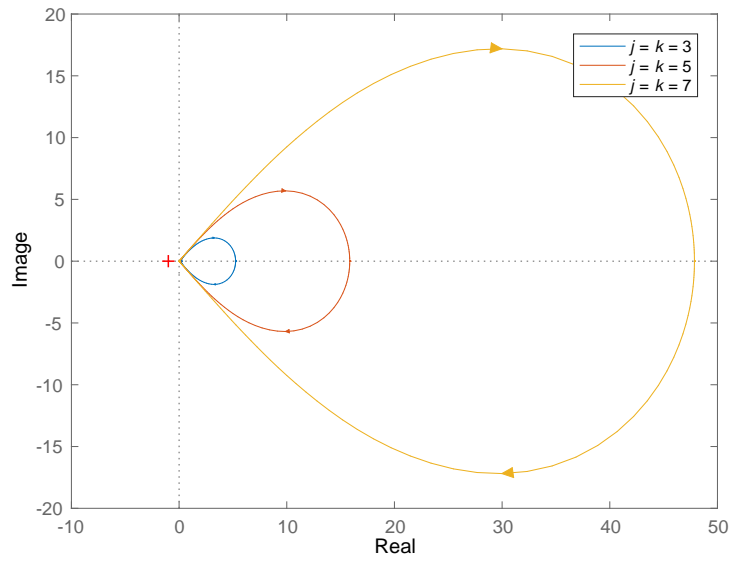


圖 2.3.7 Nyquist plot of $s^{-\frac{1}{2}}$ changing j, k

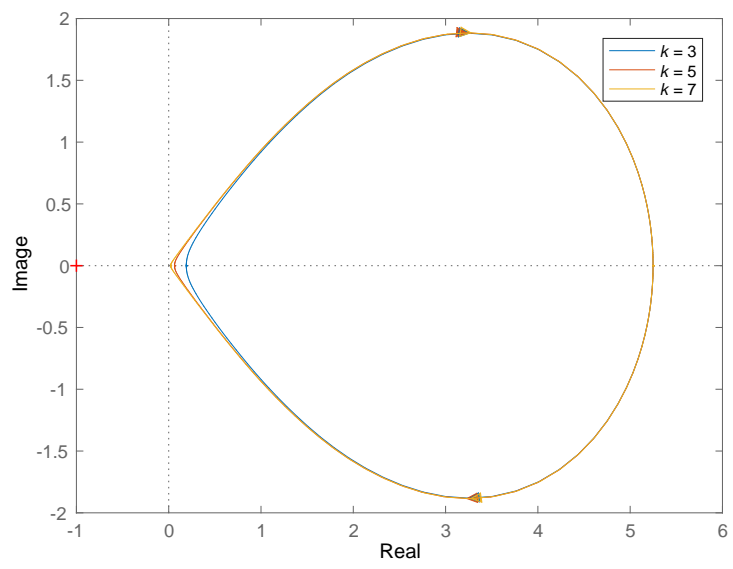


圖 2.3.8 Nyquist plot of $s^{-\frac{1}{2}}$ changing k

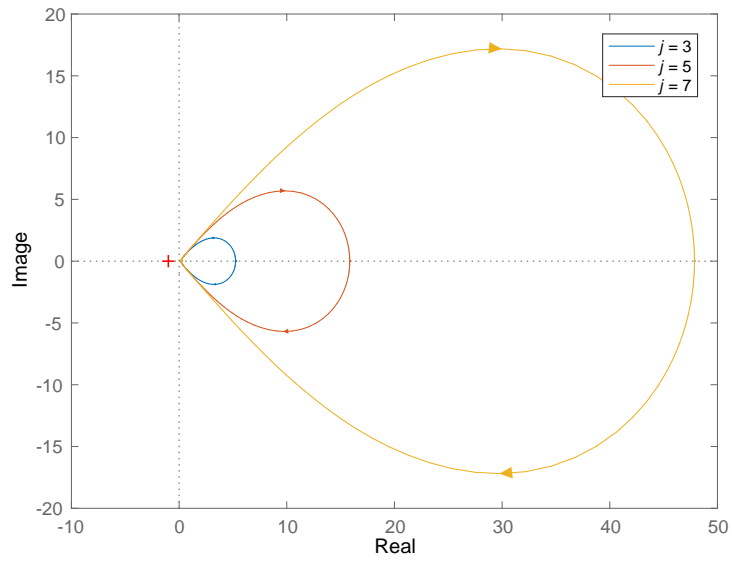


图 2.3.9 Nyquist plot of $s^{-\frac{1}{2}}$ changing j

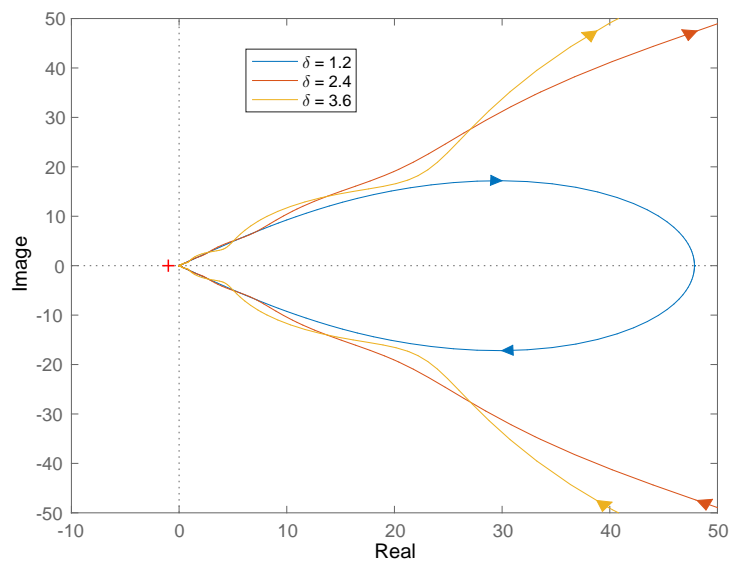


图 2.3.10 Nyquist plot of $s^{-\frac{1}{2}}$ changing δ

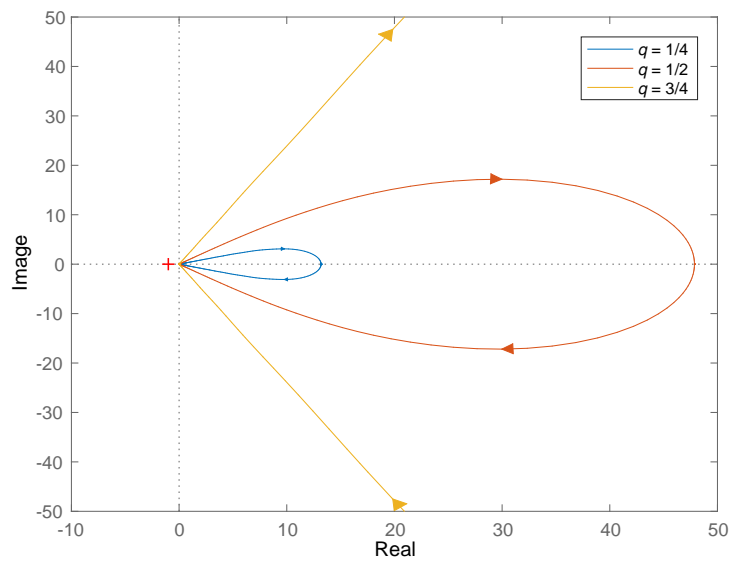


图 2.3.11 Nyquist plot of $s^{-\frac{1}{2}}$ changing q

第3章

分数階システムに対するバックステッピング法による SMC の設計

3.1 はじめに

外乱が存在する非線形システムを対象とした制御問題を解決する代表的な手法の一つとして、スライディングモード制御 (SMC) が知られている。SMC は状態フィードバックによって、プラントの状態を位相空間の超平面 (滑り面) 上に固定し、状態を超平面上で滑らせることによって原点へ到達させるというコンセプトの制御手法である。SMC は非線形整数階システムだけでなく、非線形分数階システムに対しても有効な制御手法であり、非線形非整数階システムに拡張されたスライディングモード制御系の設計法が A. Si-Ammour ら (2009) や A. Pisano ら (2012) によって研究されている [41, 42]。

しかし、スライディングモード制御系には、外乱と入力と同じチャンネルに存在しない状況に対処できないという課題点が存在する。例えば、制御出力と入力の間複数の積分器を経由するようなシステムにおいて、入力と出力の間の状態量に外乱が作用する場合、入力によって外乱を直接打ち消すことができない。このことから、外乱の影響により SMC のみでは最終的な出力を目標値に漸近させることが困難となる。

このような場合、各状態量を目標出力を生成する為の仮想的入力とみなし、予め設計された制御入力によって各状態量を設計した仮想入力に漸近させ、最終的に出力を目標値に漸近させる方法が用いられる。このようにして目標出力を得るための制御入力を設計する手法をバックステッピング法と呼ぶ。

制御入力によって外乱を直接打ち消すことができない場合、バックステッピング法を用いてスライディングモード制御系を構成することで、入力と異なるチャンネルに存在する外乱に対処可能な制御系を構築することができる。しかし、非線形分数階システムに対し、そのような状況に対処できる制御系を構築しようとする場合、分数階システムに適用可能なバック

クステッピング法が必要となる。

分数階システムに適用可能なバックステッピング法に関する先行研究として、二つの分数階微分方程式で記述される分数階 Duffing-Holmes システムに対してバックステッピング法を用いてスライディングモード制御系を構成した Z. Wang(2013) の研究がなされている [43]。しかし、Wang の用いたバックステッピング法は分数階微積分の加法性に基づいていることから、多数の分数階微分方程式で記述される一般的な非線形分数階システムに対してこの手法を用いることは困難であり、そのような一般的な非線形システムに適用可能なバックステッピング法の開発が必要とされる。

そこで、本研究では、分数階微分の連鎖法則と分数階微分に関するリアプノフ安定定理を導入することによって、より一般的な非線形分数階システムに適用可能となるバックステッピング法を開発するとともに、開発したバックステッピング法によりスライディングモード制御器の設計を行い、提案手法の妥当性を数値シミュレーションによって検証する。

3.2 問題の定式化

制御対象として、下記で表される非整数階システムを考える。

$$\begin{cases} \frac{d^q x_i}{dt^q} = f_i(\mathbf{x}) + g_i(\mathbf{x}) x_{i+1}(t) + \delta_i(t), & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \frac{d^q x_n}{dt^q} = f_n(\mathbf{x}) + g_n(\mathbf{x}) u(t) + \delta_n(t) \end{cases}, \quad (3.2.1)$$

$$y(t) = x_1(t), \quad (3.2.2)$$

ここで、 $x_i(t)$ はシステムの状態量であり、 $u(t)$ は入力、 $y(t)$ は出力、 $\delta_i(t)$ は外乱を表す。また、制御入力 $u(t)$ が出力 $y(t)$ に影響を与えるために、 $g_i(\mathbf{x}) \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$) であるものとする。

問題は、このように入力と異なるチャンネルに外乱が存在するシステムに対し、外乱が存在する状況で出力 $y(t) \rightarrow 0$ を達成する状態フィードバック入力 $u(t)$ を設計することである。

3.3 バックステッピング法

3.3.1 従来のバックステッピング法

バックステッピング法の概念図を図 3.3.1 に示す。バックステッピング法は図 3.3.1 に示されるように大きな一つのシステムを階層的なサブシステムとして分割し、段階的に各システムを安定化する仮想入力を構成することで、システム全体を安定化する制御入力を構成する制御系設計法である。具体的な制御系設計の流れを説明すると、まず、最終的な出力を生成するサブシステム①について、このサブシステムを安定化する仮想入力 α_1 を設計する。次

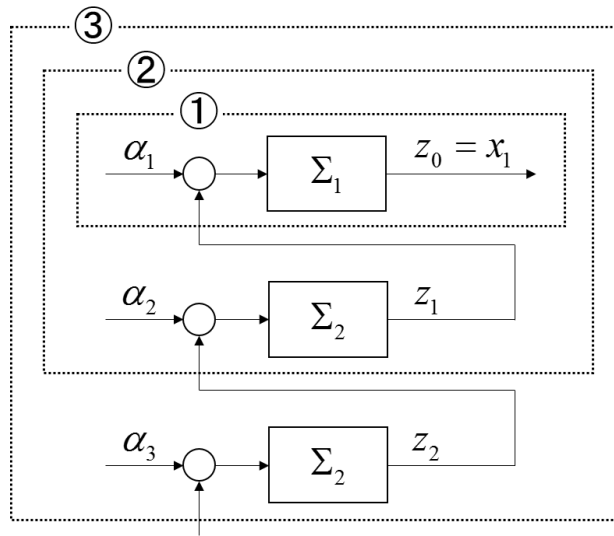


図 3.3.1 Concept of backstepping method

に、①を含有する一段階大きなサブシステム②を考え、このシステムが内部安定となるような仮想入力 α_2 を設計する。同様に、一段階大きなサブシステム③を考え仮想入力 α_3 を設計する、といった手順を繰り返す、実際にシステムに入力される制御信号 u を構成するというものとなる。

従来法のバックステッピング法による制御系の設計法を示すため、次式で表される外乱のない整数階システムを考える。

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = f_i(\mathbf{x}) + g_i(\mathbf{x}) x_{i+1}(t), & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(\mathbf{x}) + g_n(\mathbf{x}) u(t) \end{cases} \quad (3.3.1)$$

(3.3.1) 式は次のように書き表すことができる。

$$\begin{cases} \frac{dz_0}{dt} = f_1(\mathbf{x}) + g_1(\mathbf{x}) \alpha_1(\mathbf{x}) + g_1(\mathbf{x}) z_1(t) \\ \frac{dz_1}{dt} = f_2(\mathbf{x}) + g_2(\mathbf{x}) \alpha_2(\mathbf{x}) + g_2(\mathbf{x}) z_2(t) \\ \vdots \\ \frac{dz_{n-2}}{dt} = f_{n-1}(\mathbf{x}) + g_{n-1}(\mathbf{x}) \alpha_{n-1}(\mathbf{x}) + g_{n-1}(\mathbf{x}) z_{n-1}(t) \\ \frac{dz_{n-1}}{dt} = f_n(\mathbf{x}) + g_n(\mathbf{x}) u(t) - \frac{dr_{n-1}}{dt} \end{cases} \quad (3.3.2)$$

$$z_i(t) = \begin{cases} x_1(t), & i = 0 \\ x_{i+1}(t) - r_i(\mathbf{x}), & i = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases} \quad (3.3.3)$$

$$\alpha_i(t) = \begin{cases} r_1(\mathbf{x}), & i = 1 \\ r_i(\mathbf{x}) - g_i(\mathbf{x})^{-1} \frac{dr_{i-1}(\mathbf{x})}{dt}, & i = 2, 3, \dots, n-1 \end{cases} \quad (3.3.4)$$

ここで、 $\alpha_i(\mathbf{x})$ は安定化関数、 $z_i(t)$ は誤差を表す。そして、(3.3.2) 式をサブシステムごとに分割するために、予め、次式で表される \tilde{z}_i を定義する。

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{z}_{i-1}}{dt} = f_i(\mathbf{x}) + g_i(\mathbf{x}) \alpha_i(\mathbf{x}), & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \frac{d\tilde{z}_{n-1}}{dt} = f_n(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (3.3.5)$$

次に、以下のリアプノフ関数候補を考える。

$$\begin{cases} V_0 = \frac{1}{2} z_0^2 \\ V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2} z_i^2, & i = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases} \quad (3.3.6)$$

このリアプノフ関数の 1 階の微分を計算すると、

$$\begin{cases} \frac{dV_0}{dt} = z_0 \frac{dz_0}{dt} \\ \frac{dV_i}{dt} = \frac{dV_{i-1}}{dt} + z_i \frac{dz_i}{dt}, & i = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases} \quad (3.3.7)$$

ここで、サブシステムごとに分割されたリアプノフ関数として次式を定義する。

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{V}_0}{dt} = z_0 \frac{d\tilde{z}_0}{dt} \\ \frac{d\tilde{V}_i}{dt} = \frac{d\tilde{V}_{i-1}}{dt} + z_i \frac{d\tilde{z}_i}{dt}, & i = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases} \quad (3.3.8)$$

(3.3.2) 式、(3.3.5) 式、(3.3.8) 式より、(3.3.7) 式は、

$$\begin{cases} \frac{dV_i}{dt} = \frac{d\tilde{V}_i}{dt} + z_i g_{i+1}(\mathbf{x}) z_{i+1}, & i = 0, 1, \dots, n-2 \\ \frac{dV_{n-1}}{dt} = \frac{d\tilde{V}_{n-1}}{dt} + z_{n-1} g_n(\mathbf{x}) u - z_{n-1} \frac{dr_{n-1}}{dt} \end{cases} \quad (3.3.9)$$

(3.3.9) 式から、(3.3.8) 式を次のように書き直すことができる。

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{V}_0}{dt} = H_0 \\ \frac{d\tilde{V}_i}{dt} = \frac{d\tilde{V}_{i-1}}{dt} + H_i, & i = 1, 2, \dots, n-2 \\ \frac{d\tilde{V}_{n-1}}{dt} = \frac{d\tilde{V}_{n-2}}{dt} + z_{n-2} g_{n-1}(\mathbf{x}) z_{n-1} + z_{n-1} f_n(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (3.3.10)$$

$$\begin{cases} H_0 = z_0 [f_1(\mathbf{x}) + g_1(\mathbf{x}) \alpha_1(\mathbf{x})] \\ H_i = z_{i-1} g_i(\mathbf{x}) z_i + z_i [f_{i+1}(\mathbf{x}) + g_{i+1}(\mathbf{x}) \alpha_{i+1}(\mathbf{x})] \end{cases} \quad (3.3.11)$$

ここで, $H_0 < -W_0 < 0$ と $H_i < -W_i < 0$ が満足するように $\alpha_i(\mathbf{x})$ を設計すると,

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{V}_0}{dt} < -W_0 \\ \frac{d\tilde{V}_i}{dt} < -W_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-2 \end{cases}, \quad (3.3.12)$$

となり, ここから, V_{n-1} の微分は,

$$\frac{dV_{n-1}}{dt} < -W_{n-2} + H_{n-1}, \quad (3.3.13)$$

$$H_{n-1} = z_{n-2}g_{n-1}(\mathbf{x})z_{n-1} + z_{n-1}f_n(\mathbf{x}) + z_{n-1}g_n(\mathbf{x})u - z_{n-1}\frac{dr_{n-1}}{dt}. \quad (3.3.14)$$

$H_{n-1} < -W_{n-1} < 0$ を満たすように u を設計してやれば

$$\frac{dV_{n-1}}{dt} < -W_{n-1} < 0, \quad (3.3.15)$$

となり, (3.3.2) 式で表されるシステムは安定となり, $t \rightarrow \infty$ で $x_1 \rightarrow 0$, $z_i \rightarrow 0$, ($i = 1, 2, \dots, n-1$) となる.

3.3.2 分数階システムを対象としたバックステッピング法

次に, 外乱のない非線形分数階システムについて, バックステッピング法を用いた制御入力の設計法を説明するため, 下記で表される非整数階システムを考える.

$$\begin{cases} \frac{d^q x_i}{dt^q} = f_i(\mathbf{x}) + g_i(\mathbf{x})x_{i+1}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad 0 < q \leq 1 \\ \frac{d^q x_n}{dt^q} = f_n(\mathbf{x}) + g_n(\mathbf{x})u(t) \end{cases}. \quad (3.3.16)$$

(3.3.16) 式は次式のように書き直すことができる.

$$\begin{cases} \frac{d^q z_0}{dt^q} = f_1(\mathbf{x}) + g_1(\mathbf{x})\alpha_1(\mathbf{x}) + g_1(\mathbf{x})z_1(t) \\ \frac{d^q z_1}{dt^q} = f_2(\mathbf{x}) + g_2(\mathbf{x})\alpha_2(\mathbf{x}) + g_2(\mathbf{x})z_2(t) \\ \vdots \\ \frac{d^q z_{n-2}}{dt^q} = f_{n-1}(\mathbf{x}) + g_{n-1}(\mathbf{x})\alpha_{n-1}(\mathbf{x}) + g_{n-1}(\mathbf{x})z_{n-1}(t) \\ \frac{d^q z_{n-1}}{dt^q} = f_n(\mathbf{x}) + g_n(\mathbf{x})u(t) - \frac{d^q r_{n-1}}{dt^q} \end{cases}, \quad (3.3.17)$$

$$z_i(t) = \begin{cases} x_1(t), & i = 0 \\ x_{i+1}(t) - r_i(\mathbf{x}), & i = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}, \quad (3.3.18)$$

$$\alpha_i(t) = \begin{cases} r_1(x), & i = 1 \\ r_i(x) - g_i(x)^{-1} \frac{dr_{i-1}(x)}{dt}, & i = 2, 3, \dots, n-1 \end{cases}, \quad (3.3.19)$$

ここで, $\alpha_i(x)$ は安定化関数, $z_i(t)$ は誤差を表す. そして, (3.3.17) 式をサブシステムごとに分割するために, 予め, 次式で表される \tilde{z}_i を定義する.

$$\begin{cases} \frac{d^q \tilde{z}_{i-1}}{dt^q} = f_i(x) + g_i(x) \alpha_i(x), & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \frac{d^q \tilde{z}_{n-1}}{dt^q} = f_n(x) \end{cases}. \quad (3.3.20)$$

ここで, 下記のようなリアプノフ関数候補を考える.

$$\begin{cases} V_0 = \frac{2-q}{2} z_0^2 \\ V_i = V_{i-1} + \frac{2-q}{2} z_i^2, & i = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}. \quad (3.3.21)$$

バックステッピング法による制御入力設計のために, リアプノフ関数の q 階の微分を計算する必要がある. そのため, このようなリアプノフ関数に対する分数階の微分に関する次の補題 [58] と定理を示す.

補題 10. 分数階微分の連鎖法則

$f(u)$ と $u(x)$ が, それぞれ, u と x でそれぞれ q 階微分可能であるとしたとき, 分数階微分の連鎖法則は以下の式として記述することができる.

$$\frac{d^q f(u(x))}{dx^q} = \Gamma(2-q) u^{q-1} \frac{d^q f(u)}{du^q} \frac{d^q u(x)}{dx^q}. \quad (3.3.22)$$

定理 11. 分数階微分の連鎖法則が (3.3.22) 式で与えられ, $V(x)$, $x(t)$, Λ が下記のように与えられるとする.

$$V(x) = x^\top \Lambda x, \quad (3.3.23)$$

$$x(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \cdots \quad x_n(t)], \quad (3.3.24)$$

$$\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n], \quad (3.3.25)$$

このとき, $V(x)$ の t に関する q 階微分は次式のように表される.

$$\frac{d^q V(x)}{dt^q} = \frac{2}{2-q} x^\top \Lambda \frac{d^q x}{dt^q} = \frac{2}{2-q} \frac{d^q x^\top}{dt^q} \Lambda x. \quad (3.3.26)$$

Proof. (3.3.23) 式は次式のように変形できる.

$$V(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2. \quad (3.3.27)$$

${}_0D_x^\beta [x^\nu]^C = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-\beta+1)} x^{\nu-\beta}$ という関係と (3.3.22) 式から, (3.3.27) 式の q 階微分は次式となる.

$$\begin{aligned}
\frac{d^q V(\mathbf{x})}{dt^q} &= \sum_{i=1}^n \Gamma(2-q) x_i^{q-1} \frac{\partial^q V}{\partial x_i^q} \frac{d^q x_i}{dt^q} \\
&= \sum_{i=1}^n \Gamma(2-q) x_i^{q-1} \left\{ \frac{\partial^q}{\partial x_i^q} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^2 \right\} \frac{d^q x_i}{dt^q} \\
&= \sum_{i=1}^n \Gamma(2-q) \lambda_i x_i^{q-1} \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-q)} x_i^{2-q} \frac{d^q x_i}{dt^q} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\Gamma(2-q) \Gamma(3)}{\Gamma(3-q)} \lambda_i x_i \frac{d^q x_i}{dt^q} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\Gamma(2-q) \cdot 2!}{(2-q) \Gamma(2-q)} \lambda_i x_i \frac{d^q x_i}{dt^q} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{2}{(2-q)} \lambda_i x_i \frac{d^q x_i}{dt^q} \\
&= \frac{2}{2-q} \mathbf{x}^\top \mathbf{\Lambda} \frac{d^q \mathbf{x}}{dt^q} = \frac{2}{2-q} \frac{d^q \mathbf{x}^\top}{dt^q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{x}. \tag{3.3.28}
\end{aligned}$$

以上より, $V(\mathbf{x})$ の q 階微分に関する定理が得られる. \square

(3.3.26) 式を用いることにより, (3.3.21) 式の q 階微分は次式のようにになる.

$$\begin{cases} \frac{d^q V_0}{dt^q} = z_0 \frac{d^q z_0}{dt^q} \\ \frac{d^q V_i}{dt^q} = \frac{d^q V_{i-1}}{dt^q} + z_i \frac{d^q z_i}{dt^q}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}. \tag{3.3.29}$$

そして, リアプノフ関数に関しても, サブシステム毎に分割されたものを表すために, 次式を定義する.

$$\begin{cases} \frac{d^q \tilde{V}_0}{dt^q} = z_0 \frac{d^q \tilde{z}_0}{dt^q} \\ \frac{d^q \tilde{V}_i}{dt^q} = \frac{d^q V_{i-1}}{dt^q} + z_i \frac{d^q \tilde{z}_i}{dt^q}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}. \tag{3.3.30}$$

(3.3.17) 式, (3.3.20) 式, (3.3.30) 式より, (3.3.29) 式は次式のように変形できる.

$$\begin{cases} \frac{d^q V_i}{dt^q} = \frac{d^q \tilde{V}_i}{dt^q} + z_i g_{i+1}(\mathbf{x}) z_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-2 \\ \frac{d^q V_{n-1}}{dt^q} = \frac{d^q \tilde{V}_{n-1}}{dt^q} + z_{n-1} g_n(\mathbf{x}) u - z_{n-1} \frac{d^q r_{n-1}}{dt^q} \end{cases}. \tag{3.3.31}$$

(3.3.31) 式から, (3.3.30) 式を次のように書き直すことができる.

$$\begin{cases} \frac{d^q \tilde{V}_0}{dt^q} = H_0 \\ \frac{d^q \tilde{V}_i}{dt^q} = \frac{d^q \tilde{V}_{i-1}}{dt^q} + H_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-2 \\ \frac{d^q \tilde{V}_{n-1}}{dt^q} = \frac{d^q \tilde{V}_{n-2}}{dt^q} + z_{n-2} g_{n-1}(\mathbf{x}) z_{n-1} + z_{n-1} f_n(\mathbf{x}) \end{cases}, \quad (3.3.32)$$

$$\begin{cases} H_0 = z_0 [f_1(\mathbf{x}) + g_1(\mathbf{x}) \alpha_1(\mathbf{x})] \\ H_i = z_{i-1} g_i(\mathbf{x}) z_i + z_i [f_{i+1}(\mathbf{x}) + g_{i+1}(\mathbf{x}) \alpha_{i+1}(\mathbf{x})] \end{cases}. \quad (3.3.33)$$

$H_0 < -W_0 < 0$ と $H_i < -W_i < 0$ が満足するように $\alpha_i(\mathbf{x})$ を設計すると,

$$\begin{cases} \frac{d^q \tilde{V}_0}{dt^q} < -W_0 \\ \frac{d^q \tilde{V}_i}{dt^q} < -W_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-2 \end{cases}. \quad (3.3.34)$$

となり, ここから, V_{n-1} の q 階微分は,

$$\frac{d^q V_{n-1}}{dt^q} < -W_{n-2} + H_{n-1}, \quad (3.3.35)$$

$$H_{n-1} = z_{n-2} g_{n-1}(\mathbf{x}) z_{n-1} + z_{n-1} f_n(\mathbf{x}) + z_{n-1} g_n(\mathbf{x}) u - z_{n-1} \frac{d^q \alpha_{n-1}}{dt^q}. \quad (3.3.36)$$

$H_{n-1} < -W_{n-1} < 0$ を満たすように u を設計してやれば (3.3.37) 式が成立する.

$$\frac{d^q V_{n-1}}{dt^q} < -W_{n-1} < 0. \quad (3.3.37)$$

(3.3.37) 式が成立すれば, (3.3.17) 式で表されるシステムは Mittag-Leffler 安定といえる [49]. Mittag-Leffler 安定の定義は次のように与えられる.

定義 12. Mittag-Leffler 安定

次式で表される分数階システムを考える.

$${}_0 D_t^q [x(t)]_t = f(t, x). \quad (3.3.38)$$

x_{eq} をこのシステムの平衡点であるとする. (3.3.38) 式の解が次式を満たす場合, このシステムは Mittag-Leffler 安定である.

$$\|x(t) - x_{eq}\| \leq [m(x_0 - x_{eq}) E_{q,1}(-\lambda t^q)]^p, \quad (3.3.39)$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)}. \quad (3.3.40)$$

ここで, $E_{\alpha,\beta}(z)$ は Mittag-Leffler 関数であり, x_0 は $x(0) = x_0$ で与えられる初期値, $m(x)$ は $m(0) = 0$ と $m(x) \leq 0$ を満たす連続な関数である.

Y. Li による非整数階に拡張されたリアプノフ安定理論は次の定理のように与えられる [49].

定理 13. 非整数階に拡張されたリアプノフ安定定理

x_{eq} を (3.3.38) 式で与えられるシステムの平衡点であるとする. 次式を満足する連続な関数 $V(t, x)$ が存在すれば, (3.3.38) 式で与えられるシステムは $x = x_{eq}$ で Mittag-Leffler 安定である.

$$c_1 \|x - x_{eq}\|^a \leq V(t, x) \leq c_2 \|x - x_{eq}\|^{ab}, \quad (3.3.41)$$

$${}_0 D_t^q [V(t, x)]_t^C \leq -c_3 \|x - x_{eq}\|^{ab}, \quad (3.3.42)$$

ここで, c_1, c_2, c_3, a, b は正の定数である.

Y. Li のリアプノフ安定定理から, $\alpha_i(\mathbf{0}) = 0$ となるようにすることで, $x_i \rightarrow 0$ となる.

α_{n-1} が $\alpha_{n-1}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n h_i(x_i)$ となるならば, $\sum_{i=1}^n \Gamma(2-q) x_i^{q-1} \frac{\partial^q \alpha_{n-1}}{\partial x_i^q} \frac{d^q x_i}{dt^q}$ と簡易な形で書き表すことができる. しかし, $\alpha_{n-1}(\mathbf{x})$ が異なる変数の積の項 (例えば $x_1 x_2$ のような項) を含んでいるような場合, 分数階に拡張された微分の Leibniz 法則も必要となる.

提案した非整数階システムを対象としたバックステッピング制御系設計法の妥当性を確認する為, 下記の条件で数値シミュレーションを行った.

$$\frac{d^{1/2} x_1}{dt^{1/2}} = x_1^2 - x_1^3 + x_2 + \delta, \quad (3.3.43)$$

$$\frac{d^{1/2} x_2}{dt^{1/2}} = x_1 x_2 - x_2^3 + u + \delta, \quad (3.3.44)$$

$$\alpha_1 = -k_0 x_1 - x_1^2 + x_1^3 \quad (3.3.45)$$

$$u = -x_1 - x_1 x_2 + x_2^3 + \frac{d^{1/2} \alpha_1}{dt^{1/2}} - k_1 (x_2 - \alpha_1), \quad (3.3.46)$$

$$\frac{d^{1/2} \alpha_1}{dt^{1/2}} = \left(-k_0 - \frac{4}{3} x_1 + \frac{24}{15} x_1^2 \right) (x_1^2 - x_1^3 + x_2), \quad (3.3.47)$$

$$\delta = d [H(t-1) - H(t-2)], \quad (3.3.48)$$

$$d = 1 \quad (3.3.49)$$

$$[k_0 \quad k_1] = [1 \quad 1], \quad (3.3.50)$$

$$[x_1(0) \quad x_2(0)] = [0 \quad 0], \quad (3.3.51)$$

ここで δ は両方のチャンネルに加えた外乱を表し, $H(t)$ はヘヴィサイド関数を表す.

シミュレーション結果を図 3.3.2 と図 3.3.3 に示す. これらの図から, 提案したバックステッピング制御器設計の妥当性が確認できる.

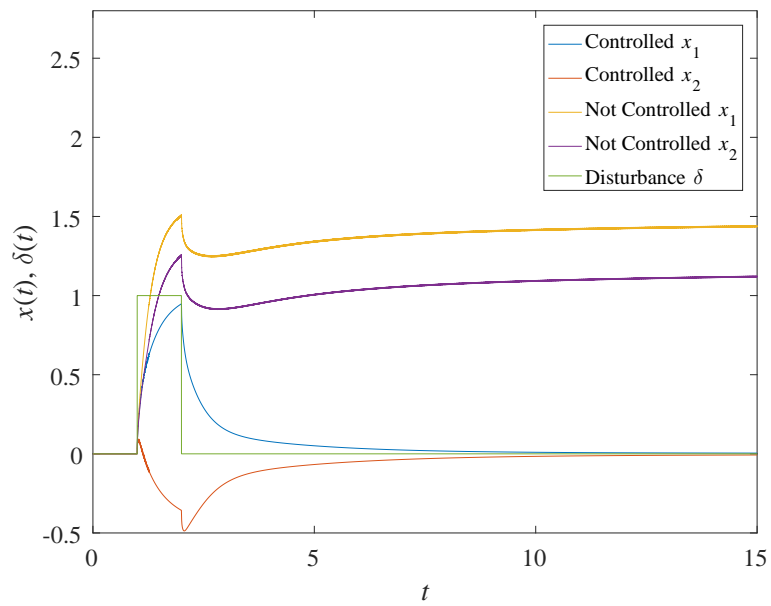


図 3.3.2 State $x_1(t)$, $x_2(t)$ and disturbance $\delta(t)$

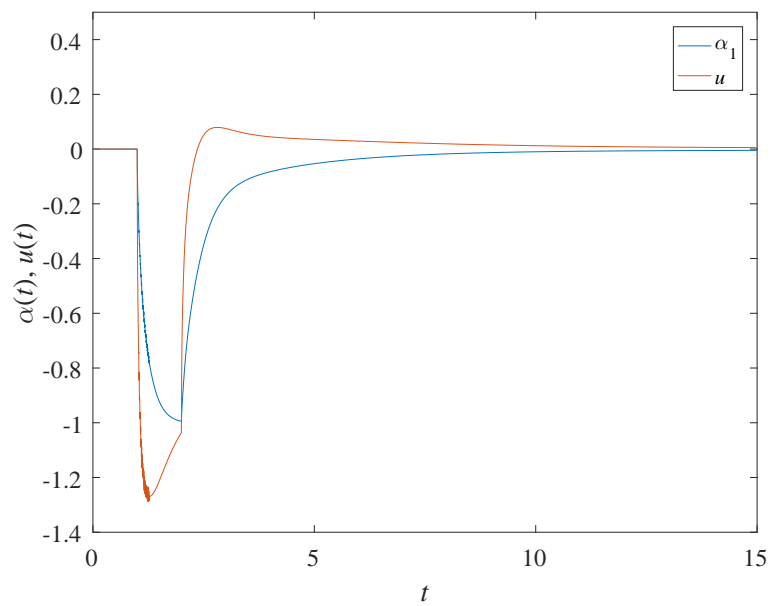


図 3.3.3 Stable function $\alpha_1(\mathbf{x})$ and control input $u(t)$

更に、従来の整数階システムを対象としたバックステッピング法と比較するため、(3.3.43) 式と (3.3.44) 式で与えられる非整数階のシステムを対象として、各チャネルの微分階数を整数階 ($q = 1$) とみなして、以下のように制御入力を構成し、 $d = 1$, $d = 3$ の場合について数値シミュレーションを行い、非整数階のバックステッピング法によって構成された制御器との比較を行った。

$$\alpha_1 = -k_0 x_1 - x_1^2 + x_1^3 \quad (3.3.52)$$

$$u = -x_1 - x_1 x_2 + x_2^3 + \frac{d\alpha_1}{dt} - k_1 (x_2 - \alpha_1), \quad (3.3.53)$$

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = (-k_0 - 2x_1 + 3x_1^2) (x_1^2 - x_1^3 + x_2), \quad (3.3.54)$$

$$[k_0 \quad k_1] = [1 \quad 1], \quad (3.3.55)$$

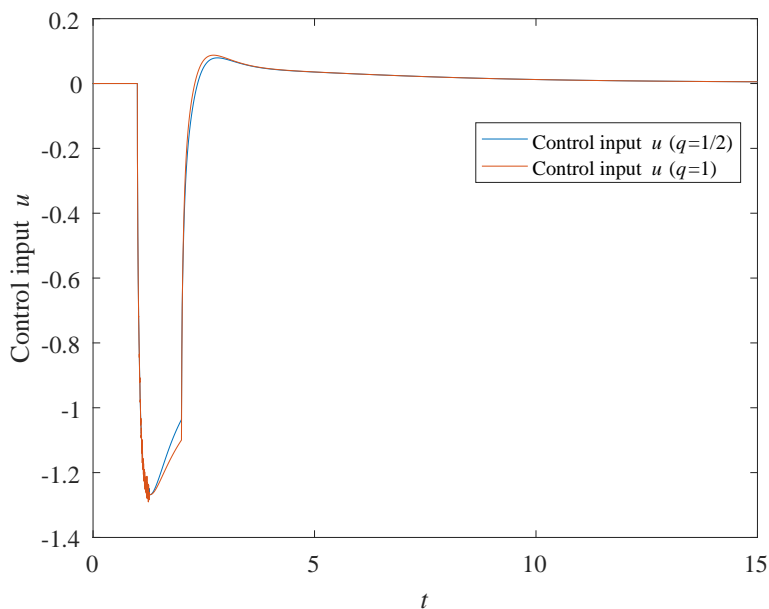


図 3.3.4 Control input $u(t)$ (In case $d = 1$)

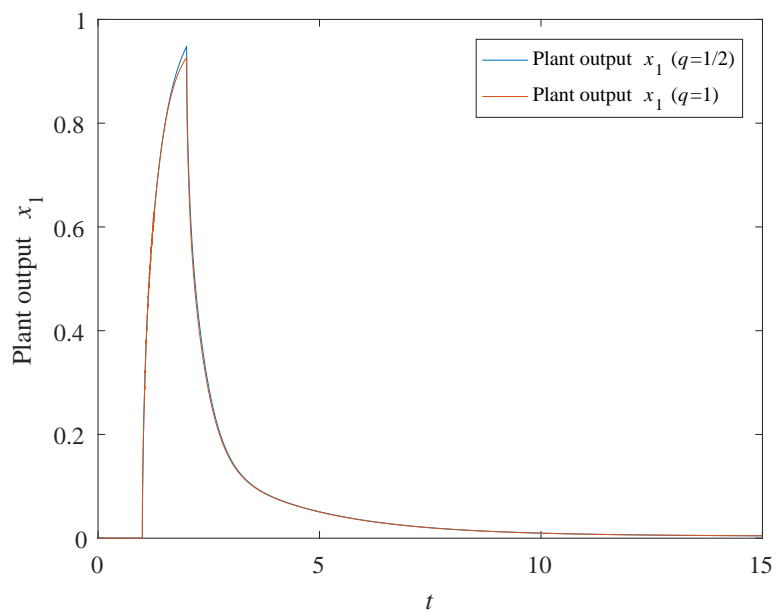


図 3.3.5 Plant output $x_1(t)$ (In case $d = 1$)

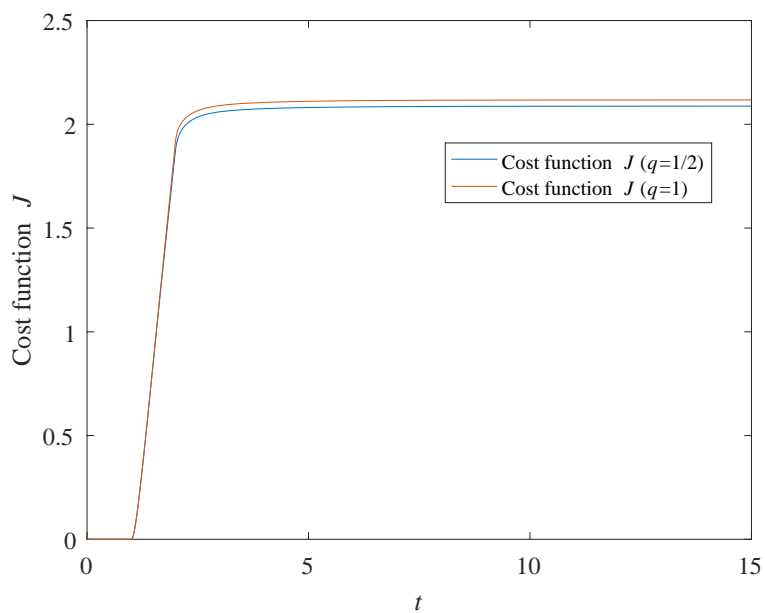


図 3.3.6 Cost function J (In case $d = 1$)

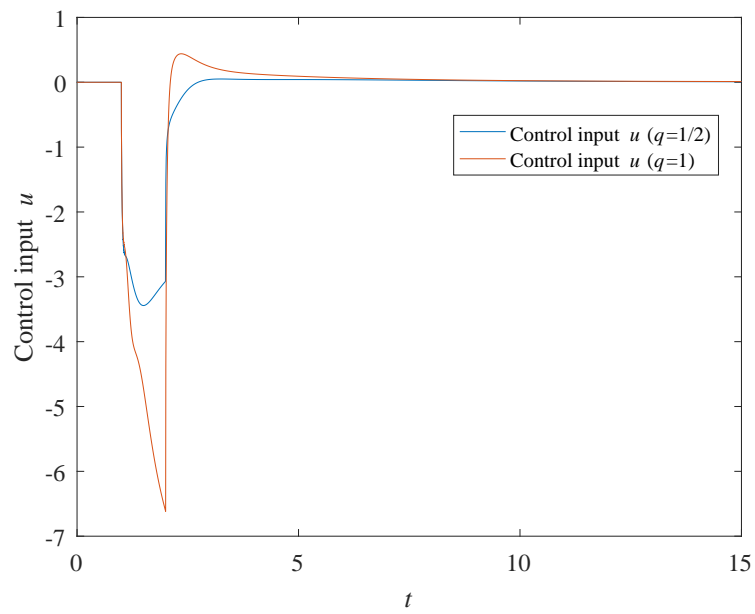


図 3.3.7 Control input $u(t)$ (In case $d = 3$)

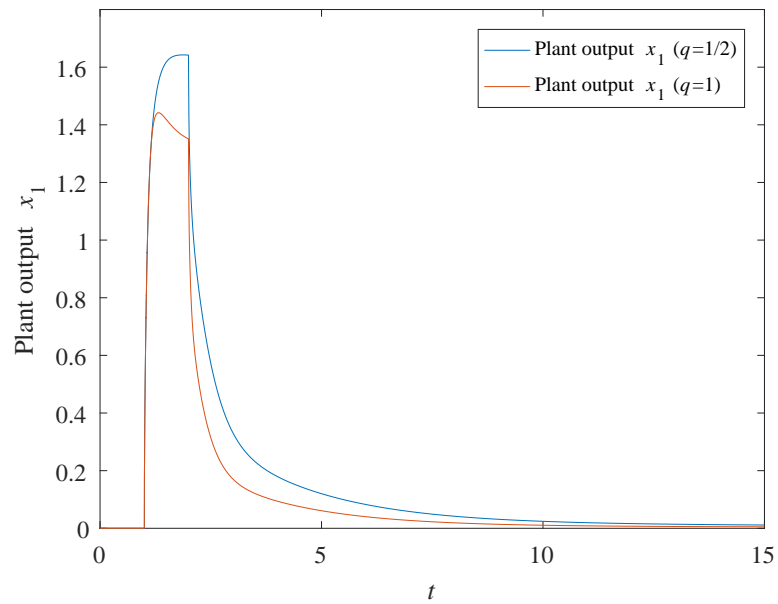


図 3.3.8 Plant output $x_1(t)$ (In case $d = 3$)

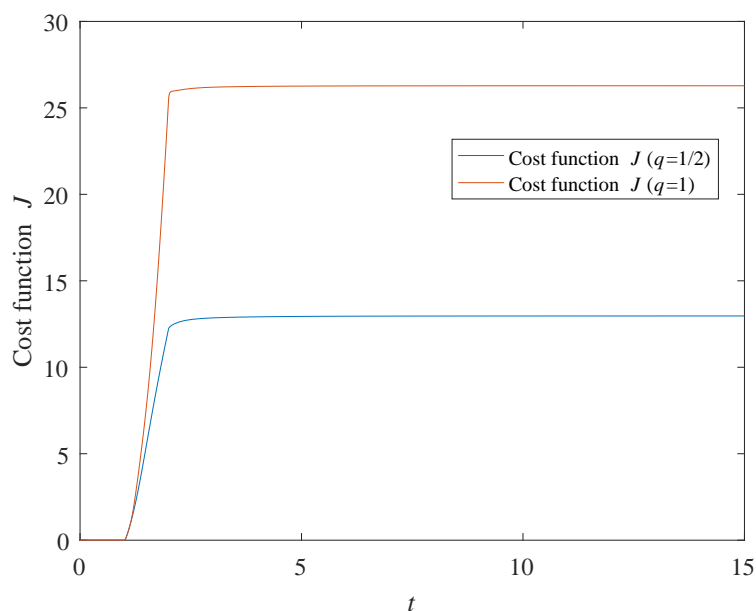


図 3.3.9 Cost function J (In case $d = 3$)

図 3.3.4 から図 3.3.9 に数値実験の結果を示す．ここで，評価関数を $J(t) = \int_0^t (u^2 + x_1^2) d\tau$ として与えた．これらの結果から，外乱が比較的小さい場合には，各チャンネルの微分階数を $q = 1$ とみなして従来のバックステップング法によって制御器を構成した時と分数階システムを対象としたバックステップング法によって制御器を構成した場合とで，大きな違いが見られないが，外乱の大きさを $d = 3$ として与えた時には，従来のバックステップング法によって構成された制御器では制御入力が増大しており，このときの評価関数で制御性能を比較すると，制御器を分数階のバックステップング法を用いて構成した場合の評価関数値の方が小さくなっていることがわかる．

3.4 分数階システムを対象としたスライディングモード制御

スライディングモード制御のコンセプトは，制御器がプラントの状態を位相空間の超平面（滑り面）上に固定し，超平面上で滑らせることで状態を原点に到達させるというものである．このコンセプトに従って，スライディングモード制御器は，状態が滑り面の上下のどちらにあるかにあわせて，フィードバックゲインなど，コントローラの構造の一部を符号関数的に切り替えてプラントの状態を滑り面上に固定しようとする．そのため，ある一定の範囲の外乱が存在しても，入力と同じチャンネルであれば，その外乱の影響を打ち消すことが出来る．

分数階システムを対象としたスライディングモード制御系の設計方法の一例を示すため，

次式で表される分数階システムを考える.

$$\frac{d^q \mathbf{x}}{dt^q} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u, \quad 0 < q < 1, \quad (3.4.1)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}) \quad f_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad f_n(\mathbf{x})]^\top, \quad (3.4.2)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = [g_1(\mathbf{x}) \quad g_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad g_n(\mathbf{x})]^\top, \quad (3.4.3)$$

ここで, q は実数である.

$$\sigma = \mathbf{s}^\top \mathbf{x}, \quad (3.4.4)$$

$$\mathbf{s} = [s_1 \quad s_2 \quad \cdots \quad s_n]^\top. \quad (3.4.5)$$

滑り面 ($\sigma = 0$) が上式のように与えられたとすると, σ の q 階微分は次式のように与えられる.

$$\sigma^{(q)} = \mathbf{s}^\top [\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u]. \quad (3.4.6)$$

次式のようなリアプノフ関数を考える.

$$V = \frac{2-q}{2} \sigma^2. \quad (3.4.7)$$

リアプノフ関数を q 階微分した関数は次式のように与えられる.

$$V^{(q)} = \sigma \sigma^{(q)}. \quad (3.4.8)$$

$V^{(q)} < 0$ を満たすようにするために, σ を次式のように設計する.

$$\sigma^{(q)} = -w\sigma - K_s \text{sign}(\sigma). \quad (3.4.9)$$

(3.4.5) 式と (3.4.9) 式から, 制御入力 u は次式のように与えることができる.

$$\mathbf{s}^\top [\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u] = -w\sigma - K_s \text{sign}(\sigma), \quad (3.4.10)$$

$$u = [\mathbf{s}^\top \mathbf{g}(\mathbf{x})]^{-1} [-\mathbf{s}^\top \mathbf{f}(\mathbf{x}) - w\sigma - K_s \text{sign}(\sigma)], \quad (3.4.11)$$

ただし, $\mathbf{s}^\top \mathbf{g}(\mathbf{x}) \neq 0$ であるとする.

以下のようにプラントがひとつのチャンネルしか持たない場合,

$$\frac{d^q x_1}{dt^q} = f_1(x_1) + g_1(x_1)u. \quad (3.4.12)$$

滑り面を構成する為に, プラントを次式のように書き換える.

$$\begin{cases} \frac{d^q x_0}{dt^q} = x_1 \\ \frac{d^q x_1}{dt^q} = f_1(x_1) + g_1(x_1)u \end{cases}. \quad (3.4.13)$$

このとき、制御入力 u は次式のように与えられる.

$$u = -\frac{f_1(x_1)}{g_1(x_1)} - \frac{K_I x_1}{g_1(x_1)} - \frac{w\sigma}{g_1(x_1)} - \frac{K_s \text{sign}(\sigma)}{g_1(x_1)}, \quad (3.4.14)$$

$$\sigma = K_I I^q [x_1]_t + x_1. \quad (3.4.15)$$

この手法で設計された非整数階システムを対象としたスライディングモード制御器の妥当性を確認する為、以下の条件で数値シミュレーションを行った.

$$\frac{d^{1/2}x}{dt^{1/2}} = 4x(1-x) + e^x u(t) + \delta(t), \quad (3.4.16)$$

$$x(t) = 0, \quad t \leq 0, \quad (3.4.17)$$

$$\delta(t) = \begin{cases} \frac{5}{2} & 1 \leq t < 2 \\ 0 & t < 1, 2 \leq t < 5 \\ \sin(t) & t \geq 5 \end{cases}, \quad (3.4.18)$$

$$[K_I \quad K_s \quad w] = [1 \quad 1 \quad 1], \quad (3.4.19)$$

$$\text{sign}(\sigma) \cong \frac{2}{1 + e^{-c\sigma}} - 1, \quad c = 10^2. \quad (3.4.20)$$

図 3.4.1 から図 3.4.4 に数値実験結果を示す. 図 3.4.4 において、位相平面を表すため、 $X_1 = x$, $X_2 = I^{1-q}[x(t)]_t$ として表記した.

図 3.4.1 より、(3.4.13) 式で与えられ分数階システムがスライディングモード制御器によって制御できていることが確認できる. 更に、図 3.4.3 と図 3.4.4 より、制御器がプラントの状態を滑り面 ($\sigma = 0$) 上に固定してその面上を滑るようにして原点に到達させていることが確認できる.

バックステッピング法の安定化関数 α_i をスライディングモード制御によって構成する場合、 z_i を $\sigma_i = z_i + K_I I^q [z_i]_t$ とすることで設計を行うことができる.

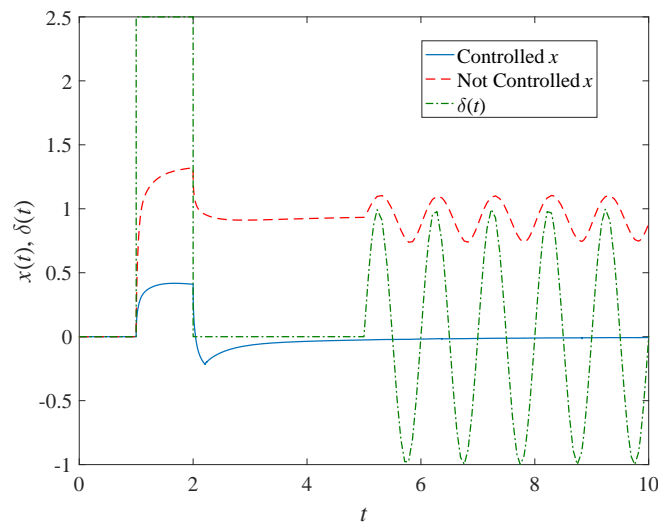


図 3.4.1 State $x(t)$ and disturbance $\delta(t)$

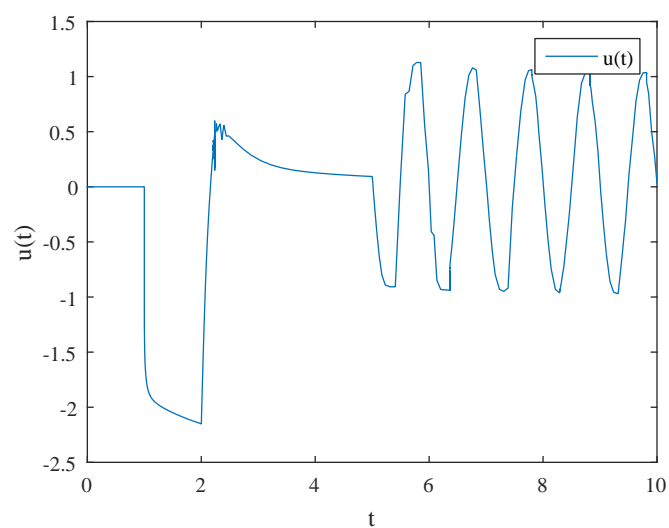


図 3.4.2 Control input $u(t)$

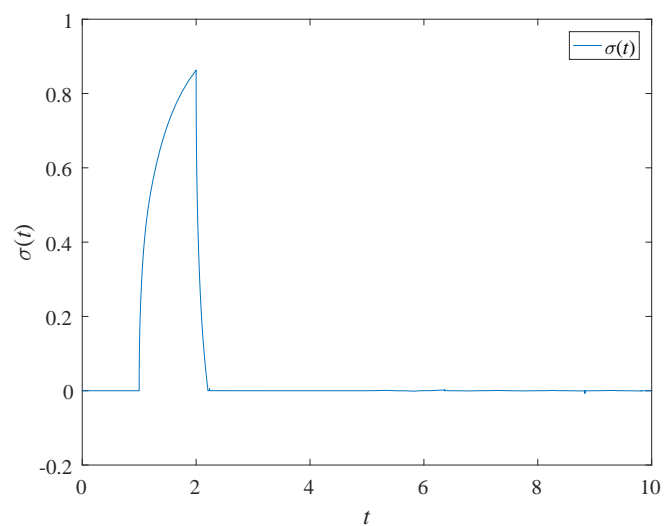


図 3.4.3 σ

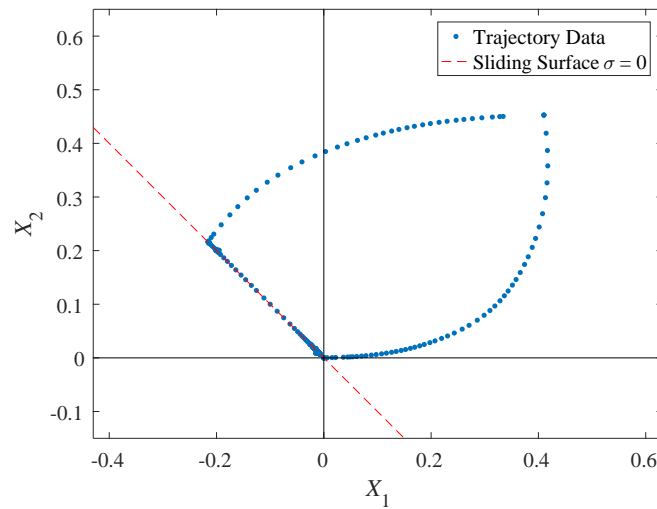


図 3.4.4 Phase trajectory

3.5 分数階システムを対象としたバックステップ法を用いたスライディングモード制御系設計

非整数階システムを対象としてバックステップ法により構成されたスライディングモード制御器の妥当性を確認する為、次式で表される非整数階システムを考える。

$$\begin{cases} \frac{d^{1/3}x_1}{dt^{1/3}} = x_1^2 - x_1^3 + x_2 + \delta_1 \\ \frac{d^{1/3}x_2}{dt^{1/3}} = x_3 + \delta_2 \\ \frac{d^{1/3}x_3}{dt^{1/3}} = u + \delta_3 \end{cases}, \quad (3.5.1)$$

$$[x_1(0) \quad x_2(0) \quad x_3(0)] = [0 \quad 0 \quad 0], \quad (3.5.2)$$

$$\delta_1 = \begin{cases} 0 & t < 6, 16 \leq t < 32 \\ 0.6 & 1 \leq t < 16 \\ 0.5\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) & t \geq 32 \end{cases}, \quad (3.5.3)$$

$$\delta_2 = \begin{cases} 0 & t < 11, 16 \leq t < 32 \\ -0.9 & 11 \leq t < 16 \\ 0.7\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) & t \geq 32 \end{cases}, \quad (3.5.4)$$

$$\delta_3 = \begin{cases} 0 & t < 1, 16 \leq t < 21 \\ 0.9 & 1 \leq t < 16 \\ 0.9\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) & t \geq 21 \end{cases}. \quad (3.5.5)$$

(3.5.1) 式で記述される非整数階システムに対し, BSC(backstepping controller), SMC(sliding mode controller), BSMC(backstepping sliding mode controller) を下記のように構成し数値シミュレーションを行った.

[Back Stepping Controller]

$$\alpha_1^{BSC} = -(x_1^2 - x_1^3) - k_0 z_0^{BSC}, \quad (3.5.6)$$

$$\alpha_2^{BSC} = -z_0^{BSC} - k_1 z_1^{BSC}, \quad (3.5.7)$$

$$u^{BSC} = -z_1^{BSC} - k_2 z_2^{BSC} + \frac{d^{1/3} r_2^{BSC}}{dt^{1/3}}, \quad (3.5.8)$$

$$z_i^{BSC} = \begin{cases} x_1 & i = 0 \\ x_{i+1} - r_i^{BSC} & i = 1, 2 \end{cases}, \quad (3.5.9)$$

$$r_i^{BSC} = \begin{cases} \alpha_1^{BSC} & i = 1 \\ \alpha_2^{BSC} + \frac{d^{1/3} r_1^{BSC}}{dt^{1/3}} & i = 2 \end{cases}, \quad (3.5.10)$$

$$[k_0 \quad k_1 \quad k_2] = [8 \quad 8 \quad 8]. \quad (3.5.11)$$

[Sliding Mode Controller]

$$u^{SMC} = -\frac{s_1}{s_3} (x_1^2 - x_1^3 + x_2) - \frac{s_2}{s_3} x_3 - \frac{w}{s_3} \sigma - \frac{K_s}{s_3} \text{sign}(\sigma), \quad (3.5.12)$$

$$\sigma = s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3, \quad (3.5.13)$$

$$[s_1 \quad s_2 \quad s_3] = [1 \quad 1 \quad 1], \quad (3.5.14)$$

$$[w \quad K_s] = [4 \quad 4]. \quad (3.5.15)$$

[Backstepping Sliding Mode Controller]

$$\alpha_1^{BSMC} = -w_0 \sigma_0 - K_{s0} \text{sign}(\sigma_0) - (x_1^2 - x_1^3) - K_{I0} z_0^{BSMC}, \quad (3.5.16)$$

$$\alpha_2^{BSMC} = -w_1 \sigma_1 - K_{s1} \text{sign}(\sigma_1) - K_{I1} z_1^{BSMC} - \sigma_0, \quad (3.5.17)$$

$$u^{BSMC} = -w_2 \sigma_2 - K_{s2} \text{sign}(\sigma_2) - K_{I2} z_2^{BSMC} - \sigma_1 + \frac{d^{1/3} r_2^{BSMC}}{dt^{1/3}}, \quad (3.5.18)$$

$$\sigma_i = z_i^{BSMC} + K_{Ii} I^{1/3} [z_i^{BSMC}]_t, \quad i = 0, 1, 2, \quad (3.5.19)$$

$$z_i^{BSMC} = \begin{cases} x_1 & i = 0 \\ x_{i+1} - r_i^{BSMC} & i = 1, 2 \end{cases}, \quad (3.5.20)$$

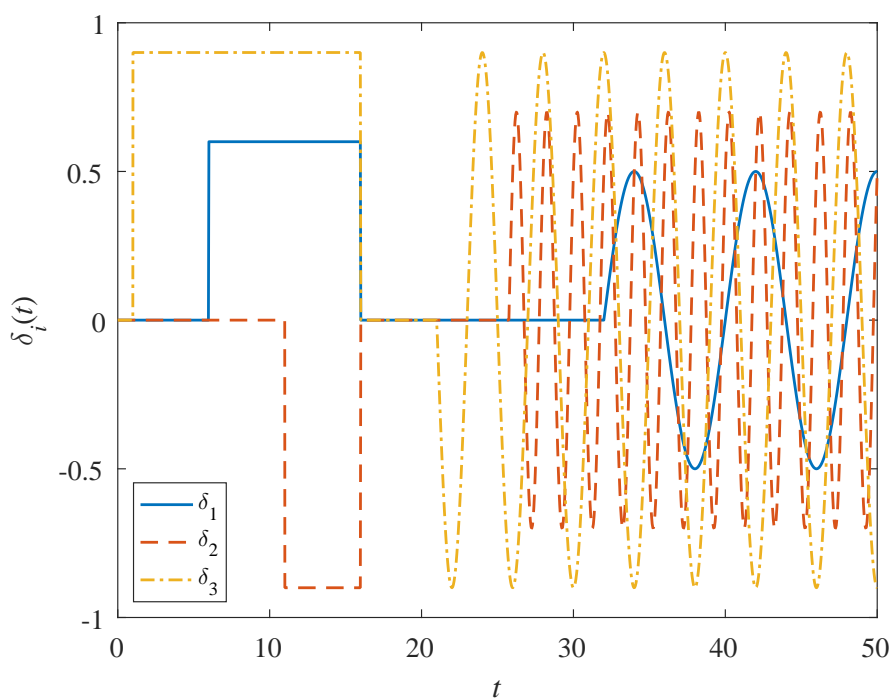
$$r_i^{BSMC} = \begin{cases} \alpha_1^{BSMC} & i = 1 \\ \alpha_2^{BSMC} + \frac{d^{1/3} r_1^{BSMC}}{dt^{1/3}} & i = 2 \end{cases}, \quad (3.5.21)$$

$$[K_{I0} \quad K_{I1} \quad K_{I2}] = [1.5 \quad 1.5 \quad 1.5], \quad (3.5.22)$$

$$[w_0 \quad w_1 \quad w_2] = [1 \quad 1 \quad 1], \quad (3.5.23)$$

$$[K_{s0} \quad K_{s1} \quad K_{s2}] = [1.2 \quad 1 \quad 0.8]. \quad (3.5.24)$$

数値シミュレーションの結果を図 3.5.1 から図 3.5.6 に示す。図 3.5.2 に示されているように、バックステッピング法を用いていないスライディングモード制御器は入力と異なるチャンネルに外乱が存在した状況に対処できていないことが分かる。図 3.5.1 と図 3.5.3 から、バックステッピング法を用いた制御系では異なるチャンネルに入力された外乱に対処し、 x_1 の変動をある程度までに抑えられていることが確認できる。しかし、このシミュレーション条件の下では、図 3.5.1 に示されているように、BSC では定値外乱 δ_1 によって定値誤差が生じている。これは安定化関数 α_1^{BSC} に積分項が組み込まれていないためである。BSMC は分数階積分項が α_1^{BSMC} が組み込まれていることから、図 3.5.3 から確認できるように、制御器が定値外乱を補償する事ができている。

図 3.5.1 Disturbance $\delta(t)$

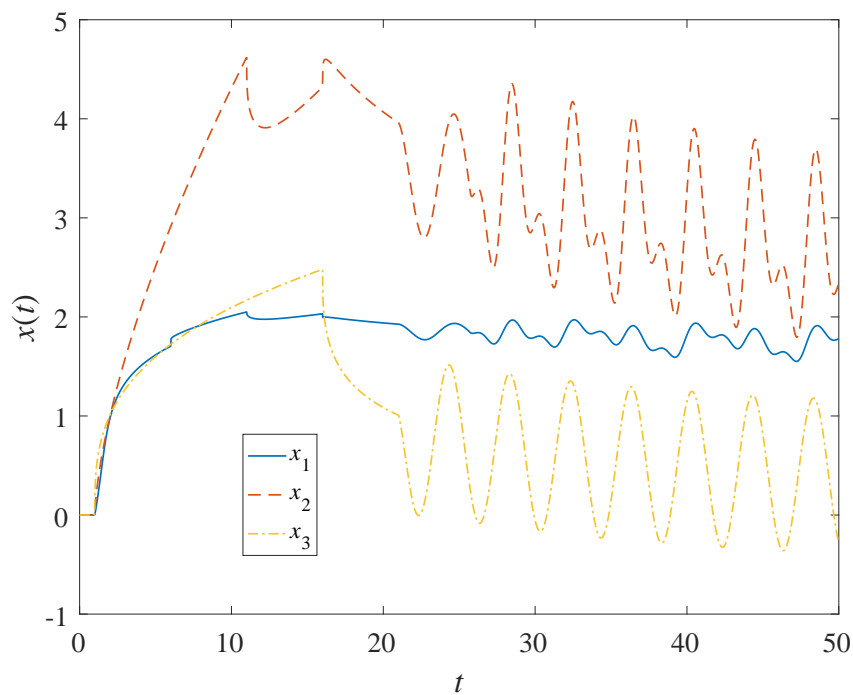


図 3.5.2 Plant state $x(t)$ of not controlled case

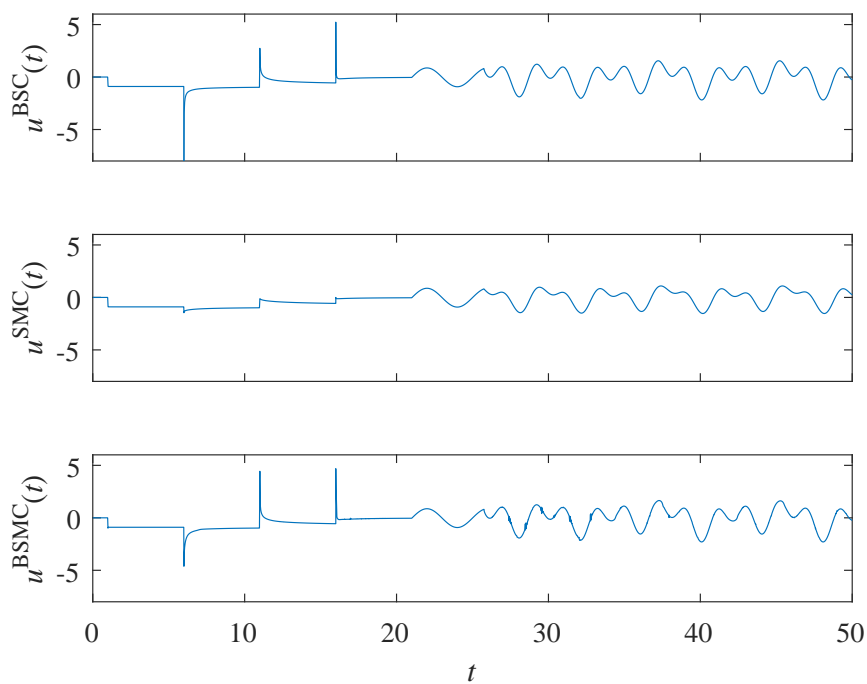


図 3.5.3 Control inputs u^{BSC} , u^{SMC} and u^{BSMC}

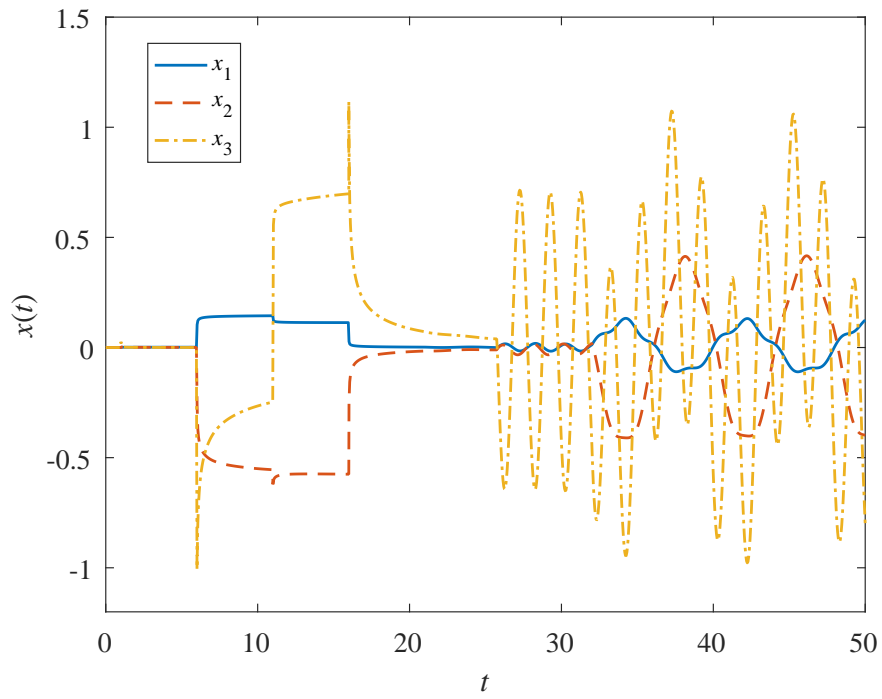


図 3.5.4 Plant state $x(t)$ of BSC

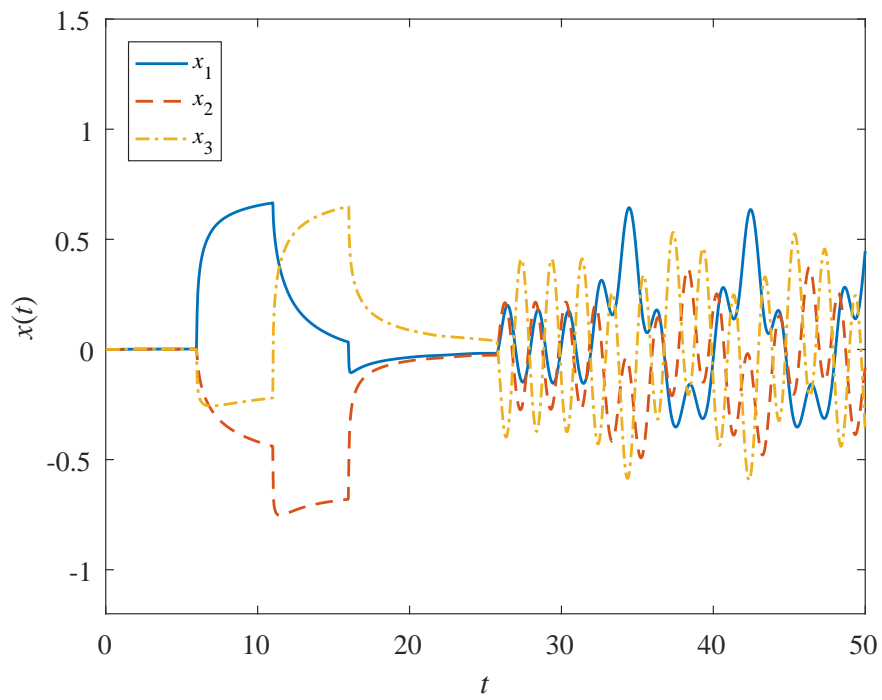
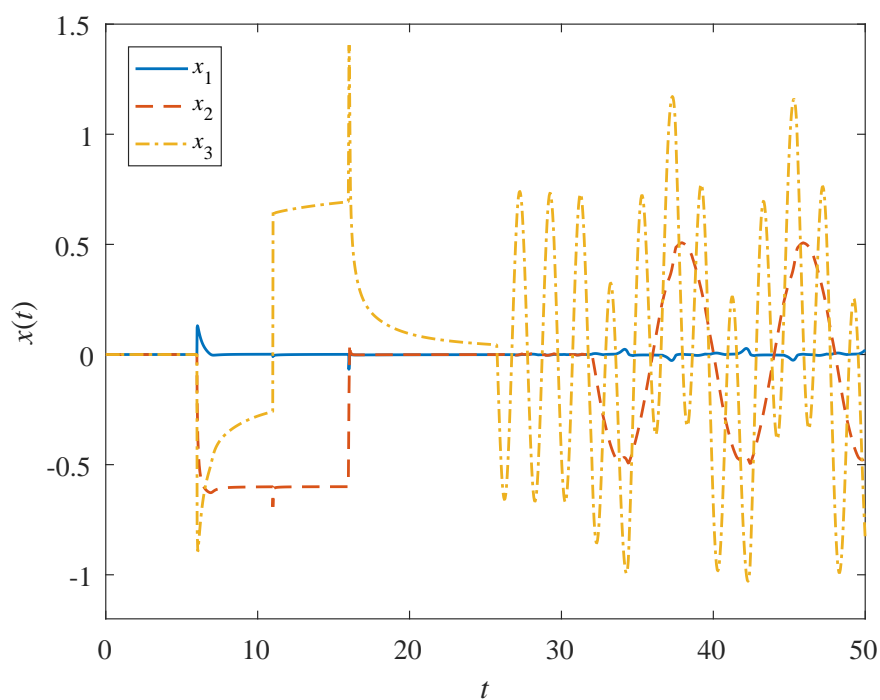


図 3.5.5 Plant state $x(t)$ of SMC

図 3.5.6 Plant state $x(t)$ of BSMC

3.6 むすび

本章では，バックステッピング法によって分数階システムを対象としたスライディングモード制御系の設計を行った．本手法は，分数階システムのみならず，整数階非線形システムを非線形分数階システムとしてあらわすことにより，整数階非線形システムについて，状態数が拡張された制御系を構築することにも応用できる．制御系の自由度が増加することによる制御性能向上などに，本手法が役立つことが期待される．

第4章

分数階システムを対象とした 適応観測器の設計

4.1 はじめに

分数階微積分を用いることにより、粘弾性体の力学的応答やアモルファス半導体の電氣的応答などの複雑な現象を簡潔に精度よくモデル化できることに加え、拡散方程式などの時間と位置の偏微分方程式として記述されるシステムを時間の常微分方程式のシステムとして扱うことが可能となる [1, 2, 4]. また、リチウムイオン電池の電氣的応答に関しても、イオンの拡散現象が濃度過電圧として影響することから、その等価回路について分数階微積分を用いてモデル化できることが知られており [54], 分数階微積分によって対象を記述して適応観測器を設計することによって、そのようなシステムの状態やパラメータをモデルに基づき適切に計測できることが期待できる.

リチウムイオン電池はモバイル電源や大型機械の電源として優れた特性を持つことから、近年、多くの市場で普及している. このことから、リチウムイオン電池などのバッテリーを効果的に活用するための「バッテリー・マネジメント・システム」の重要性が増してきているが、そのシステムに求められる機能のひとつとして、電池の劣化状態などを評価する電池診断技術が挙げられる. 電池の状態を非破壊的に計測する代表的な解析法として、充放電曲線を微分することで得られる dV/dQ 曲線の解析や電気化学インピーダンス法による解析が存在する [59, 60, 61, 62].

電気化学インピーダンス法は、電極へ交流信号を印加・掃引することで、電流と電圧の入出力関係を内部インピーダンスとして表し、内部インピーダンスの周波数特性を解析する非破壊的な手法であるが、交流信号を低速で掃引する必要があることから、オンラインでのパラメータ計測が難しいという課題点があり、オンラインでリチウムイオン電池の解析を行うために、近年、パラメータ推定機構を備えた観測器を内部インピーダンスモデルに適用する

ことで電池の状態を診断する手法の開発が活発になされている。

リチウムイオン電池に対しパラメータ推定機構を持った観測器を適用した研究として、拡張カルマンフィルタを用いた G. L. Plett の研究や Y. Zou らの研究、対数化無香料カルマンフィルタを用いた馬場らの研究が知られている [63, 64, 65]。しかし、従来の観測器では、イオンの拡散の影響によりあらわれる Warburg インピーダンスの動特性を整数階の微積分で表現できないことから、キャパシタとレジスタンスを用いた近似によって等価回路を表現しなおしてパラメータ推定を行う必要があった。しかし、Warburg インピーダンスを用いて等価回路を構成することで、イオンの拡散定数の情報を等価回路のパラメータとして直接取得できることや、実験データへのフィッティングをより精度よく行える [62] といった利点がある。

本研究では、分数階微積分で表されるシステムを対象とした Kreisselmeier 型の適応観測器の設計法を開発することで、分数階微積分で表されるシステムについてオンラインでの状態観測とパラメータ同定を同時に達成することを可能とした。更に、数値実験により、Warburg インピーダンスを用いた等価回路を持つリチウムイオン電池のハーフセルに対して提案手法を用いたパラメータ推定を行い、提案手法の有効性を確認した。

4.2 問題の定式化

観測対象として以下の分数階システムを考える。

$$D^{1/m} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t), \quad (4.2.1)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t), \quad (4.2.2)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\alpha_2 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{n-1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_n & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.2.3)$$

$$\mathbf{b}^T = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \cdots \quad \beta_{n-1} \quad \beta_n], \quad (4.2.4)$$

$$\mathbf{c}^T = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad 0 \quad 0], \quad (4.2.5)$$

ただし、 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ とする。ここで、 $u(t)$ 、 $y(t)$ はそれぞれプラントの入出力を表し、 α_j 、 β_j は未知のパラメータである。また、この分数階システムに対し、以下の仮定を与えるものとする。

1. プラントは漸近安定
2. 完全可観測

3. 最高次数 n/m は既知

ここで、このプラントに対して適当な入力を与えた時に、入出力信号 $u(t)$, $y(t)$ から、未知パラメータ α_j , β_j をオンラインで同定するとともに、同定したパラメータに基づいて真の状態を推定する適応オブザーバを構成することが本章での目的である。

4.3 適応観測器の設計

(4.2.1) 式で表されたプラントを式変形することで、次の等価な表現式を得ることができる。

$$D^{1/m} \mathbf{x}(t) = \mathbf{F} \mathbf{x}(t) + (\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{f})y(t) + \boldsymbol{\beta}u(t), \quad (4.3.1)$$

ここで、

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} & \mathbf{g}^\top \\ & \mathbf{K} \end{bmatrix}, \quad (4.3.2)$$

$$\mathbf{f}^\top = [f_1 \quad f_2 \quad \cdots \quad f_n], \quad (4.3.3)$$

$$\boldsymbol{\alpha}^\top = [-\alpha_1 \quad -\alpha_2 \quad \cdots \quad -\alpha_n], \quad (4.3.4)$$

$$\boldsymbol{\beta}^\top = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n], \quad (4.3.5)$$

$$\mathbf{g}^\top = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0], \quad (4.3.6)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{I}_{n-2} & \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.3.7)$$

このとき、次の定理が成立する。

定理 14. $\mathbf{R}_y(t)$, $\mathbf{R}_u(t)$, $\boldsymbol{\xi}_y(t)$, $\boldsymbol{\xi}_u(t)$ が以下のように与えられるものとする。

$$D^{1/m} \mathbf{R}_y(t) = \mathbf{F} \mathbf{R}_y(t) + \mathbf{I}_n y(t), \quad \mathbf{R}_y(0) = 0, \quad (4.3.8)$$

$$D^{1/m} \mathbf{R}_u(t) = \mathbf{F} \mathbf{R}_u(t) + \mathbf{I}_n u(t), \quad \mathbf{R}_u(0) = 0, \quad (4.3.9)$$

$$\boldsymbol{\xi}_y(t) = \mathbf{R}_y^\top(t)\mathbf{c}, \quad (4.3.10)$$

$$\boldsymbol{\xi}_u(t) = \mathbf{R}_u^\top(t)\mathbf{c}. \quad (4.3.11)$$

このとき、(4.2.2) 式、(4.3.1) 式で表されたプラントは次式で表すことができる。

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathbf{F}^j t^{\frac{1}{m}j}}{\Gamma(\frac{1}{m}j + 1)} \mathbf{x}(0) + \mathbf{R}_y(t)(\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{f}) + \mathbf{R}_u(t)\boldsymbol{\beta}, \quad (4.3.12)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^\top \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathbf{F}^j t^{\frac{1}{m}j}}{\Gamma(\frac{1}{m}j + 1)} \mathbf{x}(0) + \boldsymbol{\xi}_y^\top(t)(\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{f}) + \boldsymbol{\xi}_u^\top(t)\boldsymbol{\beta}. \quad (4.3.13)$$

さらに、 $\boldsymbol{\xi}_y(t)$ 、 $\boldsymbol{\xi}_u(t)$ に関して次式の関係が成立する。

$$D^{1/m}\boldsymbol{\xi}_y(t) = \mathbf{F}^\top \boldsymbol{\xi}_y(t) + \mathbf{c}y(t), \quad (4.3.14)$$

$$D^{1/m}\boldsymbol{\xi}_u(t) = \mathbf{F}^\top \boldsymbol{\xi}_u(t) + \mathbf{c}u(t). \quad (4.3.15)$$

Proof. (4.3.1) 式の解は Mittag-Leffler 関数による解を用いて、

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= E_{\frac{1}{m}, 1}(\mathbf{F}t^{\frac{1}{m}})\mathbf{x}(0) \\ &\quad + \int_0^t (t-\tau)^{\frac{1}{m}-1} E_{\frac{1}{m}, \frac{1}{m}}(\mathbf{F}(t-\tau)^{\frac{1}{m}})(\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{f})y(\tau)d\tau \\ &\quad + \int_0^t (t-\tau)^{\frac{1}{m}-1} E_{\frac{1}{m}, \frac{1}{m}}(\mathbf{F}(t-\tau)^{\frac{1}{m}})\boldsymbol{\beta}u(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

ここで、(4.3.8) 式、(4.3.9) 式で表された $\mathbf{R}_y(t)$ 、 $\mathbf{R}_u(t)$ の解を求めると、

$$\mathbf{R}_y(t) = \int_0^t (t-\tau)^{\frac{1}{m}-1} E_{\frac{1}{m}, \frac{1}{m}}(\mathbf{F}(t-\tau)^{\frac{1}{m}})y(\tau)d\tau, \quad (4.3.17)$$

$$\mathbf{R}_u(t) = \int_0^t (t-\tau)^{\frac{1}{m}-1} E_{\frac{1}{m}, \frac{1}{m}}(\mathbf{F}(t-\tau)^{\frac{1}{m}})u(\tau)d\tau. \quad (4.3.18)$$

(4.3.16) 式に (4.3.17) 式、(4.3.18) 式を代入すると次の式が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= E_{\frac{1}{m}, 1}(\mathbf{F}t^{\frac{1}{m}})\mathbf{x}(0) + \mathbf{R}_y(t)(\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{f}) + \mathbf{R}_u(t)\boldsymbol{\beta} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathbf{F}^j t^{\frac{1}{m}j}}{\Gamma(\frac{1}{m}j + 1)} \mathbf{x}(0) + \mathbf{R}_y(t)(\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{f}) + \mathbf{R}_u(t)\boldsymbol{\beta}. \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

さらに、 \mathbf{c}^\top を (4.3.19) 式の両辺にかけ、(4.3.10) 式、(4.3.11) 式を用いると次式を得ることができる。

$$y(t) = \mathbf{c}^\top \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathbf{F}^j t^{\frac{1}{m}j}}{\Gamma(\frac{1}{m}j + 1)} \mathbf{x}(0) + \boldsymbol{\xi}_y^\top(t)(\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{f}) + \boldsymbol{\xi}_u^\top(t)\boldsymbol{\beta}. \quad (4.3.20)$$

(4.3.17) 式、(4.3.18) 式から、以下の関係が成り立つ。

$$\mathbf{F}\mathbf{R}_y(t) = \mathbf{R}_y(t)\mathbf{F}, \quad (4.3.21)$$

$$\mathbf{F}\mathbf{R}_u(t) = \mathbf{R}_u(t)\mathbf{F}. \quad (4.3.22)$$

この関係を用いて、 $D^{\frac{1}{m}}\boldsymbol{\xi}_y(t)$ 、 $D^{\frac{1}{m}}\boldsymbol{\xi}_u(t)$ を計算すると以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_y^{(\frac{1}{m})}(t) &= \mathbf{R}_y^\top(\frac{1}{m})(t)\mathbf{c} \\ &= (\mathbf{F}\mathbf{R}_y(t) + \mathbf{I}_n y)^\top \mathbf{c} \\ &= \mathbf{F}^\top(t)\mathbf{R}_y^\top(t)\mathbf{c} + \mathbf{c}y(t) \\ &= \mathbf{F}^\top(t)\boldsymbol{\xi}_y(t) + \mathbf{c}y(t), \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_u^{(\frac{1}{m})}(t) &= \mathbf{R}_u^\top(\frac{1}{m})(t)\mathbf{c} \\ &= (\mathbf{F}\mathbf{R}_u(t) + \mathbf{I}_n u(t))^\top \mathbf{c} \\ &= \mathbf{F}^\top \mathbf{R}_u^\top(t)\mathbf{c} + \mathbf{c}u(t) \\ &= \mathbf{F}^\top \mathbf{f}_u(t) + \mathbf{c}u(t). \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

以上により、定理が証明された。 □

(4.3.13) 式は次のように表すことができる。

$$y(t) = \boldsymbol{\theta}^\top \boldsymbol{\xi}(t) + z(t), \quad (4.3.25)$$

$$\boldsymbol{\theta}^\top = [(\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{f})^\top \quad \boldsymbol{\beta}^\top], \quad (4.3.26)$$

$$\boldsymbol{\xi}^\top(t) = [\boldsymbol{\xi}_y^\top(t) \quad \boldsymbol{\xi}_u^\top(t)], \quad (4.3.27)$$

$$z(t) = \mathbf{c}^\top \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathbf{F}^j t^{\frac{1}{m}j}}{\Gamma(\frac{1}{m}j + 1)} \mathbf{x}(0). \quad (4.3.28)$$

ここで、出力推定値 $\hat{y}(t)$ をパラメータ推定値 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ を用いて次のように設計する。

$$\hat{y}(t) = \hat{\boldsymbol{\theta}}^\top(t)\hat{\boldsymbol{\xi}}(t), \quad (4.3.29)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^\top(t) = \left[(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(t) - \boldsymbol{f})^\top \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}^\top(t) \right], \quad (4.3.30)$$

ここで、 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(t)$ 、 $\hat{\boldsymbol{\beta}}(t)$ は $\boldsymbol{\alpha}$ 、 $\boldsymbol{\beta}$ の推定値を表す。

このとき、プラントからの出力 $y(t)$ とその推定値 $\hat{y}(t)$ との出力誤差方程式は以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \epsilon(t) &= \hat{y}(t) - y(t) \\ &= \hat{\boldsymbol{\theta}}^\top(t)\boldsymbol{\xi}(t) - \boldsymbol{\theta}^\top(t)\boldsymbol{\xi}(t) - z(t) \\ &= \boldsymbol{\phi}^\top(t)\boldsymbol{\xi}(t) - z(t), \end{aligned} \quad (4.3.31)$$

ただし、

$$\boldsymbol{\phi}^\top(t) = \left[(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(t) - \boldsymbol{\alpha})^\top \quad (\hat{\boldsymbol{\beta}}(t) - \boldsymbol{\beta})^\top \right]. \quad (4.3.32)$$

このとき、 $z(t)$ は行列 F を分数階システムの安定条件を満たすように選ぶことで $t \rightarrow \infty$ で $z(t) \rightarrow 0$ に収束させることができ、最終的に出力誤差方程式は次式となる。

$$\epsilon(t) = \boldsymbol{\phi}^\top(t)\boldsymbol{\xi}(t). \quad (4.3.33)$$

このとき、パラメータ推定機構を次の補題を用いて構成することで、出力誤差 $\epsilon(t)$ を零に漸近させることができる。

補題 15. 誤差方程式が (4.3.33) 式として表されるとき、パラメータ調整則を

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(t) = -\frac{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\xi}(t)\epsilon(t)}{\lambda + \boldsymbol{\xi}^\top(t)\boldsymbol{\xi}(t)}, \quad \lambda > 0, \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}^\top > 0. \quad (4.3.34)$$

とすることにより、 $t \rightarrow \infty$ で $\epsilon(t) \rightarrow 0$ とすることができる。

パラメータ推定機構に入力される信号が PE 性を満たしている仮定のもとでは、パラメータ推定誤差について $t \rightarrow \infty$ で $\boldsymbol{\phi}(t) \rightarrow 0$ とすることができる。

以上から、プラントの入力 $u(t)$ と出力 $y(t)$ から Kreisselmeier 型の適応観測器を構成することが可能となる。設計する適応観測器の概略図を図 4.3.1 に示す。

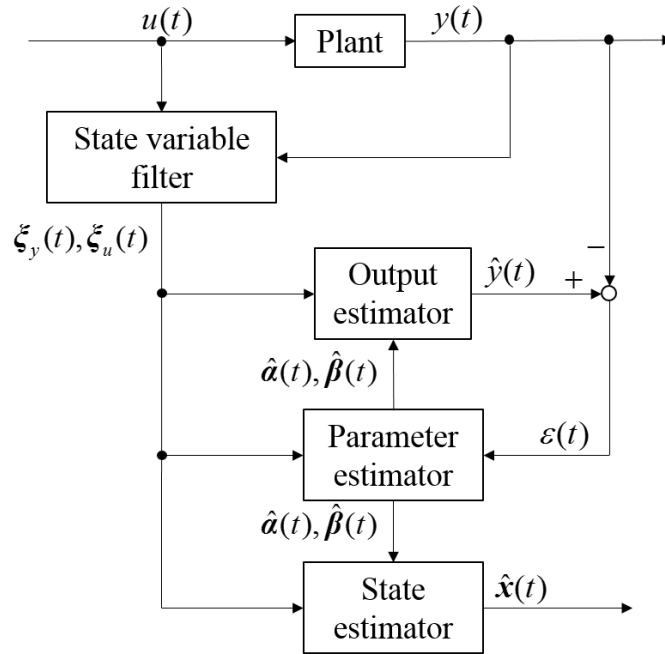


図 4.3.1 Configuration of adaptive observer

設計した適応観測器を粘弾性体を想定した図 4.3.2 で表されるシステムに適用することを想定し数値実験を行う．このシステムは粘弾性体の代表的なモデルである Voigt モデルに対しスプリングポットと呼ばれる歪みの 1/2 階の微分に応じた応力を発生させる機械要素を加えたシステムであり，スプリングポットを機械モデルに導入することによって，粘弾性体の動特性を精度よくフィッティングできることが報告されている [1]．このシステムの運動方程式はマスに加える力を $u(t)$ [N]，歪みを $y(t)$ [m] と表し， $My^{(2)}(t) + G_1y^{(1)}(t) + G_{1/2}y^{(1/2)}(t) + G_0y(t) = u(t)$ と表され，その可観測正準系への実現は (4.3.35) 式から (4.3.41) 式のように表される．ここで， M [$\text{Nm}^{-1}\text{s}^{-2}$]， G_1 [$\text{Nm}^{-1}\text{s}^{-1}$]， $G_{1/2}$ [$\text{Nm}^{-1}\text{s}^{-1/2}$]， G_0 [Nm^{-1}] はそれぞれ質量，ダンパ係数，スプリングポット係数，バネ係数を表す．

$$D^{\frac{1}{2}}[\mathbf{x}(t)] = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (4.3.35)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}(t),$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha_2 & 0 & 1 & 0 \\ -\alpha_3 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.3.36)$$

$$\mathbf{B}^\top = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4], \quad (4.3.37)$$

$$\mathbf{c}^\top = [1 \ 0 \ \cdots \ 0], \quad (4.3.38)$$

$$[\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4] = \left[0 \ \frac{G_1}{M} \ \frac{G_{1/2}}{M} \ \frac{G_0}{M} \right] \quad (4.3.39)$$

$$[\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \ \beta_4] = \left[0 \ 0 \ 0 \ \frac{1}{M} \right] \quad (4.3.40)$$

$$[M \ G_1 \ G_{1/2} \ G_0] = [1 \ 1 \ 1 \ 1], \quad (4.3.41)$$

ただし，入力 $u(t)$ ，および設計パラメータ，初期パラメータ推定誤差を以下のように与えた。

$$u(t) = w(t) - \frac{1}{2}, \quad (4.3.42)$$

$$\mathbf{f}^\top = [-4.9 \ -21.2 \ -13.0 \ -18.8], \quad (4.3.43)$$

$$\gamma_i = \begin{cases} 0, & i = 1, 5, 6, 7 \\ 6.0 \times 10^4, & i = 2, 3, 4, 8 \end{cases}, \quad (4.3.44)$$

$$\lambda = 1, \quad (4.3.45)$$

$$\phi^\top(0) = [0 \ 5 \ 5 \ 5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 5], \quad (4.3.46)$$

ここで， $w(t)$ は $x_n = x_{n-6} + x_{n-1}$ で与えられる M 系列信号を表す．また， $\gamma_i = 0$ ($i = 1, 5, 6, 7$) としているのは，システムの構造から α_1 , β_1 , β_2 , β_3 がパラメータを持たないことから，それらが 0 であると既知であるものとして，適応観測器を設計したためである。

分数階システムを対象とした適応観測器によって得られた数値実験結果を結果を図 4.3.3 から図 4.3.8 に載せる．システムの状態とパラメータを同時に同定できていることから，分数階システムを対象として適応観測器が構成できていることが確認できる。

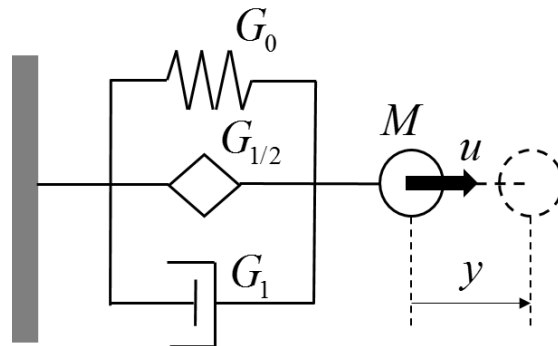


図 4.3.2 Schematic of the plant

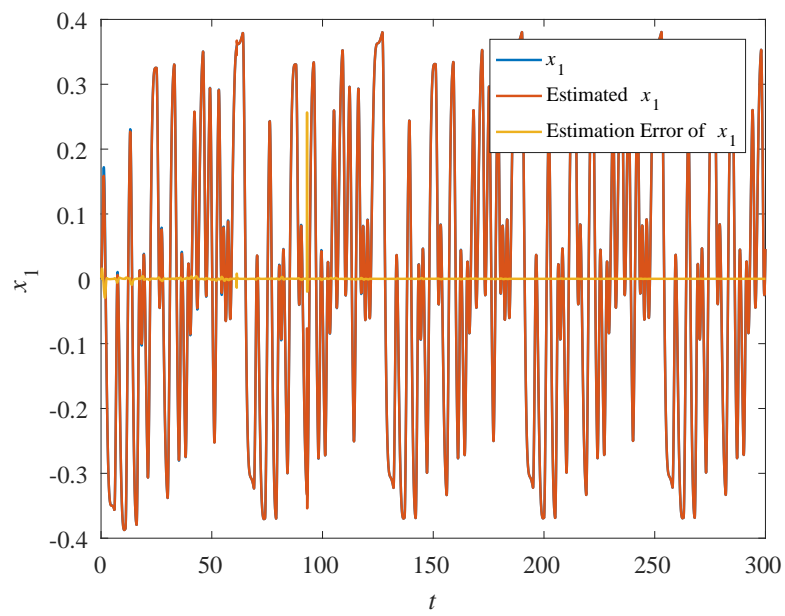


図 4.3.3 Estimated y ($y = x_1$)

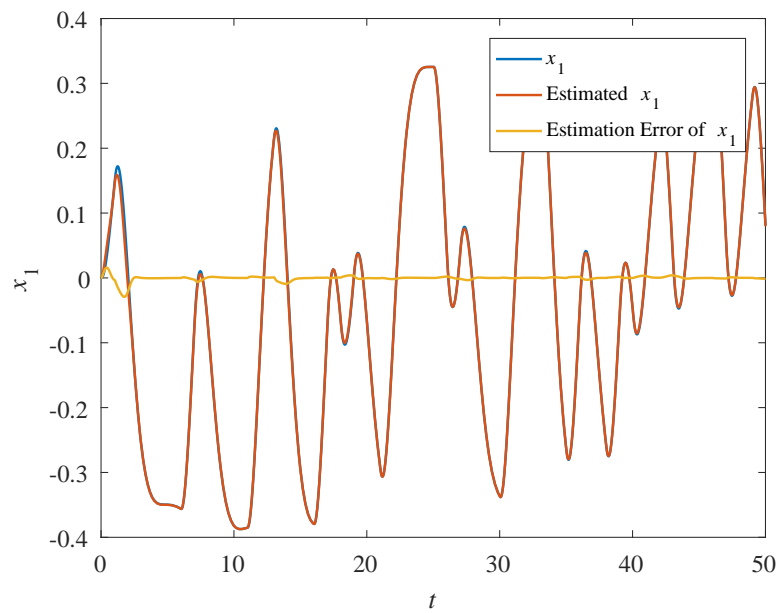


図 4.3.4 Initial response of estimated y ($y = x_1$)

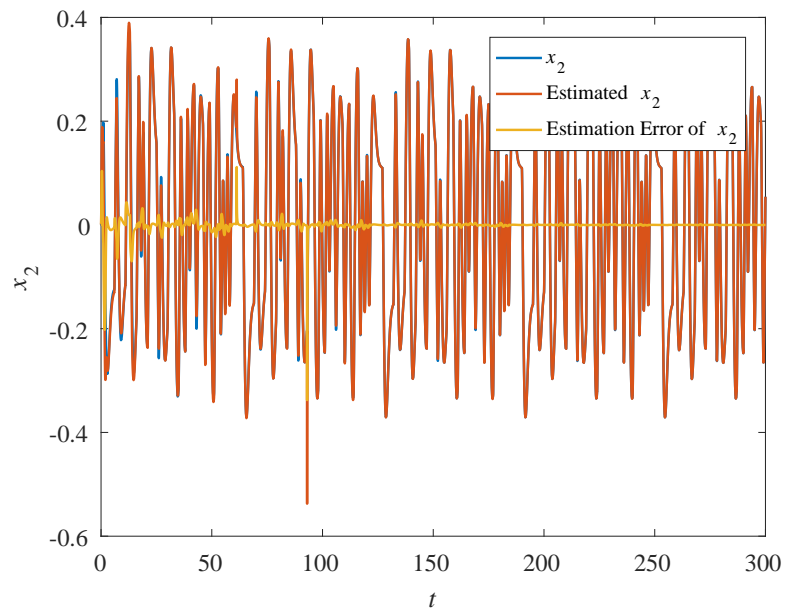


図 4.3.5 Estimated x_2

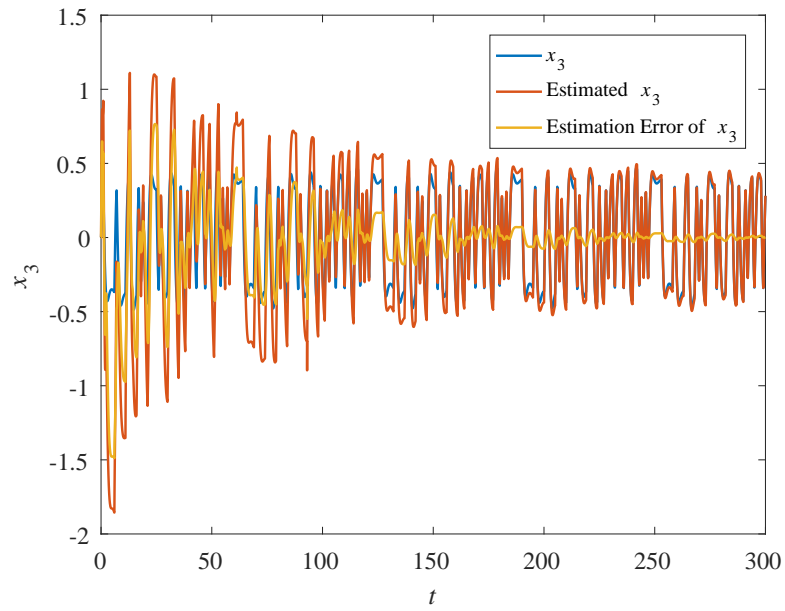


図 4.3.6 Estimated x_3

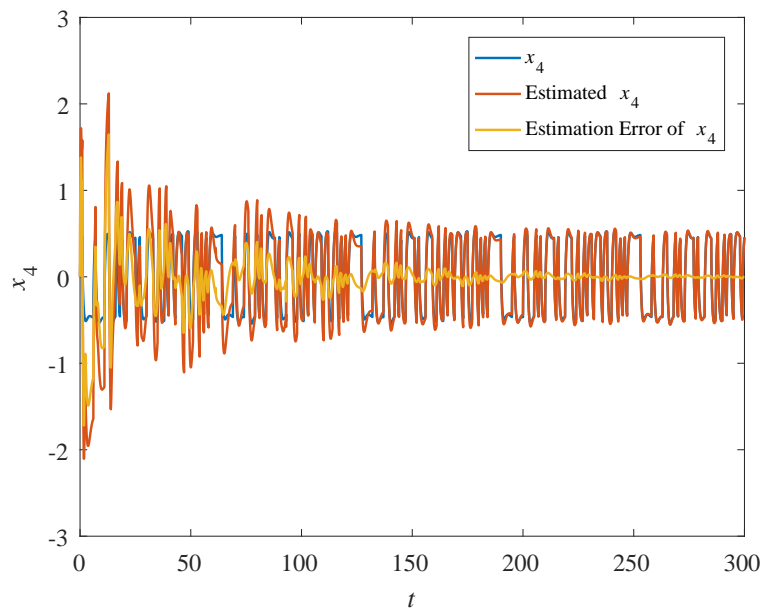


図 4.3.7 Estimated x_4

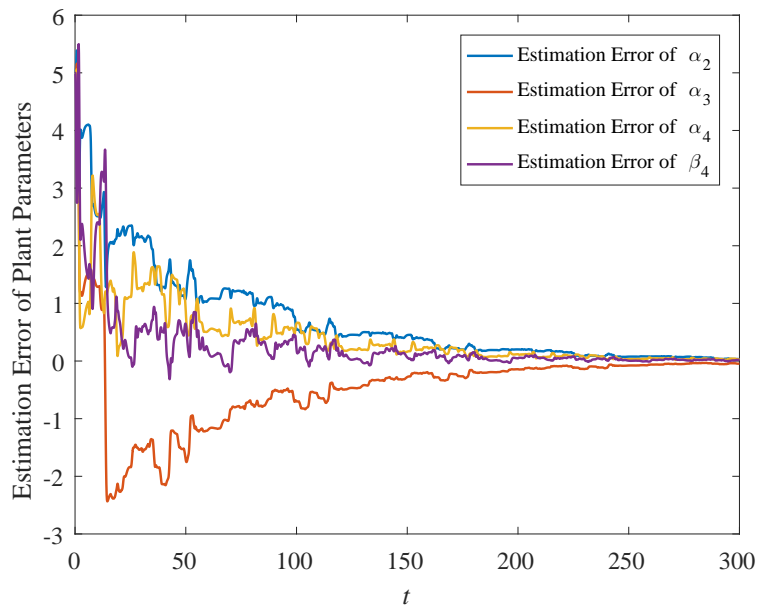


図 4.3.8 Estimation error of plant parameters

4.4 リチウムイオン電池

4.4.1 Warburg インピーダンス

Warburg インピーダンスは電気化学インピーダンスにおける Faraday インピーダンスを構成する要素としてあらわれ、その動的な振る舞いは分数階の微積分によって記述することができる。ここでは、Warburg インピーダンスが拡散方程式から導出される過程を記述する。

平板電極での線形拡散によるリチウムの濃度変化は、フィックの法則として次式で与えられる。

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad (4.4.1)$$

ここで、 c は物質濃度、 D は化学拡散係数を表す。この式について、ラプラス演算子 s とパラメータ A , B を用いて次式のような解の形を与える。

$$\Delta c(x, s) = Ae^{(\frac{s}{D})^{1/2}x} + Be^{-(\frac{s}{D})^{1/2}x}. \quad (4.4.2)$$

電解質界面からの拡散層の厚さを δ とし、次式で表される境界条件を与える。

$$\Delta c(\delta, s) = 0. \quad (4.4.3)$$

境界条件を満足するように、パラメータ A を次式で与える。

$$A = -Be^{-2(\frac{s}{D})^{1/2}\delta}. \quad (4.4.4)$$

(4.4.4) 式を (4.4.2) 式に代入し、

$$\Delta c(x, s) = -2Be^{(\frac{s}{D})^{1/2}\delta} \sinh\left(\left(\frac{s}{D}\right)^{1/2}(x - \delta)\right). \quad (4.4.5)$$

よって、電解質界面での物質の時間変化 $\Delta c_s = \Delta c(0, s)$ は、

$$\Delta c_s = -2Be^{(\frac{s}{D})^{1/2}\delta} \sinh\left(-\left(\frac{s}{D}\right)^{1/2}\delta\right). \quad (4.4.6)$$

また、電解質界面でのリチウムの拡散流束の変化量を ΔJ とすると、

$$\begin{aligned} \Delta J &= -D \left. \frac{\partial \Delta c}{\partial x} \right|_{x=0} \\ &= 2B(Ds)^{1/2} e^{(\frac{s}{D})^{1/2}\delta} \cosh\left(-\left(\frac{s}{D}\right)^{1/2}\delta\right), \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

と表される。平板電極の表面積を S とし、界面での拡散流束密度 J/S と電荷移動速度 $v_{Li^+} = v_{Li} = kc_s$ は等しいことから、

$$-J = Skc_s, \quad (4.4.8)$$

ここで、 k は反応速度定数を表す。反応速度定数がアレニウスの式に従うものと仮定すると、反応速度定数は電極の電位 E と次式の関係を持つ。

$$k = k_0 e^{b(E-E_{eq})}, \quad (4.4.9)$$

ここで、 E_{eq} は平衡状態における電位、 k_0 は電位 $E = E_{eq}$ のときの反応速度定数を表し、 b は移動係数や温度などから定まるパラメータである。 J について、 $(c_s, E) = (c_s^*, E_{eq})$ まわりでテイラー展開した式は、二次以降の項を無視して次式で与えられる。

$$\Delta J = -Sbk_0c_s^*\Delta E - Sk_0\Delta c_s, \quad (4.4.10)$$

ただし、 c_s^* は平衡状態での電極表面の物質濃度を表す。ここから、電位の微小変化による表面濃度の変化率 $\frac{\Delta c_s}{\Delta E}$ は、

$$\frac{\Delta c_s}{\Delta E} = \frac{-bk_0c_s^*}{k_0 + \frac{\Delta J}{S\Delta c_s}}. \quad (4.4.11)$$

更に、電極表面での電流 I は次式のように表される。

$$I = -FJ, \quad (4.4.12)$$

ここで、 F はファラデー定数を表す。(4.4.12) 式の変分は次式で与えられる。

$$\Delta I = FSk_0(bc_s^*\Delta E + \Delta c_s). \quad (4.4.13)$$

ここから、Faraday インピーダンス $Z_F = \Delta E/\Delta I$ は、

$$\begin{aligned} Z_F^{-1} &= FSk_0c_s^* + nFSk_0\frac{\Delta c_s}{\Delta E} \\ &= FSk_0c_s^* \\ &\quad + FSk_0\frac{-bk_0c_s^*}{k_0 - \frac{(Ds)^{1/2}}{S}\left\{\tanh\left(-\left(\frac{s}{D}\right)^{1/2}\delta\right)\right\}^{-1}}. \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

ここで、平衡状態において電極を流れる交換電流は $I_0 = FSk_0c_s^*$ と表されることから、

$$Z_F = \frac{1}{bI_0} \left(1 + Sk_0(Ds)^{-1/2} \tanh\left(\left(\frac{s}{D}\right)^{1/2}\delta\right) \right). \quad (4.4.15)$$

ここで、 $R_{ct} = (bI_0)^{-1}$ 、 $R_W = Sk_0R_{ct}D^{-1/2}$ とし、 $\delta\sqrt{\frac{s}{D}} \gg 1$ としたとき、

$$Z_F = R_{ct} + \frac{R_W}{\sqrt{s}}, \quad (4.4.16)$$

となり、Warburg インピーダンスとして、 $1/2$ 階積分作用素 $s^{-1/2}$ が現れることが確認できる。

4.4.2 リチウムイオン電池の等価回路モデル

電気化学インピーダンスの代表的な等価回路モデルのひとつとして、図 4.4.1 で表される Randles 等価回路と呼ばれる Warburg インピーダンスを含んだモデルが知られている。

Randles 等価回路は活性化過電圧，濃度過電圧，電気二重層容量，溶液抵抗をそれぞれ R_{ct} [VA^{-1}], R_W [$\text{VA}^{-1}\text{s}^{-1/2}$], C_{dl} [$\text{VA}^{-1}\text{s}^{-1}$], R_{sol} [VA^{-1}] によって関連付けて表していることから，リチウムイオン電池の解析のための等価回路モデルを構成する基本的な要素として多くの研究で用いられている [66, 67, 68].

4.4.1 項にて導出したように，Warburg インピーダンス Z_W は電極と電解質の界面におけるイオンの拡散現象に由来する電気素子であり，半無限拡散のケースにおいて，その動的な振る舞いは次式のように表される。

$$i_W(t) = \frac{1}{R_W} D^{1/2} [v_W(t)], \quad (4.4.17)$$

ここで， $i_W(t)$ [A] と $v_W(t)$ [V] は，それぞれ，Warburg インピーダンスの電流と電圧である。この場合，図 4.4.1 で表される Randles 等価回路は次式の伝達関数として表現できる。

$$V(s) = Z(s) I(s), \quad (4.4.18)$$

$$Z(s) = \frac{\frac{1}{C_{dl}} s^{1/2} + \frac{R_W}{R_{ct} C_{dl}}}{s^{3/2} + \frac{R_W}{R_{ct}} s + \frac{1}{R_{ct} C_{dl}} s^{1/2}}, \quad (4.4.19)$$

$$V(s) = E(s) - R_{sol} I(s), \quad (4.4.20)$$

ここで， $E(s)$ は Randles 等価回路にかかる全体の過電圧であり， $R_{sol} I(s)$ は溶液抵抗による抵抗過電圧， $V(s)$ は活性化過電圧と濃度過電圧の和を表す。(4.4.18) 式と (4.4.19) 式から，リチウムイオン電池に入力される電流と過電圧の関係は線形分数階システムとして表せることが確認できる。図 4.4.2 に， $R_{ct} = 0.3$, $R_W = 0.1$, $C_{dl} = 0.2$ としたときの $Z(s)$ の Cole-Cole 線図 (Nyquist 線図) を載せる。

Randles 等価回路を用いることでリチウムイオン電池のハーフセルは図 4.4.3 のようにモデル化することができる。ここで， E_{eq} [V] は電極の開放端子電圧 (OCV : Open Circuit Voltage) であり，電極の組成 (充電状態) によって変動する。理想的な電極の OCV 曲線はネルンストの式で表されることが知られているが，通常リチウムイオン電池が運用される充電領域において，充放電される電気量が少ない場合， E_{eq} はほぼ一定値とみなすことが可能である。

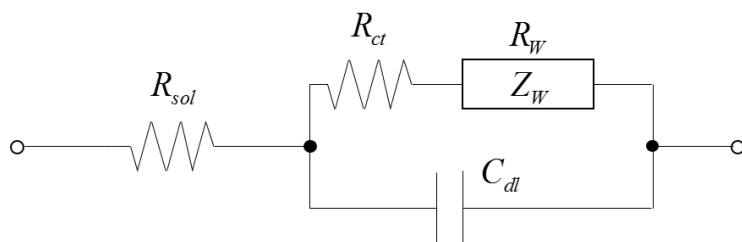


図 4.4.1 Randles circuit

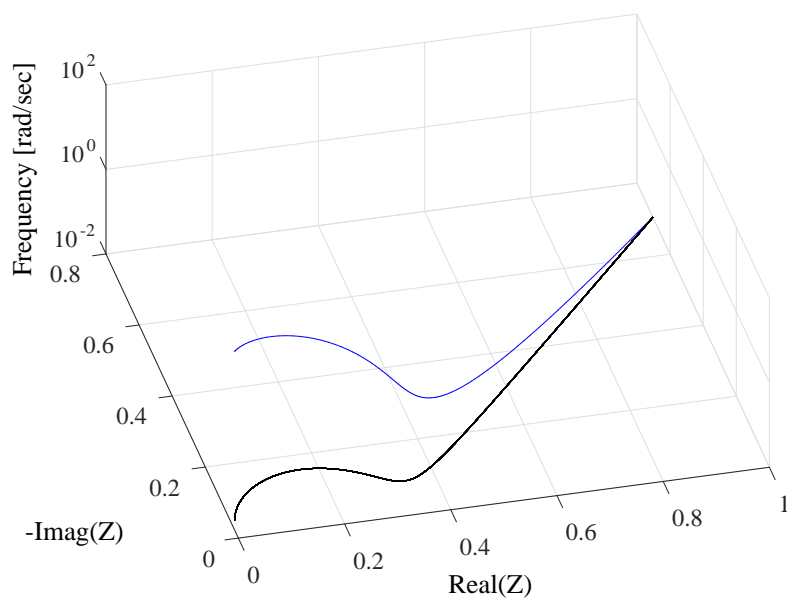


図 4.4.2 Cole-Cole plot of $Z(s)$ ($R_{ct} = 0.3$, $R_W = 0.1$, $C_{dl} = 0.2$)

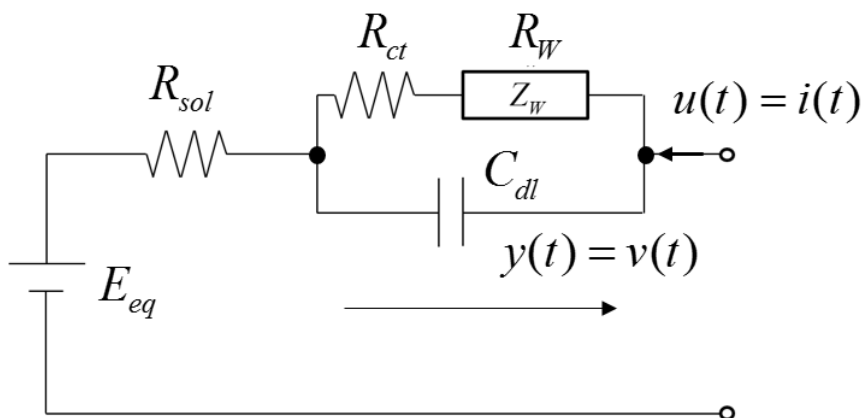


図 4.4.3 Half cell of Li-ion battery

4.5 数値シミュレーション

図 4.4.3 で表されるようなリチウムイオン電池のハーフセルのモデルを考え、 E_{eq} と R_{sol} が既知であるものとし、(4.4.19) 式で表されるシステムを可観測正準系として次式のように表す。

$$D^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \quad (4.5.1)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t), \quad (4.5.2)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.5.3)$$

$$\mathbf{B}^T = [0 \quad b_2 \quad b_3], \quad (4.5.4)$$

$$\mathbf{c}^T = [1 \quad 0 \quad 0], \quad (4.5.5)$$

$$[a_1 \quad a_2] = \left[\frac{R_w}{R_{ct}} \quad \frac{1}{R_{ct}C_{dl}} \right], \quad (4.5.6)$$

$$[b_2 \quad b_3] = \left[\frac{1}{C_{dl}} \quad \frac{R_w}{R_{ct}C_{dl}} \right], \quad (4.5.7)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}, \quad (4.5.8)$$

$$[R_{ct} \quad R_w \quad C_{dl}] = [0.4 \quad 0.1 \quad 0.8]. \quad (4.5.9)$$

このシステムに対し、線形分数階システムを対象とした Kreisselmeier 型適応観測器を設計し、直流電流 $i(t)$ を入力 $u(t)$ として、以下の条件のもとで数値シミュレーションを行った。

$$u(t) = w(t) - \frac{1}{2}, \quad (4.5.10)$$

$$\mathbf{f} = [-0.2 \quad -1.1 \quad -0.2]^T, \quad (4.5.11)$$

$$[\Delta R_{ct}(t) \quad \Delta R_w(t) \quad \Delta C_{dl}(t)] = \delta H(t - 20), \quad (4.5.12)$$

$$\delta = [0.1 \quad 0.1 \quad 0.2], \quad (4.5.13)$$

$$\gamma_i = \begin{cases} 8.0 \times 10^2 & (i = 1, 2, 5, 6) \\ 0 & (i = 3, 4) \end{cases}, \quad (4.5.14)$$

$$\lambda = 1, \quad (4.5.15)$$

ここで、 $H(t)$ はヘヴィサイド関数であり、 $\Delta R_{ct}(t)$ 、 $\Delta R_w(t)$ 、 $\Delta C_{dl}(t)$ は R_{ct} 、 R_w 、 C_{dl} に与えたステップ状の変動を表し、 $w(t)$ は $x_n = x_{n-6} + x_{n-1}$ で与えられる M 系列信号とし、M 系列信号によって充放電を行うことで Li-ion 電池のハーフセルを表す等価回路のパラメータを同定するものとした。

図 4.5.1 から図 4.5.4 に数値シミュレーションの結果を載せる．ここで、 $\eta_1 = \frac{\hat{a}_1 - a_1}{a_1}$ 、 $\eta_2 = \frac{\hat{a}_2 - a_2}{a_2}$ 、 $\eta_3 = \frac{\hat{b}_2 - b_2}{b_2}$ 、 $\eta_4 = \frac{\hat{b}_3 - b_3}{b_3}$ として、パラメータ推定誤差を表した．これらの結果から、Randles 等価回路で表されるリチウムイオン電池のハーフセルのパラメータと状態の同時推定を提案した適応観測器によって達成できることが確認できた。

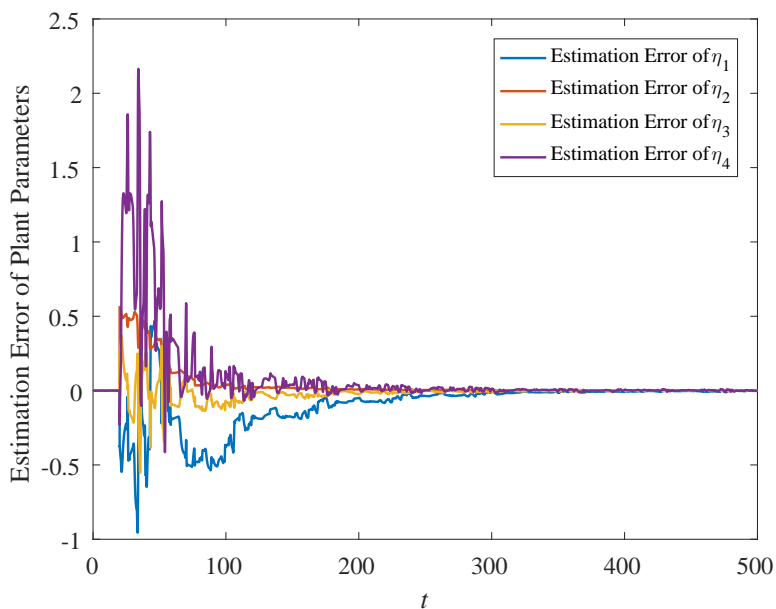


図 4.5.1 Estimation error of plant parameters

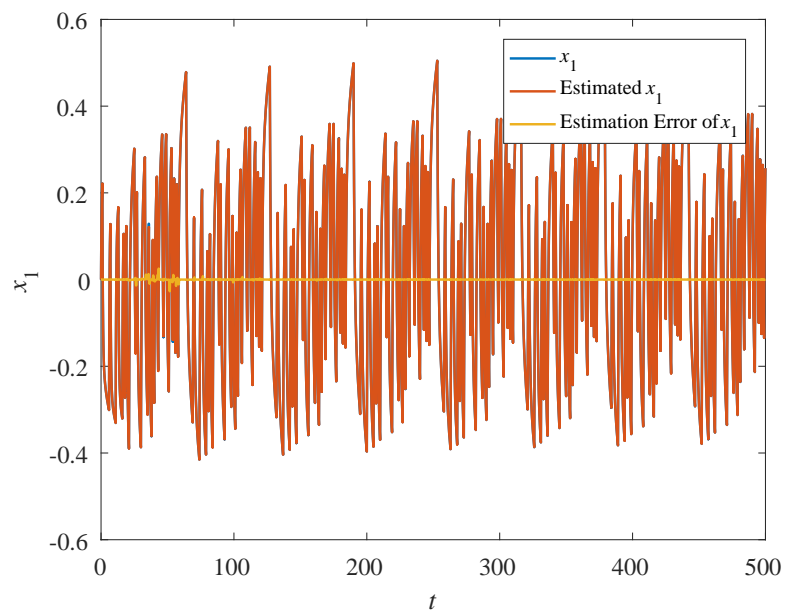


図 4.5.2 Estimated y ($y = x_1$)

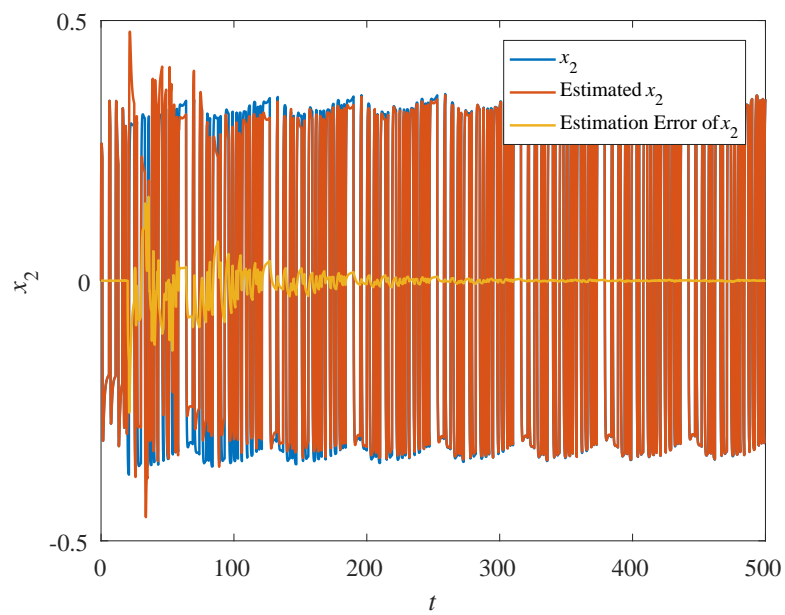
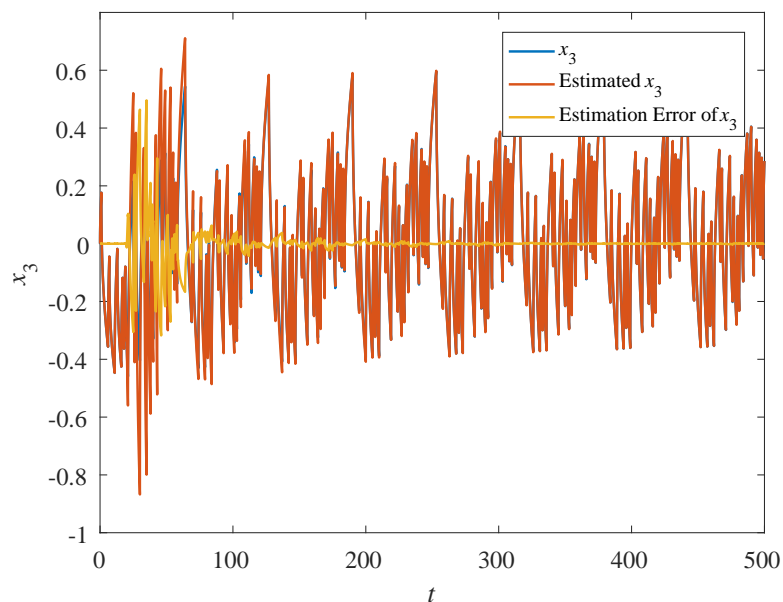


図 4.5.3 Estimated x_2

図 4.5.4 Estimated x_3

また，従来法と比較するため，図 4.4.1 で表される Randles 等価回路内の Warburg インピーダンスを抵抗とキャパシタが並列に接続された電気作用素で表されているもの（Foster 近似）として考えて，以下の状態空間表現が得られるものとして扱い適応観測器を構成する．

$$D\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.5.16)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (4.5.17)$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_{ct} + R_1^{-1}}{C_1} & C_1^{-1} C_{dl}^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.5.18)$$

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{dl}^{-1} & \frac{R_{ct} + R_1^{-1}}{C_1 C_{dl}} \end{bmatrix} \quad (4.5.19)$$

(4.5.1) 式から (4.5.9) 式で表される観測対象に対し，以下のパラメータを与え，従来法による適応観測器を構成して，パラメータ推定の数値実験を行った結果を図 4.5.6 に示す．図 4.5.6 より，従来法の適応観測器を分数階微積分で表されるシステムに対して設計を行った場合，推定パラメータが収束していないことが確認できる．

$$u(t) = w(t) - \frac{1}{2}, \quad (4.5.20)$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}^\top, \quad (4.5.21)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta R_{ct}(t) & \Delta R_W(t) & \Delta C_{dl}(t) \end{bmatrix} = \delta H(t - 20), \quad (4.5.22)$$

$$\delta = [0.1 \quad 0.1 \quad 0.2], \tag{4.5.23}$$

$$\gamma = 8.0 \times 10^2, \tag{4.5.24}$$

$$\lambda = 1, \tag{4.5.25}$$

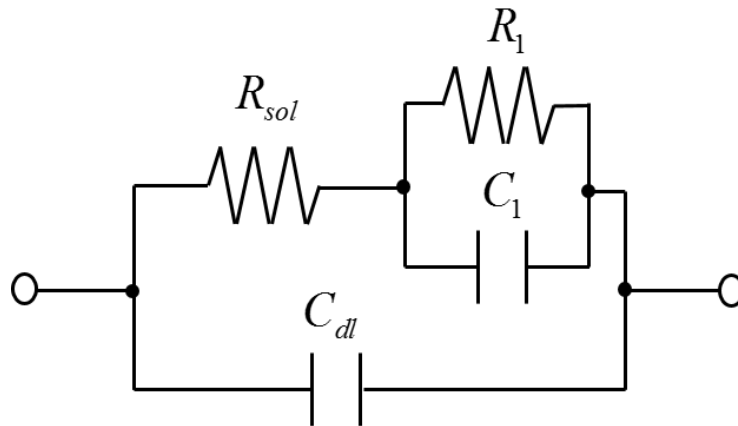


図 4.5.5 Approximated Randles circuit

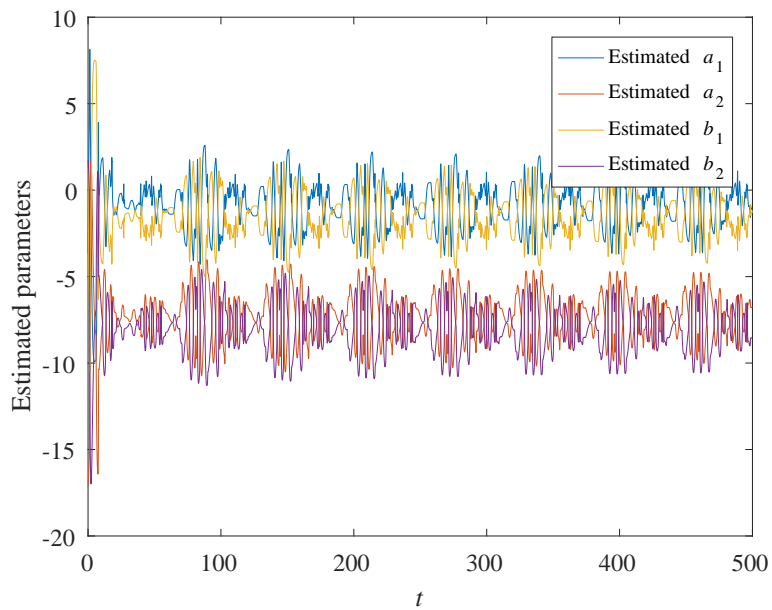


図 4.5.6 Approximated Randles circuit

4.6 むすび

本研究では、線形分数階システムを対象とした Kreisselmeier 型の適応観測器の設計法を開発するとともに、リチウムイオン電池のハーフセルを模擬したシステムに対して適応観測器を設計し、数値実験によって提案法の有効性を確認した。

半無限拡散のケースに限定してモデルを作成したが、Warburg インピーダンスに対し抵抗やキャパシタを並列に構成した等価回路を用いることで、有限拡散のケースにも、本手法を適用することが可能であると考えられる。本手法を用いることで、Warburg インピーダンスの係数としてあらわれる化学拡散係数などの情報を等価回路のパラメータとして得られることから、モデルに基づいたオンラインでの電池診断に役立つことが期待される。

更に、リチウムイオン電池だけでなく、粘弾性体などの対象についても、分数階の微積分によってその動特性を記述できることから、それらのシステムに対しても、提案した手法が有用であると考えられる。

第 5 章

直接法による分数階調整則を持つ MRACS の設計

5.1 はじめに

分数階微積分を制御系に用いる利点として、制御系の極の安定領域が広がることと分数階積分器が高ゲインにおいても十分な位相余裕を持つことが挙げられる。これらを PID 制御系に応用し、その有効性を報告した研究がこれまでに数多くなされている [55, 56]。モデル規範型制御系 (MRACS: Model Reference Adaptive Control System) は、未知パラメータを含む制御対象に対し、コントローラが自身のパラメータを調整することで、制御対象の動特性を設計された規範モデルと一致させる制御系である [57]。本章では、分数階積分器が高ゲインにおいても十分な位相余裕を持つことに着目し、適応調整則に分数階微積分を用いることで、通常の整数階の適応調整則では過渡応答が乱れるような高ゲイン調整則を構成した場合やモデルマッチング条件を満たさない場合でも、制御系の応答が改善できることを数値実験により示す。更に、分数階積分調整則を用いた MRACS の安定性に関して、リアプノフ安定性の証明を、分数階システムを偏微分方程式へ実現するという新たなアプローチにより行う。

5.2 問題の定式化

制御対象が次式で表されるとする。

$$y = G(s)u, \quad (5.2.1)$$

ただし、

$$G(s) = \frac{kB(s)}{A(s)} = \frac{k \left(s^m + \sum_{i=0}^{m-1} b_i s^i \right)}{s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i}. \quad (5.2.2)$$

第一の目的は、(5.2.1) 式で与えられる制御対象の出力 y が次式で与えられる規範モデルの規範出力 y_M に一致するような制御入力 u を与えるコントローラを設計することである。

$$y_M = G_M(s)r, \quad (5.2.3)$$

$$G_M(s) = \frac{k_M B_M(s)}{A_M(s)} = \frac{k_M \left(s^{m_M} + \sum_{i=0}^{m_M-1} b_{Mi} s^i \right)}{s^{n_M} + \sum_{i=0}^{n_M-1} a_{Mi} s^i}. \quad (5.2.4)$$

ここで、以下の仮定を制御対象が満たすものとする。

1. 多項式 $A(s)$ と $B(s)$ は既約であり、そのパラメータ $a_i, b_i, i = 1, \dots, n$ は未知。
2. 多項式 $A(s)$ と $B(s)$ の最高次数 n, m は既知であり、 $0 < n - m \leq n_M - m_M$ 。
3. $B(s)$ は安定多項式であり ($G(s)$ は不安定零点を持たない)、一般性を失うことなく k は正の定数であるものとする。

第一の目的を達成する為には、従来のモデル規範型制御系 (MRACS) 設計法を用いればよいが、従来の MRACS では適応調整則に大きすぎるゲインを用いた場合、挙動が不安定化してしまう。

そこで第二の目的として、適応調整則に分数階積分調整則を導入することで、高ゲイン制御における位相余裕を確保するとともに、そのような分数階積分調整則を有する MRACS が安定であることを証明する。

5.3 分数階調整則を持つ MRACS の構成

5.3.1 MRACS の構成

最初に、次式で与えられる漸近安定な、 $n - m$ 次モニック多項式 $C(s)$ と $n - 1$ 次モニック多項式 $H(s)$ を考える。

$$C(s) = s^{n-m} + \sum_{i=0}^{n-m-1} c_i s^i, \quad (5.3.1)$$

$$H(s) = s^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} h_i s^i. \quad (5.3.2)$$

$C(s), H(s)$ が与えられたとき、プラントの $A(s)$ と k に対し、

$$C(s)H(s) = A(s)R(s) + kS(s), \quad (5.3.3)$$

$$R(s) = s^{n-m-1} + \sum_{i=0}^{n-m-2} r_i s^i, \quad (5.3.4)$$

$$S(s) = s_{n-1}s^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} s_i s^i, \quad (5.3.5)$$

$$R_B(s) = R(s)B(s) - H(s) = r_{Bn-2}s^{n-2} + \sum_{i=0}^{n-3} r_{Bi}s^i, \quad (5.3.6)$$

の関係を満足する $n - m - 1$ 次モニック多項式 $R(s)$, $n - 1$ 次多項式 $S(s)$, $n - 2$ 次多項式 $R_B(s)$ は一意に定まる. (5.3.3) 式の両辺に y を乗じ, 式変形を行うと次式が得られる.

$$\begin{aligned} y &= \frac{k}{C(s)} \left[u + \frac{R_B(s)}{H(s)} u + \frac{S(s)}{H(s)} y \right] \\ &= kW(s) \left[u + \frac{R_B(s)}{H(s)} u + \frac{S(s)}{H(s)} y \right], \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

ただし,

$$W(s) \triangleq \frac{1}{C(s)}. \quad (5.3.8)$$

ここから, 規範出力との誤差 $e = y - y_M$ は次式のように表される.

$$\begin{aligned} e &= y - y_M \\ &= kW(s) \left[u + \frac{R_B(s)}{H(s)} u + \frac{S(s)}{H(s)} y \right] - y_M \\ &= kW(s) \left[u - \boldsymbol{\theta}^\top \boldsymbol{\xi} \right], \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

$$\boldsymbol{\theta} = \left[\frac{1}{k} \quad \boldsymbol{\theta}_u^\top \quad \boldsymbol{\theta}_y^\top \right]^\top, \quad (5.3.10)$$

$$\boldsymbol{\theta}_u = \left[r_{B0} \quad \cdots \quad r_{B(n-2)} \right]^\top, \quad (5.3.11)$$

$$\boldsymbol{\theta}_y = \left[s_0 \quad \cdots \quad s_{n-1} \right]^\top, \quad (5.3.12)$$

$$\boldsymbol{\xi} = \left[G_M C(s)r \quad \boldsymbol{\xi}_u^\top \quad \boldsymbol{\xi}_y^\top \right]^\top, \quad (5.3.13)$$

$$\boldsymbol{\xi}_u = \left[\frac{-1}{H(s)} u \quad \cdots \quad \frac{-s^{n-2}}{H(s)} u \right]^\top, \quad (5.3.14)$$

$$\boldsymbol{\xi}_y = \left[\frac{-1}{H(s)} y \quad \cdots \quad \frac{-s^{n-1}}{H(s)} y \right]^\top. \quad (5.3.15)$$

ここから, 制御入力 u を $u \rightarrow \boldsymbol{\theta}^\top \boldsymbol{\xi}$ とできるならば, $e \rightarrow 0$ となり, 出力 $y \rightarrow y_M$ とすることができることが分かる. しかし, 仮定 1 より, 制御対象のパラメータは未知であることか

ら、 $R_B(s)$, $S(s)$ のパラメータもまた未知である。 θ が未知パラメータのため、適応調整機構を用い、制御入力 u を θ の推定値 $\hat{\theta}$ により、下記のように構成する。

$$u = \hat{\theta}^\top \xi. \tag{5.3.16}$$

このときの MRACS の構成を図 5.3.1 に示す。 制御入力 $u(t)$ が (5.3.16) 式で与えられた場合、規範出力との誤差 $e(t)$ は (5.3.9) 式より、次式で与えられる。

$$e = kW(s) \left[\tilde{\theta}^\top \xi \right], \tag{5.3.17}$$

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta. \tag{5.3.18}$$

(5.3.17) 式の誤差システムにおいて、誤差伝達関数 $kW(s)$ の相対次数は一般的には強正実にはならない。 そのような場合には、誤差の拡張を行った拡張誤差を適応誤差とする手法が確立されている。 その手法を用いることで、誤差伝達関数が強正実性を満たすように設計することが可能である。

以下、ここでは $W(s)$ を強正実な関数に変換したものとして考えていく。 このような誤差伝達関数を持つシステムに対し、従来の MRACS では積分型適応調整則が用いられてきたが、積分階数を非整数に拡張した $1/2$ 階積分調整則を用いて MRACS を構成する。

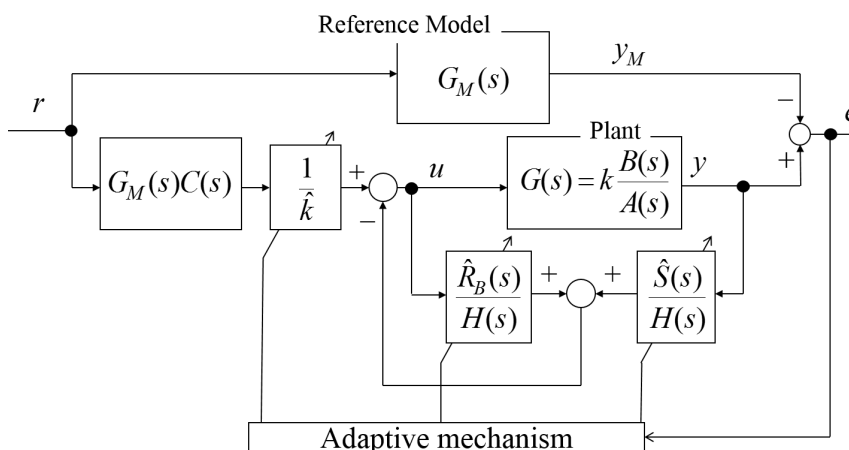


図 5.3.1 Block diagram of MRACS

5.3.2 $1/2$ 階積分型適応調整則とリアプノフ安定性

$1/2$ 階積分器のベクトル軌跡は理想的には図 5.3.2 のように表される。

ここから、 $1/2$ 階積分器は低周波数領域で無限大のゲインを持ちながら、位相を 45 度以内に抑えることができるという特性を持つことが分かる。 そのため、 $1/2$ 階積分器を導入することで、高ゲインでの位相余裕の大幅な改善が期待できる。

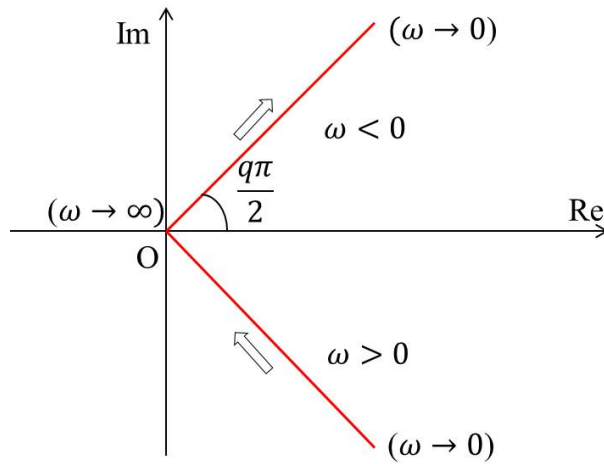


図 5.3.2 Ideal vector locus of s^{-q} ($q = 1/2$)

MRACS に $1/2$ 階積分器を導入し，適応調整則を次式のように構成する．

$$\dot{\tilde{\theta}}^{(1/2)} = -\Gamma_{\theta} \xi e. \tag{5.3.19}$$

このとき MRACS の構成は図 5.3.3 のように表すことができる．誤差伝達関数 $kW(s)$ が強

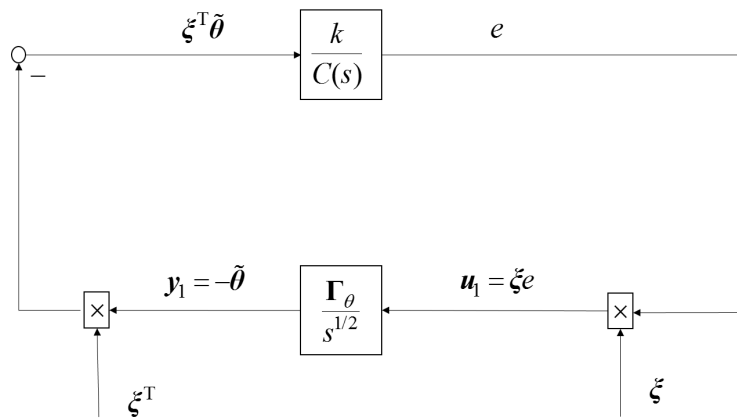


図 5.3.3 Construction of MRACS using $1/2$ order integrator

正実性を満たす時， $1/2$ 階積分型適応調整則を持つ MRACS がリアプノフ安定であることを示すために，以下の補題を示す．

補題 16. Kalman-Yakubovich の補題

以下の命題は等価である．

1. 入出力関係が (5.3.17) 式で表されるような誤差伝達関数 $kW(s)$ が強正実であり，次

式で表される実現を持つ.

$$\dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{b} \left[\tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \boldsymbol{\xi} \right], \quad (5.3.20)$$

$$e(t) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_0. \quad (5.3.21)$$

2. 次式を満たす正定対称行列 \mathbf{P} , \mathbf{Q} が存在する.

$$\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^\top = -\mathbf{Q}, \quad (5.3.22)$$

$$\mathbf{b}^\top \mathbf{P} = \mathbf{c}^\top. \quad (5.3.23)$$

次に, $1/2$ 階積分伝達関数の実現について, 以下の定理が成立することを示す.

定理 17. $1/2$ 階積分伝達関数システム

$$\hat{\mathbf{y}}_1(s) = \frac{\boldsymbol{\Gamma}_\theta}{s^{1/2}} \hat{\mathbf{u}}_1(s), \quad (5.3.24)$$

は次式で表される実現を持ち, 境界条件として $\mathbf{x}_1(0, z) = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_2(0, z) = \mathbf{0}$ が与えられるとき, このシステムは受動的である.

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}_1}{\partial z^2}(t, z) = \mu \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial t}(t, z), \quad (5.3.25)$$

$$\mathbf{x}_2(t, z) = \mu^{-1/2} \boldsymbol{\Gamma}_\theta^{-1} \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial z}(t, z), \quad (5.3.26)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}_2}{\partial z^2}(t, z) = \mu \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial t}(t, z), \quad (5.3.27)$$

$$\mathbf{y}_1(t) = \mathbf{x}_1(t, 0), \quad (5.3.28)$$

$$\mathbf{u}_1(t) = -\mathbf{x}_2(t, 0), \quad (5.3.29)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{x}_1(t, z) = \mathbf{0}, \quad (5.3.30)$$

$$\mu > 0. \quad (5.3.31)$$

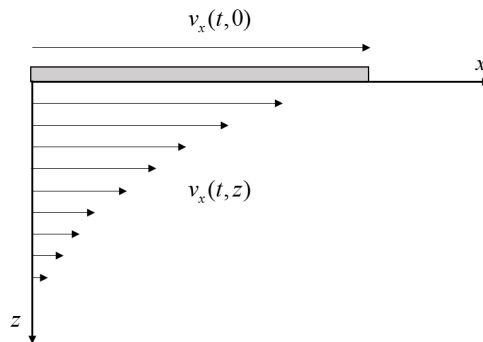


図 5.3.4 Schematic model of Rayleigh problem

Proof. 剛体の板が流体に接している図 5.3.4 で表されるモデルを考える。このとき、このモデルの運動方程式は次式で表すことができる。

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, z) = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(t, z), \quad (5.3.32)$$

$$\sigma(t, z) = \eta \frac{\partial v}{\partial z}(t, z), \quad (5.3.33)$$

$$\sigma(t, 0) = -\sigma_0(t), \quad (5.3.34)$$

$$v(t, 0) = v_0(t), \quad (5.3.35)$$

$$v(0, z) = 0, \quad (5.3.36)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} v(t, z) = 0, \quad (5.3.37)$$

ここで、 $v(t, z)$ は時間 t 、位置 z における x 方向の流速、 ρ は流体の密度、 η は流体の粘性、 $\sigma(t, z)$ は時間 t 、位置 z で流体の x 方向のせん断力を表す。時間 t についてラプラス変換された記号を $\hat{v}(s, z) = \mathcal{L}[v(t, z)]$ のように表すものとして、(5.3.32) 式をラプラス変換し、(5.3.36) 式を利用すると、

$$s\hat{v}(s, z) = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial z^2}(s, z) + v(0, z) = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial z^2}(s, z), \quad (5.3.38)$$

ゆえに、

$$\hat{v}(s, z) = \frac{\eta}{\rho s} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial z^2}(s, z). \quad (5.3.39)$$

(5.3.39) 式の解は

$$\hat{v}(s, z) = \hat{A}(s) e^{\pm \sqrt{\frac{\rho}{\eta}} s^{\frac{1}{2}} z}, \quad (5.3.40)$$

と表すことができるが、(5.3.35) 式から $\hat{A}(s) = \hat{v}_0(s)$ となり、更に、解が $\hat{v}(s, z) = \hat{v}_0(s) e^{\sqrt{\frac{\rho}{\eta}} s^{\frac{1}{2}} z}$ である場合、(5.3.37) 式の境界条件を満たさないことから、この偏微分方程式の解は次式となる。

$$\hat{v}(s, z) = \hat{v}_0(s) e^{-\sqrt{\frac{\rho}{\eta}} s^{\frac{1}{2}} z}. \quad (5.3.41)$$

ここから、せん断応力との関係式は、(5.3.33) 式より、

$$\hat{\sigma}(s, z) = -\sqrt{\rho\eta} s^{\frac{1}{2}} \hat{v}(s, z), \quad (5.3.42)$$

となり、(5.3.34) 式、(5.3.35) 式より、 $z = 0$ について流速とせん断応力との関係式を表すと次式が得られる。

$$\hat{v}_0(s) = \frac{1}{\sqrt{\rho\eta}} \frac{1}{s^{\frac{1}{2}}} \hat{\sigma}_0(s). \quad (5.3.43)$$

この結果をもとに、 $\mathbf{x}_1(t, z)$ の各要素を $v(t, z)$ 、 $\mathbf{x}_2(t, z)$ の各要素を $\sigma(t, z)$ 、 $\mathbf{y}_1(t)$ の各要素を $v_0(t)$ 、 $\mathbf{u}_1(t)$ の各要素を $\sigma_0(t)$ に対応させ、更に、 $\mu = \frac{\rho}{\eta}$ とし、 $\mathbf{\Gamma}_\theta$ の各要素を $\frac{1}{\sqrt{\rho\eta}}$ に対

応させることで以下の実現が得られることが分かる.

$$\frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial t}(t, z) = \mu^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{x}_1}{\partial z^2}(t, z), \quad (5.3.44)$$

$$\mathbf{x}_2(t, z) = \mu^{-1/2} \Gamma_\theta^{-1} \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial z}(t, z), \quad (5.3.45)$$

$$\mathbf{x}_2(t, 0) = -\mathbf{u}_1(t), \quad (5.3.46)$$

$$\mathbf{x}_1(t, 0) = \mathbf{y}_1(t), \quad (5.3.47)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{x}_1(t, z) = \mathbf{0}, \quad (5.3.48)$$

$$\mu > 0. \quad (5.3.49)$$

更に, 境界条件を $\mathbf{x}_1(0, z) = 0$ とすると,

$$\hat{\mathbf{x}}_2(s, z) = -\Gamma_\theta^{-1} s^{1/2} \hat{\mathbf{x}}_1(s, z), \quad (5.3.50)$$

という関係式が得られることが (5.3.42) 式から分かる. (5.3.50) 式の両辺を 2 階 z について偏微分すると,

$$\frac{\partial^2 \hat{\mathbf{x}}_2}{\partial z^2}(s, z) = -\Gamma_\theta^{-1} s^{1/2} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{x}}_1}{\partial z^2}(s, z), \quad (5.3.51)$$

となり, (5.3.51) 式に (5.3.45) 式を用いると次式が得られる.

$$\frac{\partial^2 \hat{\mathbf{x}}_2}{\partial z^2}(s, z) = -\mu \Gamma_\theta^{-1} s^{3/2} \hat{\mathbf{x}}_1(s, z). \quad (5.3.52)$$

(5.3.52) 式に対し, (5.3.50) 式を用いると,

$$\frac{\partial^2 \hat{\mathbf{x}}_2}{\partial z^2}(s, z) = -\mu s \hat{\mathbf{x}}_2(s, z), \quad (5.3.53)$$

となり, 境界条件を $\mathbf{x}_2(0, z) = 0$ として, (5.3.53) 式を逆ラプラス変換すると次式が得られる.

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}_2}{\partial z^2}(t, z) = \mu \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial t}(t, z). \quad (5.3.54)$$

このシステムに対し, 次式のリアプノフ関数を考える.

$$V_1(t, \mathbf{x}_1) = \int_0^\infty \frac{1}{2} \mathbf{x}_1^\top(t, z) \boldsymbol{\rho} \mathbf{x}_1(t, z) dz, \quad \boldsymbol{\rho} > 0. \quad (5.3.55)$$

このリアプノフ関数の微分を計算する.

$$\begin{aligned}
\frac{dV_1}{dt} &= \int_0^\infty \mathbf{x}_1^\top(t, z) \boldsymbol{\rho} \dot{\mathbf{x}}_1(t, z) dz \\
&= \int_0^\infty \mathbf{x}_1^\top(t, z) \boldsymbol{\rho} \mu^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{x}_1}{\partial z^2}(t, z) dz \\
&= \int_0^\infty \mathbf{x}_1^\top(t, z) \boldsymbol{\rho} \mu^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu^{1/2} \boldsymbol{\Gamma}_\theta \mathbf{x}_2(t, z) \right) dz \\
&= \int_0^\infty \mu^{-1/2} \mathbf{x}_1^\top(t, z) \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{\Gamma}_\theta \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial z}(t, z) dz \\
&= \mu^{-1/2} \left[\mathbf{x}_1^\top(t, z) \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{\Gamma}_\theta \mathbf{x}_2(t, z) \right]_0^\infty - \int_0^\infty \mu^{-1/2} \frac{\partial \mathbf{x}_1^\top}{\partial z}(t, z) \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{\Gamma}_\theta \mathbf{x}_2(t, z) dz \\
&= \mu^{-1/2} \left[\mathbf{x}_1^\top(t, z) \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{\Gamma}_\theta \mathbf{x}_2(t, z) \right]_0^\infty - \int_0^\infty \mu^{-1/2} \left(\mu^{1/2} \mathbf{x}_2^\top(t, z) \boldsymbol{\Gamma}_\theta^\top \right) \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{\Gamma}_\theta \mathbf{x}_2(t, z) dz \\
&= -\mu^{-1/2} \left[\mathbf{x}_1^\top(t, 0) \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{\Gamma}_\theta \mathbf{x}_2(t, 0) \right] - \int_0^\infty \mathbf{x}_2^\top(t, z) \boldsymbol{\Gamma}_\theta^\top \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{\Gamma}_\theta \mathbf{x}_2(t, z) dz \\
&= \mu^{-1/2} \mathbf{y}_1^\top(t) \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{\Gamma}_\theta \mathbf{u}_1(t) - \int_0^\infty \mathbf{x}_2^\top(t, z) \boldsymbol{\Gamma}_\theta^\top \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{\Gamma}_\theta \mathbf{x}_2(t, z) dz. \tag{5.3.56}
\end{aligned}$$

ここで,

$$\boldsymbol{\rho} = \mu^{1/2} \boldsymbol{\Gamma}_\theta^{-1} > 0, \tag{5.3.57}$$

とするとき, (5.3.56) 式に (5.3.57) 式を代入することで次式が得られる.

$$\begin{aligned}
\frac{dV_1}{dt} &= \mathbf{y}_1^\top(t) \mathbf{u}_1(t) - \int_0^\infty \mathbf{x}_2^\top(t, z) \boldsymbol{\Gamma}_\theta^\top \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{\Gamma}_\theta \mathbf{x}_2(t, z) dz \\
&= \mathbf{y}_1^\top(t) \mathbf{u}_1(t) - \alpha_1^2(t) \leq \mathbf{y}_1^\top(t) \mathbf{u}_1(t). \tag{5.3.58}
\end{aligned}$$

(5.3.58) 式より, 実現されたシステムの受動性が示された. \square

上述した補題と定理を用いることにより, $1/2$ 階積分調整則を用いた MRACS の安定性に関して, 以下の定理を証明することができる.

定理 18. 誤差伝達関数が (5.3.17) 式で表され, $W(s)$ が強正実であるとき, 適応調整則として, $1/2$ 階積分型調整則を次式のように定めるとシステムはリアプノフ安定である.

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{(\frac{1}{2})}(t) = -\boldsymbol{\Gamma}_\theta \boldsymbol{\xi}(t) e(t). \tag{5.3.59}$$

Proof. 補題より, $kW(s)$ に関して, (5.3.20) 式, (5.3.21) 式の実現が得られる. さらに, $1/2$

階伝達関数 $\frac{\Gamma_\theta}{s^{1/2}}$ について次式の実現が得られる.

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}_1}{\partial z^2}(t, z) = \mu \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial t}(t, z), \quad (5.3.60)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial z}(t, z) = \mu^{1/2} \Gamma_\theta \mathbf{x}_2(t, z), \quad (5.3.61)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}_2}{\partial z^2}(t, z) = \mu \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial t}(t, z), \quad (5.3.62)$$

$$-\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t) = \mathbf{x}_1(t, 0), \quad (5.3.63)$$

$$\boldsymbol{\xi}(t)e(t) = -\mathbf{x}_2(t, 0), \quad (5.3.64)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{x}_1(t, z) = \mathbf{0}, \quad (5.3.65)$$

$$\mu > 0. \quad (5.3.66)$$

システム全体のリアプノフ関数を次式のように定める.

$$V(t) = \frac{1}{2} \mathbf{x}_0^\top(t) \mathbf{P} \mathbf{x}_0(t) + \int_0^\infty \frac{1}{2} \mathbf{x}_1^\top(t, z) \boldsymbol{\rho} \mathbf{x}_1(t, z) dz. \quad (5.3.67)$$

(5.3.56) 式を用いて, (5.3.67) 式の1階微分を計算を行う.

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_0^\top(t) \mathbf{P} \mathbf{x}_0(t) + \frac{1}{2} \mathbf{x}_0^\top(t) \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}}_0(t) - \mu^{-1/2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top(t) \boldsymbol{\rho} \Gamma_\theta \boldsymbol{\xi}(t) e(t) \\ &\quad - \int_0^\infty \mathbf{x}_2^\top(t, z) \Gamma_\theta^\top \boldsymbol{\rho} \Gamma_\theta \mathbf{x}_2(t, z) dz \\ &= \mathbf{x}_0^\top(t) \left(\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^\top \mathbf{P} \right) \mathbf{x}_0(t) + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top(t) \boldsymbol{\xi}(t) \mathbf{b}^\top \mathbf{P} \mathbf{x}_0(t) \\ &\quad - \mu^{-1/2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top(t) \boldsymbol{\rho} \Gamma_\theta \boldsymbol{\xi}(t) e(t) - \int_0^\infty \mathbf{x}_2^\top(t, z) \Gamma_\theta^\top \boldsymbol{\rho} \Gamma_\theta \mathbf{x}_2(t, z) dz \\ &= \mathbf{x}_0^\top(t) \left(\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^\top \mathbf{P} \right) \mathbf{x}_0(t) + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top(t) \boldsymbol{\xi}(t) e(t) - \mu^{-1/2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top(t) \boldsymbol{\rho} \Gamma_\theta \boldsymbol{\xi}(t) e(t) \\ &\quad - \int_0^\infty \mathbf{x}_2^\top(t, z) \Gamma_\theta^\top \boldsymbol{\rho} \Gamma_\theta \mathbf{x}_2(t, z) dz. \end{aligned}$$

ここで,

$$\boldsymbol{\rho} = \mu^{1/2} \Gamma_\theta^{-1} > 0, \quad (5.3.68)$$

とすると, Kalman-Yakubovich の補題より, リアプノフ関数の微分について次式の関係が成立する.

$$\frac{dV}{dt} = -\mathbf{x}_0^\top(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}_0(t) - \int_0^\infty \mathbf{x}_2^\top(t, z) \Gamma_\theta^\top \boldsymbol{\rho} \Gamma_\theta \mathbf{x}_2(t, z) dz < 0. \quad (5.3.69)$$

このようにして, 誤差伝達関数が強正実性を満たす場合について, 1/2 階積分適応調整則を持つ MRACS がリアプノフ安定性を満たすことを証明できた. \square

以上から、1/2 階積分器を適応調整則に導入しても制御系が安定に構成できることが証明された。1/2 階積分器は、従来の 1 階積分器と比較し、図 5.3.2 で表されるように、低周波数領域で無限大ゲインを持ちつつ、位相余裕を 45 度以内に抑えられることから、高ゲインで適応調整則を構成した場合に制御系の応答を改善できることが期待される。また、定性的には、1/2 階積分器による安定性の向上により、モデルマッチング条件が満たされない場合でも制御系の応答が改善できると考え、次節において、従来の整数階積分器によって構成された MRACS と 1/2 階積分器によって構成された MRACS の挙動をモデルマッチング条件が満たされる場合と満たされない場合についてそれぞれ数値シミュレーションによって確認した。

5.4 数値シミュレーション

本研究では、1/2 階積分器を用いた適応調整則の有効性を示すため、従来の 1 階の積分を用いた適応調整則で構成された MRACS と提案する 1/2 階積分器を用いて構成した MRACS に対しモデルマッチング条件が満たされる場合と満たされない場合についてそれぞれ数値シミュレーションを行った。このときの制御系のブロック線図を図 5.4.1 に表す。ここでは、 $C(s) = G_M^{-1}(s)$, $H(s) = 1$ として MRACS を構成した。また、1/2 階積分器として、このシミュレーションでは真鍋アプローチの式に対して $\delta = 1.5$, $j = k = 3$ と与えて計算した伝達関数を用いた。近似した分数階積分器のベクトル軌跡を図 5.4.2 に示す。

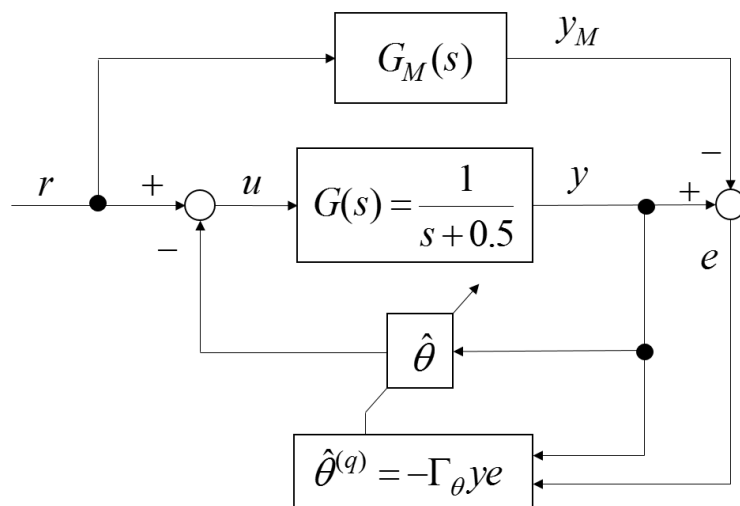


図 5.4.1 Construction of MRACS used in numerical simulation

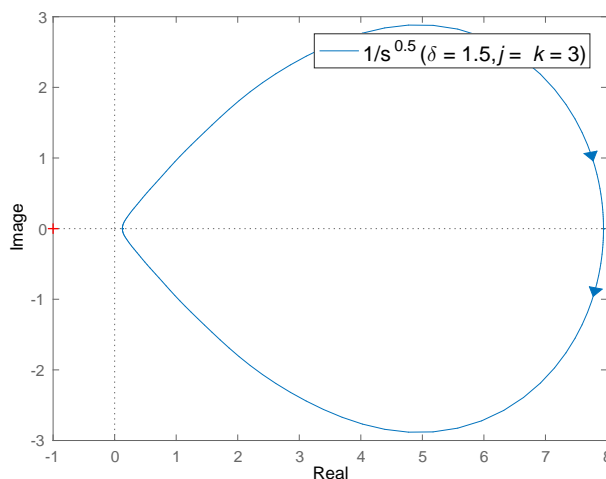


図 5.4.2 Nyquist plot of approximated 1/2 order integrator

Case 1 モデルマッチング条件が満たされる場合 ($q = 1, 1/2$ の場合)

$$G(s) = \frac{1}{s + 0.5}, \tag{5.4.1}$$

$$G_M(s) = \frac{1}{s + 1}, \tag{5.4.2}$$

$$\Gamma_\theta = 1000, \tag{5.4.3}$$

$$r = \begin{cases} 1, & t \geq 1 \\ 0, & t < 1 \end{cases}. \tag{5.4.4}$$

モデルマッチング条件が満たされる場合 ($C(s) = s + 1, H(s) = 1$) の数値シミュレーションの結果を図 5.4.3 と図 5.4.4 に表した。図 5.4.3 から、適応ゲインを高く設定した場合でも、適応調整則として 1/2 階積分調整則を用いることによって、1 階積分調整則を使った際に生じているオーバーシュートと過渡的な振動を抑制できていることが分かる。図 5.4.4 を見ても、1/2 階積分調整則を使用した場合にコントローラの入力信号の振動が抑制されていると言える。

Case 2 モデルマッチング条件が満たされない場合 ($q = 1, 1/2$ の場合)

$$G(s) = \frac{1}{s + 0.5}, \tag{5.4.5}$$

$$G_M(s) = \frac{1}{(s + 1)^2}, \tag{5.4.6}$$

$$\Gamma_\theta = 1000, \tag{5.4.7}$$

$$r = \begin{cases} \sin(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}. \tag{5.4.8}$$

モデルマッチング条件が満たされない場合 ($C(s) = (s + 1)^2, H(s) = 1$) の数値シ

ミュレーションの結果を図 5.4.5 と図 5.4.6 に表す。図 5.4.5 より、1 階積分調整則を用いた場合と $1/2$ 階積分調整則を用いた場合を比較すると、 $1/2$ 階積分調整則を用いて適応制御系を構成することで、出力誤差の振動を抑制できていることが分かる。ここから、 $1/2$ 階積分調整則を用いることでモデルマッチング条件を満たさない場合の適応制御系の応答を改善することができることが分かる。

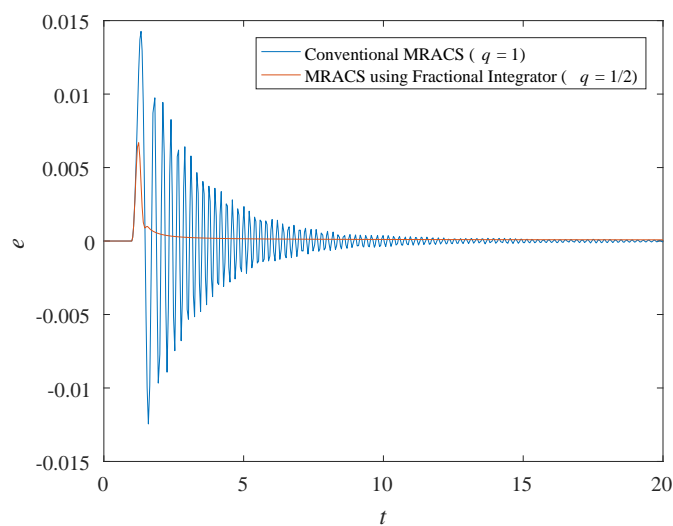


図 5.4.3 Tracking error $e = y - y_M$ in Case 1

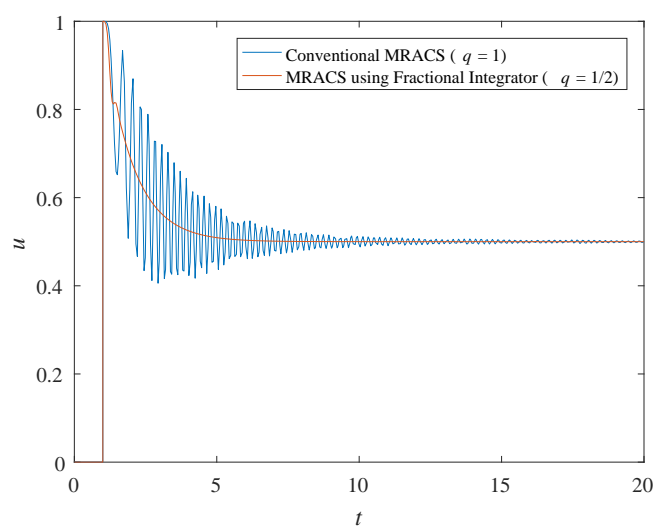
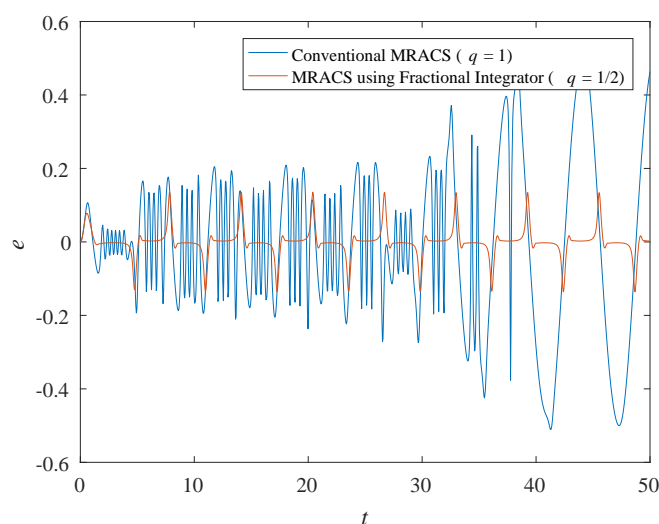
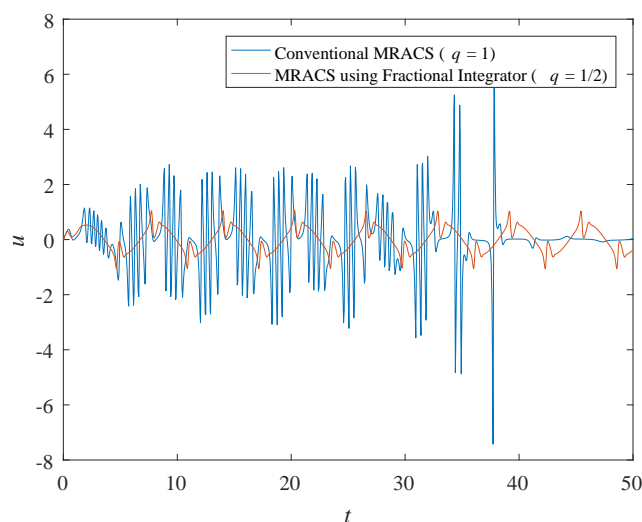


図 5.4.4 Control input u in Case 1

図 5.4.5 Tracking error $e = y - y_M$ in Case 2図 5.4.6 Control input u in Case 2

5.5 むすび

本研究では、 $1/2$ 階積分調整則で構成された MRACS の安定性について、 $1/s^{0.5}$ で表される伝達関数の偏微分方程式への実現からリアプノフ関数を構成し、その安定性に関して証明を行った。また、 1 階積分調整則で構成された MRACS と $1/2$ 階積分調整則で構成された MRACS について、高ゲインにおいてマッチング条件を満たす場合と満たさない場合の数値シミュレーションをそれぞれ行い、 $1/2$ 階積分器を用いた適応調整則の有効性を確認した。

第 6 章

結論

本論文では、分数階微積分を有するシステムに対して、非線形制御系、及び適応制御系に関して設計法の開発を行った。分数階微積分作用素を有する非線形制御系の設計について、分数階微積分に関する微分連鎖則を新しく導入することによって、分数階非線形システムに適応可能な一般化されたバックステップング法を新たに開発し、スライディングモード制御系設計法と組み合わせることで、入力と異なるチャンネルに外乱が存在するケースにおいても、ロバストな非線形制御系を構築することに成功した。この手法は、分数階微積分の加法性を用いた従来手法と異なり、Jumarie により提案された分数階微積分の連鎖則を用いていることから、経由する積分器の個数によらずより一般的な非線形分数階システムに適用可能な手法である。また、線形分数階システムに対して、拡張された指数関数である Mittag-Leffler 関数による解を用いることで、線形分数階システムに対する適応観測器の設計法を開発した。また、設計された適応観測器を線形分数階システムとして表されるリチウムイオン電池のモデルに対して応用することで、本手法によるリチウムイオン電池の状態を観測することが可能であることを示した。この手法により、観測器の設計に関し、従来はパラメータが既知である線形分数階システムを対象とする必要があったものを、未知パラメータを含んだ線形分数階システムを対象として観測器の設計を行うことが可能となった。また、分数階システムの分数微分を含む項には、イオンの拡散定数などの有用な情報が含まれていることから、提案した適応観測器を用いることで、観測対象についてより詳細な情報を得られることが期待される。更に、整数階線形システムに対するモデル規範型制御系の設計において、分数階微積分作用素を適応調整則に導入した時の安定性に関し、偏微分方程式系への実現を通して、分布定数型リアプノフ関数による新たな証明を行うとともに、分数階適応調整則を有するモデル規範型制御系の有効性について、従来の整数階適応調整則と、数値実験による比較を行い、その有用性を確認した。分数階積分調整則を用いた制御系の安定性に関して詳細な検討を行った報告がほとんどなされていないことから、本研究で用いた分数階積分器の偏微分方程式を通じた実現による安定性証明法は、安定性の議論に関してのひとつのアプローチとして重要な

意味を持つものと考えられる。以下に本論文の結論を述べる。

1. 分数階微分における微分連鎖則を導入することで、従来の整数階から分数階に拡張されたバックステップング法を開発し、一般化されたバックステップング法とスライディングモード制御と組み合わせた非線形制御系を設計した。また、本研究で提案した非線形制御系設計法を外乱を有する非線形分数階システムに対して適用し、その有効性を数値実験によって確認した。更に、バックステップング法は、拡張誤差法とともに、規範モデル型適応制御系における相対次数の制限の緩和にも用いられる手法であることから、本手法を発展させることで、従来の積分器でなく分数階積分器を通して相対次数を緩和した新たなモデル規範型適応制御系の構築が行えることが期待される。
2. 未知パラメータを含む線形分数階システムを対象とした Kreisselmeier 型適応観測器の設計法を開発し、線形分数階システムの未知パラメータをオンラインで同定することが可能となるシステムを構築することに成功した。また、電池内におけるイオン拡散現象などに由来してリチウムイオン電池の電気的動特性が分数微積分作用素を含んだシステムとして記述されることに着目し、リチウムイオン電池を対象として、本研究で提案された適応観測器を応用することで、電池のパラメータ及び状態が推定可能となることが示された。ここから、本手法により、電気自動車などに用いられるバッテリーの寿命や状態を走行中にオンラインで推定する新たな手法を開発できることが期待される。
3. 従来の積分器と異なり、分数階積分器が位相余裕を有することに着目し、未知パラメータを含む線形整数階システムに対して、分数階微積分作用素を適応調整則に導入したモデル規範型適応制御系の設計を行った。また、設計した制御系に関して、分数階積分器を偏微分方程式系へと実現することを通し、分布定数型のリアプノフ関数を用いた新たなアプローチによって、その安定性の証明を行った。更に、本研究で提案したモデル規範型適応制御系に関し、モデルマッチング条件を満たすケースとモデルマッチング条件を満たさないケースについて数値実験を行い、その有効性を確認した。提案した制御系を用いることで、高ゲイン適応調整則による収束の早い安定的なモデル規範型適応制御系を構成することができる。ただし、制御対象にむだ時間が含まれるような場合においては、スミスむだ時間補償器などにより、むだ時間を補償する機構を制御系に導入する必要があるものと考えられる。

分数階微積分作用素を有するシステムを対象として非線形制御系、及び適応制御系を構成する手法について研究を行ったが、実際には、分数階微積分作用素の近似において、理想的な計算結果と近似計算結果の間の近似精度を考慮に入れて制御系設計を行う必要がある。また、近似精度と数値計算速度及び近似周波数範囲の間のトレードオフを考慮して、分数階微積分作用素の近似における各パラメータを適切に定める手法に関しても検討が必要となる。

謝辞

本研究は、著者が慶應義塾大学大学院理工学研究科総合デザイン工学専攻後期博士課程に在学中、同大学理工学部システムデザイン工学科大森浩充教授のもとで行ったものです。この間、委細にわたり御指導、御鞭撻を賜りました、大森浩充教授に謹んで敬意を表します。

本論文の査読をしていただいた、慶應義塾大学理工学部 村上俊之教授、滑川徹教授、高橋正樹准教授に厚く感謝の意を表します。特に、高橋正樹准教授には、著者の在学中、様々な場面で数多くの御助言や御厚意等を頂きました。

著者は後期博士課程に在学中、「独立行政法人科学技術振興機構 (JST)CREST 分散協調型エネルギー管理システム構築のための理論及び基盤技術の創出と融合展開」の研究課題『電力需要の約 75% を自然エネルギーによって賄うことを可能とする分散ロバスト最適制御』に、慶應大学大森チームのメンバーとして参加を致しました。慶應大学大森チームに参加された、小野研究室、高橋研究室、武田研究室、滑川研究室、矢向研究室の皆様、並びに、日射・風速など気象データのサンプルエントロピー解析に関して共同研究をさせて頂いた、東海大学中島チームの渡邊武志博士からは、会議や共同研究を通して、研究について様々なことを学びました。関係者の皆様に厚く感謝を致します。

また、僅かな期間ではありましたが、著者は、後期博士課程在学中、「戦略的イノベーション創造プログラム (SIP) 革新的燃焼技術 制御チーム」のディーゼルエンジン制御グループにも参加をさせて頂きました。関係者の皆様に感謝を致します。

著者が学部 4 年生時代に研究活動の基礎となる有益な御指導を頂きました佐藤洋平教授、及び著者が大森研究室在籍中に会った皆様に感謝を致します。特に、著者が大森研究室に移籍した際、先輩であった志田宇信氏には様々な御助言を頂きました。また、大森研究室で同じ時間を過ごした後輩の皆様には多くの刺激を受けました。更に、大森研究室 秘書の和田美雪様には、日々の研究生活において、様々な面で御協力を頂きました。

そして最後に、経済的な援助をはじめ、終始励まし支えて下さった家族、父 高松尚久、母 高松由美子に心からの感謝を捧げます。

本研究に関する発表論文

1. 1. 公刊学術論文（主論文に係る原著論文）

(1) 高松尚宏, 大森浩充, “分数階微積分を用いた適応調整則を有するモデル規範型適応制御系の設計とそのリアプノフ安定性”, 電気学会論文誌 C (電子・情報・システム部門誌) Vol.134 No.9 pp.1228–1234, 2014 年 9 月 1 日掲載.

(2) Takahiro Takamatsu and Hiromitsu Ohmori, “Sliding Mode Controller Design based Backstepping Technique for Fractional Order System”, SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration, 2016 年 7 月 31 日掲載.

1. 2. 公刊学術論文（その他の論文）

(1) Takeshi Watanabe, Takahiro Takamatsu and Takashi Nakajima, “Evaluation of variation in surface solar irradiance and clustering of observation stations in Japan”, Journal of Applied Meteorology and Climatology, 2016 年 10 月 5 日掲載.

2. 1. 国際会議発表（査読付き）

(1) Kouyou Sawai, Takahiro Takamatsu* and Hiromitsu Ohmori, Adaptive Control Law using Fractional Calculus Systems, SICE Annual Conference 2012(SICE2012), Japan, on August 20 - 23, 2012, 2012 年 8 月 21 日発表済み.

(2) Takahiro Takamatsu* and Hiromitsu Ohmori, “Design of Adaptive Systems by Using Fractional Calculus System’s Approach”, The 32nd Chinese Control Conference, China, on July 26-28, 2013, 2013 年 7 月 27 日発表済み.

(3) Takahiro Takamatsu* and Hiromitsu Ohmori, “State-Feedback Control System using Adaptive Observer for Continuous-time Linear Fractional Calculus System”, SICE Annual Conference 2013(SICE2013), Japan, on September 14 - 17, 2013, 2013 年 9 月 17 日発表済み.

(4) Takahiro Takamatsu* and Hiromitsu Ohmori, “Design of Kreisselmeier Adaptive Observer using Projection Algorithm for Continuous-time Linear Fractional Order Systems”, The 5th International Symposium on Advanced Control of Industrial Processes (ADCONIP2014), Japan, on May 28-30, 2014, 2014 年 5 月 28 日発表済み.

(5) Takahiro Takamatsu* and Hiromitsu Ohmori, “Design of Model Reference Adaptive Control Systems with Fractional Order Adaptive Law and its Lyapunov Stability”, The 33rd Chinese Control Conference, Nanjing, China, on July 28-30, 2014, 2014年7月29日発表済み.

(6) Takahiro Takamatsu*, Koushirou Kubo, Hiromitsu Ohmori, “Design of Fractional Order Sliding Mode Controller via Non-integer Order Backstepping by Fractional Order Derivative of Lyapunov Function”, 2014 International Conference on Advanced Mechatronic Systems(ICAMechS2014), Tokai University, Kumamoto Campus, Japan, August 10-12, 2014, 2014年8月10日発表済み.

(7) Takahiro Takamatsu*, Koushirou Kubo, Hiromitsu Ohmori, “Design of Fractional Order Sliding Mode Controller via Non-integer Order Backstepping”, SICE Annual Conference 2014(SICE2014), September 9 - 12, 2014, Hokkaido University, Sapporo, Japan, 2014年9月10日発表済み.

(8) Takahiro Takamatsu* and Hiromitsu Ohmori, “State and Parameter Estimation of Lithium-ion Battery by Kreisselmeier-type Adaptive Observer for Fractional Calculus System”, SICE Annual Conference 2015(SICE2015), Hangzhou, China, on July 28-30, 2015, 2015年7月30日発表済み.

2. 2. 国際会議発表 (査読なし)

(1) Takahiro Takamatsu* and Hiromitsu Ohmori, “Online State and Parameter Estimation for Fractional order System”, Proc. of 2020 International Workshop on Computer Vision and Signal Processing (CVSP), Xi'an, China, on April 25, 2016.

3. 国内講演会発表

(1) 高松尚宏*, 大森浩充, “連続時間線形分数階システムに対する Kreisselmeier 型適応観測器を用いた制御系設計法”, 第13回制御部門大会, 福岡, 2013年3月5日 - 3月8日, 2013年3月8日発表済み.

(2) 高松尚宏*, 久保皓志郎, 大森浩充, “分数階積分系に対するバックステッピング法を用いたスライディングモード制御器の設計”, 制御産業計測制御 合同研究会, 広島大学 東京オフィス, 2014年7月9日発表済み.

(3) 高松尚宏*, 大森浩充, “分数階システムを対象とした適応観測器によるリチウムイオン電池の状態推定”, 第57回自動制御連合講演会, 群馬, 伊香保, ホテル天, 2014年11月10日-12日, 2014年11月10日発表済み.

(4) 渡邊武志*, 高松尚宏, 志田宇信, 大森浩充, 中島孝, “再生可能エネルギーの大量導入時に考慮すべき気象変動”, 第57回自動制御連合講演会, 群馬, 伊香保, ホテル天, 2014年11月10日-12日, 2014年11月10日発表済み.

(5) 渡邊武志*, 高松尚宏, 志田宇信, 大森浩充, 中島孝, “日射量の急激な変動の特徴”, 平成 26 年度日本太陽エネルギー学会・日本風力エネルギー学会合同研究発表会, 福島, いわき, いわき市文化センター, 2014 年 11 月 13 日-14 日, 2014 年 11 月 13 日発表済み.

(6) 高松尚宏, 松裏典大*, 大森浩充, “送電系統における同期条件の実験的検証”, 平成 28 年電気学会全国大会, 宮城, 仙台市, 東北大学, 2016 年 3 月 16 日-18 日, 2016 年 3 月 16 日発表済み.

(7) 高松尚宏, Elfady Satya, 大森浩充*, “ディーゼルエンジンを対象としたニューラルネットワークによるフィードバック誤差学習法を用いた制御系設計”, 第 59 回自動制御連合講演会, 福岡, 北九州市, 北九州国際会議場, 2016 年 11 月 10 日-12 日, 2016 年 11 月 11 日発表済み.

4. 賞罰

(1) 高松尚宏, 2014 年制御部門研究奨励賞, 計測自動制御学会, 連続時間線形分数階システムに対する Kreisselmeier 型適応観測器を用いた制御系設計法 (第 13 回制御部門大会), 2014 年 3 月 6 日受賞.

(2) 高松尚宏, 平成 26 年電子・情報・システム部門技術委員会奨励賞, 電気学会, 分数階積分系に対するバックステッピング法を用いたスライディングモード制御器の設計 (平成 26 年電子・情報・システム部門制御研究会), 2015 年 2 月 20 日受賞.

(3) 高松尚宏, The Best Poster Presentation Award, International Workshop on Computer Vision and Signal Processing, Online State and Parameter Estimation for Fractional order System, 2016 年 4 月 25 日受賞.

※登壇者を*にて表記.

※学位申請者を下線にて表記.

参考文献

- [1] R. L. Bagley and P. J. Torvik, A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity, *J. of Rheology*, Vol. 27, pp. 201-210, 1983.
- [2] M. Fukunaga, Application of fractional diffusion equation to amorphous semiconductors, In J. C. Trigeassou A. Le Mehaute, J. A. T. Machado and J. Sabatier, editors, *Fractional Differentiation and its Applications*, pp. 389-400, Ubooks, 2005.
- [3] 松葉育男, 長期記憶過程の統計, 共立出版, Tokyo, 2007.
- [4] R. Garra and F. Polito, Fractional calculus modelling for unsteady unidirectional flow of incompressible fluids with time-dependent viscosity, *Communications in Non-linear Science and Numerical Simulation*, Vol. 17(12), pp. 5073-5078, 2012.
- [5] E. Scalas, R. Gorenflo, and F. Mainardi, Fractional calculus and continuous-time finance II, *Physica A*, 284, pp. 376-384, 2000.
- [6] B. Ross, Fractional calculus, *Mathematics Magazine*, Vol. 50(3), pp. 115-122, 1977.
- [7] A. Loverro, Fractional calculus: history, definitions and applications for the engineer, Rapport technique, Univeristy of Notre Dame: Department of Aerospace and Mechanical Engineering, 2004.
- [8] L. Debnath, A brief historical introduction to fractional calculus, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol. 35(4), pp. 487-501, 2004.
- [9] B. Ross, The development of fractional calculus 1695–1900, *Historia Mathematica*, Vol. 4(1), pp. 75-89, 1977.
- [10] M. Dalir, Applications of Fractional Calculus, *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 4(21), pp. 1021-1032, 2010.
- [11] S. F. Lacroix, *Traité du Calcul Differential et du Calcul Integral*, Vol. 3, pp. 409-410, Courcier, Paris, 1819.
- [12] B. J. Fourier, *Théorie Analytique de la Chaleur*, in *Oeuvres de Fourier Paris (Firmin Didot)*, Vol. 1, pp. 508, 1822.
- [13] J. Liouville, Mémoire sur le calcul des diffgrentielles h indices quelconques, *Journal*

- de l'École Polytechnique, Paris Vol. 13, pp. 71-162, 1832.
- [14] N. Ya. Sonin, On differentiation with arbitrary index, Moscow, Matezn, Sbornik, Vol.6(1), pp.1-38, 1869.
- [15] A. V. Letnikov, On explanation of the main propositions of differentiation theory with an arbitrary index, Moscow, Matezn, Sbornik Mathematics, Vol.6(4), pp. 413–445, 1873.
- [16] H. Laurent, Sur le calcul des dérivées à indices quelconques, *Nouv. Annales de Mathematiques* Vol. 3(3), pp. 240-252, 1884.
- [17] P. A. Nekrassov, General differentiation, Moskow, Matezn, Sbornik, Vol. 14, pp. 45-168, 1888.
- [18] K. Nishimoto, *Fractional Calculus*, Vol. 1, Descartes Press, Koriyama, Japan, 1984.
- [19] A. Gemant, A Method of Analyzing Experimental Results Obtained from Elasto-Viscous Bodies, *Physics (New York)* Vol. 7, pp. 311-317, 1936.
- [20] I. Podlubny, Fractional-order systems and $PI^\lambda D^\mu$ controllers, *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 44(1), pp. 208-214, 1999.
- [21] C. Zhao, D. Xue, and YQ. Chen, A fractional order PID tuning algorithm for a class of fractional order plants, in *Proc. IEEE Int. Conf. Mech. Autom.*, Niagara Falls, Canada, Jul. 2005.
- [22] D. Xue, C. Zhao, and YQ. Chen, Fractional order PID control of a DC-motor with elastic shaft: A case study, In *Proc. of the American Control Conference*, Minneapolis, MN, USA, June 2006.
- [23] A. Oustaloup, F. Levron, B. Mathieu, F. M. Nanot, Frequency-band complex noninteger differentiator: characterization and synthesis, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* 47, pp. 25-39, 2000.
- [24] J.F. Leu, S.Y. Tsay and C. Hwang, Design of optimal fractional-order PID controllers, *Journal of the Chinese Institute of Chemical Engineers*, Vol.33(2), pp. 193–202, 2002.
- [25] S. Das, I. Pan, S. Das and A. Gupta, A novel fractional order fuzzy PID controller and its optimal time domain tuning based on integral performance indices, *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, Vol. 25(2), pp. 430-442, 2012.
- [26] S. Sondhi, and Y. V. Hote, Fractional order PID controller for load frequency control, *Energy Conversion and Management*, Vol. 85, pp. 343-353, 2014.
- [27] I. Pan, and S. Das, Fractional order fuzzy control of hybrid power system with renewable generation using chaotic PSO, *ISA transactions*, Vol. 62, pp. 19-29, 2016.
- [28] H. W. Bode, Relations between attenuation and phase in feedback amplifier design,

- Bell System Technical Journal, Vol. 19(3), pp. 421–454, 1940.
- [29] 真鍋, “むだ時間を含む非整数階積分型制御系”, 電気学会雑誌, 81-11, pp. 1803-1812, 1961.
- [30] 真鍋, “飽和を含む非整数階積分型制御系”, 電気学会雑誌, 82-11, pp. 1731-1740, 1962.
- [31] D. Matignon, Stability Results for Fractional Differential Equations with Applications to Control Processing, Computational Engineering in Systems and Application Multiconference, Vol. 2, pp. 963-968, 1996.
- [32] D. Matignon and B. d’ Andrea-Novel, Some Results on Controllability and Observability of Finite-Dimensional Fractional Differential Systems, Computational Engineering in Systems and Application Multiconference, Vol. 2, pp. 952-956, 1996.
- [33] D. Sierociuk and A. Dzielinski, Fractional Kalman Filter Algorithm For The States, Parameters And Order Of Fractional System Estimation, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. , Vol. 16, No. 1, pp. 129-140, 2006.
- [34] O. P. Agrawal, A general formulation and solution scheme for fractional optimal control problems, Nonlinear Dynamics, Vol. 38(1–2), pp. 323–337, 2004.
- [35] Y. Li and YQ. Chen, Fractional Order Linear Quadratic Regulator, Mechatronic and Embedded Systems and Applications, pp. 363-368, 2008.
- [36] 池田, 川田, 渡辺, “分数次微分システムの最適レギュレータ設計”, 計測自動制御学会論文集, Vol. 37(9), pp. 856-861, 2001.
- [37] 池田, 川田, 渡辺, “分数次微分システムの同次元オブザーバ設計”, 第 39 回計測自動制御学会学術講演会 (SICE2000), 305, CD-ROM A-4, 2000.
- [38] 池田, 川田, 小口, “分数階微分方程式で記述される連続時間システムのパラメータ推定”, 第 44 回自動制御連合講演会, pp. 616-619, 2001.
- [39] D. Pan, and Y. Li, , All parameters adaptive fractional order PI/PD type iterative learning control, In Control and Decision Conference (CCDC), 2016 Chinese (pp. 5820-5825), IEEE, 2016.
- [40] H. Malek, and YQ. Chen, Fractional Order Extremum Seeking Control: Performance and Stability Analysis, IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, Vol. 21(3), pp. 1620-1628, 2016.
- [41] A. Pisano, M. R. Rapaic, Z. D. Jelicic, and E. Usai, Sliding mode control approaches to the robust regulation of linear multivariable fractional - order dynamics, International Journal of Robust and Nonlinear Control, Vol. 20(18), pp. 2045-2056, 2010.
- [42] A. Si-Ammour, D. S. Djennoune, and M. Bettayeb, A sliding mode control for linear fractional systems with input and state delays, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. 14(5), pp. 2310-2318, 2009.

- [43] Z. Wang, Synchronization of an uncertain fractional-order chaotic system via backstepping sliding mode control, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Vol. 2013, 2013.
- [44] B. M. Vinagre, I. Petras, I. Podlubny and Y. Q. Chen, Using fractional order adjustment rules and fractional order reference models in model-reference adaptive control, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 29(1-4), pp. 269-279, 2002.
- [45] 真鍋, “非整数階積分型制御系について”, *電気学会雑誌*, 80-5, pp. 589-597, 1960.
- [46] 真鍋, “拡張された飽和関数法について”, *電気学会雑誌*, 80-8, pp. 1094-1103, 1960.
- [47] G. Carlson and C. Halijak, Approximation of Fractional Capacitors $(1/s)^{1/n}$ by a Regular Newton Process. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, Vol. 11(2), pp. 210-213, 1964.
- [48] A. Charef, H. Sun, Y. Tsao, and B. Onaral, Fractal System as represented by singularity function, *IEEE Transactions on Automatic Control* 37, pp. 1465-1470, 1992.
- [49] Y. Li, YQ. Chen, and I. Podlubny, Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability, *Computers & Mathematics with Applications* Vol. 59(5), pp. 1810-1821, 2010.
- [50] C. A. Monje, YQ. Chen, B. M. Vinagre, D. Xue and V. Feliu-Batlle, *Fractional-order systems and controls: fundamentals and applications*, Springer Science & Business Media, 2010.
- [51] R. L. Carroll and D. P. Lindroff, An Adaptive Observer for Single-Input Single-Output, *Linear Systems. IEEE Trans.*, AC-18-5, 428/435, 1973.
- [52] I. Pan and S. Das, *Intelligent fractional order systems and control: an introduction*, Vol. 438, Springer, 2012.
- [53] G. Kreisselmeier, Adaptive Observers with Exponential Rate of Convergence, *IEEE Trans.*, AC-22-1, 2/8, 1977.
- [54] A. Lasia, *Electrochemical impedance spectroscopy and its applications*, Modern aspects of electrochemistry, Springer US, pp. 143-248, 2002.
- [55] YQ. Chen, Ubiquitous fractional order controls, *Proceedings of the 2nd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Its Applications*, Vol. 2, 2006.
- [56] M. Zamani, M. Karimi-Ghartemani, N. Sadati, and M. Parniani, Design of a fractional order PID controller for an AVR using particle swarm optimization, *Control Engineering Practice*, Vol. 17(12), pp. 1380-1387, 2009.
- [57] R. V. Monopoli, Model Reference Adaptive Control with an Augmented Error Signal, *IEEE Trans. on AC*, AC-19-5, 474/484, 1974.

- [58] G. Jumarie, On the derivative chain-rules in fractional calculus via fractional difference and their application to systems modelling, *Central European Journal of Physics*, Vol. 11(6), pp. 617-633, 2013.
- [59] I. Bloom, A. N. Jansen, D. P. Abraham, J. Knuth, S. A. Jones, V. S. Battaglia and G. L. Henriksen, Differential voltage analyses of high-power, lithium-ion cells: 1. Technique and application, *Journal of Power Sources*, Vol. 139(1), pp. 295-303, 2005.
- [60] I. Bloom, J. Christophersen and K. Gering, Differential voltage analyses of high-power lithium-ion cells: 2. Applications, *Journal of power sources*, Vol. 139(1), pp. 304-313, 2005.
- [61] D. Andre, M. Meiler, K. Steiner, C. Wimmer, T. Soczka-Guth and D. U. Sauer, Characterization of high-power lithium-ion batteries by electrochemical impedance spectroscopy. I. Experimental investigation. *Journal of Power Sources*, Vol. 196(12), pp. 5334-5341, 2011.
- [62] D. Andre, M. Meiler, K. Steiner, H. Walz, T. Soczka-Guth and D. U. Sauer, Characterization of high-power lithium-ion batteries by electrochemical impedance spectroscopy. II: Modelling. *Journal of Power Sources*, Vol. 196(12), pp. 5349-5356, 2011.
- [63] G. L. Plett, Extended Kalman filtering for battery management systems of LiPB-based HEV battery packs: Part 3. State and parameter estimation, *Journal of Power sources*, 134(2), pp. 277-292, 2004.
- [64] Y. Zou, X. Hu, H. Ma and S. E. Li, Combined state of charge and state of health estimation over lithium-ion battery cell cycle lifespan for electric vehicles, *Journal of Power Sources*, Vol. 273, pp. 793-803, 2015.
- [65] 馬場厚志, 板橋欣之介, 寺西望, 枝本吉広, 長村謙介, 丸田一郎, 足立修一, HEV/EV 向けリチウムイオン電池の充電率とパラメータの同時推定, *自動車技術会論文集*, Vol. 46(1), pp. 97-102, 2015.
- [66] K. Dokko, M. Mohamedi, Y. Fujita, T. Itoh, M. Nishizawa, M. Umeda and I. Uchida, Kinetic characterization of single particles of LiCoO₂ by AC impedance and potential step methods, *Journal of the Electrochemical Society*, Vol. 148(5), pp. A422-A426, 2001.
- [67] J. M. Atebamba, J. Moskon, S. Pejovnik and M. Gaberscek, On the interpretation of measured impedance spectra of insertion cathodes for lithium-ion batteries, *Journal of the Electrochemical Society*, Vol. 157(11), pp. A1218-A1228, 2010.
- [68] A. Barai, G. H. Chouchelamane, Y. Guo, A. McGordon and P. Jennings, A study on the impact of lithium-ion cell relaxation on electrochemical impedance spectroscopy, *Journal of Power Sources*, Vol. 280, pp. 74-80, 2015.