

学位論文 博士(理学)

パリティを破るスピン軌道相互作用と可変な  
引力相互作用を駆使して  $p$  波フェルミ原子気体  
超流動を実現させる方法の理論的研究

2017年3月

慶應義塾大学大学院理工学研究科

山口辰威

# 論文要旨

本論文では、極低温フェルミ原子気体において、未だ達成されていない  $p$  波超流動状態の実現に向け、従来の実験が直面している困難を克服できる新しいアプローチを理論的に提案する。さらに、それが現在の技術水準で実現可能か否かを理論的に検証する。この新しい提案では、超流動状態を特徴付ける超流動秩序パラメータが対振幅と引力相互作用との積で与えられることに着目し、従来の実験が  $p$  波相互作用するフェルミ原子気体を最初から用いるのに対し、既に実現している熱平衡状態下の  $s$  波フェルミ原子気体超流動から出発する。そして、パリティを破るスピン軌道相互作用を用い、 $s$  波超流動状態中に  $p$  波対振幅を誘起させる。この段階では系はまだ  $s$  波超流動状態であるが、次に、Feshbach 共鳴を用い、原子間引力相互作用を  $s$  波対称性のものから  $p$  波対称性のものへ変換、あらかじめ用意されていた  $p$  波対振幅との積により、有限な  $p$  波超流動秩序パラメータを作り出し、 $p$  波超流動状態を実現させる。 $p$  波相互作用するフェルミ原子気体を最初から用いる従来のアプローチでは、対形成に必須の  $p$  波引力相互作用が、同時に、3 体ロスなどを引き起こしてしまい、そのことが  $p$  波超流動の実現を阻んでいるが、本論文が提案する方法では、 $p$  波相互作用を用いることなく  $p$  波対振幅を誘起し、かつ、 $p$  波超流動秩序パラメータの生成も  $p$  波相互作用の印加直後に瞬時に行われるため、この問題を克服できるものと期待される。

本論文では、極低温フェルミ原子気体の概要、および、 $p$  波超流動実現を目指す研究が抱える問題点を述べた後、前半部分で、パリティを破るスピン軌道相互作用を有する  $s$  波フェルミ原子気体超流動体中に誘起される  $p$  波対振幅を研究する。絶対零度において、フェルミ原子気体の分野で議論されている様々なタイプのスピン軌道相互作用に対し、どのような対称性の  $p$  波対振幅がどの程度誘起されるかを、BCS (Bardeen-Cooper-Schrieffer)-Leggett 強結合理論を用い、弱結合 BCS 領域から強結合 BEC (Bose-Einstein condensation) 領域までの幅広い相互作用領域で明らかにする。さらに、スピン軌道相互作用の超流動転移温度への影響を、Nozières と Schmitt-Rink による強結合理論を援用し BCS-BEC クロスオーバー全域で調べ、絶対零度で誘起される  $p$  波対振幅が大きな値をとる領域が、実験的に到達可能な超流動転移温度を有することを理論的に明らかにする。

本論文の後半では、前半で議論した  $p$  波対振幅を有する熱平衡  $s$  波フェルミ原子気体超流動を初期状態とし、原子間引力相互作用の対称性を  $s$  波から  $p$  波へと変更した後の系の時間発展の様子を、時間依存 Bogoliubov de-Gennes 理論を用いて明らかにする。様々な条件での時間発展を調べることで、上述したアイデアで作られ出された  $p$  波超流動秩序パラメータが、時間発展とともに消えずに残る場合があることを示し、さらに、大きな  $p$  波超流動秩序パラメータが得られる条件を理論的に明らかにする。

# Thesis Abstract

## Theoretical study of an idea to realize a $p$ -wave superfluid Fermi gas using a parity-violating spin-orbit coupling and tunable pairing interactions

In this thesis, I theoretically propose an idea to realize a  $p$ -wave superfluid state in an ultracold Fermi gas, which may avoid the difficulties that the current experiments aiming to achieve this unconventional pairing state are facing. While the current experimental approaches always start from a  $p$ -wave interacting Fermi gas, my idea first prepares a  $p$ -wave Cooper pair amplitude in a spin-orbit coupled  $s$ -wave superfluid Fermi gas, without using any  $p$ -wave interaction. Although this system is still in the  $s$ -wave superfluid state at this stage, one then suddenly replaces the  $s$ -wave pairing interaction with an appropriate  $p$ -wave one, by using a Feshbach resonance technique. The  $p$ -wave superfluid state is then realized, where the  $p$ -wave superfluid order parameter is given by the product of the introduced  $p$ -wave interaction and the  $p$ -wave pair amplitude that has already been prepared in the  $s$ -wave superfluid state.

In this thesis, after I overview cold Fermi gas physics, as well as the difficulties that the current experiments are facing, I first examine the  $p$ -wave Cooper-pair amplitude induced in a spin-orbit coupled  $s$ -wave superfluid Fermi gas. Within the framework of the BCS (Bardeen-Cooper-Schrieffer)-Leggett theory at zero temperature, I clarify what type of  $p$ -wave pair amplitude is induced in the presence of a spin-orbit interaction. I also evaluate the magnitude of the induced  $p$ -wave pair amplitude, from the weak-coupling BCS regime to the strong-coupling BEC (Bose-Einstein condensation) regime. Using the strong-coupling theory developed by Nozières and Schmitt-Rink, I also calculate the superfluid phase transition temperature and effects of a spin-orbit interaction in the whole BCS-BEC crossover region, to confirm that the region with large  $p$ -wave pair amplitude is accessible within the current experimental technology.

The latter part of this thesis deals with the time evolution of the  $p$ -wave superfluid order parameter, after the  $s$ -wave interaction is replaced by an appropriate  $p$ -wave one. Employing the time-dependent Bogoliubov de-Gennes theory, I show that, under a certain condition, the induced  $p$ -wave superfluid order parameter remains finite, even long after the  $p$ -wave interaction is turned on. I also clarify the condition for the realization of large magnitude of the  $p$ -wave superfluid order parameter.

# 目次

第 1 章	研究背景・動機	1
1.1	冷却フェルミ原子気体系	1
1.2	Feshbach 共鳴と BCS-BEC クロスオーバー	3
1.3	$p$ 波フェルミ原子気体超流動実現に向けた研究の現状	8
1.4	人工ゲージ場の手法を用いて冷却フェルミ原子気体に導入されるスピン軌道相互作用	13
1.5	本研究の目的および本論文の構成	16
第 2 章	スピン軌道相互作用を有する $s$ 波フェルミ原子気体超流動と誘起される $p$ 波対振幅	19
2.1	汎関数経路積分法を用いた定式化	19
2.2	反対称スピン軌道相互作用により誘起される $p$ 波対振幅	28
2.2.1	1 方向にはたらくスピン軌道相互作用の場合 ( $\lambda_{\perp} = 0, \lambda_z \neq 0$ )	28
2.2.2	2 方向にはたらくスピン軌道相互作用の場合 ( $\lambda_{\perp} \neq 0, \lambda_z = 0$ )	34
2.2.3	3 方向にはたらくスピン軌道相互作用の場合 ( $\lambda_{\perp} \neq 0, \lambda_z \neq 0$ )	39
第 3 章	$p$ 波相互作用印加後の $p$ 波超流動状態の時間発展	43
3.1	モデルの設定	43
3.2	時間依存 Bogoliubov de-Gennes (TDBdG) 理論の定式化	46
3.3	1 方向にはたらくスピン軌道相互作用により誘起された $p$ 波対振幅を初期値とする $p$ 波超流動秩序パラメータの時間発展	54
第 4 章	まとめ	67
付録 A	TDBdG 方程式の数値解法	71
付録 B	熱平衡 $p$ 波超流動と時間発展	73

# 第1章 研究背景・動機

この章では本研究が対象とする冷却フェルミ原子気体について説明する。1.1節でこの系の特徴を概観した後、1.2節で Feshbach 共鳴による引力相互作用の制御と、それを用いて実現された BCS-BEC クロスオーバー現象について述べる。1.3節では、冷却フェルミ原子気体における異方的な  $p$  波原子間相互作用と、それを用いての  $p$  波超流動実現に向けた研究の現状についてまとめる。1.4節では、本研究でも用いる近年冷却原子気体で実現したスピン軌道相互作用について概説する。こうした背景説明の後、1.5節で、本論文の研究動機と目的を述べる。

## 1.1 冷却フェルミ原子気体系

冷却フェルミ原子気体とは、 $10^5$  個程度の  $^{40}\text{K}$  や  $^6\text{Li}$  などのフェルミ原子を、空間的に非一様な磁場やレーザーの定在波などを用いて作成したポテンシャルに捕獲し、レーザー冷却や蒸発冷却により数  $\mu\text{K}$  オーダー以下まで冷却した気体である。この系の典型的な粒子数密度は約  $10^{13}\sim 10^{15}\text{ cm}^{-3}$  であり、例えば固体金属中の伝導電子密度の約  $10^{22}\text{ cm}^{-3}$  と比べ、非常に低密度・希薄である。そのため、固体金属で  $\mathcal{O}(10^4\sim 10^5\text{ K})$  であった伝導電子のフェルミ縮退温度は、フェルミ原子気体で  $\mathcal{O}(10^{-5}\text{ K})$  かそれ以下となる。従って、この系で量子現象を発現させるには、 $\mu\text{K}$  オーダー以下まで冷却する必要がある [1,2].

冷却フェルミ原子気体系の最大の特長のひとつは、Feshbach 共鳴の手法を用いて、フェルミ原子間に可変な原子間相互作用を印加できることである。これを用いることで、強く相互作用するフェルミ粒子系の多体現象を相互作用をかえながら系統的に研究したり、銅酸化物高温超伝導などのその他の強相関系に対する量子シミュレーターとして使用することが期待されており、現在まで、理論と実験の両面から精力的に研究されている [3–52].

フェルミ原子気体系の典型的な量子現象の1つは、極低温フェルミ原子気体超流動であり、この多体現象は金属電子系の超伝導現象に対応する。冷却フェルミ原子気体超流動は、原子間相互作用として  $s$  波相互作用 (等方的な接触型引力相互作用) を印加した  $^{40}\text{K}$  原子気体および  $^6\text{Li}$  原子気体において、共に 2004 年に実現された [3,4]. 図 1.1 は、 $s$  波原子間相互作用が印加された  $^6\text{Li}$  原子気体において、超流動現象を観測した際の実験結果を示す [4]. 一般に、冷却フェルミ原子気体系は、不純物がなく、原子間引力相互作用の種類や強さを自在にコントロール可能なため、現実の物質系の持つ複雑さ (結晶格子や不純物な

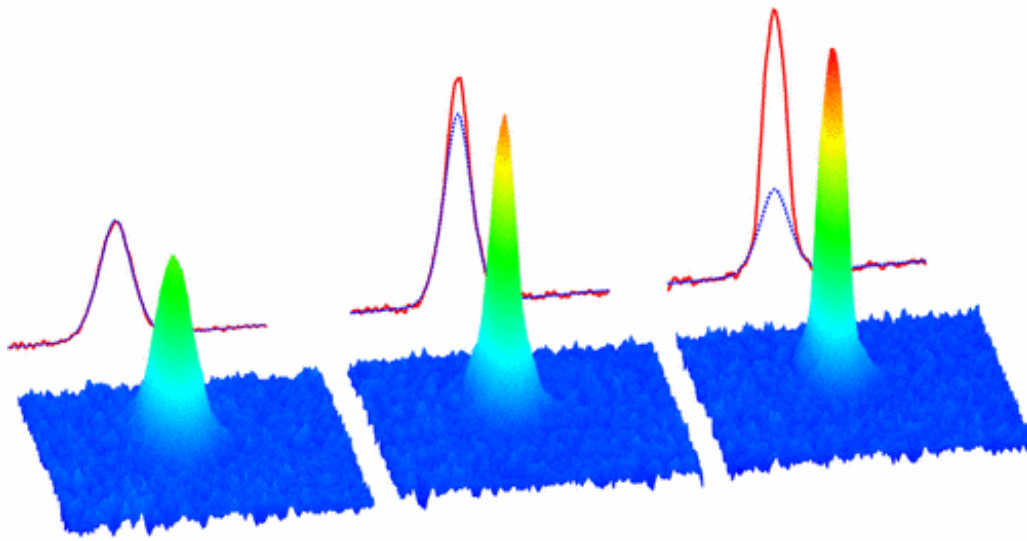


図 1.1:  ${}^6\text{Li}$  で観測されたフェルミ原子気体超流動における Cooper 対分子の重心運動量分布 [4]. 図手前側の強度分布は、フェルミ原子気体をトラップから解放して 6 ms 後の原子気体に共鳴光を照射し、測定した吸収像の柱密度の 3 mm 四方プロット. これから計算された分子の空間的密度分布が図奥側にある. このような原子気体の測定法を飛行時間法といい、ここで得られた空間的密度分布はそのまま分子の速度分布 (運動量分布) に対応する. 図中左側から右側へ向け、系の温度が  $T/T_F = 0.2, 0.1, 0.05$  と低くなっている ( $T_F$  はフェルミ縮退温度). 図中奥は、各温度における重心運動量分布を表している. (赤線：観測値, 青線：同じ温度での古典統計の運動量分布.) 系を冷却するにつれ, Cooper 対分子が、重心運動量ゼロの状態 (図中の分布のピーク位置) に Bose-Einstein 凝縮するため, 古典統計 (Boltzmann 分布) に従わない鋭いピークの運動量分布が見られている. この図では、中央および右側が超流動状態である. [Reprinted figure with permission from M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, A. J. Kerman, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **92**, 120403 (2004). Copyright (2004) American Physical Society. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.120403>.]

ど) をある程度回避し、注目する物理現象に焦点をあて、研究することができる. 例えば、金属超伝導では、一般に超伝導に必要な電子間相互作用を自在に制御することはできず、また電子の散乱に影響する不純物を完全に排除することはできない. 従って、不純物が全く存在しない一方粒子間相互作用は自在に制御できる冷却フェルミ原子気体系で超流動現象を調べるという手法は、銅酸化物系に代表される強相関電子系の超伝導における多体効果を理解するうえで非常に強力なツールとなると期待される. ただし、冷却フェルミ原子気体系では、現在等方的な  $s$  波原子間相互作用に加えて、異方的な  $p$  波原子間相互作用も実験的に実現している [21–33] が、後者を用いた  $p$  波超流動は未だ実現していない.

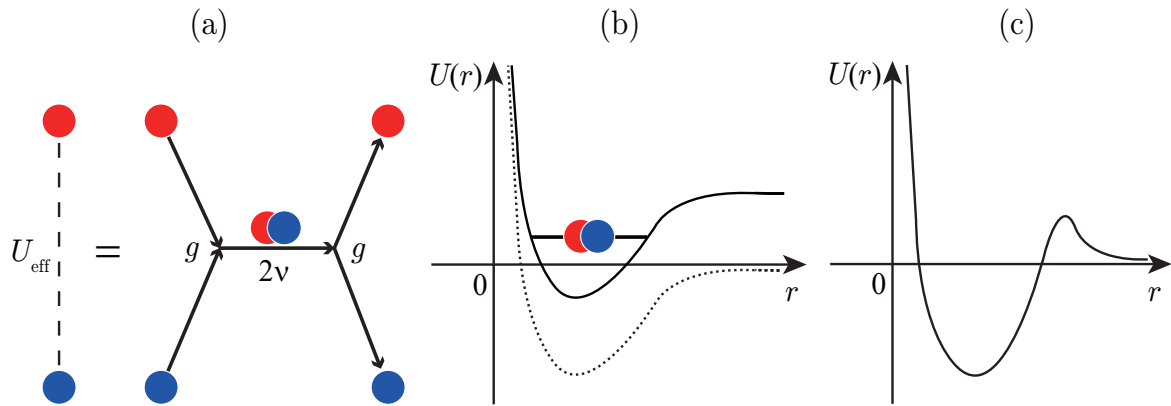


図 1.2: (a) Feshbach 共鳴による引力相互作用  $U_{\text{eff}}$  を表す散乱過程の模式図 ( $s$  波). 図中赤色, 青色の丸は擬スピン  $\uparrow, \downarrow$  のフェルミ原子を表す.  $g$  は Feshbach 結合定数,  $2\nu$  は共鳴束縛状態のエネルギーを表す. (b) Lennard-Jones 型ポテンシャル  $U(r)$  の模式図 (点線). これは,  $s$  波原子間相互作用の相互作用ポテンシャルと対応している.  $r$  は原子間の相対距離. 磁場中では Zeeman 効果により共鳴束縛状態を作るとエネルギーが上昇する (実線). (c) 軌道角運動量が有限の  $p$  波原子間相互作用の場合の相互作用ポテンシャル  $U(r)$  の模式図. 遠心力ポテンシャルの影響により, 原子が引力を感じることをすることができる領域を表す有効距離が存在する.

## 1.2 Feshbach 共鳴と BCS-BEC クロスオーバー

ここでは前節で触れた, Feshbach 共鳴を利用した粒子間にはたらく相互作用の強さを制御する方法について述べる. この目的のため, まず, フェルミ原子のスピン状態について説明する. 原子のスピン状態は, 超微細構造  $F$  (量子数  $F$ ) で指定でき, これは, 内殻電子のスピン和が全体としてゼロであるため, 原子の核スピン  $I$  (量子数  $I$ ) と最外殻電子スピン  $S$  (量子数  $S$ ) を合成したものである. 特に, 冷却フェルミ原子気体系でよく用いられるフェルミ原子  $^{40}\text{K}$  ( $I = 4$ ) と  $^6\text{Li}$  ( $I = 1$ ) はともにアルカリ原子であるため, 最外殻電子は 1 個 ( $S = 1/2$ ) であり, 結果  $F$  の値はそれぞれ  $^{40}\text{K}$  は  $F = 9/2, 7/2$ ,  $^6\text{Li}$  は  $F = 3/2, 1/2$  となる. (このように  $F$  が半奇数スピンになるため, フェルミ原子と呼ばれる.) 実際の冷却フェルミ原子気体の超流動研究でよく用いられる原子状態は,  $^{40}\text{K}$  原子系では  $|F = 9/2, F_z = -9/2\rangle, |F = 9/2, F_z = -7/2\rangle$ ,  $^6\text{Li}$  原子系では  $|F = 1/2, F_z = \pm 1/2\rangle$  である. このそれぞれの 2 種類の原子状態を, 擬スピン  $\sigma = \uparrow, \downarrow$  とし, 金属電子系の電子スピン  $S_z = \pm 1/2$  と対応させることで, 超伝導と類似の議論が冷却フェルミ原子気体超流動でも可能となる. 異なる擬スピン間に引力相互作用が存在すると, ある転移温度 (超流動転移温度  $T_c$ ) 以下で, フェルミ原子気体は超流動になるが, このとき異なる擬スピンの原子は BCS 理論で説明される Cooper 対を形成している. これは金属超伝導における電子スピン  $S_z = \pm 1/2$  状態間の Cooper 対形成に対応している.

金属超伝導の場合, 電子間に働く引力相互作用は, 格子振動を量子化したフォノンなどの

ボソンを媒介して生じるが、冷却フェルミ原子気体の場合、フェルミ原子間に働く相互作用は、原子間に働く Lennard-Jones 型ポテンシャルにおける 2 つのフェルミ原子の共鳴束縛状態 (ボソン) を介して生じる。この共鳴束縛状態のエネルギーを、外部磁場を用いて操作し、散乱状態にある 2 原子間に可変な相互作用を生じさせる手法が Feshbach 共鳴の手法である (図 1.2(a) を参照)。最外殻電子の間にはたらく相互作用による近距離の斥力と van der Waals 力による遠距離での引力 (2 つの原子の最外殻電子がスピン・シングレットで共有結合する場合は、その引力も加わる) を反映した、図 1.2(b) 黒点線のような Lennard-Jones 型ポテンシャルに対し、2 原子が、ポテンシャルのくぼみに共鳴束縛状態を形成し、再び解離してもとの原子状態に戻るといふ、図 1.2(a) のような散乱過程を考える。この時、擬スピンと電子スピンの間にはたらく超微細構造相互作用  $H_{HF} = J\mathbf{S} \cdot \mathbf{I} = J(S_+I_- + S_-I_+ + S_zI_z)$  により、始状態から中間状態への散乱には、 $(I, S) \rightarrow (I \pm 1, S \mp 1)$  のように異なるスピン状態遷移が寄与することになる。これにより、電子の Bohr 磁子が核のそれに比べてはるかに大きいことから、始状態と中間状態との間には外部磁場中で Zeeman エネルギーの差が生じることになる。このため、この中間状態の共鳴束縛状態のエネルギーを  $2\nu$  とすると、これは外部磁場に依存した量になる。以上の散乱過程を、Feshbach 共鳴の結合定数 (原子から分子状態への遷移確率) を  $g$  として評価すると、始状態の原子間には次のような有効相互作用がはたらく。

$$U_{\text{eff}} = U - \frac{g^2}{2\nu} = U - \frac{g^2}{\alpha(B - B_0)}. \quad (1.1)$$

ここで、 $U$  は Feshbach 共鳴以外の効果による弱い原子間相互作用 (引力と仮定) を表す。最後の等式は、共鳴準位  $2\nu$  と解離した原子状態でのエネルギー (今の場合ゼロとしている) が一致する Feshbach 共鳴磁場を  $B_0$  (実験から決まる定数) とおき、 $B_0$  近傍の外部磁場  $B$  に対して、 $2\nu = \alpha(B - B_0)$  と書いている ( $\alpha$  は定数)。 (1.1) 式から、外部磁場  $B$  の変更により、可変な  $U_{\text{eff}}$  (原子間の引力相互作用強度) を実現できる。以上の機構により、等方的な原子間引力相互作用 ( $s$  波) および異方的な原子間引力相互作用 ( $p$  波) が実験的に印加可能であるが、後者は有限の軌道角運動量を持つために、遠心力ポテンシャルの影響で、「引力」相互作用が原子間にはたらく原子間距離が有限である (図 1.2(c) を参照)。

例えば実験的に  $s$  波原子間相互作用をフェルミ原子間に印加する場合、 $U_{\text{eff}}$  は実験的に決定可能な  $s$  波散乱長  $a_s(B)$  と対応させる。このとき、(1.1) 式は、共鳴の幅  $\Delta W_s$  と Feshbach 共鳴磁場  $B_0$  から充分離れた磁場での原子間相互作用に対する散乱長  $a_{\text{bg}}$  を用い、

$$a_s(B) = a_{\text{bg}} \left( 1 - \frac{\Delta W_s}{B - B_0} \right) \quad (1.2)$$

のように表すことができる。一方、 $p$  波原子間相互作用を印加する場合、(1.2) 式で散乱長



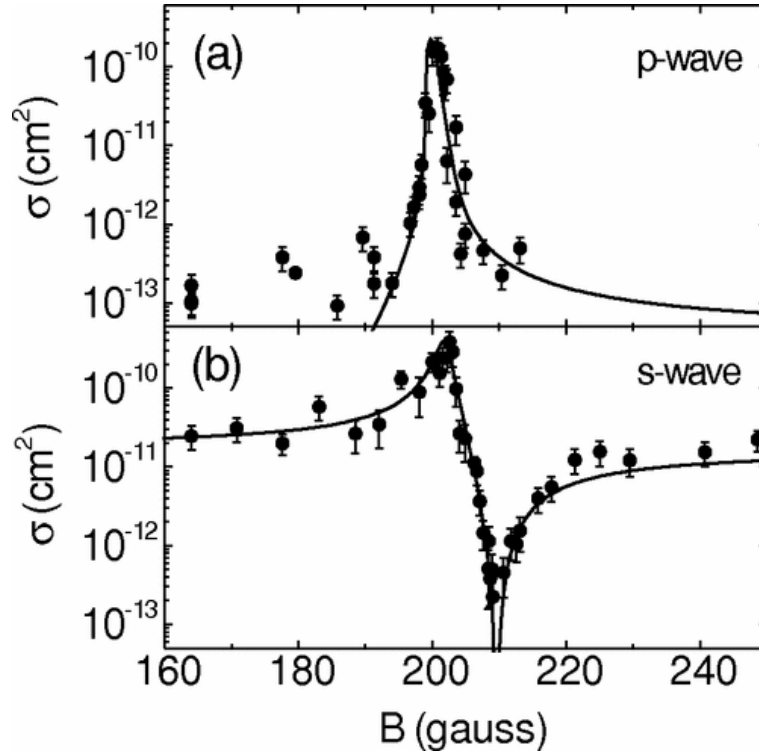


図 1.3:  $^{40}\text{K}$  フェルミ原子気体の原子間相互作用の磁場依存性 [22]. 縦軸  $\sigma$  は散乱断面積. (a) 同種擬スピン状態  $|F = 9/2, F_z = -7/2\rangle$  にある 2 つの原子間の  $p$  波 Feshbach 共鳴. (b) 異種擬スピン状態  $|F = 9/2, F_z = 9/2\rangle, |F = 9/2, F_z = -7/2\rangle$  の 2 原子間の  $s$  波 Feshbach 共鳴. 横軸は相互作用を制御するための外部磁場  $B$ . [Reprinted figure with permission from C. A. Regal, C. Ticknor, J. L. Bohn, and D. S. Jin, Phys. Rev. Lett. **90**, 053201 (2003). Copyright (2003) American Physical Society. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.90.053201>.]

に対応するパラメータが, 散乱体積  $v_p(B)$ ,  $v_{\text{bg}}$  に置き換わる (共鳴の幅は  $\Delta W_p$  とする).

$$v_p(B) = v_{\text{bg}} \left( 1 - \frac{\Delta W_p}{B - B_0} \right). \quad (1.3)$$

図 1.3 は,  $^{40}\text{K}$  フェルミ原子気体で行われた, Feshbach 共鳴機構を用いた相互作用制御の実験結果である [22]. 図の縦軸は相互作用の強さを散乱断面積  $\sigma$  を通して測定している. 絶対零度で 2 原子の散乱問題を解くと, 軌道角運動量  $l$  の散乱振幅を  $f_l$  として,

$$\sigma = 4\pi(2l + 1)|f_l|^2 \quad (1.4)$$

と表され, 有限温度の測定結果 (図 1.3) にも拡張される [22]. ここで,  $f_{l=0}$  は  $s$  波の散乱振幅と対応しており, (1.2) 式の  $a_s(B)$  の関数である. 一方, (1.3) 式の  $v_p(B)$  の関数の  $f_{l=1}$  が  $p$  波の散乱振幅である. 図 1.3(a) は擬スピン状態  $|F = 9/2, F_z = -7/2\rangle$  にある同種原子間

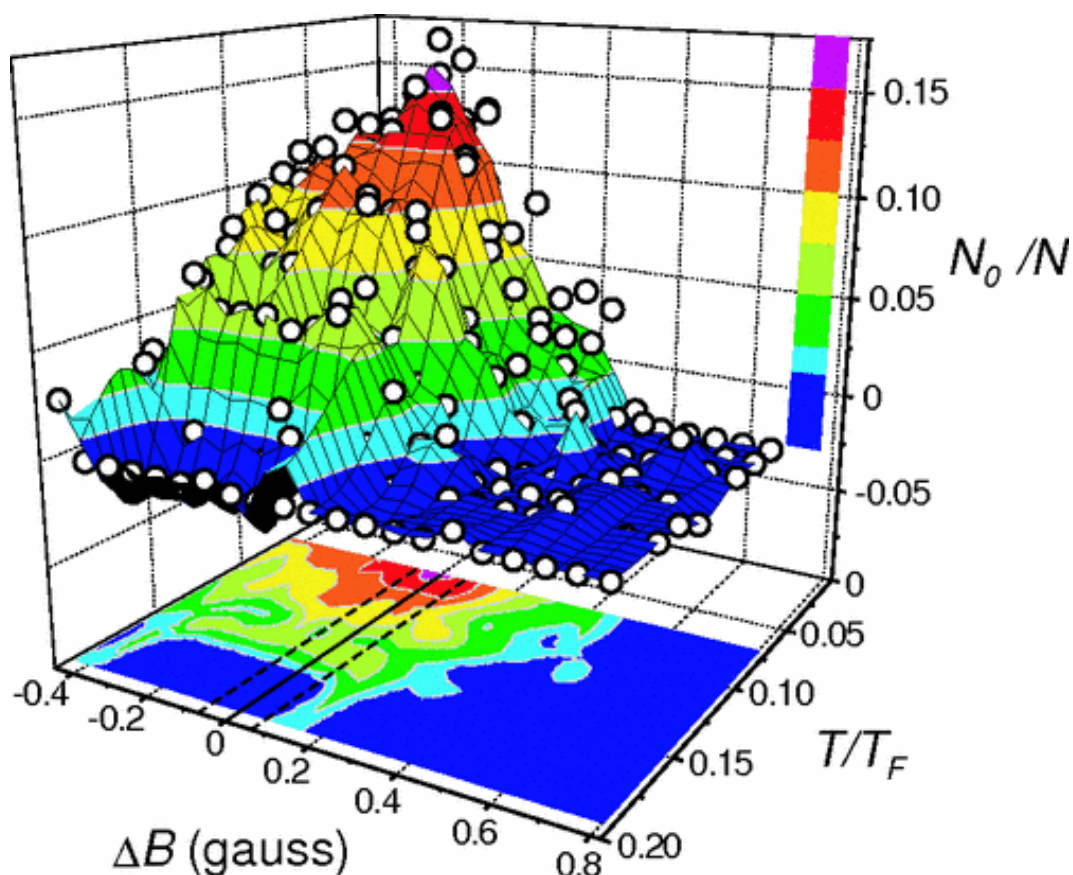


図 1.4: 極低温  $^{40}\text{K}$  フェルミ原子気体で観測された超流動状態と BCS-BEC クロスオーバー [3]. 図は凝縮粒子数  $N_0$  の温度  $T$ , 相互作用  $\Delta B \equiv B - B_0$  依存性を表す (Feshbach 共鳴磁場  $B_0 \sim 202$  G). この実験では,  $N_0/N > 0$  の領域を超流動状態と判定している.  $\Delta B > 0$  が弱結合,  $\Delta B < 0$  が強結合にそれぞれ対応している. この実験では, フェルミ縮退温度は  $T_F = 0.35 \mu\text{K}$ , 全粒子数は  $N \sim 10^5$ . 用意された擬スピン状態は,  $|F = 9/2, F_z = -7/2\rangle$  および  $|F = 9/2, F_z = -9/2\rangle$ . [Reprinted figure with permission from C. A. Regal, M. Greiner, and D. S. Jin, Phys. Rev. Lett. **92**, 040403 (2004). Copyright (2004) American Physical Society. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.040403>.]

での Feshbach 共鳴 (共鳴磁場は (a) のピーク位置での磁場の値  $B_0 \simeq 198$  G) を用いており, このとき生じる相互作用は異方的な  $p$  波対称性のものである. 一方, 図 1.3(b) では異なる 2 つの擬スピン  $|F = 9/2, F_z = -9/2\rangle, |F = 9/2, F_z = -7/2\rangle$  間での  $s$  波 Feshbach 共鳴を用いて  $s$  波相互作用を制御している (共鳴磁場は (b) のピーク位置での磁場の値  $B_0 \simeq 202$  G). 図 1.3 を見ると,  $^{40}\text{K}$  フェルミ原子気体では,  $s$  波および  $p$  波原子間相互作用を与える共鳴磁場  $B_0$  の差が 4 G 程度であり, 外部磁場  $B \simeq B_0$  を与えた場合,  $s$  波および  $p$  波原子間相互作用が混成して系に導入される可能性がある. しかし, 同様の相互作用制御は  $^6\text{Li}$  フェルミ原子気体でも実現しており,  $|F = 1/2, F_z = \pm 1/2\rangle$  の 2 原子間では,  $B_0 \simeq 830$  G に  $s$  波の Feshbach 共鳴磁場,  $B_0 \simeq 186$  G に  $p$  波の Feshbach 共鳴磁場があると報告されている [25] ため, この系では, 可変な  $s$  波および  $p$  波原子間相互作用を与える領域を明

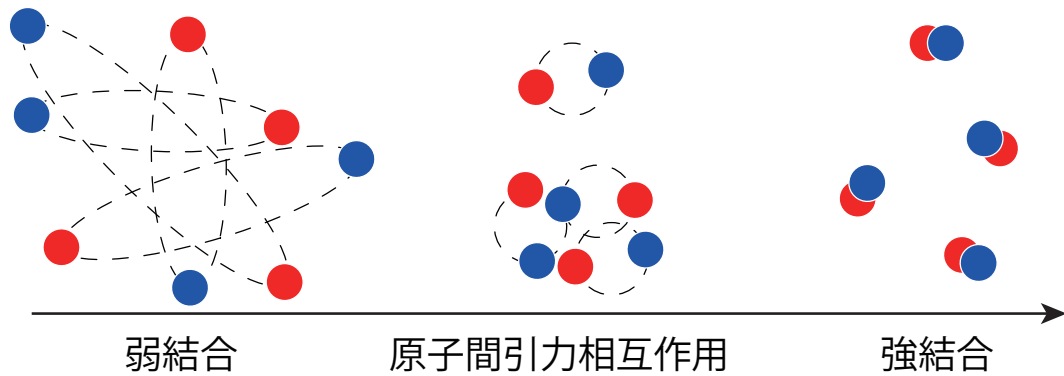


図 1.5: BCS-BEC クロスオーバーにおける対形成の模式図 (位置座標空間). 図中赤丸および青丸は擬スピン $\uparrow, \downarrow$ のフェルミ原子を表す. また, 破線は 2 原子が, 引力相互作用により ( $s$  波の) 対を組んでいる様子を模式的に表している.

確に区別して実現することができる.

図 1.4 は  $^{40}\text{K}$  フェルミ原子気体ではじめて観測された  $s$  波超流動の実験結果である [3]. 2 つの擬スピン $\uparrow, \downarrow$ の間にはたらく ( $s$  波) 引力相互作用の強さは Feshbach 共鳴により制御されており (図中の  $\Delta B$  が相互作用軸である), この実験では Bose-Einstein 凝縮した Cooper 対の数  $N_0$  が有限になった状態を超流動状態と判定している. 従って, 図中  $\Delta B - T/T_F$  面において水色のあたりに超流動転移温度  $T_c$  があると考えられている. 現時点で, この  $s$  波超流動状態は, 実験的に安定的に実現できており, 実現される超流動は, 原子間相互作用を弱結合から強くしていくにつれ, BCS (Bardeen-Cooper-Schrieffer) 理論で記述される Cooper 対的 2 原子対の凝縮状態から, 強く束縛して分子ボソン化している 2 原子対の BEC (Bose-Einstein condensation) 状態へと連続的に変化していく (BCS-BEC クロスオーバー).

図 1.5 は, BCS-BEC クロスオーバーにおける対形成の様子の模式図である. 原子間引力相互作用が弱い弱結合 BCS 領域では, フェルミ面近傍に存在するフェルミ原子が, フェルミ面の存在に助けられながら Cooper 対形成を行う (Cooper 不安定性). この時, 対の結合エネルギーは引力相互作用が弱いため小さく, その結果 Cooper 対のサイズは平均原子間距離よりも大きくなる. これは通常の金属超伝導の場合に相当する. 金属超伝導では平均電子間距離が  $1 \text{ \AA}$  程度であるのに対し, Cooper 対のサイズは  $\mathcal{O}(1000 \text{ \AA})$  である. 原子間引力相互作用を強くすると, 対の結合エネルギーが上昇, 同時に対のサイズは小さくなる. 強結合 BEC 領域ではフェルミ原子はフェルミ面なしでも 2 体レベルで分子を形成できるようになり, 超流動の性質も, 強く結合した分子ボソンの Bose-Einstein 凝縮に近くなる. このような BCS-BEC クロスオーバーは理論的には知られていたが, 可変な引力相互作用を有するフェルミ原子気体の登場によりはじめて実現した.

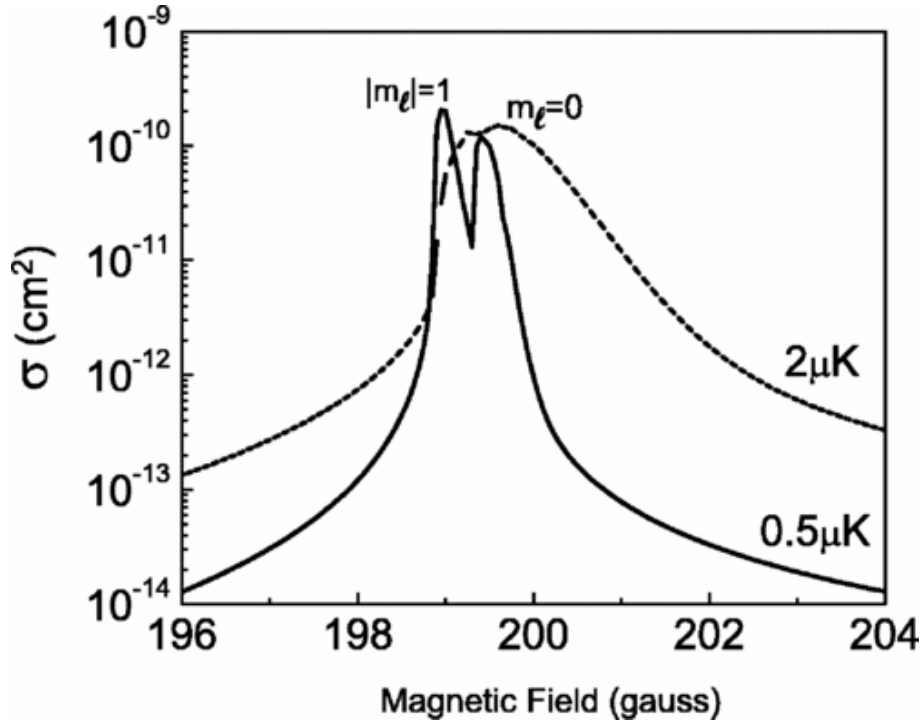


図 1.6:  $^{40}\text{K}$  フェルミ原子気体の  $p$  波 Feshbach 共鳴近傍で観測された散乱断面積  $\sigma$  の外部磁場  $B$  依存性 [22]. 擬スピン状態は  $|F = 9/2, F_z = -7/2\rangle$ . 実線は  $T = 0.5 \mu\text{K}$ , 点線は  $T = 2 \mu\text{K}$  のときの結果.  $p$  波対分子は, 軌道角運動量  $l = 1$  を有し,  $m_l = \pm 1, 0$  の 3 種類存在する. これらは  $T = 2 \mu\text{K}$  では縮退している.  $T = 0.5 \mu\text{K}$  では共鳴磁場 (ピーク位置) の分裂として現れている. [Reprinted figure with permission from C. Ticknor, C. A. Regal, D. S. Jin, and J. L. Bohn, Phys. Rev. A **69**, 042712 (2004). Copyright (2004) American Physical Society. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.69.042712>.]

### 1.3 $p$ 波フェルミ原子気体超流動実現に向けた研究の現状

フェルミ原子気体で実現している超流動は  $s$  波型のみである. ここでは非  $s$  波型超流動としてその実現が期待されている  $p$  波超流動について, それを目指す実験研究の現状を紹介する.

図 1.6 は, 1 成分  $^{40}\text{K}$  フェルミ原子気体 (擬スピン状態:  $|F = 9/2, F_z = -7/2\rangle$ ) で観測された  $p$  波 Feshbach 共鳴近傍の散乱断面積の磁場依存性である [22]. 1 成分フェルミ原子気体の場合, Pauli の原理により 2 つのフェルミ原子は同一地点に来ることはできず, 結果  $s$  波相互作用は存在しない. 従って, 図 1.6 の実験状況では Feshbach 共鳴により制御された  $p$  波相互作用が支配的となる. この異方的相互作用で形成される  $p$  波対分子は  $l = 1$  の軌道角運動量を有し,  $m_l = \pm 1, 0$  でラベルされた 3 種類存在する. 図 1.6 において,  $|m_l| = 1$  および  $m_l = 0$  の  $p$  波チャンネルは  $T = 0.5 \mu\text{K}$  のとき, 異なる Feshbach 共鳴磁場を有しており, その結果, 形成される  $p$  波対も  $|m_l| = 1$  と  $m_l = 0$  で異なる量になる. ( $T = 2 \mu\text{K}$  の場合, 熱的効果により, この分裂は見られない.)

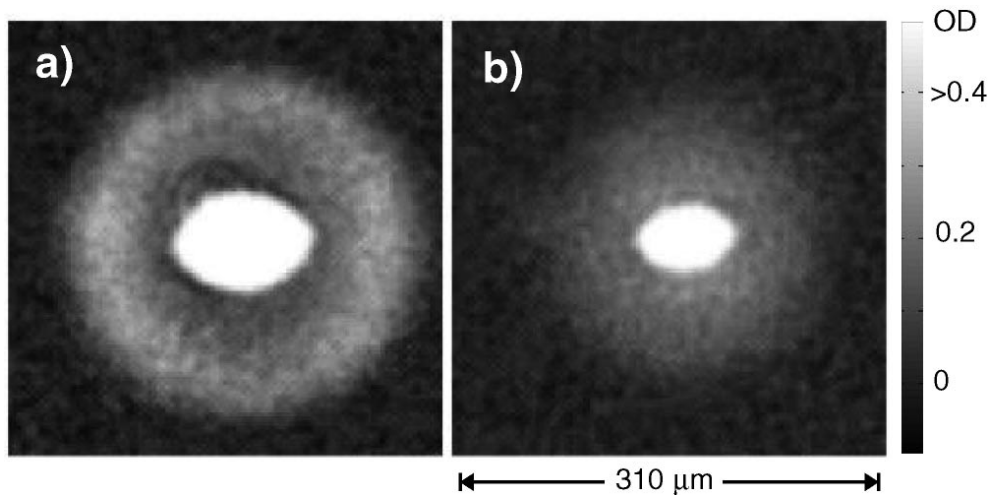


図 1.7:  $^{40}\text{K}$  フェルミ原子気体で確認された  $p$  波対分子の形成 [24]. (a)  $|m_l| = 1$ . (b)  $m_l = 0$ . 図は実空間での原子の分布で、紙面垂直方向を  $z$  軸として、図は  $xy$  平面を表している. 中心の白い明るい部分は、はじめから  $p$  波対分子を形成していない原子集団である. ここと黒色の箇所以外が、 $p$  波対分子が解離して生成された  $^{40}\text{K}$  フェルミ原子気体の成分である. [Reprinted figure with permission from J. P. Gaebler, J. T. Stewart, J. L. Bohn, and D. S. Jin, Phys. Rev. Lett. **98**, 200403 (2007). Copyright (2007) American Physical Society. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.200403>.]

この共鳴磁場の分裂は、磁気双極子相互作用によるもので、分裂により  $m_l = \pm 1$  と  $m_l = 0$  の  $p$  波対は図 1.7 に示すように、量的に異なるようになる. 今、簡単のため、原子が持つ磁気モーメントを古典的なスピンのベクトルとして扱い、2 原子の磁気モーメントが磁場中で同じ方向 ( $z$  軸と平行方向) を向いていると仮定すると、磁気双極子相互作用  $H_{\text{dd}}$  は、

$$H_{\text{dd}} = c \frac{(1 - 3 \cos \theta)}{r^3} \quad (c > 0) \quad (1.5)$$

と表される. ここで、 $\mathbf{r}$  は 2 原子の相対位置ベクトル (大きさ  $r$ ) であり、 $\theta$  はそれと  $z$  軸 (磁気モーメントの向いている方向) とのなす角である. この時、 $m_l = \pm 1$  は古典的描像では 2 原子が  $xy$  面内を回転している状態のため、 $H_{\text{dd}}$  は  $\theta = \pi/2$  となり常に斥力となる (図 1.8(a) を参照). 他方  $m_l = 0$  は同じ古典的描像では 2 原子が  $z$  軸を含む面内で回転している状況に相当するので  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  をとることになる (図 1.8(b) を参照). 結果、磁気双極子相互作用の効果で  $m_l = \pm 1$  を有する分子のエネルギーは  $m_l = 0$  を有する分子のエネルギーより高くなり、外部磁場を下げると、Feshbach 共鳴準位が低い  $m_l = 0$  の状態の方が先に (つまり高磁場側で) Feshbach 共鳴を起こすことになる (図 1.6 を参照).

上述したように、磁気双極子相互作用は上で考えた状況 (磁気モーメントが  $z$  軸方向を向いている) では、状態に対して引力・斥力両方の寄与があるため、分子を解離させ、飛行時間法で解離した分子を測定すると  $m_l = \pm 1$  成分が解離してできた原子の寄与の方が  $m_l = 0$  の成分が解離してできた原子成分より空間的に広がった分布になる (図 1.7 を参

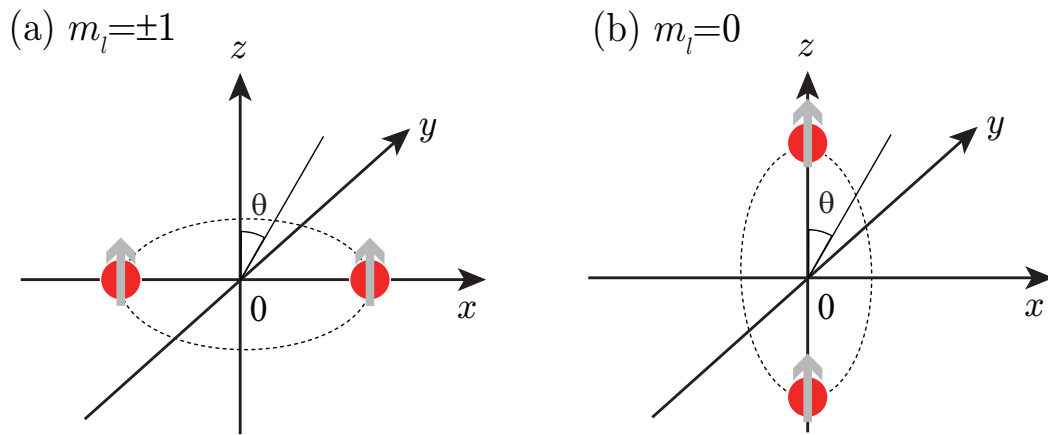


図 1.8: 古典的な描像における  $p$  波対分子形成の模式図 (位置空間座標). 赤丸はフェルミ原子. 灰色矢印は原子の磁気モーメントに対応する古典スピネクトル. 点線は2つの磁気モーメントが回転している様子を表す.

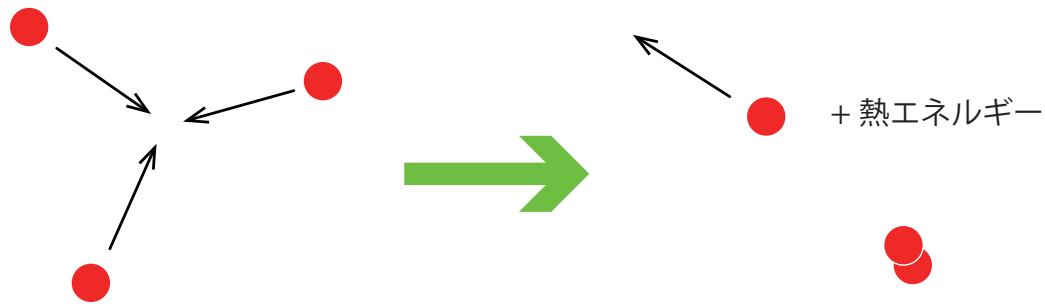


図 1.9:  $p$  波相互作用する 1 成分フェルミ原子気体で粒子ロスをもたらす 3 体衝突の模式図. 2 原子の分子形成による結合エネルギーの一部を 3 番目の原子が獲得することで高い運動エネルギーを持ってしまい, トラップポテンシャルの外に出て行ってしまふ.

照).

こうした実験だけでなく, 可変な  $p$  波相互作用を有するフェルミ原子気体は理論的にも数多くの研究がなされ [36–52], 例えば, 弱結合領域から強結合領域にいたるまでの  $p$  波超流動転移温度  $T_c$  の理論的な予測が既になされている [41, 42, 46].  $p$  波フェルミ原子気体超流動が実現すれば,  $p$  波超伝導 [62] や超流動  $^3\text{He}$  [59, 60] ( $p$  波超流動) の研究にも資するものがあると期待されているが, 系を充分低温に冷却しても  $p$  波超流動状態の実現には未だ至っていない.

$p$  波 Feshbach 共鳴により  $s$  波の場合同様, Cooper 対形成に必要な引力相互作用が用意できるにもかかわらず, まだ系を超流動化できない理由は, Feshbach 共鳴を用いた  $p$  波原子間相互作用が対形成だけでなく, 3 体衝突などを引き起こし, 系の粒子が失われてしまうことが一因である. (他にも, 2 成分フェルミ原子気体では, 原子の超微細構造状態から特別に選択した擬スピンは他の超微細構造状態へと双極子緩和しうるため, これによって

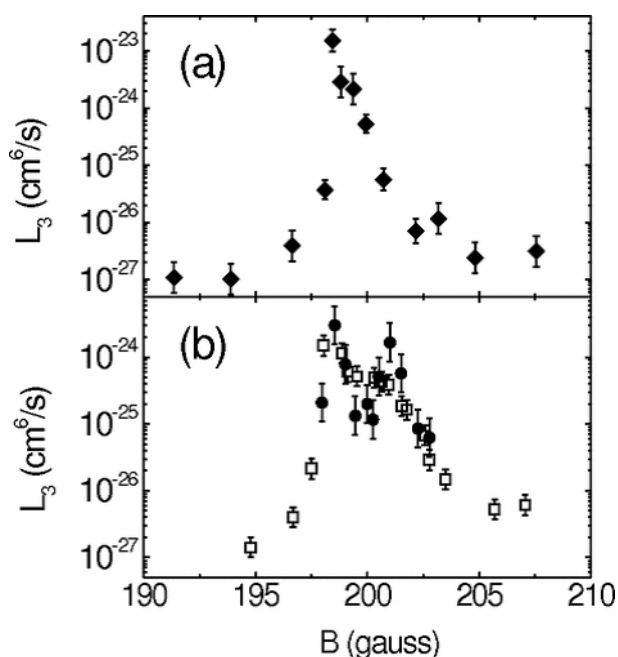


図 1.10:  $^{40}\text{K}$  フェルミ原子における 3 体衝突の損失係数  $L_3$  の測定結果 [21] ( $L_3$  の定義は (1.4) 式参照). 横軸は Feshbach 共鳴の磁場. (a) 擬スピン状態  $|F = 9/2, F_z = -7/2\rangle$  のフェルミ原子気体 ( $T = 2.4 \pm 0.8 \mu\text{K}$ ). (b) 擬スピン状態  $|F = 9/2, F_z = -7/2\rangle$ , および  $|F = 9/2, F_z = -9/2\rangle$  の 2 成分の場合 (●は  $T = 1.25 \pm 0.10 \mu\text{K}$ , □は  $T = 2.8 \pm 0.4 \mu\text{K}$ ). (b) のダブルピークは, 絶対零度での  $s$  波および  $p$  波 Feshbach 共鳴点がそれぞれ,  $B_0 \sim 202 \text{ G}$ ,  $B_0 \sim 198 \text{ G}$  にあることによる. [Reprinted figure with permission from C. A. Regal, C. Ticknor, J. L. Bohn, and D. S. Jin, Phys. Rev. Lett. **90**, 053201 (2003). Copyright (2003) American Physical Society. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.90.053201>.]

もはじめに用意した系は有限な寿命をもって「別の状態」に遷移してしまう.) 図 1.9 は, 1 成分フェルミ原子気体における 3 体衝突の模式図である. 原子間引力相互作用により, 3 つのフェルミ原子が接近する状況を考える. この内, 2 つの原子が  $p$  波引力相互作用で対を形成したとすると, この束縛エネルギーの減少分が, 対形成しない残りの 1 つの原子の運動エネルギーを大幅に上昇させる. フェルミ気体系の実験は, 原子を調和型のトラップポテンシャルに閉じ込めて行われるが, 高い運動エネルギーを得た原子が, この閉じ込めポテンシャルから飛び出してしまい粒子の損失となる. また, 形成された分子同士も散乱により更に損失する. また対の束縛エネルギーの一部は, 系の温度も上昇させる. このため系の原子数が減り, かつ系の温度が上昇するため, 超流動状態を実現・保持することが困難となる. 上述の 3 体衝突における束縛エネルギー  $E_{\text{bind}}$  は, 原子間に引力相互作用がはたらく有効的な距離  $R_e$  (図 1.2(c) に関するキャプションを参照) を用いて,  $E_{\text{bind}} \simeq \hbar^2 / (mR_e^2)$  と見積もられ [44],  $p$  波引力相互作用の場合,  $R_e \simeq 3 \text{ nm}$  である [22, 27]. これに対し, (2 成分フェルミ原子気体における)  $s$  波引力相互作用の場合, 原子対の相対距離がフェルミ波数の逆数程度 (フェルミ気体系では  $k_F^{-1} \simeq 100 \text{ nm}$ ) のため,  $R_e \simeq 100 \text{ nm}$  である. 従っ

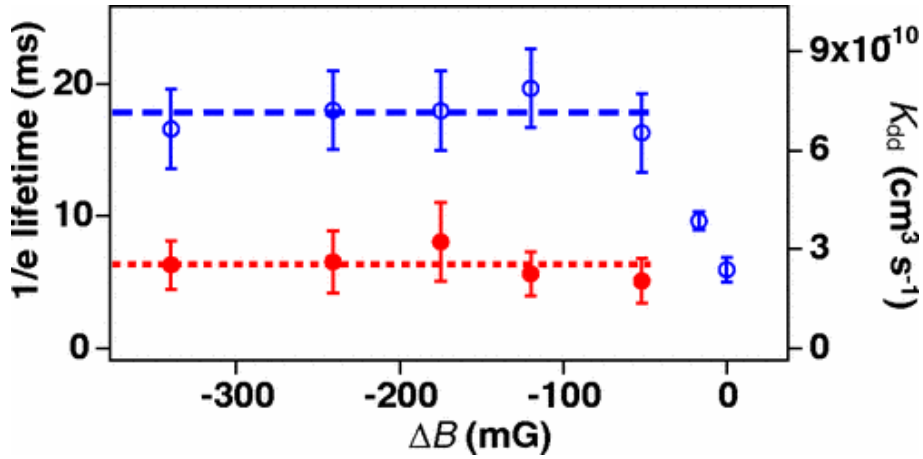


図 1.11:  ${}^6\text{Li}$  フェルミ原子気体 (擬スピン状態  $|F = 1/2, F_z = 1/2\rangle$ ) における,  $p$  波対分子の寿命 [32].  $p$  波 Feshbach 共鳴点は  $B_0 \simeq 158$  G. 横軸は,  $\Delta B = B - B_0$ . 赤丸は 3 体衝突による寿命. 青丸は  $p$  波対分子同士の非弾性散乱による寿命 ( $K_{dd}$  は  $p$  波対分子同士の非弾性散乱の衝突係数). [Reprinted figure with permission from Y. Inada, M. Horikoshi, S. Nakajima, M. K.-Gonokami, M. Ueda, and T. Mukaiyama, Phys. Rev. Lett. **101**, 100401 (2008). Copyright (2008) American Physical Society. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.100401>.]

て,  $s$  波相互作用するフェルミ気体の 3 体衝突における束縛エネルギーは,  $p$  波相互作用のそれと比べて非常に小さいため,  $s$  波引力相互作用を有するフェルミ気体系において, 上述した  $p$  波相互作用で起こる問題は生じない.

図 1.10 は,  ${}^{40}\text{K}$  フェルミ原子気体の Feshbach 共鳴磁場近傍で観測された 3 体損失係数  $L_3$  である. この量は, 原子数の減衰の方程式

$$\frac{dN}{dt} = -L_3 \langle n^2 \rangle N \quad (1.6)$$

に現れ,  $L_3$  が大きい程上述したプロセスで系から原子が失われることになる [28, 29, 44]. ( $\langle n^2 \rangle$  は粒子数密度の空間平均. なお, 実験では上式右辺に 2 体衝突項やトラップ寿命の効果も入れているが, ここでは説明を簡単化するため除いてある.) この実験での粒子数密度  $n \simeq 10^{13} \text{ cm}^{-3}$  程度を用いると, Feshbach 共鳴点近傍で, 原子の損失レート  $L_3 \langle n^2 \rangle$  は,  $s$  波原子間相互作用に対して  $L_3 \langle n^2 \rangle = \mathcal{O}(10 \text{ s}^{-1})$ ,  $p$  波原子間相互作用に対して  $L_3 \langle n^2 \rangle = \mathcal{O}(100 \text{ s}^{-1})$  となる. ところで, 超流動転移温度以下で捕獲したフェルミ原子気体に対し, Feshbach 共鳴磁場近傍においてある外部磁場 (例えば図 1.10 のピーク近傍の横軸の値) を与えた場合, フェルミ原子は, 次の 2 段階の過程を経て超流動に至る.

1. 引力相互作用により, 2 つの原子が Cooper 対 (対分子) を形成する
2. 多数の Cooper 対の波動関数が重なり合い, 巨視的な凝縮状態 (凝縮体) を生成する



この過程の前者において形成される Cooper 対は、先述した原子の損失レートなどによって決まる寿命を持つ。また、この過程の後者では、凝縮体が生成され始めてから成長して熱平衡に達する (凝縮体の成長が終了する) ことで (安定した) 超流動状態とみなすため、これには有限の時間  $t_{\text{cond}}$  が必要であり、冷却原子気体系においては、固定された原子間相互作用に対する凝縮粒子数 (凝縮している Cooper 対の数) の時間変化を測定することで、 $t_{\text{cond}} \simeq \mathcal{O}(100 \text{ ms})$  程度と見積もられている [53]. このことを念頭に置くと、 $s$  波原子間相互作用に対して  $L_3 \langle n^2 \rangle = \mathcal{O}(10 \text{ s}^{-1})$  という損失レートがあるにも関わらず、図 1.4 に見たように、 $^{40}\text{K}$  フェルミ原子気体の  $s$  波 Feshbach 共鳴磁場近傍では、 $s$  波超流動が実現している理由は、損失時間内 ( $(L_3 \langle n^2 \rangle)^{-1} \simeq 100 \text{ ms}$ ) に熱平衡とみなせる凝縮体を生成できるためであるといえる。図 1.11 は、 $^6\text{Li}$  フェルミ原子気体における  $p$  波対分子の寿命の実験結果であるが、 $p$  波対分子の寿命は、5~20 ms であり、これは ( $s$  波と  $p$  波では異なる超流動ではあるが) 凝縮体の成長に必要な時間の目安  $\mathcal{O}(100 \text{ ms})$  に比べて非常に短く、そのため、 $p$  波対分子が多数凝縮した凝縮体が、充分成長する前に対分子が崩壊し、超流動状態に至らない。 $p$  波フェルミ原子気体超流動実現に向けては、この「寿命の壁」を克服する必要がある。この問題を回避する方法の提案は本論文の研究目的の 1 つである。

## 1.4 人工ゲージ場の手法を用いて冷却フェルミ原子気体に導入されるスピン軌道相互作用

冷却フェルミ原子気体系は、中性原子のため、「擬スピン」と「軌道自由度」に対するスピン軌道相互作用は存在しない。しかし、近年、中性冷却原子気体にベクトルポテンシャルと同じ効果を与える「人工ゲージ場」の導入が可能となり [63–72]、これを利用することでスピン軌道相互作用を人工的に系に導入することが可能となった [73–78]。本論文では、 $p$  波フェルミ原子気体超流動を実現させる方法として、この「人工的なスピン軌道相互作用」を利用するので、本節では、この技術について概説する。以下では簡単のため、Dirac 定数  $\hbar = 1$  とする。

冷却原子気体へのスピン軌道相互作用の導入は、Lin らによって  $^{87}\text{Rb}$  ボース原子気体に対し行われた一連の実験 [79–82] で初めて実現された。同様の方法はフェルミ気体系に対しても適用され、2012 年に、 $^6\text{Li}$  フェルミ原子気体 [73]、 $^{40}\text{K}$  フェルミ原子気体 [74]、系において共に導入に成功している。しかし、人工ゲージ場の手法が一組のレーザーを用いた 2 光子過程を利用することから、レーザーによる擬スピン状態の遷移過程で光子を系に放出し続けることから、系の温度が大きく上昇してしまうという問題がある。このため、今のところ超流動状態は実現されていない。近年、この問題を回避するために、空間的に非一様な磁場をパルス的に加えることでスピン軌道相互作用を実現する理論的な提案がなされている [83, 84] が、実験的には実現していない。

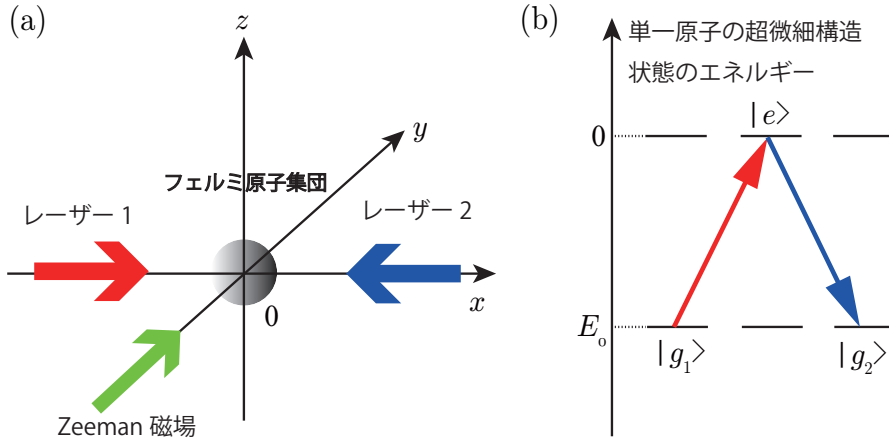


図 1.12: レーザーと原子の擬スピン状態との結合によりスピン軌道相互作用を系に印加する仕組みの模式図. (a) レーザーとフェルミ原子気体の空間的な配置. (b) エネルギー準位.

以下では, 既に実験的にフェルミ原子気体に対し実現しているスピン軌道相互作用の導入方法を概説する. まず, 図 1.12(a) に示したセットアップを考える. 空間原点に捕獲されたフェルミ原子集団に対して,  $y$  軸方向に擬スピン状態 (超微細構造状態) の縮退を解くための磁場 (Zeeman 磁場) を加える. さらに,  $x$  軸方向に向かい合うように伝播するレーザーを用意する. レーザーの波長は  $\lambda_R$  とする. 次に, 原子気体に印加したレーザーと原子準位との結合を, 図 1.12(b) のような 2 光子過程に調節する. ここで,  $|g_1\rangle$  および  $|g_2\rangle$  は, 超微細構造状態  $|e\rangle$  のエネルギーを基準にして  $E_0$  というエネルギー準位にある擬スピン状態であり, これを擬スピン状態  $\uparrow, \downarrow$  とみなす. 3 つの状態 ( $|g_1\rangle, |e\rangle, |g_2\rangle$ ) に対する図 1.12(b) に示した遷移の過程を記述できるハミルトニアンとして次のものを用意する.

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \frac{k_x^2}{2m} + E_0 & \frac{\Omega_R}{2} e^{2ik_R x} & 0 \\ \frac{\Omega_R}{2} e^{-2ik_R x} & \frac{k_x^2}{2m} & \frac{\Omega_R}{2} e^{2ik_R x} \\ 0 & \frac{\Omega_R}{2} e^{-2ik_R x} & \frac{k_x^2}{2m} + E_0 \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

ここで,  $m$  はフェルミ原子の質量,  $\Omega_R$  は Rabi 振動数,  $k_R = 2\pi/\lambda_R$  であり, 原子は図 1.12(a) の  $x$  軸方向において, 2 本のレーザーから運動量  $2k_R$  を受け取るため, 簡単のために,  $k_x$  方向の運動量成分のみを考えている. ここでユニタリー変換

$$U = \begin{bmatrix} e^{-2ik_R x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2ik_R x} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

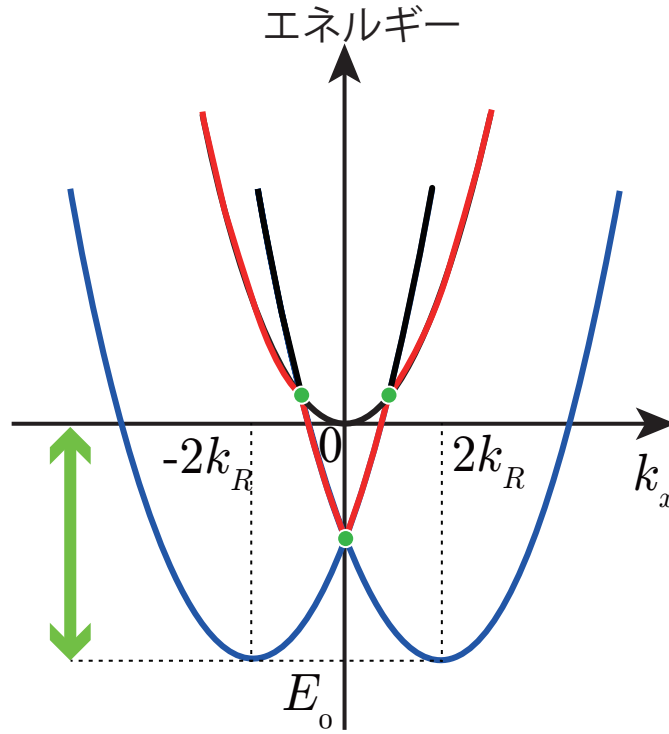


図 1.13: (1.9) 式において  $\Omega_R \rightarrow 0$  とした場合のエネルギー準位.

を行うと, (1.7) 式で与えるハミルトニアンは次のように変換される.

$$\mathcal{H} \rightarrow U^\dagger \mathcal{H} U = \begin{bmatrix} \frac{(k_x + 2k_R)^2}{2m} + E_0 & \frac{\Omega_R}{2} & 0 \\ \frac{\Omega_R}{2} & \frac{k_x^2}{2m} & \frac{\Omega_R}{2} \\ 0 & \frac{\Omega_R}{2} & \frac{(k_x - 2k_R)^2}{2m} + E_0 \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

(1.9) 式において  $\Omega_R \rightarrow 0$  とした時のエネルギー固有値を模式的に描いたものが, 図 1.13 である (赤・青・黒線の 3 本). 緑印で表したこれら 3 つのバンドの交点は,  $\Omega_R$  を有限にした場合, 準位の再構成により, スプリットする (ギャップが開く) 箇所である.

図 1.13 において, バンド底のエネルギー  $E_0$  を基準にした緑矢印で示した領域に着目すると, 黒線の分散とそれ以外を分離できる. このとき, 青線のバンドの底近傍の低エネルギー領域のみに着目する場合, 有効的にハミルトニアンを

$$\mathcal{H}' = \begin{bmatrix} \frac{k_x^2}{2m} & \frac{\Omega_R}{2} e^{2ik_R x} \\ \frac{\Omega_R}{2} e^{-2ik_R x} & \frac{k_x^2}{2m} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

と表すことができる. このときの基底空間は  $(|g_1\rangle, |g_2\rangle)$  である. これより, 先と同様に, 波

動関数に対するユニタリー変換

$$U' = \begin{bmatrix} e^{-ik_R x} & 0 \\ 0 & e^{ik_R x} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

に対して、低エネルギー有効ハミルトニアンが、

$$\mathcal{H}' \rightarrow U'^{\dagger} \mathcal{H}' U' = \begin{bmatrix} \frac{(k_x + k_R)^2}{2m} & \frac{\Omega_R}{2} \\ \frac{\Omega_R}{2} & \frac{(k_x - k_R)^2}{2m} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

と書ける (簡単のため、本質的でない定数エネルギーシフトの項は省いた). これを Pauli 行列を用いて表すと、

$$\mathcal{H}' = \frac{(k_x + k_R \sigma_z)^2}{2m} + \frac{\Omega_R}{2} \sigma_x = \frac{k_x^2}{2m} + \frac{k_R}{m} k_x \sigma_z + \frac{k_R^2}{2m} + \frac{\Omega_R}{2} \sigma_x \quad (1.13)$$

となり右辺2項目が「スピン  $\sigma_z$ 」と「軌道  $k_x$ 」の結合 (=スピン軌道相互作用) を与えることになる. この項は空間反転 ( $k_x \rightarrow -k_x$ ) に対し、符号が反転することから反対称スピン軌道相互作用と呼ばれることもある.

## 1.5 本研究の目的および本論文の構成

本研究の目的は、現在実現への目途が全くたっていない  $p$  波フェルミ原子気体超流動を実現させる方法を理論的に提案し、その方法の妥当性や条件をも明らかにしようとするものである. 冷却フェルミ原子気体を超伝導や超流動の研究に対する量子シミュレーターとして幅広く使えるようにするには、現在実現している  $s$  波超流動だけでは不十分であり、 $p$  波超流動に代表される異方的秩序パラメータを有する超流動の実現が非常に重要である.  $p$  波超伝導は、例えばルテニウム酸化物や一部の重い電子系で実現していると考えられており [62, 111–113], 超流動ヘリウム  $^3\text{He}$  も  $p$  波超流動である [108–110]. 中性子星内部でも中性子が  $p$  波超流動状態になっている領域があると考えられており [114, 115], このような異方的超伝導・超流動の物理の発展にとって、冷却フェルミ原子気体における  $p$  波超流動の実現は急務である.

冷却フェルミ原子気体において  $p$  波超流動を実現しようとする場合、最も自然な方法は、 $p$  波相互作用するフェルミ原子気体を超流動転移温度  $T_c$  以下に冷却し、超流動化するというものである. しかし、このアプローチは前述したように、3体衝突や双極子緩和などによりフェルミ原子気体に対してうまくいっていない.  $p$  波 Feshbach 共鳴により実現する  $p$  波分子の寿命は、こうした効果による系の寿命を反映し、およそ 5~20 ms である. 一方、冷却原子系では、超流動転移温度以下で凝縮体が充分成長するには  $\mathcal{O}(100 \text{ ms})$  は必要

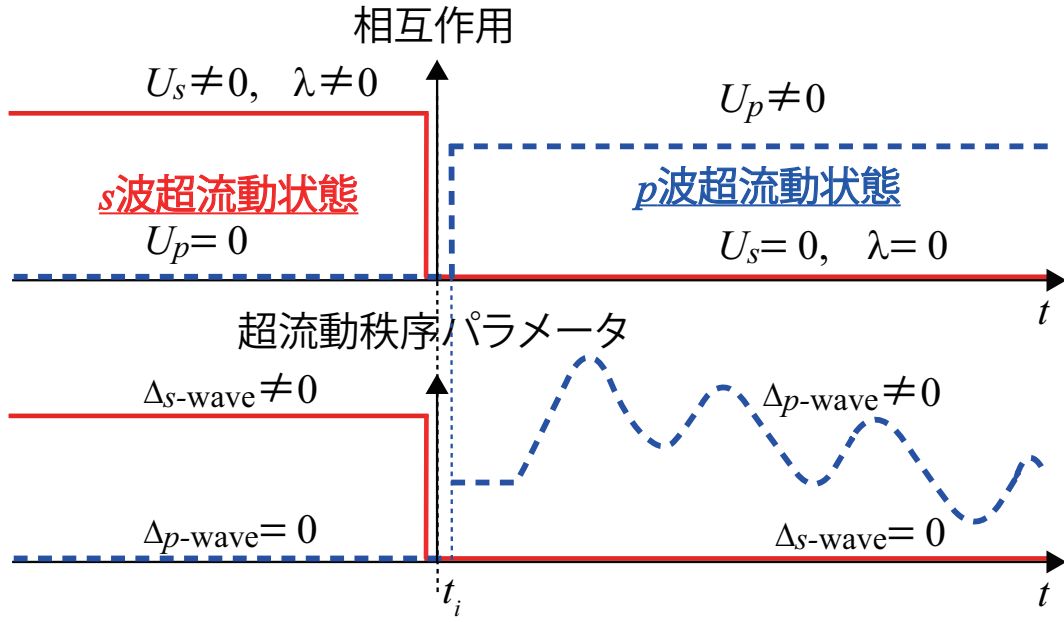


図 1.14: 本論文における,  $p$  波フェルミ原子気体超流動を実現させるための理論的方法の模式図.  $t$  は実時間であり,  $U_{s(p)}$ ,  $\lambda$  はそれぞれ  $s(p)$  波原子間相互作用の大きさとスピン軌道相互作用結合強度.  $\Delta_{s(p)\text{-wave}}$  は  $s(p)$  波超流動秩序パラメータ. 図は時刻  $t_i$  において,  $(U_s \neq 0, U_p = 0, \lambda \neq 0) \rightarrow (U_s = 0, U_p \neq 0, \lambda = 0)$  のように急峻に切り替えた場合を模式的に表している.  $t < t_i$  では熱平衡状態を仮定する. 本論文の提案では, 時刻  $t_i$  において必ずしもスピン軌道相互作用を切る必要はない. ここで模式的に示した状況に対する具体的な評価は後に与える.

であるとされており, 結果,  $p$  波相互作用を有するフェルミ原子気体は, 超流動状態になる前に, 系自身 (そして  $p$  波対も) 消滅してしまう. このように, 単純に  $p$  波原子間相互作用を印加して  $p$  波超流動を実現しようとする従来の実験手法では,  $p$  波超流動の実現は難しいことが分かる. したがって,  $p$  波超流動を実現する全く新しい実験手法が必要である.

本論文が提案するアイデアは次のようなものである (図 1.14 を参照). まず, フェルミ粒子系超流動を特徴付ける超流動秩序パラメータ  $\Delta_{\sigma,\sigma'}(\mathbf{p})$  が, 対形成に必須の引力相互作用  $U(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  と対振幅と呼ばれる量  $\langle c_{\mathbf{p},\sigma} c_{-\mathbf{p},\sigma'} \rangle$  との積で与えられることに着目する.

$$\Delta_{\sigma,\sigma'}(\mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{p}'} U(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \langle c_{\mathbf{p}',\sigma} c_{-\mathbf{p}',\sigma'} \rangle. \quad (1.14)$$

すでに実現している  $s$  波フェルミ原子気体超流動にパリティを破った反対称スピン軌道相互作用を導入, 系の空間反転対称性を破る. すると対振幅には通常のスピン・シングレット成分に加え, 空間反転対称性が失われたことに因るスピン・トリプレット成分が誘起され, それは一般には  $p$  波成分を含む. しかし, この時点では  $p$  波相互作用がないので, それに起因する前述した問題は発生せず, 系も (スピン・トリプレットの対振幅成分も含む)  $s$

波超流動のままである。この状況に対し、Feshbach 共鳴の技術を用い、引力相互作用を  $s$  波から  $p$  波に変更する (具体的には外部磁場を  $s$  波 Feshbach 共鳴磁場から  $p$  波 Feshbach 共鳴磁場に変化させる)。すると、生じた  $p$  波相互作用とすでに誘起されていた  $p$  波対振幅の積により  $p$  波超流動秩序パラメータが瞬時に有限となり、系は  $p$  波超流動となる。(  $s$  波対振幅は残るが、 $s$  波相互作用はなくなるため、 $s$  波超流動秩序パラメータはゼロとなる。) もちろん、 $p$  波相互作用を印加後、前述した問題により系は崩壊をはじめますが、少なくとも相互作用を変更した直後は  $p$  波超流動が実現する。この手法の最大の利点は、先述した従来の実験手法において  $p$  波超流動を実現するために必要な「凝縮体の成長」を待たずとも、原子間相互作用を  $p$  波対称性のものに切り替えた直後に、 $p$  波超流動状態が生成されることにある。

上述のアイデアの成否は、

1.  $s$  波相互作用の段階でどれくらい  $p$  波対振幅を誘起できていられるか
2. 相互作用を  $s$  波から  $p$  波に変更後、少なくとも対の寿命である 5~20 ms までの間、系は  $p$  波超流動でいられるか

の 2 点である。本研究では、これを理論的に評価するため、まず、 $p$  波の対振幅が最大となる条件を明らかにする。またスピン軌道相互作用の導入により  $s$  波の超流動状態がどのような影響を受けるかも、このアイデアの可能性を探る上で重要であるため、スピン軌道相互作用と  $s$  波引力相互作用を有するフェルミ原子気体の超流動転移温度  $T_c$  を幅広い相互作用領域で明らかにし、特に  $p$  波対振幅が大きくなる領域が実験的に実現可能か明らかにする。次に、相互作用を  $s$  波から  $p$  波に変換する操作後、系がどう時間発展するかを調べ、 $p$  波超流動状態の妥当性を明らかにする。

本論文の構成は以下の通りである。2 章ではスピン軌道相互作用と  $s$  波引力相互作用を有するフェルミ原子気体に対する強結合超流動理論を経路積分を用いて定式化、特に絶対零度に対し、BCS-Leggett 理論の枠組みで、誘起される  $p$  波対振幅が最大となる条件を調べる。また、その条件が実験的に実現可能か否かを見るために、Nozières と Schmitt-Rink らによるガウス揺らぎの理論の枠内で超流動転移温度  $T_c$  を評価する。3 章では、時間依存 Bogoliubov de-Gennes 理論を用い、相互作用を  $s$  波から  $p$  波対称性に変換後、本当に  $p$  波超流動が実現するのかどうか検証する。4 章では本論文の内容をまとめ、併せて今後の課題について述べる。

本論文では、Dirac 定数  $\hbar$ , Boltzmann 定数  $k_B$ , 系の体積  $V$  を 1 とする。また、とくに断りのない限り、 $k_F, v_F, T_F, \varepsilon_F$  は、スピン軌道相互作用のないときのフェルミ波数、フェルミ速度、フェルミ縮退温度、フェルミエネルギーを表すものとする。

## 第2章 スピン軌道相互作用を有する $s$ 波 フェルミ原子気体超流動と誘起さ れる $p$ 波対振幅

この章では、 $p$  波相互作用を用いずに  $p$  波対振幅を作り出すアイデアとして、既に実現している  $s$  波フェルミ原子気体超流動に反対称スピン軌道相互作用を人工的に印加する方法を理論的に研究する。2.1 節でこの系の  $T = 0$  での超流動を扱う BCS-Leggett 理論、および、BCS-BEC クロスオーバー領域での  $T_c$  を議論するための強結合理論 (ガウス揺らぎの理論) について説明する。2.2 節では、 $T = 0$  の超流動状態に対し、スピン軌道相互作用により  $s$  波超流動体中に誘起される  $p$  波対振幅を議論する。いくつかのタイプのスピン軌道相互作用の場合について、大きな  $p$  波対振幅が得られる領域を、 $s$  波相互作用とスピン軌道相互作用の結合定数に関する相図上で決定する。また、 $T_c$  に対するスピン軌道相互作用の影響を調べ、「大きな  $p$  波対振幅」が得られる場合の超流動転移温度が実験的に到達可能な値であるかも検証する。

### 2.1 汎関数経路積分法を用いた定式化

$s$  波引力相互作用とスピン軌道相互作用を有する 3 次元 2 成分一様フェルミ原子気体を考える。ここでは、絶対零度の超流動状態を BCS-Leggett 理論 [10–12] で扱い、超流動転移温度  $T_c$  については、Nozières と Schmitt-Rink による BCS-BEC クロスオーバー理論 (NSR 理論) [13] をスピン軌道相互作用がある場合に拡張して計算する。これら 2 つの理論をまとめて扱うために、ここでは汎関数経路積分法 [14, 91] を用いる。この理論において、分配関数は、

$$\mathcal{Z} = \int \prod_{\sigma} \mathcal{D}\bar{\Psi}_{\sigma} \mathcal{D}\Psi_{\sigma} e^{-S} \quad (2.1)$$

と表される。ここで  $S$  は作用を表し、

$$x = (\mathbf{r}, \tau), \quad (2.2)$$

$$\int dx = \int_0^{\beta} d\tau \int d\mathbf{r}, \quad (2.3)$$

$$\beta = 1/T \quad (2.4)$$

として、次式で与えられる ( $\tau$  は虚時間).

$$S = \int dx \left[ \sum_{\sigma} \bar{\Psi}_{\sigma}(x) \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \mu \right) \Psi_{\sigma}(x) + \sum_{\sigma, \sigma'} \bar{\Psi}_{\sigma}(x) h_{\text{so}}^{\sigma, \sigma'} \Psi_{\sigma'}(x) - U_s \bar{\Psi}_{\uparrow}(x) \bar{\Psi}_{\downarrow}(x) \Psi_{\downarrow}(x) \Psi_{\uparrow}(x) \right]. \quad (2.5)$$

$\Psi_{\sigma}(\mathbf{r}, \tau)$  および  $\bar{\Psi}_{\sigma}(\mathbf{r}, \tau)$  は Grassmann 数とその共役量であり、質量  $m$ , 擬スピン  $\sigma = \uparrow, \downarrow$  を持つフェルミ原子を表している. これらは次のように Fourier 変換できる.

$$\Psi_{\sigma}(\mathbf{r}, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_n \sum_{\mathbf{p}} e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - \omega_n \tau)} c_{\sigma}(\mathbf{p}, \omega_n), \quad (2.6)$$

$$c_{\sigma}(\mathbf{p}, \omega_n) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_0^{\beta} d\tau \int d\mathbf{r} e^{i(\omega_n \tau - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} \Psi_{\sigma}(\mathbf{r}, \tau). \quad (2.7)$$

ここで  $\omega_n$  はフェルミ粒子の松原周波数である ( $c_{\sigma}(\mathbf{p}, \omega_n)$  はこの表示での Grassmann 数). (2.5) 式において、 $\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla$  は実空間に作用する演算子であり、 $\mu$  はフェルミ原子の化学ポテンシャルである.  $-U_s (< 0)$  は  $s$  波 Feshbach 共鳴により可変な  $s$  波の原子間引力相互作用である. この相互作用は、観測量である  $s$  波散乱長  $a_s$  と次式で関係付けられる.

$$\frac{4\pi a_s}{m} = -\frac{U_s}{1 - U_s \sum_{\mathbf{p}}^{p_c} \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{p}}}}. \quad (2.8)$$

ただし、 $\varepsilon_{\mathbf{p}} = p^2/(2m)$  は 1 粒子の運動エネルギー、 $p_c$  は運動量のカットオフである.

(2.5) 式において、 $h_{\text{so}}^{\sigma, \sigma'}$  は、反対称スピン軌道相互作用であり、 $\hat{h}_{\text{so}} = \{h_{\text{so}}^{\sigma, \sigma'}\}$  のように行列で表すと [98, 99],

$$\hat{h}_{\text{so}} = \sum_{i,j} \hat{p}_i \lambda_{i,j} \hat{\sigma}_j. \quad (2.9)$$

$\hat{\lambda} = \{\lambda_{i,j}\}$  ( $i, j = x, y, z$ ) は  $3 \times 3$  行列で、スピン軌道相互作用の結合強度を表す. 一般には非対角成分を含んでもよいが、本論文では簡単のため、 $\hat{\lambda} = \text{diag}[\lambda_{\perp}, \lambda_{\perp}, \lambda_z]$  の場合のみ考える. この時 (2.9) 式は、

$$\hat{h}_{\text{so}} = \lambda_{\perp} (\hat{p}_x \hat{\sigma}_x + \hat{p}_y \hat{\sigma}_y) + \lambda_z \hat{p}_z \hat{\sigma}_z. \quad (2.10)$$

ここで、 $\lambda_{\perp}, \lambda_z \geq 0$  としても一般性を失わない. (2.10) 式はあらゆる反対称スピン軌道相互作用のタイプを記述できていないが、近年冷却原子気体系で議論されている典型的なスピン軌道相互作用のいくつかは網羅できている [85, 86]. 例えば、いわゆる Rashba 型のス



ピン軌道相互作用 [87]

$$H_{\text{Rashba}} = \lambda_{\text{Rashba}} \sum_{\mathbf{p}} [p_x \hat{\sigma}_y^{\alpha, \alpha'} - p_y \hat{\sigma}_x^{\alpha, \alpha'}] c_{\mathbf{p}, \alpha}^\dagger c_{\mathbf{p}, \alpha'}, \quad (2.11)$$

は, (2.10) 式において  $\lambda_z = 0$  とし, かつ運動量空間で  $p_z$  軸周りに  $\pi/2$  だけ回転させることで得られる. また,  $h_{\text{so}} \propto \hat{p}_x \hat{\sigma}_y$  という形の 1 軸方向のスピン軌道相互作用は, 近年フェルミ気体系である  ${}^6\text{Li}$  [73] および  ${}^{40}\text{K}$  [74] において実現したが, これも, (2.10) 式において  $\lambda_\perp = 0$  に対して, 運動量空間で  $p_y$  軸周りに  $\pi/2$  回転させ,  $(\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$  空間において  $\hat{\sigma}_x$  軸周りに  $\pi/2$  回転させることで得られる.

ここで, Cooper 対と関係した補助場  $\Delta(x)$  (ボソン場) とその複素共役  $\Delta^*(x)$  を, Hubbard-Stratonovich 変換 [14] で導入する. この変換は, 次のような補助場の汎関数積分が満たす恒等変換である.

$$I = \int \mathcal{D}\Delta^* \mathcal{D}\Delta e^{-F_{\text{HS}}(\Delta, \Delta^*)}, \quad (2.12)$$

$$F_{\text{HS}}(\Delta, \Delta^*) = \int dx \frac{1}{U_s} [\Delta^*(x) - U_s \bar{\Psi}_\uparrow(x) \bar{\Psi}_\downarrow(x)] [\Delta(x) - U_s \Psi_\downarrow(x) \Psi_\uparrow(x)]. \quad (2.13)$$

これを用いると, (2.1) 式におけるフェルミ粒子の自由度  $\Psi_\sigma(x)$  および  $\bar{\Psi}_\sigma(x)$  に対し汎関数積分を実行でき, 次式を得る [14, 91].

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\Delta^* \mathcal{D}\Delta e^{-S_{\text{eff}}(\Delta, \Delta^*)}. \quad (2.14)$$

ここで作用  $S_{\text{eff}}(\Delta, \Delta^*)$  は

$$S_{\text{eff}}(\Delta, \Delta^*) = \int dx \frac{|\Delta(x)|^2}{U_s} - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln[-\hat{G}^{-1}]. \quad (2.15)$$

(2.15) 式において,  $\text{Tr}$  は虚時間  $\tau$  と空間  $\mathbf{r}$  に関するトレースである. また,

$$\hat{G}^{-1}(x, x') = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial \tau} - \left[ \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \mu \right] - \hat{h}_{\text{so}} & i\hat{\sigma}_y \Delta(x) \\ -i\hat{\sigma}_y \Delta^*(x) & -\frac{\partial}{\partial \tau} + \left[ \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \mu \right] - \hat{h}_{\text{so}}^* \end{pmatrix} \delta(x - x') \quad (2.16)$$

は 4 成分南部表示 [92, 93]

$$\hat{\Psi}(x) = \begin{pmatrix} \Psi_\uparrow(x) \\ \Psi_\downarrow(x) \\ \Psi_\uparrow^\dagger(x) \\ \Psi_\downarrow^\dagger(x) \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

における,  $4 \times 4$  行列の一粒子 Green 関数

$$\hat{G}(x, x') = -\langle T_\tau \{ \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}^\dagger(x') \} \rangle \quad (2.18)$$

の逆行列である. ここで  $T_\tau$  は虚時間順序積である. ボソン場  $\Delta(x)$  を, 鞍点での値とそのまわりの揺らぎの成分に分解し, 後者に対して摂動展開することを考える.  $\Delta(x) = \Delta_s + \delta\Delta(x)$  に対し,  $\hat{G}^{-1} = \hat{G}_0^{-1} - \Sigma$ ,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & i\sigma_y \delta\Delta(x) \\ -i\sigma_y \delta\Delta^*(x) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

とすると,

$$\text{Tr} \ln[-\hat{G}^{-1}] = \text{Tr} \ln[-\hat{G}_0^{-1}] + \text{Tr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (\hat{G}_0 \Sigma)^n. \quad (2.20)$$

これを (2.15) 式に代入すると

$$S_{\text{eff}}(\Delta, \Delta^*) = \int dx \frac{|\Delta(x)|^2}{U_s} - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln[-\hat{G}_0^{-1}] - \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (\hat{G}_0 \Sigma)^n \right]. \quad (2.21)$$

BCS-Leggett 理論 [10–12] は, ここで用いた汎関数理論による定式化で揺らぎを表す  $\delta\Delta(x)$  を含む項を無視し, 鞍点近似を行うことで得られる. (2.21) 式の作用に対する分配関数  $\mathcal{Z}$  に対し, 鞍点条件は

$$0 = \left( \frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta \Delta^*(x)} \right)_{\Delta(x)=\Delta^*(x)=\Delta_s} = \frac{\Delta_s}{U_s} + \frac{1}{4\beta} \sum_{\mathbf{p}, \omega_n} \text{Tr} \left[ [\hat{\rho}_y + i\hat{\rho}_x] \hat{\sigma}_y \hat{G}^{\text{MF}}(\mathbf{p}, i\omega_n) \right], \quad (2.22)$$

であり, これによる鞍点解を  $\Delta_s$  と書く. (2.22) 式において,  $\hat{\rho}_j$  ( $j = x, y, z$ ) は粒子-正孔空間に作用する Pauli 行列を表している. (一方で  $\hat{\sigma}_j$  ( $j = x, y, z$ ) は (擬) スピン空間に作用する Pauli 行列.) (2.22) 式において,  $\hat{G}^{\text{MF}}(\mathbf{p}, i\omega_n)$  は Fourier 変換された BCS 平均場近似の Green 関数にスピン軌道相互作用の効果が加わったもので,

$$\begin{aligned} \hat{G}^{\text{MF}}(\mathbf{p}, i\omega_n) &= \frac{1}{i\omega_n - [\xi_{\mathbf{p}} + \mathbf{p}_\lambda \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}] \hat{\rho}_z - \hat{\rho}_y \hat{\sigma}_y \Delta_s} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=\pm} \frac{i\omega_n + [\xi_{\mathbf{p}} + \mathbf{p}_\lambda \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}] \hat{\rho}_z + \Delta_s \hat{\rho}_y \hat{\sigma}_y}{\omega_n^2 + (E_{\mathbf{p}}^\alpha)^2} \left[ \mathbf{1} + \alpha \frac{\mathbf{p}_\lambda \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}}{|\mathbf{p}_\lambda|} \right]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

$\xi_{\mathbf{p}} = \varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu = p^2/(2m) - \mu$  はフェルミ粒子の化学ポテンシャル  $\mu$  から測った運動エネルギーであり,  $\xi_{\mathbf{p}}^\alpha = \xi_{\mathbf{p}} + \alpha|\mathbf{p}_\lambda|$ , および,  $\mathbf{p}_\lambda = (\lambda_\perp p_x, \lambda_\perp p_y, \lambda_z p_z)$  である. (2.23) 式 2 行目の  $E_{\mathbf{p}}^\alpha = \sqrt{(\xi_{\mathbf{p}}^\alpha)^2 + \Delta_s^2}$  は, 1 粒子の Bogoliubov 準粒子励起である. また,  $\hat{\boldsymbol{\tau}} = (\hat{\rho}_z \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\rho}_z \hat{\sigma}_z)$  は 4 成分南部表示 [92, 93] におけるスピン演算子を表している. (2.22) 式の松原周波数の和を実行すると, スピン軌道相互作用の効果を含む BCS ギャップ方程式が得られる. 特に

$T = 0$  では,

$$1 = \frac{U_s}{2} \sum_{\mathbf{p}, \alpha=\pm} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}^{\alpha}}. \quad (2.24)$$

通常の BCS 理論同様, (2.24) 式はカットオフがないと紫外発散するが, この問題はスピン軌道相互作用がない時同様  $s$  波散乱長に発散を繰り込むことで除くことができる [11, 14].

$$1 = -\frac{4\pi a_s}{m} \sum_{\mathbf{p}} \left[ \frac{1}{2} \sum_{\alpha=\pm} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}^{\alpha}} - \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{p}}} \right]. \quad (2.25)$$

BCS-BEC クロスオーバー現象では, 引力相互作用が強くなるにつれ, 化学ポテンシャルがフェルミエネルギーからずれ, 強結合領域では負になることが知られている. BCS-Leggett 理論ではこの強結合効果は, 「繰り込まれたギャップ方程式」(2.25) 式と, フェルミ原子の全粒子数  $N$  に対する粒子数方程式を連立して解くことで取り入れられる. 粒子数方程式は, (2.21) 式の作用に対し,  $\Delta(x) = \Delta^*(x) = \Delta_s$  として右辺第 2 項までを残し, BCS 平均場近似の熱力学ポテンシャル  $\Omega_{\text{MF}} = TS_{\text{eff}}(\Delta(x) = \Delta_s, \Delta^*(x) = \Delta_s)$  から, 熱力学関係式を用いることで次のように得られる.

$$\begin{aligned} N &= -\frac{\partial \Omega_{\text{MF}}}{\partial \mu} = \frac{1}{2\beta} \sum_{\mathbf{p}, \omega_n} \text{Tr} \left[ \rho_z \hat{G}^{\text{MF}}(\mathbf{p}, i\omega_n) e^{i\rho_z \omega_n \delta} \right] \\ &= \sum_{\mathbf{p}} \left[ 1 - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=\pm} \frac{\xi_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{E_{\mathbf{p}}^{\alpha}} \right]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

(2.26) 式において,  $\delta$  は無限小の正数であり, 1 行目の最後の等式の指数関数は収束因子である. ギャップ方程式 (2.25) と粒子数方程式 (2.26) を自己無撞着に解くことで,  $T = 0$  の超流動状態における  $\Delta_s$  と  $\mu$  が求まる.

本研究では BCS-Leggett 理論の枠組みでスピン軌道相互作用により誘起される  $p$  波の対振幅を計算する. 2 原子の合成 (擬) スピンとその  $z$  成分を  $S, S_z$  とすると,  $(S, S_z)$  のスピン状態にある対振幅  $\Phi(\mathbf{p}, S, S_z)$  は, (2.18) 式の Green 関数の虚時間  $\tau$  を残した Fourier 変換により得られる  $4 \times 4$  行列の Green 関数

$$\hat{G}^{\text{MF}}(\mathbf{p}, \tau) = -\langle \text{T}_{\tau} \left\{ \begin{pmatrix} c_{\mathbf{p}, \uparrow}(\tau) \\ c_{\mathbf{p}, \downarrow}(\tau) \\ c_{-\mathbf{p}, \uparrow}^{\dagger}(\tau) \\ c_{-\mathbf{p}, \downarrow}^{\dagger}(\tau) \end{pmatrix} (c_{\mathbf{p}, \uparrow}^{\dagger}(0), c_{\mathbf{p}, \downarrow}^{\dagger}(0), c_{-\mathbf{p}, \uparrow}(0), c_{-\mathbf{p}, \downarrow}(0)) \right\} \rangle. \quad (2.27)$$

を用いて次のように与えられる.

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{p}, 0, 0) &= \frac{1}{2} \left[ \langle c_{\mathbf{p}, \uparrow} c_{-\mathbf{p}, \downarrow} \rangle - \langle c_{\mathbf{p}, \downarrow} c_{-\mathbf{p}, \uparrow} \rangle \right] = -\frac{1}{2} \left[ \hat{G}_{14}^{\text{MF}}(\mathbf{p}, \tau = 0) - \hat{G}_{23}^{\text{MF}}(\mathbf{p}, \tau = 0) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=\pm} \frac{\Delta_s}{2E_p^\alpha},\end{aligned}\quad (2.28)$$

$$\Phi(\mathbf{p}, 1, 1) = \langle c_{\mathbf{p}, \uparrow} c_{-\mathbf{p}, \uparrow} \rangle = -\hat{G}_{13}^{\text{MF}}(\mathbf{p}, \tau = 0) = \frac{\lambda_\perp}{2} \frac{p_x - ip_y}{|\mathbf{p}_\perp|} \sum_{\alpha=\pm} \frac{\alpha \Delta_s}{2E_p^\alpha},\quad (2.29)$$

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{p}, 1, 0) &= \frac{1}{2} \left[ \langle c_{\mathbf{p}, \uparrow} c_{-\mathbf{p}, \downarrow} \rangle + \langle c_{\mathbf{p}, \downarrow} c_{-\mathbf{p}, \uparrow} \rangle \right] = -\frac{1}{2} \left[ \hat{G}_{14}^{\text{MF}}(\mathbf{p}, \tau = 0) + \hat{G}_{23}^{\text{MF}}(\mathbf{p}, \tau = 0) \right] \\ &= -\frac{\lambda_z}{2} \frac{p_z}{|\mathbf{p}_\perp|} \sum_{\alpha=\pm} \frac{\alpha \Delta_s}{2E_p^\alpha},\end{aligned}\quad (2.30)$$

$$\Phi(\mathbf{p}, 1, -1) = \langle c_{\mathbf{p}, \downarrow} c_{-\mathbf{p}, \downarrow} \rangle = -\hat{G}_{24}^{\text{MF}}(\mathbf{p}, \tau = 0) = -\frac{\lambda_\perp}{2} \frac{p_x + ip_y}{|\mathbf{p}_\perp|} \sum_{\alpha=\pm} \frac{\alpha \Delta_s}{2E_p^\alpha}.\quad (2.31)$$

上式において (2.28) 式の  $\Phi(\mathbf{p}, S = 0, S_z = 0)$  は  $s$  波超流動に通常存在するスピン・シングレットの対振幅であり,  $s$  波超流動秩序パラメータと

$$\Delta_s = -U_s \sum_{\mathbf{p}} \Phi(\mathbf{p}, 0, 0)\quad (2.32)$$

のように関係付けられる. 実際, (2.28) 式を (2.32) 式に代入するとギャップ方程式 (2.24) が再現される. ( $\Delta_s$  が  $s$  波対振幅  $\Phi(\mathbf{p}, S = 0, S_z = 0)$  と引力相互作用  $U_s$  の「積」で与えられることに注意.) 他方, (2.29)-(2.31) 式の  $\Phi(\mathbf{p}, S = 1, S_z = \pm 1, 0)$  はスピン・トリプレットの対振幅を表す. 各式の右辺の係数から分かるように, これらは  $p$  波の対振幅成分を含んでいる. 今の場合, スピン・シングレットとスピン・トリプレットの混成は, スピン軌道相互作用により導入された「空間反転対称性 (パリティ) の破れ」により生じており, 近年, 空間反転対称性を破った超伝導体においてこのような混成効果が報告されている [61, 62, 88].

今, ある時刻 ( $t = 0$  にとる) において,  $s$  波相互作用 (ハミルトニアンは (2.5) 式の右辺最終項を Fourier 変換したもの) を突然  $p$  波のものに変更する. このような操作は, 前章で述べたように, Feshbach 共鳴磁場を  $s$  波の共鳴点から  $p$  波の共鳴点へと変更することで実現する. ここで,  $t \geq 0$  は次のハミルトニアンで表されるとする.

$$H_{p\text{-wave}} = -U_p \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{q}} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' c_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2, \sigma}^\dagger c_{-\mathbf{p}+\mathbf{q}/2, \sigma'}^\dagger c_{-\mathbf{p}'+\mathbf{q}/2, \sigma'} c_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}/2, \sigma}.\quad (2.33)$$

相互作用の変更後,  $s$  波相互作用  $U_s$  はゼロになるため, ただちに  $s$  波超流動秩序パラメータ  $\Delta_s$  も消失する. 一方,  $p$  波超流動秩序パラメータ  $\Delta_p(\mathbf{p}, t \geq 0)$  は突然有限になる. すると定義により, 系は  $p$  波超流動状態になる. 特に, 相互作用の変更操作直後 ( $t = +0$ ) の  $p$  波超流動秩序パラメータは, 印加された  $p$  波原子間相互作用  $U_p$  と, 既に  $s$  波超流動状態

において用意された  $p$  波対振幅  $\Phi(\mathbf{p}, S = 1, S_z)|_{t=-\delta}$  との積の運動量和により与えられる。例えば  $\lambda_{\perp} = 0$  かつ  $\lambda_z \neq 0$  のとき、

$$\Delta_p(\mathbf{p}, S_z = 0, t = +0) = -U_p p_z \sum_{\mathbf{p}'} p'_z \Phi(\mathbf{p}', 1, 0)|_{t=-\delta} \propto p_z. \quad (2.34)$$

このシナリオで、本当に  $t > 0$  でも  $p$  波超流動が保持できるのかどうかの理論的な検証は、次章で行う。

ここで、(2.28)-(2.31) 式で与えられる対振幅  $\Phi(\mathbf{p}, S, S_z)$  は、 $s$  波超流動秩序パラメータ  $\Delta_s$  に比例しているが、 $t \geq 0$  で  $\Delta_s$  が消滅してもただちにゼロになるわけではない。例えば、近接効果 [89, 90] で知られるように、対振幅は、相互作用のない常流動金属中へ侵入し、熱揺らぎや不純物散乱などの外的な摂動によって破壊されるまで存在し続ける。今の場合、対振幅 (2.28)-(2.31) 式は、原子間相互作用を  $s$  波対称性のものから  $p$  波対称性のものへと変更した後の  $\Phi(\mathbf{p}, S, S_z, t \geq 0)$  の時間発展を考える際の「初期状態」とみなすべきである。

対振幅の大きさを評価する 1 つの指標として、凝縮粒子数 [12, 94–97] と呼ばれる物理量が便利である。これは、対振幅と密接に関係した量であり、物理的には Bose-Einstein 凝縮した Cooper 対の数を表している。加えて、この量は、実験的に、極低温フェルミ原子気体における超流動転移を検出するために広く用いられている「観測可能量」である [3, 4]。

凝縮粒子数  $N_c$  は、2 体の密度行列

$$\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_2, \mathbf{r}'_1) = \langle \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}_1) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}_2) \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}'_2) \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}'_1) \rangle \quad (2.35)$$

の最大固有値として定義され [12, 94–97]、Bose 凝縮している Cooper 対の数を与える。今、1 つの固有状態に  $\mathcal{O}(N)$  の Cooper 対が凝縮し、その他の固有状態は  $\mathcal{O}(1)$  しか占有されていない場合、固有値  $N_c$  に対する  $\rho$  の規格化された 2 体の固有関数  $\phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  を用いると、 $\mathcal{O}(1)$  の寄与は  $\mathcal{O}(N)$  の寄与に比べて無視できるとして密度行列は次のように表される。

$$\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_2, \mathbf{r}'_1) = N_c \phi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \phi_0^*(\mathbf{r}'_2, \mathbf{r}'_1). \quad (2.36)$$

超流動状態で非対角長距離秩序が存在する場合 ( $\langle \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}_1) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}_2) \rangle \neq 0$ )、 $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  と  $(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2)$  とが充分離れていても  $\rho$  は有限の値をとり

$$\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_2, \mathbf{r}'_1) = \langle \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}_1) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}_2) \rangle \langle \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}'_2) \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}'_1) \rangle \neq 0. \quad (2.37)$$

(2.36), (2.37) 式より、 $N_c$  は Cooper 対波動関数  $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}_1) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}_2) \rangle$  ( $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  の関

数)の規格化因子とみなせる。つまり,

$$N_c = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 |\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2. \quad (2.38)$$

BCS-Leggett 理論 (平均場近似) の場合 (2.38) 式は

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{\mathbf{p}} \langle c_{\mathbf{p},\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{p},\downarrow}^\dagger \rangle e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}. \quad (2.39)$$

粒子数  $N$  のフェルミ気体では, 超流動転移温度以下で形成される 2 粒子状態 (Cooper 対状態) の最大個数は,  $N/2$  であることから, 無次元化された凝縮粒子数  $n_c$  は,

$$n_c = \frac{N_c}{N} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{p}} |\langle c_{\mathbf{p},\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{p},\downarrow}^\dagger \rangle|^2 = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{p}} |\langle c_{-\mathbf{p},\downarrow} c_{\mathbf{p},\uparrow} \rangle|^2. \quad (2.40)$$

これは, 超流動状態における凝縮粒子数の割合 ( $0 \leq n_c \leq 1/2$ ) を表す.

スピン軌道相互作用がある場合, 全凝縮粒子数  $N_c^t$  が次のように与えられる.

$$\begin{aligned} N_c^t &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}, \sigma, \sigma'} |\langle c_{\mathbf{p},\sigma} c_{-\mathbf{p},\sigma'} \rangle|^2 \\ &= N_c(S=0, S_z=0) + \sum_{S_z=-1}^1 N_c(S=1, S_z). \end{aligned} \quad (2.41)$$

ここで,

$$\begin{aligned} N_c(S=0, S_z=0) &= \sum_{\mathbf{p}} |\Phi(\mathbf{p}, 0, 0)|^2 \\ &= \frac{\Delta_s^2}{16} \sum_{\mathbf{p}} \left( \sum_{\alpha=\pm} \frac{1}{E_{\mathbf{p}}^\alpha} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.42)$$

は  $s$  波の Cooper 対 ( $s$  波対振幅) に対する凝縮粒子数である。また, (2.41) 式は,  $p$  波対振幅に対する成分  $N_c(S=1, S_z=\pm 1, 0)$  も含んでおり, それは次のように与えられる.

$$N_c(1, 1) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} |\Phi(\mathbf{p}, 1, 1)|^2 = \frac{\Delta_s^2}{32} \sum_{\mathbf{p}} \frac{\lambda_\perp^2 (p_x^2 + p_y^2)}{|\mathbf{p}_\lambda|^2} \left( \sum_{\alpha=\pm} \frac{\alpha}{E_{\mathbf{p}}^\alpha} \right)^2, \quad (2.43)$$

$$N_c(1, 0) = \sum_{\mathbf{p}} |\Phi(\mathbf{p}, 1, 0)|^2 = \frac{\Delta_s^2}{16} \sum_{\mathbf{p}} \frac{\lambda_z^2 p_z^2}{|\mathbf{p}_\lambda|^2} \left( \sum_{\alpha=\pm} \frac{\alpha}{E_{\mathbf{p}}^\alpha} \right)^2, \quad (2.44)$$

$$N_c(1, -1) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} |\Phi(\mathbf{p}, 1, -1)|^2 = \frac{\Delta_s^2}{32} \sum_{\mathbf{p}} \frac{\lambda_\perp^2 (p_x^2 + p_y^2)}{|\mathbf{p}_\lambda|^2} \left( \sum_{\alpha=\pm} \frac{\alpha}{E_{\mathbf{p}}^\alpha} \right)^2. \quad (2.45)$$

(2.42)-(2.45) 式を (2.41) 式に代入すると,

$$N_c^t = \frac{\Delta_s^2}{8} \sum_{\mathbf{p}, \alpha=\pm} \left( \frac{1}{E_{\mathbf{p}}^{\alpha}} \right)^2. \quad (2.46)$$

BCS-BEC クロスオーバー領域に対して, スピン軌道相互作用の  $T_c$  への影響を議論するために, Nozières と Schmitt-Rink による強結合理論 (NSR 理論) [13] をスピン軌道相互作用がある場合に拡張する. このとき  $\Delta_s = 0$  である. 汎関数経路積分法において, NSR 理論の枠組みで  $T_c$  を決定するための方程式は, 鞍点条件  $\delta S_{\text{eff}}/\delta \Delta^*(x)|_{\Delta(x)=\Delta^*(x)=0} = 0$  [9] により, 得られる. 相互作用の紫外発散の繰り込み後, 次のように表される.

$$1 = -\frac{4\pi a_s}{m} \sum_{\mathbf{p}} \left[ \frac{1}{2} \sum_{\alpha=\pm} \frac{1}{2\xi_{\mathbf{p}}^{\alpha}} \tanh \frac{\xi_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{2T} - \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{p}}} \right]. \quad (2.47)$$

$T_c$  の決定には,  $T = 0$  の場合と同様, (2.47) 式に加え, 粒子数方程式を同時に解く必要がある. それらを自己無撞着に解き,  $T_c$  と  $\mu$  が求まる. ガウス揺らぎのレベルまで対形成揺らぎを取り込んだ NSR 理論における粒子数方程式は, 熱力学関係式  $N = -\partial\Omega_{\text{NSR}}/\partial\mu$  から直ちに導かれる. NSR 理論における熱力学ポテンシャル  $\Omega_{\text{NSR}}$  は, (2.21) 式で表される有効作用  $S_{\text{eff}}$  を  $n = 2$  まで残し, 補助場  $\Delta(x)$ , および  $\Delta^*(x)$  に対し汎関数積分を実行することで得られる. 結果は,

$$N = N_{\text{free}} - T \frac{\partial}{\partial\mu} \sum_{\mathbf{q}, \nu_n} \ln \left[ 1 + \frac{4\pi a_s}{m} \left[ \Pi(\mathbf{q}, i\nu_n) - \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{p}}} \right] \right] e^{i\nu_n \delta}. \quad (2.48)$$

ここで,

$$N_{\text{free}} = \sum_{\mathbf{p}, \alpha=\pm} f(\xi_{\mathbf{p}}^{\alpha}) \quad (2.49)$$

は原子間相互作用  $U_s$  のないフェルミ原子の粒子数を表し,  $f(x)$  はフェルミ分布関数である. また,

$$\Pi(\mathbf{q}, i\nu_n) = \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{p}, \alpha, \alpha'=\pm} \frac{1 - f(\xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}^{\alpha}) - f(\xi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2}^{\alpha'})}{\xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}^{\alpha} + \xi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2}^{\alpha'} - i\nu_n} \left[ 1 + \alpha\alpha' \frac{(\mathbf{p}_{\lambda} + \mathbf{q}_{\lambda}/2) \cdot (\mathbf{p}_{\lambda} - \mathbf{q}_{\lambda}/2)}{|\mathbf{p}_{\lambda} + \mathbf{q}_{\lambda}/2| |\mathbf{p}_{\lambda} - \mathbf{q}_{\lambda}/2|} \right] \quad (2.50)$$

は最低次の対相関関数である ( $\nu_n$  はボソンの松原周波数).

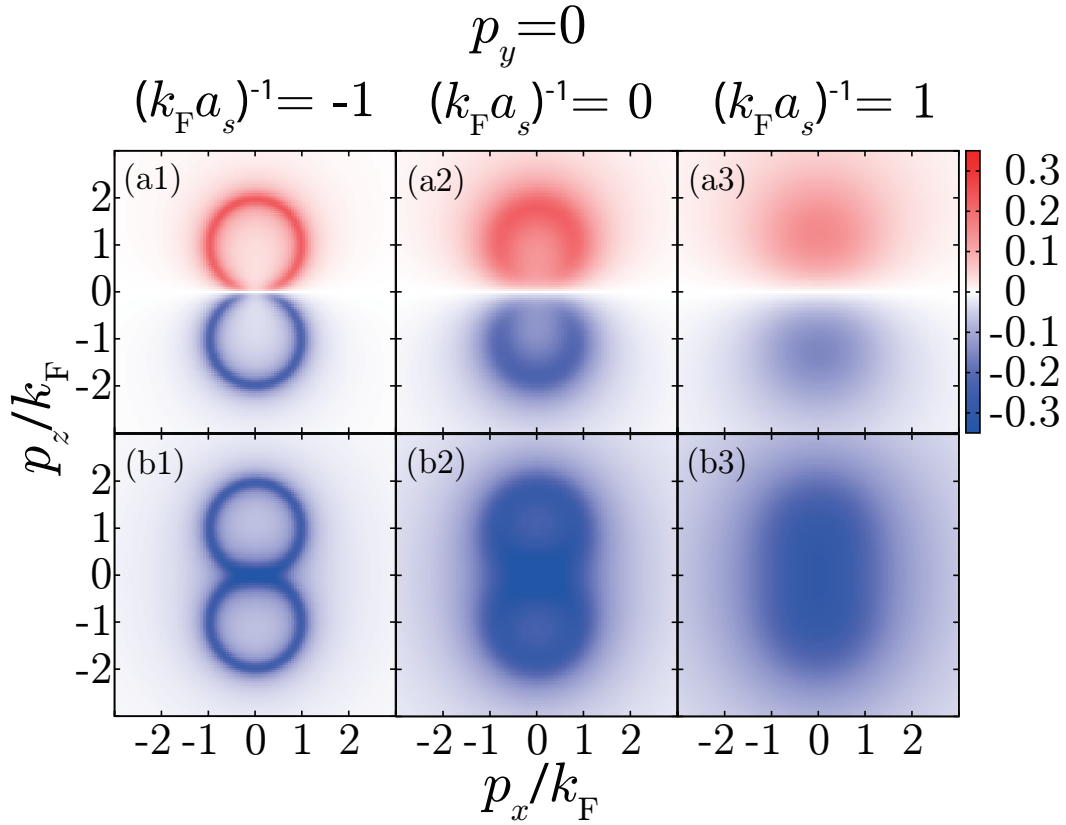


図 2.1: 1 方向にはたらくスピン軌道相互作用 ( $\lambda_{\perp} = 0$ ,  $\lambda_z/v_F = 1$ ) がある  $s$  波超流動中に誘起される対振幅  $\Phi(\mathbf{p}, S, S_z)$ . 上図, 下図は, それぞれ,  $p$  波対振幅  $\Phi(\mathbf{p}, S = 1, S_z = 0)$ , および  $s$  波対振幅  $\Phi(\mathbf{p}, S = 0, S_z = 0)$ .

## 2.2 反対称スピン軌道相互作用により誘起される $p$ 波対振幅

### 2.2.1 1 方向にはたらくスピン軌道相互作用の場合 ( $\lambda_{\perp} = 0$ , $\lambda_z \neq 0$ )

図 2.1 は,  $T = 0$  で,  $\lambda_{\perp} = 0$ ,  $\lambda_z \neq 0$  という「1 方向にはたらく反対称スピン軌道相互作用」を有する  $s$  波超流動状態に存在する対振幅  $\Phi(\mathbf{p}, S, S_z)$  である. 図 2.1(a1)-(a3) は  $p$  波対振幅  $\Phi(\mathbf{p}, S = 1, S_z = 0)$  であり, (b1)-(b3) は  $s$  波対振幅を表している.  $s$  波対振幅が運動量の反転操作 ( $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ ) に対し符号を変えないが,  $p$  波対振幅  $\Phi(\mathbf{p}, S = 1, S_z = 0)$  は符号を変え, (2.30) 式で予想されるように  $p_z$  波対称性を持っていることが分かる (図 2.1(a1)-(a3) を参照). 図 2.1 から,  $p$  波相互作用を使わなくともスピン軌道相互作用と  $s$  波超流動を用いることで  $p$  波対振幅を作ることができることが分かる.

弱結合 BCS 側である図 2.1(a1), および (b1) において,  $s$  波対振幅  $\Phi(\mathbf{p}, S = 0, S_z = 0)$ ,  $p$  波対振幅  $\Phi(\mathbf{p}, S = 1, S_z = \pm 1, 0)$  とともに 2 つの円の周辺で大きな値をとっている. これは, スピン軌道相互作用 ( $\lambda_{\perp} = 0$ ,  $\lambda_z \neq 0$ ) を有するフェルミ原子気体 ( $U_s = 0$ ) の 1 粒子分



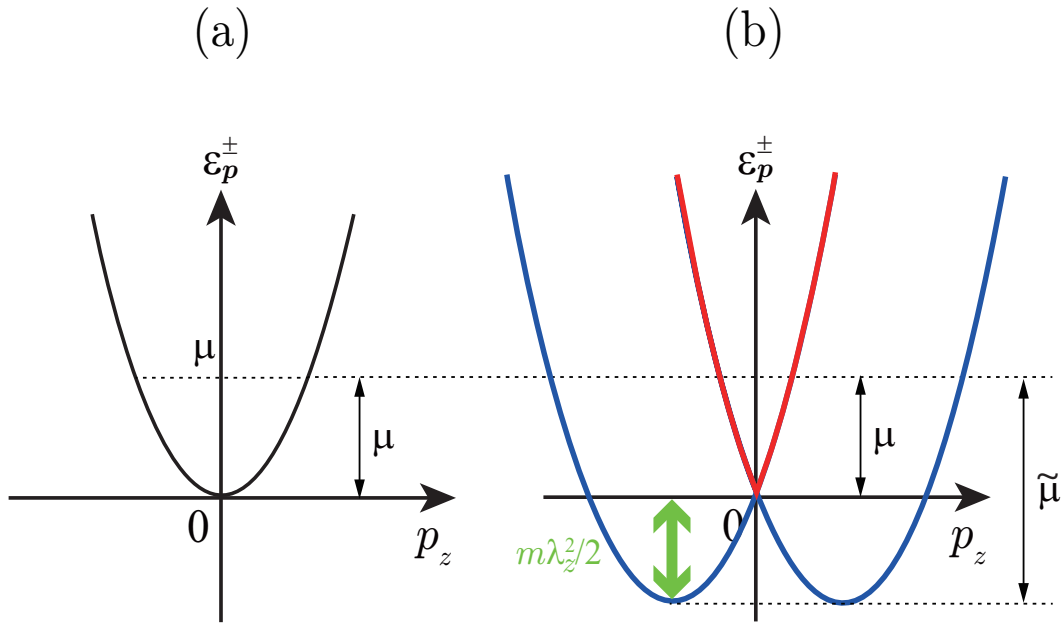


図 2.2: (a) スピン軌道相互作用がない場合, と (b) ある場合 ( $\lambda_{\perp} = 0, \lambda_z \neq 0$ ) における, 自由フェルミ気体のバンド構造の模式図.  $\tilde{\mu} = \mu + m\lambda_z^2/2$  は (b) においてバンドの底から測ったフェルミ準位のエネルギーである.

散が次のような 2 つのバンドを持つためである.

$$\xi_{\mathbf{p}}^{\pm} = \frac{p_{\perp}^2}{2m} + \frac{(p_z \pm m\lambda_z)^2}{2m} - \tilde{\mu}_z. \quad (2.51)$$

このとき,  $p_{\perp}^2 = p_x^2 + p_y^2$  であり,  $\tilde{\mu}_z = \mu + m\lambda_z^2/2$  は有効的なフェルミ原子の化学ポテンシャルである.  $\tilde{\mu}_z$  は, 図 2.2(b) に示すように, バンドの底から測ったフェルミ面でのエネルギーを表す. (2.51) 式で表される 2 つのバンドから,  $\mathbf{p} = (0, 0, \pm m\lambda_z)$  を中心とする半径  $k_F$  (スピン軌道相互作用のないときのフェルミ波数) の 2 つのフェルミ面が得られる. 弱結合 BCS 領域 (図 2.1(a1),(b1)) では, これら 2 つのフェルミ面周辺のフェルミ原子が Cooper 対形成に寄与するため, それらの周りで対振幅も大きくなる. 原子間引力相互作用が強くなるにつれ, 原子対の形成に寄与する領域が広がるため, 図 2.1(a2) と (b2) に見えるように, 「フェルミ円」がぼやけてくる. 強結合 BEC 領域では, 有効的なフェルミ原子の化学ポテンシャル  $\tilde{\mu}_z$  が負になるため (図 2.3(c) を参照), フェルミ面は存在しない. その結果, 図 2.1(a3) や (b3) では, それまで見えていた「円構造」が見られない.

誘起された  $p$  波対振幅を定量的に評価するために, (2.42)-(2.45) 式で与えられる  $T = 0$  における凝縮粒子数  $N_c(S, S_z)$  を考える. 弱結合 BCS 側 ( $(k_F a_s)^{-1} \lesssim -1$ ) では, 図 2.3(a) から分かるように,  $p$  波成分の凝縮粒子数  $N_c(S = 1, S_z = 0)$  は, 原子間引力相互作用 ( $s$  波) の増加とともに増大する. これは, 図 2.3(b) に示すように,  $s$  波引力相互作用が強くなると  $s$  波超流動秩序パラメータの大きさも増加することを反映している. ただし, ( $\lambda_{\perp} = 0, \lambda_z \neq 0$ )

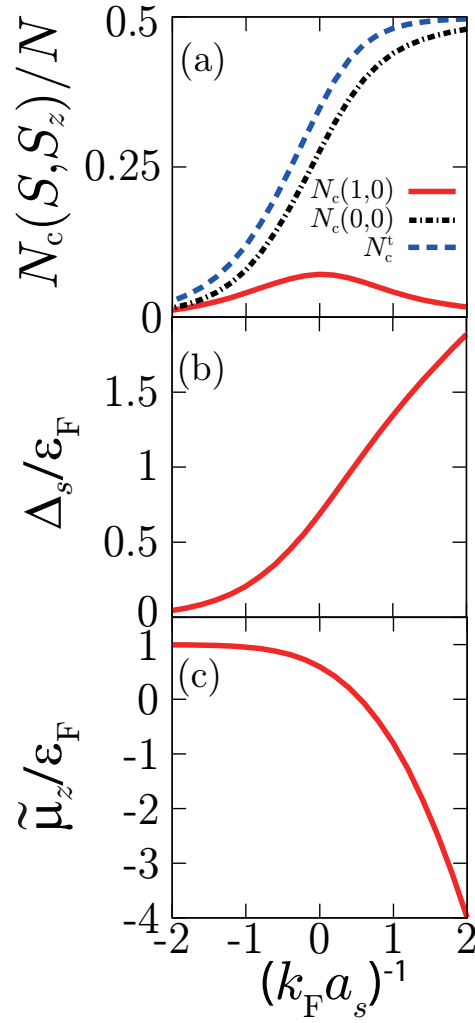


図 2.3: (a)  $T = 0$ における, 1方向にはたらく ( $\lambda_z/v_F = 1$ かつ $\lambda_\perp = 0$ ) スピン軌道相互作用を有する  $s$ 波超流動フェルミ原子気体中の凝縮粒子数  $N_c(S, S_z)$ . このとき,  $N_c(1, \pm 1) = 0$  である.  $N_c^t$  は (2.41) 式にある全凝縮粒子数. (b)  $s$ 波超流動秩序パラメータ  $\Delta_s$ . (c) 有効的なフェルミ原子の化学ポテンシャル  $\tilde{\mu}_z = \mu + m\lambda_z^2/2$ .

の場合, (2.29)-(2.31) 式から分かるように, ( $S = 1, S_z = \pm 1$ ) 成分の対振幅は現れず, 凝縮粒子数もゼロである ((2.43)-(2.45) 式を参照). しかし, 強結合 BEC 側 ( $(k_F a_s)^{-1} \gtrsim 1$ ) では,  $s$ 波成分の凝縮粒子数  $N_c(S = 0, S_z = 0)$  が原子間相互作用の増加とともに増え続ける一方, スピン・トリプレット成分  $N_c(S = 1, S_z = 0)$  は減少する. 実際強結合 BEC 領域では, ギャップ方程式 (2.25) および粒子数方程式 (2.26) の解が,

$$\Delta_s = \sqrt{\frac{16}{3\pi(k_F a_s)}} \epsilon_F, \quad (2.52)$$

$$\mu = -\frac{1}{2ma_s^2} - \frac{1}{2}m\lambda_z^2, \quad (2.53)$$

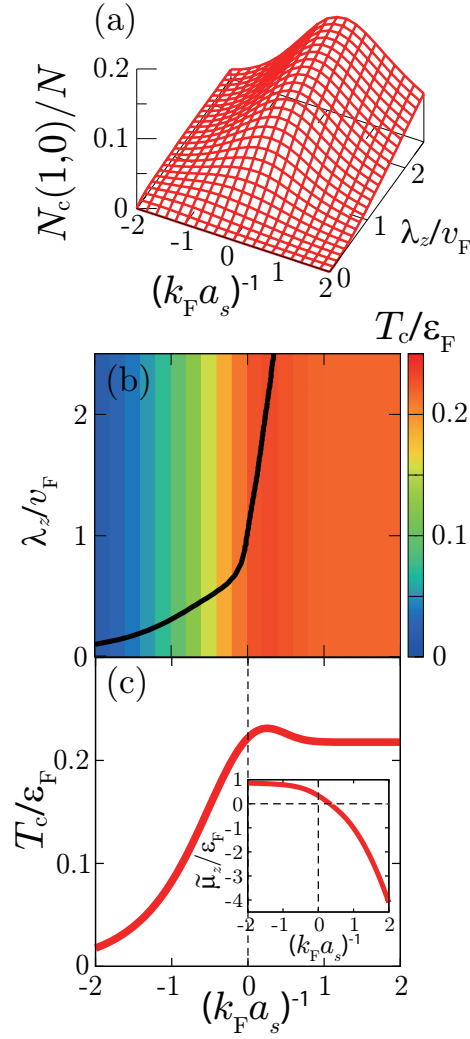


図 2.4: (a) 1 方向にはたらくスピン軌道相互作用 ( $\lambda_{\perp} = 0, \lambda_z \neq 0$ ) における,  $T = 0$  での  $p$  波成分の凝縮粒子数  $N_c(S = 1, S_z = 0)$ . (b) (a) の結果に見られる  $N_c(S = 1, S_z = 0)$  のピーク位置 (実線). 背景の強度分布は  $T_c$  を表す. (c)  $T_c$ . (c) の差し込み図は  $T_c$  における有効的なフェルミ原子の化学ポテンシャル  $\tilde{\mu}_z = \mu + m\lambda_z^2/2$ .

であることに注意すると, 凝縮粒子数は,

$$N_c(S = 0, S_z = 0) = \frac{N}{2} - N_c(S = 1, S_z = 0), \quad (2.54)$$

$$N_c(S = 1, S_z = 0) = \frac{N}{12} \left( \frac{\lambda_z}{v_F} \right)^2 (k_F a_s)^2. \quad (2.55)$$

と評価でき, 強結合 BEC 極限 ( $(k_F a_s)^{-1} \rightarrow \infty$ ) では, スピン軌道相互作用の影響は効かず,  $N/2$  個の  $s$  波対分子の凝縮のみとなる.

次に, 1 方向にはたらくスピン軌道相互作用の結合強度  $\lambda_z$  を強くしていく場合を考える. このとき,  $p$  波成分の凝縮粒子数  $N_c(S = 1, S_z = 0)$  は, 図 2.4(a) に示すように, 増加していく. 一方, 全凝縮粒子数  $N_c^t$  および  $s$  波超流動秩序パラメータ  $\Delta_s$  は  $\lambda_z$  依存性を有

さない。後者は、次のように確認される。  $\lambda_\perp = 0$  および  $\lambda_z \neq 0$  に対し、(2.25) 式と (2.26) 式を計算すると、スピン軌道相互作用のないときの  $s$  波フェルミ気体超流動に対する、よく知られた (スピン軌道相互作用を含まない) BCS-Leggett 理論の、ギャップ方程式および粒子数方程式と本質的に同じ方程式が得られる。

$$\begin{aligned} 1 &= -\frac{4\pi a_s}{m} \sum_{\mathbf{p}} \left[ \frac{1}{2\sqrt{\tilde{\xi}_{\mathbf{p}}^2 + \Delta_s^2}} - \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{p}}} \right], \\ N &= \sum_{\mathbf{p}} \left[ 1 - \frac{\tilde{\xi}_{\mathbf{p}}}{\sqrt{\tilde{\xi}_{\mathbf{p}}^2 + \Delta_s^2}} \right]. \end{aligned} \quad (2.56)$$

ただし  $\tilde{\xi}_{\mathbf{p}} = \varepsilon_{\mathbf{p}} - \tilde{\mu}_z$  であるが、有効的な化学ポテンシャル  $\tilde{\mu}_z$  と  $\Delta_s$  のセットで考える限り、スピン軌道相互作用の影響は頭には生じない。結果、(2.46) 式で表される全凝縮粒子数  $N_c^t$  にも  $\lambda_z$  依存性がなく、

$$\frac{N_c^t}{N} = \frac{\Delta_s^2}{4N} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\tilde{\xi}_{\mathbf{p}}^2 + \Delta_s^2} = \frac{3\pi\Delta_s}{16\sqrt{2}\varepsilon_F^{3/2}} \sqrt{\tilde{\mu}_z + \sqrt{\tilde{\mu}_z^2 + \Delta_s^2}}, \quad (2.57)$$

となる。ここで  $\varepsilon_F$  はスピン軌道相互作用のないときの自由フェルミ気体に対するフェルミエネルギーである。このため、与えられた相互作用強度  $(k_F a_s)^{-1}$  に対し、 $s$  波成分の凝縮粒子数  $N_c(S=0, S_z=0) = N_c^t - N_c(S=1, S_z=0)$  は、スピン軌道相互作用を強くすると、 $s$  波超流動秩序パラメータ  $\Delta_s$  が不変で残るにも関わらず、減少する。

上述のような、スピン軌道相互作用に依存しない物理量が現れる直感的な理由は、自由フェルミ原子 ( $U_s = 0$ ) の状態密度  $D_\sigma(\omega)$  が、今考えている 1 方向にはたらくスピン軌道相互作用 ( $\lambda_\perp = 0, \lambda_z \neq 0$ ) の場合には、 $\lambda_z$  に依らないためである。 $D_\sigma(\omega)$  は、(2.23) 式の Green 関数を  $\Delta_s = 0$  に対して解析接続  $i\omega_n \rightarrow \omega + i0+$  して、次のように得られる。

$$D_\uparrow(\omega) = -\frac{1}{\pi} \sum_{\mathbf{p}} \text{Im} \hat{G}_{11}^{\text{MF}}(\mathbf{p}, \omega + i0+) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}, \alpha=\pm} \delta(\omega - \xi_{\mathbf{p}}^\alpha) \quad (2.58)$$

$$= D_\downarrow(\omega) \left( = -\frac{1}{\pi} \sum_{\mathbf{p}} \text{Im} \hat{G}_{22}^{\text{MF}}(\mathbf{p}, \omega + i0+) \right). \quad (2.59)$$

(2.58) 式の最右辺を計算すると、

$$D_\sigma(\omega) \propto \sqrt{\omega + \tilde{\mu}_z} \quad (2.60)$$

となり、 $\lambda_z$  依存性がないことが示される。これは 2 方向以上にスピン軌道相互作用がはたらく場合には成立しない。(例えば次小節で議論する 2 方向にはたらくスピン軌道相互作用の場合、 $D_\sigma(\omega)$  はスピン軌道相互作用強度が強くなると、2 次元的な状態密度となる。)

図 2.4(a) から各相互作用強度に対し,  $p$  波成分の凝縮粒子数  $N_c(S = 1, S_z = 0)$  が最大となる  $\lambda_z$  をプロットすると, 図 2.4(b) の実線が得られる. 近年, この 1 方向に働くスピン軌道相互作用の結合強度として,  $0.5 \lesssim \lambda_z/v_F \lesssim 1$  が,  $^{40}\text{K}$  フェルミ気体系で実現している [74]. このことを念頭におき, 図 2.4(b) から,

$$(k_F a_s)^{-1} \simeq 0, \quad \lambda_z/v_F \simeq 1, \quad (2.61)$$

の領域が,  $p$  波対振幅を強く誘起するのに適していることがわかる. 例えば,  $(k_F a_s)^{-1} = 0$  かつ  $\lambda/v_F = 1$  では,

$$\frac{N_c(S = 1, S_z = 0)}{N} \simeq 0.07. \quad (2.62)$$

すなわち, この状況で,  $s$  波引力相互作用を (2.33) 式で表される  $p$  波相互作用へと Feshbach 共鳴を利用し急激に変更すれば, その直後は, (2.62) 式と等しい  $p$  波凝縮粒子数を持つ  $p$  波超流動状態が実現することが期待される.  $\Delta_p(\mathbf{p}, S_z = 0) \propto p_z$  を持つこの  $p$  波超流動状態は,  $^3\text{He}$  超流動の研究分野で, polar 相と呼ばれているものと同じ対称性を有している [109, 110]. スピン・トリプレット超流動でしばしば用いられる  $p$  波超流動秩序パラメータの表式を用いると [109–111], この秩序パラメータは次のように表すこともできる.

$$\hat{\Delta}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \Delta_p(\mathbf{p}, S_z = 1) & \Delta_p(\mathbf{p}, S_z = 0) \\ \Delta_p(\mathbf{p}, S_z = 0) & \Delta_p(\mathbf{p}, S_z = -1) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & p_z \\ p_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

ここで最後の表式では, Cooper 対の対称性に影響しない, 重要でない因子は無視した. 液体  $^3\text{He}$  超流動相において, この polar 状態は未だ実現されていないため, この対称性を有する  $p$  波超流動を研究するうえで, 1 方向にはたらくスピン軌道相互作用を有する  $s$  波フェルミ原子気体超流動は重要であることが分かる.

(2.61) 式に示した領域において, 実際に  $p$  波対振幅を用意するためには, その領域に対し,  $s$  波 (フェルミ原子気体) 超流動状態を実現しなければならない. このとき, フェルミ気体が  $s$  波超流動に転移する温度  $T_c$  ( $\Delta_s \neq 0$  ( $T \leq T_c$ ) となる温度) が実験的に到達可能である必要がある. これに関し, 今考えているスピン軌道相互作用 ( $\lambda_\perp = 0, \lambda_z \neq 0$ ) の場合,  $\Delta_s$  だけでなく,  $T_c$  も  $\lambda_z$  依存性がない. 事実,  $\lambda_\perp = 0$  および  $\lambda_z \neq 0$  のとき,  $T_c$  を決定する方程式 (2.47) 式から, 次のように,  $\lambda_z$  依存性が完全に取り除ける.

$$1 = -\frac{4\pi a_s}{m} \sum_{\mathbf{p}} \left[ \frac{1}{2\tilde{\xi}_{\mathbf{p}}} \tanh \frac{\tilde{\xi}_{\mathbf{p}}}{2T} - \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{p}}} \right]. \quad (2.64)$$

ここで  $\tilde{\xi}_{\mathbf{p}}$  は (2.56) 式直下に与えられる. 同様に, 粒子数方程式 (2.48) において, 原子間相互作用のない粒子数部分  $N_{\text{free}}$ , 対相関関数  $\Pi(\mathbf{q}, i\nu_n)$  とともに  $\lambda_z$  に依らない形式にそれぞれ

書き直すことができる.

$$N_{\text{free}} = 2 \sum_{\mathbf{p}} f(\tilde{\xi}_{\mathbf{p}}), \quad (2.65)$$

$$\Pi(\mathbf{q}, i\nu_n) = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1 - f(\tilde{\xi}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}) - f(\tilde{\xi}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2})}{\tilde{\xi}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2} + \tilde{\xi}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2} - i\nu_n}. \quad (2.66)$$

従って,  $\lambda_{\perp} = \lambda_z = 0$  とおいて, (2.47) 式および (2.48) 式を自己無撞着に解いて得た  $T_c$  は, 任意のスピン軌道相互作用結合強度  $\lambda_z$  に対してもそのまま使える (図 2.4(c) を参照). スピン軌道相互作用のないユニタリーフェルミ原子気体の近年の実験 [3,4] が,  $T/T_F \simeq 0.05$  まで到達できていることから, (2.61) 式の領域は,  $T_c/T_F \simeq 0.22$  ゆえ, 近年の実験技術を用いて充分到達可能である. 加えて,  $T_c$  以下の超流動相において超流動秩序パラメータは急速に成長するため, 必ずしも  $T = 0$  でなくとも  $T_c$  以下のある程度の温度まで下げることができれば,  $T = 0$  での値に近い  $p$  波成分の凝縮粒子数が得られると考えられる.

## 2.2.2 2方向にはたらくスピン軌道相互作用の場合 ( $\lambda_{\perp} \neq 0, \lambda_z = 0$ )

次は, スピン軌道相互作用の結合定数が  $\lambda_{\perp} \neq 0$  かつ  $\lambda_z = 0$  の場合を考える. この時, スピン軌道相互作用の表式 (2.10) は,  $\sigma_x$  および  $\sigma_y$  成分から構成される. このような2成分の場合, (2.29)-(2.31) 式から,  $S_z = \pm 1$  の  $p$  波成分の対振幅が誘起されることが分かる. 図 2.5 の上段および中段は,  $p$  波対振幅の  $S_z = 1$  成分の運動量依存性を示している. 図 2.5 には,  $S_z = -1$  成分の  $p$  波対振幅を示していないが,  $S_z = 1$  成分の対振幅に対して,

$$\Phi(\mathbf{p}, S = 1, S_z = -1) = -\Phi^*(\mathbf{p}, S = 1, S_z = 1) \quad (2.67)$$

を満たすことに注意すれば  $S_z = 1$  の対振幅から容易にうることができる.

この状況で,  $s$  波相互作用を (2.33) 式で与えられる  $p$  波相互作用に変更すると,  $p$  波超流動秩序パラメータ  $\Delta_p(\mathbf{p}, S_z = \pm 1)$  が生成される. ここで,

$$|\Delta_p(\mathbf{p}, S_z = 1)| = |\Delta_p(\mathbf{p}, S_z = -1)| \quad (2.68)$$

であるから, この  $p$  波超流動相は, ちょうど planar 状態 [109–111] に対応する. (2.63) 式の行列表現を用いた場合,

$$\hat{\Delta}(\mathbf{p}) \sim \begin{pmatrix} -p_x + ip_y & 0 \\ 0 & p_x + ip_y \end{pmatrix}. \quad (2.69)$$

この planar 状態 [109–111] も, 液体  $^3\text{He}$  超流動で未だ実現されていない対称性の超流動状態である.

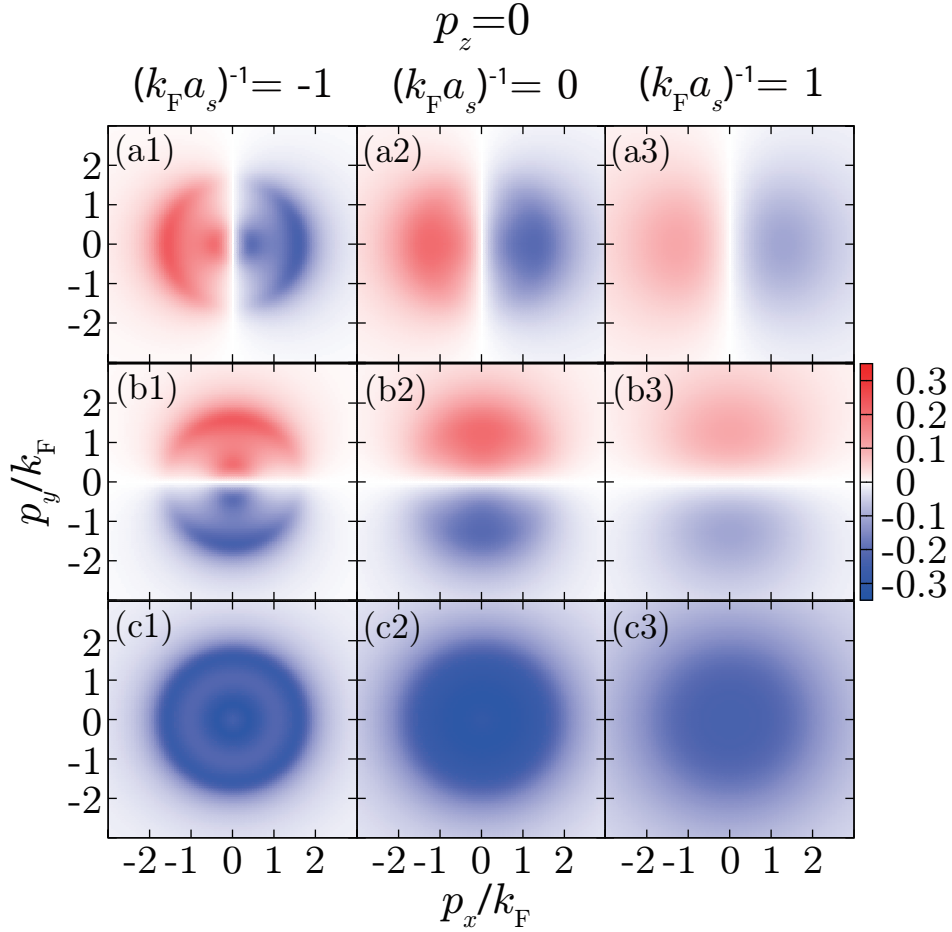


図 2.5: 2 方向にはたらくスピン軌道相互作用 ( $\lambda_{\perp}/v_F = 1$ ,  $\lambda_z = 0$ ) のときの対振幅  $\Phi(\mathbf{p}, S, S_z)$ . この図では  $p_z = 0$  とし, 温度は  $T = 0$  である. 上段および中段はそれぞれ  $\text{Re}[\Phi(\mathbf{p}, S = 1, S_z = 1)]$  および  $\text{Im}[\Phi(\mathbf{p}, S = 1, S_z = 1)]$  を表す. 下段は  $s$  波成分の対振幅  $\Phi(\mathbf{p}, S = 0, S_z = 0)$ . 図示していないが,  $S_z = -1$  の  $p$  波成分も誘起され, これは  $S_z = +1$  成分との間に  $\Phi(\mathbf{p}, S = 1, S_z = -1) = -\Phi^*(\mathbf{p}, S = 1, S_z = 1)$  の関係がある.

1 方向にはたらくスピン軌道相互作用 ( $\lambda_{\perp} = 0, \lambda_z \neq 0$ ) のときのように, 2 方向にはたらくスピン軌道相互作用でも,  $p$  波対振幅は, 弱結合 BCS 領域では, 主にフェルミ面周辺に誘起される.  $U_s = 0$  のとき, 2 方向にはたらくスピン軌道相互作用が存在するときの 1 粒子分散は,  $\tilde{\mu}_{\perp} = \mu + m\lambda_{\perp}^2/2$  として,

$$\xi_{\mathbf{p}}^{\pm} = \frac{(p_{\perp} \pm m\lambda_{\perp})^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} - \tilde{\mu}_{\perp}. \quad (2.70)$$

これより,  $p_z = 0$  に対し 2 つのフェルミ面が得られ, それらは共に  $\mathbf{p} = 0$  を中心とし, 半径は,

$$k_F^{\pm} = \begin{cases} \sqrt{2m\tilde{\mu}_{\perp}} \pm m\lambda_{\perp}, & \tilde{\mu}_{\perp} \geq m\lambda_{\perp}^2/2, \\ \pm\sqrt{2m\tilde{\mu}_{\perp}} + m\lambda_{\perp}, & \tilde{\mu}_{\perp} < m\lambda_{\perp}^2/2. \end{cases} \quad (2.71)$$

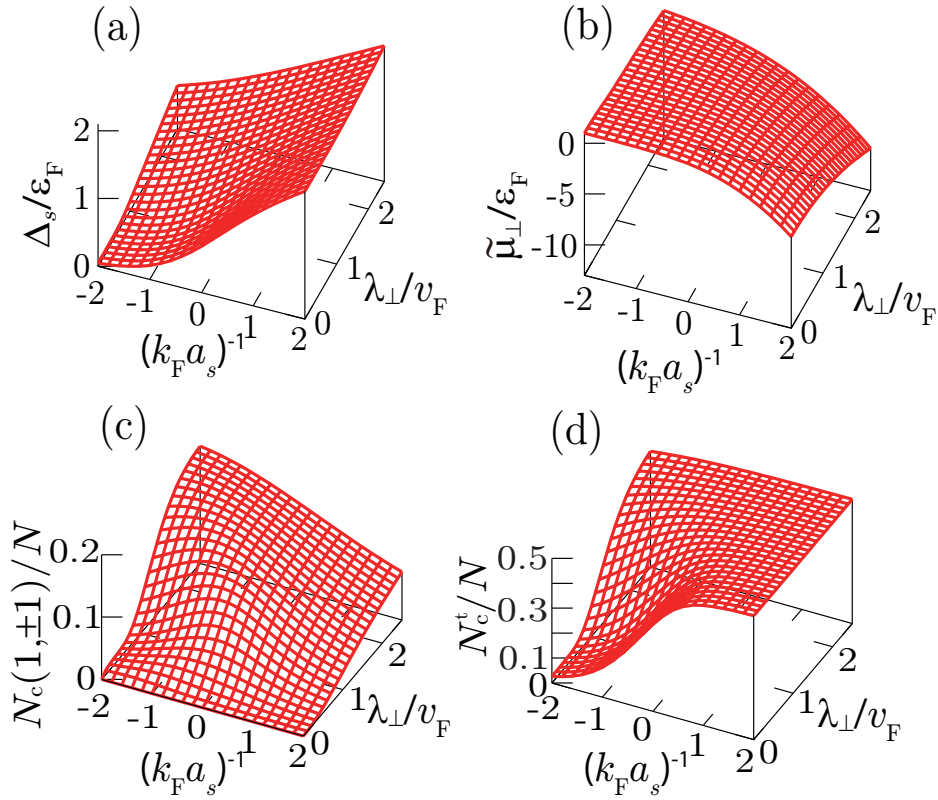


図 2.6: 2 方向にはたらくスピン軌道相互作用 ( $\lambda_{\perp} \neq 0, \lambda_z = 0$ ) の場合の  $T = 0$  における計算結果. (a)  $s$  波超流動秩序パラメータ  $\Delta_s$ . (b) 有効的なフェルミ原子の化学ポテンシャル  $\tilde{\mu}_{\perp} = \mu + m\lambda_{\perp}^2/2$ . (c)  $p$  波成分の凝縮粒子数  $N_c(S = 1, S_z = \pm 1)$ . (d) 全凝縮粒子数  $N_c^t$ .

この予想通り, 図 2.5(a1)-(c1) を見てみると,  $s$  波対振幅と  $p$  波対振幅の両方がこの 2 つのフェルミ面周辺で大きな値をとっている.

2 方向にはたらくスピン軌道相互作用の場合, 先の 1 方向にはたらくスピン軌道相互作用のときとは異なり, BCS-Leggett 理論から得られる  $s$  波超流動秩序パラメータ  $\Delta_s$ , 有効的なフェルミ原子の化学ポテンシャル  $\tilde{\mu}_{\perp}$  は, スピン軌道相互作用結合強度  $\lambda_{\perp}$  に依存する (図 2.6(a), および (b) 参照). このため, 図 2.6(c) および (d) に見られるように,  $p$  波成分の凝縮粒子数  $N_c(S = 1, S_z = \pm 1)$  だけでなく, 全凝縮粒子数  $N_c^t$  もスピン軌道相互作用 ( $\lambda_{\perp}$ ) に影響されており, こうした結果は, 前節で調べた 1 方向にはたらくスピン軌道相互作用 ( $\lambda_{\perp} = 0, \lambda_z \neq 0$ ) の結果とは異なっている.  $N_c^t$  に関しては,  $\lambda_{\perp}$  依存性が解析的に計算でき, (2.46) 式の運動量積分を実行すると,

$$\frac{N_c^t}{N} = \frac{3\pi\Delta_s}{16\sqrt{2}\varepsilon_F^{3/2}} \left[ \sqrt{\mu + \sqrt{\mu^2 + \Delta_s^2}} + \frac{\sqrt{m}\lambda_{\perp}}{2} \arccos \frac{\sqrt{\mu^2 + \Delta_s^2} - m\lambda_{\perp}^2/2}{\sqrt{\tilde{\mu}_{\perp}^2 + \Delta_s^2}} \right]. \quad (2.72)$$

図 2.6(d) を見ると, 弱結合 BCS 側 ( $(k_F a_s)^{-1} \lesssim -1$ ) における全凝縮粒子数  $N_c^t$  が, スピン軌道相互作用により  $\lambda_{\perp} = 0$  のときの値に比べて, 増大していることがわかる. この増大



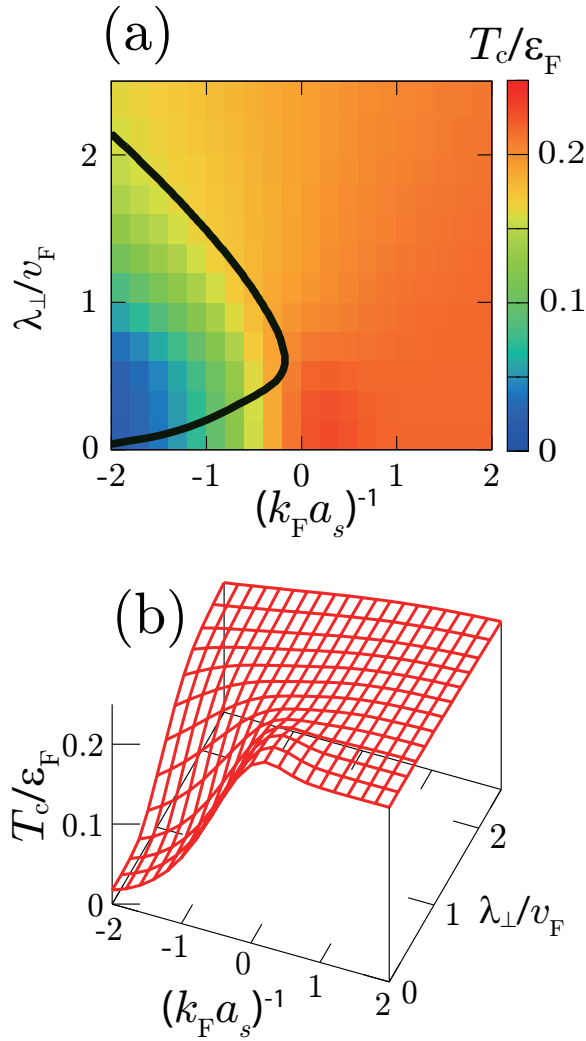


図 2.7: (a)  $T = 0$  のときの 2 方向に働くスピン軌道相互作用の場合における,  $p$  波成分の凝縮粒子数  $N_c(S = 1, S_z = \pm 1)$  のピーク位置. 背景の強度分布は計算した  $T_c$  の大きさを示している. (b)  $T_c$  の 3 次元プロット.

を反映し, 図 2.6(c) に示した  $p$  波成分の凝縮粒子数  $N_c(S = 1, S_z = \pm 1)$  も, 弱結合 BCS 領域において  $\lambda_{\perp}$  が大きくなるにつれ, 増大している. このため, 図 2.4(b) に示した 1 方向にはたらくスピン軌道相互作用の場合に比べ, 図 2.7(a) に示すように,  $N_c(S = 1, S_z = \pm 1)$  のピーク位置 (図中黒線) は弱結合 BCS 側にシフトしてゐる.

通常,  $s$  波超流動の転移温度  $T_c$  は, 弱結合 BCS 領域で低い, 図 2.7(b) を見ると,  $p$  波成分の凝縮粒子数がピークを持つ「最適な領域」(図 2.7(a) に示したピーク位置) 周辺の  $T_c$  が, 弱結合 BCS 側にも関わらず, スピン軌道相互作用によって比較的高い値をとっていることがわかる.  $p$  波対振幅を用意するためには  $s$  波超流動相を実現しなければならないので, このスピン軌道相互作用による  $T_c$  の上昇は, 好ましい結果である. この領域で  $T_c$  の値が大きくなることは, Rashba 型のスピン軌道相互作用に対して近年指摘されている [102, 106].

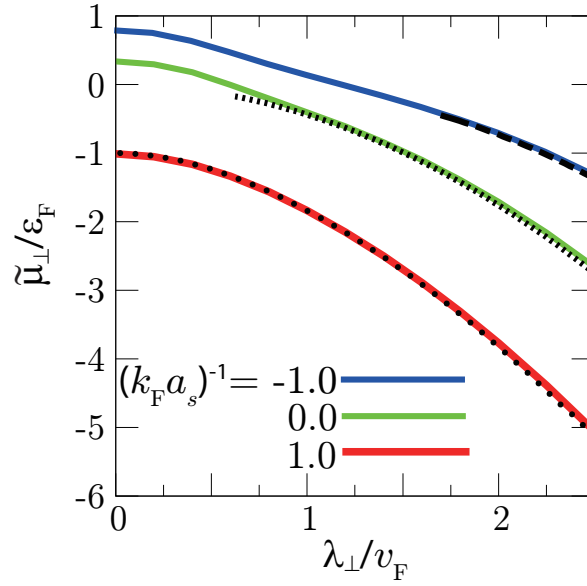


図 2.8:  $T_c$  における有効的なフェルミ原子の化学ポテンシャル  $\tilde{\mu}_\perp = \mu + m\lambda_\perp^2/2$  のスピン軌道相互作用強度  $\lambda_\perp$  依存性. 青線の相互作用は  $(k_F a_s)^{-1} = -1$  (BCS). 緑線の相互作用は  $(k_F a_s)^{-1} = 0$  (ユニタリー極限). 赤線の相互作用は  $(k_F a_s)^{-1} = 1$  (BEC). また, 2つのフェルミ原子が束縛状態 (分子ボソン) を形成するときの化学ポテンシャル  $-\tilde{E}_b/2$  を,  $(k_F a_s)^{-1} = -1$  (黒破線),  $(k_F a_s)^{-1} = 0$  (黒点線),  $(k_F a_s)^{-1} = 1$  (黒丸点線) に対しそれぞれプロットしている.  $\tilde{E}_b/2 = E_b/2 + m\lambda_\perp^2/2$  であり,  $E_b$  は (2.73) 式で決まる 2 体束縛状態の束縛エネルギーである.

今考えているスピン軌道相互作用 ( $\lambda_\perp \neq 0, \lambda_z = 0$ ) の場合に, 弱結合 BCS 領域の  $T_c$  や凝縮粒子数が増大する理由は, 2 体の束縛分子 (ボソン) の形成に由来し, この分子は当該研究分野で rashbon と呼称されている [98–105]. 3 次元フェルミ原子気体系では, 2 体問題の解析から, 一般的に,  $a_s < 0$  (弱結合領域) に対して, 束縛状態 (分子ボソン状態) を形成し得ない. しかし今の場合, (2.70) 式で表す  $\xi_p^-$  のフェルミ縮退は, スピン軌道相互作用が強くなるにつれて, バンドの底周辺で状態密度が 2 次元的になる [98]. 1, 2 次元系では, 2 つのフェルミ原子は 2 体問題のレベルで,  $a_s < 0$  においても束縛状態を持つため, 今回の場合, スピン軌道相互作用による「低次元化」が, 弱結合 BCS 領域においても, 2 体の束縛状態 (rashbon) [98–105] を安定化させたものと考えられる. よって, スピン軌道相互作用強度が強い領域の超流動転移は, スピン軌道相互作用の存在により形成される分子ボソン「rashbon」が巨視的に凝縮して BEC となる転移であり, これが弱結合 BCS 領域においても高い  $T_c$  を与えている. これは, 超流動転移の性質が, 強い引力相互作用  $(k_F a_s)^{-1} \gg 1$  により形成される分子ボソンにより支配されるという, よく知られた極低温フェルミ原子気体の強結合 BEC 領域における振る舞いと似ている. 事実, 図 2.8 に示すように, スピン軌道相互作用結合強度  $\lambda_\perp$  が増加すると, 系の温度が  $T_c$  のときの有効的なフェルミ原子の化学ポテンシャル  $\tilde{\mu}_\perp = \mu + m\lambda_\perp^2/2$  は大きな負の値になっていき,  $\tilde{E}_b/2 = E_b/2 + m\lambda_\perp^2/2$

へと近づく. ここで  $E_b$  は 2 体の束縛状態の束縛エネルギーであり, 次の方程式により決定される.

$$1 = -\frac{4\pi a_s}{m} \sum_{\mathbf{p}} \left[ \frac{1}{2} \sum_{\alpha=\pm} \frac{1}{2(\varepsilon_{\mathbf{p}} + \alpha\lambda_{\perp}p_{\perp}) - E_b} - \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{p}}} \right] \quad (E_b < -m\lambda_{\perp}^2). \quad (2.73)$$

$\xi_{\mathbf{p}}^-$  のバンドの底が  $-m\lambda_{\perp}^2/2$  であることに注意すると,  $\tilde{E}_b$  はゼロエネルギーから測った束縛エネルギーと解釈することができ, また, 化学ポテンシャルは物理的に, 系に 1 粒子を加えるために必要なエネルギーを表していることから, 図 2.8 は, スピン軌道相互作用の結合強度が強い領域 ( $\tilde{\mu}_{\perp} < 0$ ) では, 引力相互作用  $U_s$  自体は弱くとも, ほとんどのフェルミ原子が 2 体の束縛状態 (分子ボソン) を形成していることを意味している.

### 2.2.3 3 方向にはたらくスピン軌道相互作用の場合 ( $\lambda_{\perp} \neq 0, \lambda_z \neq 0$ )

最後に, スピン軌道相互作用が全てのスピン方向  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  に存在する場合, すなわち,

$$(\lambda_{\perp}, \lambda_z) = \lambda(\cos \theta_{\lambda}, \sin \theta_{\lambda}) \quad (0 \leq \theta_{\lambda} \leq \pi/2) \quad (2.74)$$

である場合を考える. この時, (2.43)-(2.45) 式的全種類 (3 種類) の  $p$  波成分の凝縮粒子数  $N_c(S=1, S_z = \pm 1, 0)$  が誘起される (図 2.9 を参照).

特に, 全方位に等方的なスピン軌道相互作用の場合 ( $\lambda_{\perp} = \lambda_z$  or  $\theta_{\lambda} = \pi/4$ ), 図 2.10(a) および (b) が示すように, 本論文の提案に最適な  $p$  波成分の凝縮粒子数が強められる領域は, 前節の場合 ( $\lambda_{\perp} \neq 0, \lambda_z = 0$ ) と同様, 弱結合 BCS 側に存在する. このとき全凝縮粒子数は, 先に示した 2 方向に働くスピン軌道相互作用のときのそれ (図 2.7(d) を参照) と定性的な振る舞いが似ているため, 具体的に示さないが, 解析的に次のように計算される.

$$\frac{N_c^t}{N} = \frac{3\pi\Delta_s}{16\sqrt{2}\varepsilon_F^{3/2}} \sqrt{\tilde{\mu} + \sqrt{\tilde{\mu}^2 + \Delta_s^2}} \left[ 1 + \frac{m\lambda^2/4}{\sqrt{\tilde{\mu}^2 + \Delta_s^2}} \right]. \quad (2.75)$$

(ここで  $\tilde{\mu} = \mu + m\lambda^2/4$ .) ここでも, 先に議論した rashbon の形成により, BCS 側において凝縮粒子数の増加が見られる. 加えて,  $T_c$  も同様の機構により高い値 (図 2.10(c) を参照) となるため, この領域は実験的に到達可能であると考えられる. このとき,  $s$  波原子間相互作用を (2.33) 式のように表される  $p$  波原子間相互作用へと急峻に変更すると, 変更直後の  $p$  波超流動状態として, (2.63) 式の行列表現を用いた秩序パラメータが,

$$\hat{\Delta}(\mathbf{p}) \sim \begin{pmatrix} -p_x + ip_y & p_z \\ p_z & p_x + ip_y \end{pmatrix}, \quad (2.76)$$

と表される  $p$  波超流動相が生成する。これは、 $p$  波超流動相の分類では、BW (Balian-Werthamer) 相 [109–111] と呼ばれる相と同じ  $p$  波超流動秩序パラメータの対称性を有している。この BW 状態は、 $^3\text{He}$  超流動 ( $p$  波超流動) において既の実現しており [109], 本研究の提案を用いて, (2.76) 式の対称性を持つ  $p$  波フェルミ原子気体超流動が実現されれば,  $^3\text{He}$  超流動の物理にもアプローチが可能であるといえる。

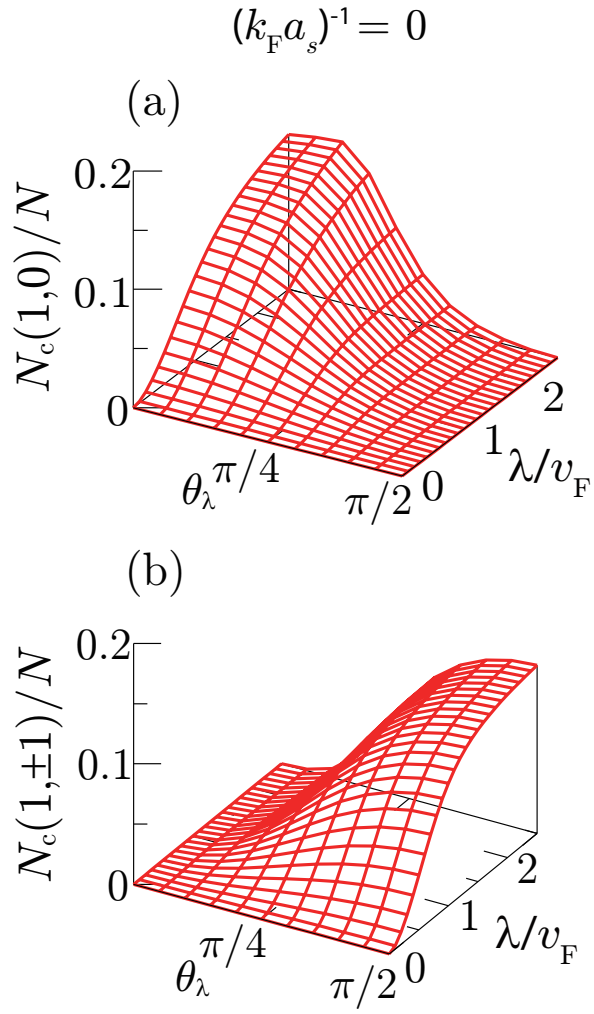


図 2.9: 3 方向にはたらくスピン軌道相互作用  $(\lambda_{\perp}, \lambda_z) = \lambda(\sin \theta_{\lambda}, \cos \theta_{\lambda})$  の場合の  $p$  波成分の凝縮粒子数 ( $T = 0$ ). 相互作用は  $(k_F a_s)^{-1} = 0$ . (a)  $N_c(S = 1, S_z = 0)$ . (b)  $N_c(S = 1, S_z = \pm 1)$ . この図では,  $\theta_{\lambda} = 0$  および  $\theta_{\lambda} = \pi/2$  はそれぞれ, 先に議論した 1 方向にはたらくスピン軌道相互作用および 2 方向にはたらくスピン軌道相互作用に対応している.

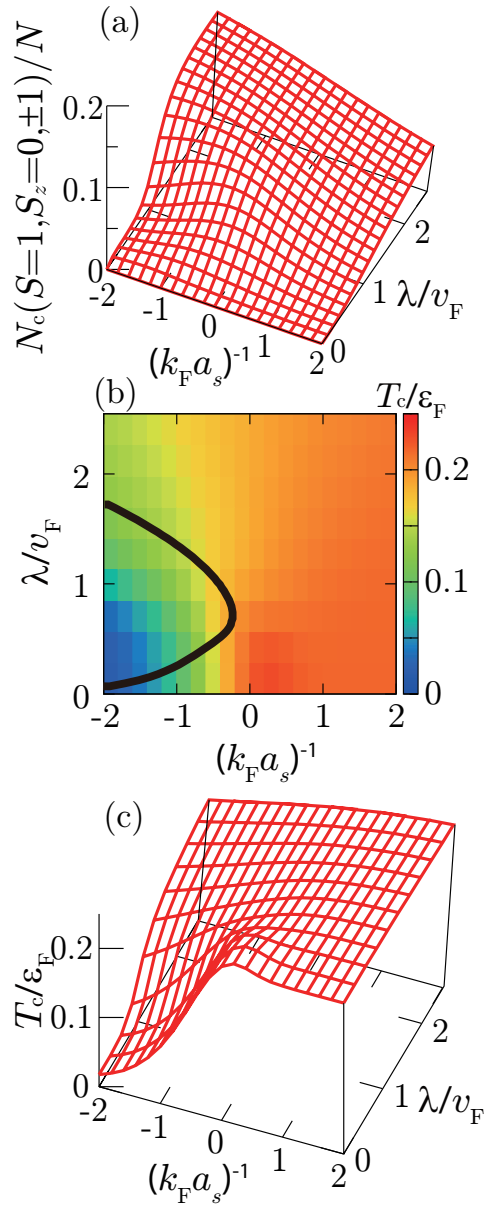


図 2.10: (a)  $T = 0$  かつ等方的なスピン軌道相互作用  $\lambda_{\perp} = \lambda_z = \lambda/\sqrt{2}$  ( $\theta_{\lambda} = \pi/4$ ) のときの  $p$  波成分の凝縮粒子数  $N_c(S = 1, S_z = 0, \pm 1)$ . (b) (a) から見積もられる  $N_c(S = 1, S_z = 0, \pm 1)$  のピーク位置. 背景の強度分布は  $T_c$  の大きさを表しており,  $T_c$  そのものの 3 次元プロットは (c) のようになる.

# 第3章 $p$ 波相互作用印加後の $p$ 波超流動 状態の時間発展

本章では、前章で説明した「 $p$ 波対振幅をスピン軌道相互作用を有する $s$ 波フェルミ原子気体超流動を用いて誘起した状態」に対し、引力相互作用を $s$ 波型から $p$ 波型に変更することで、実際に $p$ 波の超流動秩序パラメータが作り出せるのかを議論する。ここでは $T = 0$ を考え、スピン軌道相互作用としては1方向成分のみ有するタイプ( $\lambda_{\perp} = 0, \lambda_z \neq 0$ )を扱う。3.1節で本章で扱うモデルを概説し、3.2節で相互作用変更後の系の時間発展を計算するための時間依存 Bogoliubov de-Gennes (TDBdG) 理論に基づく定式化を説明する。3.3節では、TDBdG 方程式を用い、前章で得た誘起された $p$ 波対振幅を初期条件として、 $p$ 波相互作用印加後の $p$ 波超流動秩序パラメータの時間発展の様子を明らかにする。

## 3.1 モデルの設定

ここでは、次のような時間依存性を有する BCS ハミルトニアンを考える。

$$\begin{aligned} \hat{H}(t) = & \sum_{\mathbf{p}} (c_{\mathbf{p},\uparrow}^{\dagger}(t), c_{\mathbf{p},\downarrow}^{\dagger}(t)) [\varepsilon_{\mathbf{p}} + \Lambda(t)] \begin{pmatrix} c_{\mathbf{p},\uparrow}(t) \\ c_{\mathbf{p},\downarrow}(t) \end{pmatrix} \\ & - U_s(t) \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} c_{\mathbf{p},\uparrow}^{\dagger}(t) c_{-\mathbf{p},\downarrow}^{\dagger}(t) c_{-\mathbf{p}',\downarrow}(t) c_{\mathbf{p}',\uparrow}(t) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} U_p(\mathbf{p}, \mathbf{p}', t) c_{\mathbf{p},\uparrow}^{\dagger}(t) c_{-\mathbf{p},\uparrow}^{\dagger}(t) c_{-\mathbf{p}',\uparrow}(t) c_{\mathbf{p}',\uparrow}(t). \end{aligned} \quad (3.1)$$

$c_{\mathbf{p},\sigma}(t)$  は運動量  $\mathbf{p}$ , 擬スピン  $\sigma (= \uparrow, \downarrow)$  および質量  $m$  のフェルミ原子の消滅演算子を表し、 $\varepsilon_{\mathbf{p}} = |\mathbf{p}|^2/(2m)$  はその運動エネルギーである。ただし、本章では、フェルミ原子の生成消滅演算子の時間発展 (Heisenberg 描像) を扱うため、 $c_{\mathbf{p},\sigma}(t)$  は時間  $t$  に依存している。(3.1) 式において、 $c_{\mathbf{p},\sigma}(t)$  以外の、時間依存する部分は  $s$  波相互作用  $U_s(t)$ ,  $p$  波相互作用  $U_p(\mathbf{p}, \mathbf{p}', t)$ , およびスピン軌道相互作用  $\Lambda(t)$  である。 $t < 0$  では系は前章で議論した熱平衡状態にある。その時、 $\Lambda(t) \neq 0$ ,  $U_s(t) \neq 0$ ,  $U_p(\mathbf{p}, \mathbf{p}', t) = 0$  である。他方  $t \geq 0$  では  $s$  波相互作用を  $p$  波相互作用に入れ替え、スピン軌道相互作用もゼロにするので、 $\Lambda(t) = 0$ ,  $U_s(t) = 0$ ,  $U_p(\mathbf{p}, \mathbf{p}', t) \neq 0$  とする。図 3.1 には、このプロセスを模式的に示してある。この過程においてスピン軌道相互作用は、1 方向にはたらく場合を考えると、 $t \geq 0$  ではゼロになること

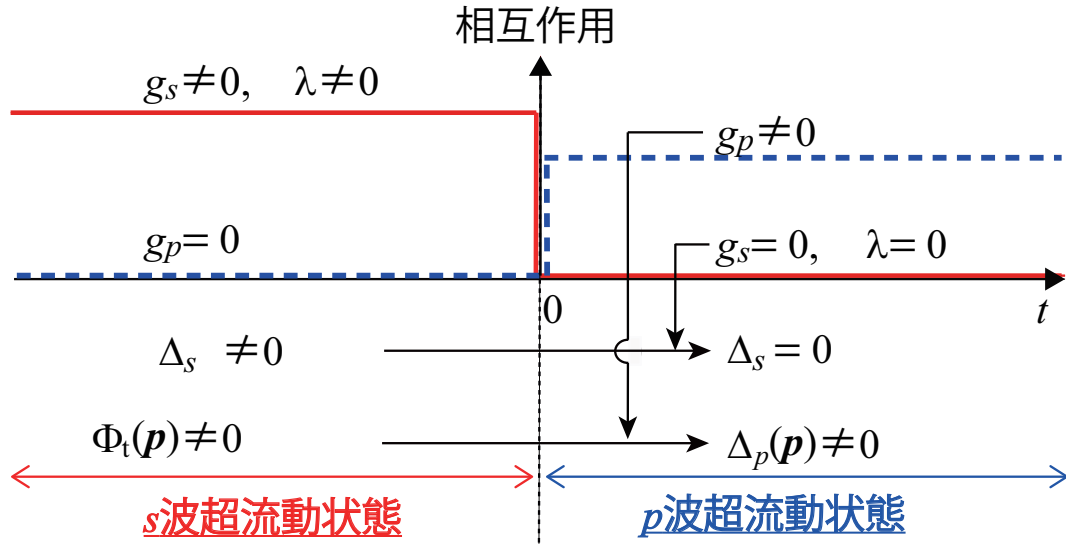


図 3.1: 本章における  $p$  波超流動に至るための過程の模式図.  $t < 0$  で, スピン軌道相互作用 ( $\lambda$ ) を有する  $s$  波フェルミ原子気体超流動において有限の  $p$  波対振幅  $\Phi_t(\mathbf{p})$  を用意する ( $g_s$  は  $s$  波原子間相互作用). この段階では,  $p$  波原子間相互作用  $g_p$  が印加されていないため,  $p$  波超流動秩序パラメータ  $\Delta_p(\mathbf{p})$  はまだ存在しない.  $t = 0$  で,  $g_s = 0$  (かつ  $\lambda = 0$ ) から  $g_p \neq 0$  へと急に変更する. すると, 有限の  $g_p$  と  $\Phi_t(\mathbf{p})$  との積が直ちに生成され, 有限の  $p$  波超流動秩序パラメータ  $\Delta_p(\mathbf{p})$  が生じる. このとき,  $t \geq 0$  で  $g_s = 0$  より,  $s$  波超流動秩序パラメータはゼロである. 結果として, 有限の  $\Delta_p(\mathbf{p})$  により特徴付けられる  $p$  波超流動が実現する.

から,

$$\Lambda(t) = \lambda p_z \sigma_x \theta(-t), \quad (3.2)$$

と書ける. ここで,  $\lambda (\geq 0)$  はスピン軌道相互作用の結合強度である. 前述したようにこのタイプは実験で既の実現している [73–77].  $\lambda p_z \sigma_x$  は前章で扱った  $\lambda p_z \sigma_z$  とは異なるように見えるが,  $p_z \sigma_z$  に対してスピン軸を  $\sigma_y$  軸周りに  $\pi/2$  回転すれば  $p_z \sigma_x$  となる. このようにスピン軸を取り直した理由は, (3.1) 式のハミルトニアン第三項で導入した  $p$  波原子間相互作用が, 同種擬スピン ( $\uparrow$ ) 間に作用するものであることに因る. このときに形成される Cooper 対は,  $\langle c_{\mathbf{p},\uparrow} c_{-\mathbf{p},\uparrow} \rangle$  の  $p$  波対振幅のみを持っているため,  $p$  波超流動秩序パラメータは  $\sigma_x$  と結合する (例えば前章の (2.63) 式を参照). この Cooper 対のスピン状態に対し  $p$  波対振幅を誘起するためには, スピン軌道相互作用の形式も同様に  $\sigma_x$  と結合したものにしなければならない. それには,  $p_z \sigma_x$  が都合よい.

次に,  $s$  波相互作用も  $t \geq 0$  ではゼロとするよう設定するので,

$$U_s(t) = g_s \theta(-t) \quad (g_s > 0) \quad (3.3)$$

である. ただし, ここでも接触型相互作用  $U_s(t)$  を用いることによる紫外発散を  $s$  波散乱



長  $a_s$  に吸収させて取り除く.

$$\frac{4\pi a_s}{m} = -\frac{g_s}{1 - g_s \sum_{\mathbf{p}}^{p_c} 1/(2\varepsilon_{\mathbf{p}})}. \quad (3.4)$$

ここで,  $p_c$  は運動量のカットオフである.

$t \geq 0$  では, 単一擬スピン↑の原子間にのみ働く  $p$  波引力相互作用を系に導入する.

$$U_p(\mathbf{p}, \mathbf{p}', t) \equiv V_p(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\theta(t). \quad (3.5)$$

先に導入した  $s$  波原子間相互作用のモデルにおいて, 異なる 2 種類の擬スピン状態を考えたのに対し, ここでは単一擬スピン↑のみを考えている. 従ってこのモデルでは, 擬スピン↓成分は  $t \geq 0$  で自由フェルミ気体になる. (3.5) 式における  $V_p(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  は, 球面調和関数  $Y_{1,L_z}(\hat{\mathbf{p}})$  ( $\hat{\mathbf{p}} \equiv \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ ) で展開し, 次のように書かれると仮定する [36–38].

$$V_p(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = -4\pi g_p \sum_{L_z=0,\pm 1} F_{\mathbf{p}}^* F_{\mathbf{p}'} Y_{1,L_z}^*(\hat{\mathbf{p}}) Y_{1,L_z}(\hat{\mathbf{p}}') \quad (3.6)$$

$$\equiv -4\pi g_p \sum_{L_z=0,\pm 1} \Gamma_{\mathbf{p},L_z}^* \Gamma_{\mathbf{p}',L_z}. \quad (3.7)$$

ここで,

$$F_{\mathbf{p}} \equiv \frac{|\mathbf{p}|p_0}{|\mathbf{p}|^2 + p_0^2} \quad (3.8)$$

はカットオフ関数を表し,  $g_p$  ( $\geq 0$ ) は  $p$  波 (引力) 相互作用の結合定数である.  $g_p$  は, 観測量である散乱体積  $v_p$  と次の関係式により結びついている.

$$\frac{4\pi v_p p_0^2}{m} = -\frac{g_p}{1 - g_p \sum_{\mathbf{p}} F_{\mathbf{p}}^2/(2\varepsilon_{\mathbf{p}})}. \quad (3.9)$$

$s$  波相互作用のときと同様に, 以下では  $p$  波相互作用強度を散乱体積  $v_p$  を用いて表すと,  $v_p^{-1} \rightarrow -\infty$  が弱結合極限,  $v_p^{-1} \rightarrow \infty$  が強結合極限にそれぞれ対応する.  $p_0$  はカットオフ運動量であるが, これは  $p$  波原子間に引力が働く有効距離  $p_{\text{eff}}^{-1}$  と

$$p_{\text{eff}} = -\frac{\pi p_0^2}{m^2} \sum_{\mathbf{p}} \frac{F_{\mathbf{p}}^2}{\varepsilon_{\mathbf{p}}^2} - \frac{2}{p_0^2 v_p} \quad (3.10)$$

のように関係している [36–38].  $^{40}\text{K}$  フェルミ原子気体では  $p_{\text{eff}} \simeq -0.02a_{\text{B}}^{-1}$  [22],  $^6\text{Li}$  フェルミ原子気体では  $p_{\text{eff}} \simeq -0.05a_{\text{B}}^{-1}$  [27] と報告されている ( $a_{\text{B}}$  は Bohr 半径). この系の典型的な長さスケール  $k_{\text{F}}^{-1} \simeq 100 \text{ nm}$  を用いると, 有効距離の実験値は,  $p_{\text{eff}} (\sim p_0) \sim 10^2 k_{\text{F}}$  と見積もられる. しかし, 本研究では, 数値計算の技術的な問題から,  $p_0 = 10k_{\text{F}}$  の値を用いる [43]. この値は実験値に比べ小さいが, 本章の結論には定性的には影響を与えない.

しかし, 例えば  $p$  波超流動秩序パラメータの定量的な値等には影響する [37, 38].

後述するように, 本章で考えるスピン軌道相互作用 ((3.2) 式を参照) は,  $p_z$  成分の  $p$  波対振幅のみを誘起する. 従って, これを種として生成する  $p$  波超流動秩序パラメータは,  $p_z$  に比例した成分のみである. つまり, (3.6) 式および (3.7) 式のように表される  $p$  波相互作用のうち,  $s$  波超流動状態中であらかじめ用意しておいた  $p$  波対振幅から  $p$  波超流動秩序パラメータを作るとを考えると,  $L_z = 0$  成分のみを扱えばよい. 従って以下では  $p$  波相互作用として, この成分を抜き出した

$$V_p(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = -4\pi g_p \Gamma_{\mathbf{p},0}^* \Gamma_{\mathbf{p}',0}, \quad (3.11)$$

を扱う.

最後に, 次式で定義される時間依存する  $s$  波超流動秩序パラメータ

$$\Delta_s(t) \equiv -g_s \theta(-t) \sum_{\mathbf{p}} \langle c_{-\mathbf{p},\downarrow}(t) c_{\mathbf{p},\uparrow}(t) \rangle \quad (3.12)$$

および, 時間依存する  $p$  波超流動秩序パラメータ

$$\Delta_p(\mathbf{p}, t) \equiv \Gamma_{\mathbf{p},0}^* \Delta_p(t) \equiv \Gamma_{\mathbf{p},0}^* (-4\pi g_p) \theta(t) \sum_{\mathbf{p}'} \Gamma_{\mathbf{p}',0} \langle c_{-\mathbf{p}',\uparrow}(t) c_{\mathbf{p}',\uparrow}(t) \rangle, \quad (3.13)$$

を導入する. このときの平均は, TDBdG の枠組みでは  $t < 0$  の BCS 基底状態に対して行う (ただし, スピン軌道相互作用の効果は含まれる).

以上の準備の元, (3.1) 式に対し平均場近似を行うと,

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{MF}}(t) &= \sum_{\mathbf{p}} (c_{\mathbf{p},\uparrow}^\dagger(t), c_{\mathbf{p},\downarrow}^\dagger(t)) [\varepsilon_{\mathbf{p}} + \Lambda(t)] \begin{pmatrix} c_{\mathbf{p},\uparrow}(t) \\ c_{\mathbf{p},\downarrow}(t) \end{pmatrix} \\ &+ \Delta_s(t) \sum_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p},\uparrow}^\dagger(t) c_{-\mathbf{p},\downarrow}^\dagger(t) + \Delta_s^*(t) \sum_{\mathbf{p}} c_{-\mathbf{p},\downarrow}(t) c_{\mathbf{p},\uparrow}(t) + \frac{|\Delta_s(t)|^2}{g_s \theta(-t)} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} \left[ \Delta_p(\mathbf{p}, t) c_{\mathbf{p},\uparrow}^\dagger(t) c_{-\mathbf{p},\uparrow}^\dagger(t) + \Delta_p^*(\mathbf{p}, t) c_{-\mathbf{p},\uparrow}(t) c_{\mathbf{p},\uparrow}(t) \right] + \frac{1}{2} \frac{|\Delta_p(t)|^2}{4\pi g_p \theta(t)}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

## 3.2 時間依存 Bogoliubov de-Gennes (TDBdG) 理論の定式化

ここでは  $t \geq 0$  における系の時間発展を解析するための, 時間依存 Bogoliubov de-Gennes (TDBdG) 方程式の導出を行う [116–118]. (3.14) 式で与えられる平均場ハミルトニアン

に対し、時間発展ユニタリー演算子を

$$\hat{U}(t) = \mathcal{T}_t e^{-i \int_0^t ds \hat{H}_{\text{MF}}(s)} \quad (3.15)$$

のように導入する。 $\mathcal{T}_t$ は時間順序積である。任意の演算子 $\hat{O}(t)$ に対する時間発展を $\hat{O}(t) = \hat{U}^\dagger(t) \hat{O}(0) \hat{U}(t)$ と書くと、演算子 $\hat{O}(t)$ に対する Heisenberg 方程式は

$$i \frac{\partial}{\partial t} \hat{O}(t) = [\hat{O}(t), \hat{H}_{\text{MF}}(t)]. \quad (3.16)$$

ここで、Bogoliubov 準粒子の消滅演算子 $\gamma_{\mathbf{p},\alpha}$ を、次式を満たすように導入する。

$$c_{\mathbf{p},\sigma}(t) = \sum_{\alpha} \left[ \tilde{u}_{\mathbf{p},\sigma}^{\alpha}(t) \gamma_{\mathbf{p},\alpha} + \tilde{v}_{-\mathbf{p},\sigma}^{\alpha*}(t) \gamma_{-\mathbf{p},\alpha}^{\dagger} \right], \quad (3.17)$$

ただし、係数は次の規格化条件を満たすとする。

$$|\tilde{u}_{\mathbf{p},\sigma}^{\alpha}(t)|^2 + |\tilde{v}_{\mathbf{p},\sigma}^{\alpha}(t)|^2 = 1. \quad (3.18)$$

(3.18) 式は $\gamma_{\mathbf{p},\alpha}$ がフェルミ粒子の演算子(反交換関係を満たす)であることを保証する。 $\alpha$ は準粒子の固有状態のラベルである [118]。  $\gamma_{\mathbf{p},\alpha}$ は $t < 0$ の $s$ 波超流動状態に対する Bogoliubov 励起を表す演算子とする。つまり、

$$\begin{cases} \langle \gamma_{\mathbf{p},\alpha}^{\dagger} \gamma_{\mathbf{p}',\alpha'} \rangle = \delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^{\alpha,\alpha'} \langle \gamma_{\mathbf{p},\alpha}^{\dagger} \gamma_{\mathbf{p},\alpha} \rangle, \\ \langle \gamma_{\mathbf{p},\alpha}^{\dagger} \gamma_{\mathbf{p}',\alpha'}^{\dagger} \rangle = \langle \gamma_{\mathbf{p},\alpha} \gamma_{\mathbf{p}',\alpha'} \rangle = 0, \\ \langle \gamma_{\mathbf{p},\alpha}^{\dagger} \gamma_{\mathbf{p},\alpha} \rangle = 1 - \langle \gamma_{\mathbf{p},\alpha} \gamma_{\mathbf{p},\alpha}^{\dagger} \rangle = f(E_{\mathbf{p}}^{\alpha}) = 0, \end{cases} \quad (3.19)$$

ここで、 $E_{\mathbf{p}}^{\alpha}$ は(2.23)式直下の( $\lambda_{\perp} = 0, \lambda_z = \lambda$ )に対し与えられる Bogoliubov 励起である。また、 $f(x)$ はフェルミ分布関数を表し、本章では絶対零度( $T = 0$ )を考えているため、 $f(E_{\mathbf{p}}^{\alpha}) = 0$ である。

演算子 $c_{\mathbf{p},\uparrow}(t)$ の運動方程式は、(3.14)式および(3.16)式を用いると、次のようになる。

$$i \frac{\partial}{\partial t} c_{\mathbf{p},\uparrow}(t) = \varepsilon_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p},\uparrow}(t) + \lambda \theta(-t) p_z c_{\mathbf{p},\downarrow}(t) + \Delta_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}, t) c_{-\mathbf{p},\uparrow}^{\dagger}(t) + \Delta_s(t) c_{-\mathbf{p},\downarrow}^{\dagger}(t). \quad (3.20)$$

この式に左から $\gamma_{\mathbf{p},\alpha}^{\dagger}$ (時間に依らない)をかけて期待値をとると、(3.17)式、および、(3.19)式から、

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}_{\mathbf{p},\uparrow}^{\alpha}(t) \langle \gamma_{\mathbf{p},\alpha}^{\dagger} \gamma_{\mathbf{p},\alpha} \rangle &= (\varepsilon_{\mathbf{p}} \tilde{u}_{\mathbf{p},\uparrow}^{\alpha}(t) + \lambda \theta(-t) p_z \tilde{u}_{\mathbf{p},\downarrow}^{\alpha}(t) \\ &\quad + \Delta_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}, t) \tilde{v}_{\mathbf{p},\uparrow}^{\alpha}(t) + \Delta_s(t) \tilde{v}_{\mathbf{p},\downarrow}^{\alpha}(t)) \langle \gamma_{\mathbf{p},\alpha}^{\dagger} \gamma_{\mathbf{p},\alpha} \rangle. \end{aligned} \quad (3.21)$$

これが、任意の  $\langle \gamma_{\mathbf{p},\alpha}^\dagger \gamma_{\mathbf{p},\alpha} \rangle$  に対して成り立つことから、

$$i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}_{\mathbf{p},\uparrow}^\alpha(t) = \varepsilon_{\mathbf{p}} \tilde{u}_{\mathbf{p},\uparrow}^\alpha(t) + \lambda \theta(-t) p_z \tilde{u}_{\mathbf{p},\downarrow}^\alpha(t) + \Delta_p(\mathbf{p}, t) \tilde{v}_{\mathbf{p},\uparrow}^\alpha(t) + \Delta_s(t) \tilde{v}_{\mathbf{p},\downarrow}^\alpha(t). \quad (3.22)$$

以上の計算を、他の演算子  $c_{\mathbf{p},\downarrow}(t)$ ,  $c_{-\mathbf{p},\uparrow}^\dagger(t)$ ,  $c_{-\mathbf{p},\downarrow}^\dagger(t)$  に対しても同様に行うと、TDBdG 方程式が

$$\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{p}}(t) \equiv \begin{pmatrix} \tilde{u}_{\mathbf{p},\uparrow}^\alpha(t) \\ \tilde{u}_{\mathbf{p},\downarrow}^\alpha(t) \\ \tilde{v}_{\mathbf{p},\uparrow}^\alpha(t) \\ \tilde{v}_{\mathbf{p},\downarrow}^\alpha(t) \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

を用いて次のように得られる。

$$i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{p}}(t) = H_{\text{BdG}}(t) \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{p}}(t). \quad (3.24)$$

ここで  $H_{\text{BdG}}(t)$  は  $4 \times 4$  行列のハミルトニアンであり、

$$H_{\text{BdG}}(t) \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{\mathbf{p}} & \lambda \theta(-t) p_z & \Delta_p(\mathbf{p}, t) & \Delta_s(t) \\ \lambda \theta(-t) p_z & \varepsilon_{\mathbf{p}} & -\Delta_s(t) & 0 \\ \Delta_p^*(\mathbf{p}, t) & -\Delta_s^*(t) & -\varepsilon_{\mathbf{p}} & \lambda \theta(-t) p_z \\ \Delta_s^*(t) & 0 & \lambda \theta(-t) p_z & -\varepsilon_{\mathbf{p}} \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

TDBdG 方程式 (3.24) の時間発展を計算する際、以下の (時間依存) ギャップ方程式も同時に解く必要がある。まず、 $s$  波超流動秩序パラメータに対するギャップ方程式 (3.12) は、

$$\Delta_s(t) = -\frac{1}{2} g_s \theta(-t) \sum_{\mathbf{p},\alpha} \tilde{u}_{\mathbf{p},\uparrow}^\alpha(t) \tilde{v}_{\mathbf{p},\downarrow}^{\alpha*}(t) \quad (3.26)$$

他方、 $p$  波超流動秩序パラメータのギャップ方程式 (3.13) は、

$$\Delta_p(\mathbf{p}, t) \equiv \Gamma_{\mathbf{p},0}^* \Delta_p(t) \equiv \Gamma_{\mathbf{p},0}^* (-2\pi g_p) \theta(t) \sum_{\mathbf{p}',\alpha} \Gamma_{\mathbf{p}',0} \tilde{u}_{\mathbf{p}',\uparrow}^\alpha(t) \tilde{v}_{\mathbf{p}',\uparrow}^{\alpha*}(t), \quad (3.27)$$

となる。更にこのとき  $p$  波対振幅は、

$$\Phi(\mathbf{p}, S=1, S_z=1, t) \equiv \langle c_{\mathbf{p},\uparrow}(t) c_{-\mathbf{p},\uparrow}(t) \rangle = \sum_{\alpha} \tilde{u}_{\mathbf{p},\uparrow}^\alpha(t) \tilde{v}_{\mathbf{p},\uparrow}^{\alpha*}(t) \quad (3.28)$$

から計算される。

最後に, 系の全粒子数は,

$$N(t) \equiv \sum_{\mathbf{p}, \sigma} n_{\mathbf{p}, \sigma}(t) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \langle c_{\mathbf{p}, \sigma}^\dagger(t) c_{\mathbf{p}, \sigma}(t) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}, \sigma, \alpha} |\tilde{v}_{\mathbf{p}, \sigma}^\alpha(t)|^2 \quad (3.29)$$

のように表される. TDBdG 理論の枠組みでは, 厳密に  $dN(t)/dt = 0$  が成立し,  $N(t)$  は時間に依らない. ただし, 粒子数密度  $n_{\mathbf{p}, \sigma}(t)$  は時間変化する. ここで, (3.26)-(3.29) 式に対し 1/2 のファクターを乗じたが, これは, 全運動量空間  $\mathbf{p}$  の和をとる際に, (準) 粒子と正孔のダブルカウントを取り除くための処置である.

### 初期条件 ( $t < 0$ ) の構成

TDBdG 方程式 (3.24) の初期条件として,  $t < 0$  での熱平衡状態にある  $s$  波超流動状態を考える (ただし 1 方向にはたらくスピン軌道相互作用を含む). この熱平衡状態にある  $s$  波超流動状態に対しては, 化学ポテンシャル  $\mu$  を

$$\tilde{u}_{\mathbf{p}, \sigma}^\alpha(t) = u_{\mathbf{p}, \sigma}^\alpha e^{-i(E+\mu)t}, \quad \tilde{v}_{\mathbf{p}, \sigma}^\alpha(t) = v_{\mathbf{p}, \sigma}^\alpha e^{-i(E-\mu)t}, \quad (3.30)$$

のように導入し, これらと

$$\Delta_s(t) = -\frac{g_s}{2} \sum_{\mathbf{p}, \alpha} u_{\mathbf{p}, \uparrow}^\alpha v_{\mathbf{p}, \downarrow}^{\alpha*} e^{-2i\mu t} \equiv \Delta_s e^{-2i\mu t} \quad (3.31)$$

( $\Delta_s$  は実数とする) を用いると, TDBdG 方程式 (3.24) は通常の BdG 方程式に帰着する.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu & \lambda p_z & 0 & \Delta_s \\ \lambda p_z & \varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu & -\Delta_s & 0 \\ 0 & -\Delta_s & -(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu) & \lambda p_z \\ \Delta_s & 0 & \lambda p_z & -(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu) \end{bmatrix} \mathbf{u}_0 = E \mathbf{u}_0. \quad (3.32)$$

ただし,  $\mathbf{u}_0 \equiv [u_{\mathbf{p}, \uparrow}^\alpha, u_{\mathbf{p}, \downarrow}^\alpha, v_{\mathbf{p}, \uparrow}^\alpha, v_{\mathbf{p}, \downarrow}^\alpha]^T$  である. この固有エネルギーは, ただちに

$$E = \pm E_{\mathbf{p}}^\alpha \equiv \pm \sqrt{(\xi_{\mathbf{p}}^\alpha)^2 + \Delta_s^2} \quad (3.33)$$

( $\xi_{\mathbf{p}}^\pm \equiv \varepsilon_{\mathbf{p}} \pm \lambda |p_z| - \mu$ ) と求まり, これは, (3.19) 式の Bogoliubov 準粒子の固有エネルギー  $E_{\mathbf{p}}^\alpha$  を再現する. 対応する固有状態は,  $E = E_{\mathbf{p}}^\alpha$  に対し,

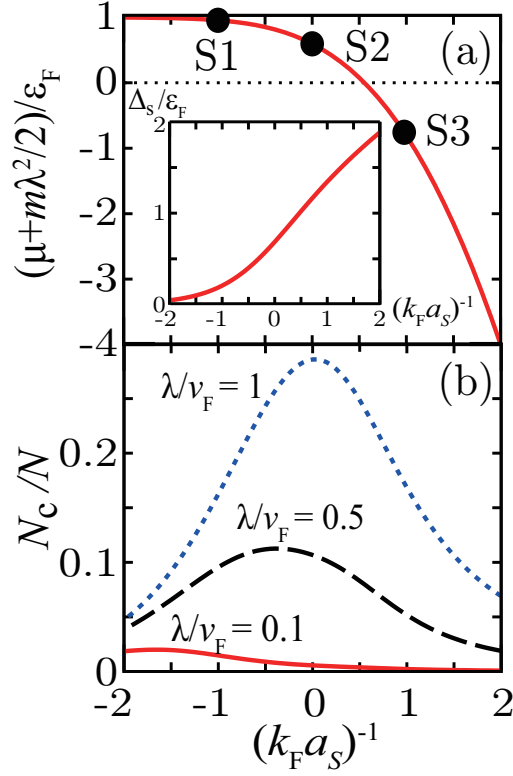


図 3.2: (a)  $T = 0$ における, スピン軌道相互作用を有する  $s$ 波フェルミ原子気体の BCS-BEC クロスオーバー領域における化学ポテンシャル  $\mu$ .  $g_s = 0$  のとき,  $\mu + m\lambda^2/2$  はスピン軌道相互作用によって生じる 1 粒子分散の最低エネルギーから測った化学ポテンシャルを意味する. 差し込み図は  $s$  波超流動秩序パラメータ  $\Delta_s$ . 今考えているスピン軌道相互作用  $\lambda p_z \sigma_x$  に対しては,  $\mu$  と  $\Delta_s$  はスピン軌道相互作用依存性がない. 図中において, S1, S2, S3 は本論文において時間発展計算の初期値として用いる  $s$  波相互作用の結合定数である; S1:  $(k_F a_s)^{-1} = -1$  (BCS), S2:  $(k_F a_s)^{-1} = 0$  (ユニタリー極限), S3:  $(k_F a_s)^{-1} = 1$  (BEC). (b)  $N_c \equiv \sum_{\mathbf{p}} |\Phi(\mathbf{p}, S = 1, S_z = 1)|^2$ . これが有限の値となることは,  $p$  波対振幅  $\Phi(\mathbf{p}, S = 1, S_z = 1)$  の誘起を意味する.

$$\mathbf{u}_0 \equiv \begin{pmatrix} u_{\mathbf{p},\uparrow}^\alpha \\ u_{\mathbf{p},\downarrow}^\alpha \\ v_{\mathbf{p},\uparrow}^\alpha \\ v_{\mathbf{p},\downarrow}^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(E_{\mathbf{p}}^\alpha + \xi_{\mathbf{p}}^\alpha)}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}^\alpha(E_{\mathbf{p}}^\alpha + \xi_{\mathbf{p}}^\alpha)}} \\ \alpha \frac{p_z}{|p_z|} \frac{(E_{\mathbf{p}}^\alpha + \xi_{\mathbf{p}}^\alpha)}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}^\alpha(E_{\mathbf{p}}^\alpha + \xi_{\mathbf{p}}^\alpha)}} \\ \alpha \frac{p_z}{|p_z|} \frac{\Delta_s}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}^\alpha(E_{\mathbf{p}}^\alpha + \xi_{\mathbf{p}}^\alpha)}} \\ -\frac{\Delta_s}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}^\alpha(E_{\mathbf{p}}^\alpha + \xi_{\mathbf{p}}^\alpha)}} \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

この固有状態から, (3.31) 式, (3.30) 式, および, (3.29) 式を用いて,

$$\Delta_s = \frac{1}{2}g_s \sum_{\mathbf{p}, \alpha=\pm} \frac{\Delta_s}{2E_{\mathbf{p}}^{\alpha}}, \quad (3.35)$$

$$N = \sum_{\mathbf{p}} \left( 1 - \sum_{\alpha=\pm} \frac{\xi_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{2E_{\mathbf{p}}^{\alpha}} \right) \quad (3.36)$$

が得られるが, これらは, 2章で議論した1方向にはたらくスピン軌道相互作用に対するBCS-Leggett理論 [12] で得られた (2.24) 式, および, (2.26) 式と一致する. 図 3.2(a) に, (3.35) 式と (3.36) 式を解いて得られる, 熱平衡における化学ポテンシャル  $\mu$  および  $s$  波超流動秩序パラメータ  $\Delta_s$  の  $s$  波相互作用依存性を示した. また, 「初期状態 ( $t < 0$ )」にある (誘起された)  $p$  波対振幅  $\Phi(\mathbf{p}, S = 1, S_z = 1)$  は, (3.28) 式, (3.30) 式, および, (3.34) 式より,

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{p}, S = 1, S_z = 1) &\equiv \Phi(\mathbf{p}, S = 1, S_z = 1, t) e^{2i\mu t} \\ &= - \sum_{\alpha=\pm} u_{\mathbf{p},\uparrow}^{\alpha} v_{\mathbf{p},\uparrow}^{\alpha*} = - \frac{p_z}{|p_z|} \sum_{\alpha=\pm} \alpha \frac{\Delta_s}{2E_{\mathbf{p}}^{\alpha}}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

図 3.2(b) に, 前章で議論した凝縮粒子数に対応する量  $N_c \equiv \sum_{\mathbf{p}} |\Phi(\mathbf{p}, S = 1, S_z = 1)|^2$  の  $s$  波原子間相互作用依存性も示してある. 3.3 節では図 3.2(a) の S1, S2, S3 を初期状態として  $p$  波相互作用導入後の系の時間発展を調べる.

(3.37) 式の  $p$  波対振幅は,  $p_z$  に比例している. よって,

$$\sum_{\mathbf{p}, L_z=0, \pm 1} \Gamma_{\mathbf{p}, L_z} \Phi(\mathbf{p}, S = 1, S_z = 1) = \sum_{\mathbf{p}} \Gamma_{\mathbf{p}, 0} \Phi(\mathbf{p}, S = 1, S_z = 1) \quad (3.38)$$

が成り立つ. このことから, 有限の  $p$  波超流動秩序パラメータは, ( $L_z = 0$ )-成分の相互作用由来のもののみ残る. これにより, (3.11) 式で与えられる  $p$  波相互作用のみを考えてよい. 第1章でも説明したように,  $p$  波 Feshbach 共鳴の共鳴磁場は  $L_z = 0$  と  $L_z = \pm 1$  とで異なる値をとり得ることから, 実験状況としては,  $t = 0$  において前者の共鳴磁場へと原子間相互作用を変更したと考えればよい.

## 時間発展方程式 ( $t \geq 0$ ) の構成

$t \geq 0$  では (3.34) 式を  $t = 0$  での初期条件として TDBdG 方程式 (3.24) を解く. この時,  $s$  波相互作用  $g_s$ , およびスピン軌道相互作用  $\lambda$  は共にゼロなので, TDBdG 方程式は,

$$i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{p}}(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\mathbf{p}} & 0 & \Delta_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}, t) & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\mathbf{p}} & 0 & 0 \\ \Delta_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{p}, t) & 0 & -\varepsilon_{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{p}}(t), \quad (3.39)$$

となる. (3.39) 式は, 擬スピン↑と擬スピン↓の成分が分離しており, 特に後者については  $p$  波相互作用がはたらかないことから, 自明な解

$$\begin{cases} \tilde{u}_{\mathbf{p},\downarrow}^{\alpha}(t) = u_{\mathbf{p},\sigma}^{\alpha} e^{-i\varepsilon_{\mathbf{p}} t}, \\ \tilde{v}_{\mathbf{p},\downarrow}^{\alpha}(t) = v_{\mathbf{p},\sigma}^{\alpha} e^{i\varepsilon_{\mathbf{p}} t}, \end{cases} \quad (3.40)$$

となる. したがって,  $t \geq 0$  の解析は今の場合実際には, 擬スピン↑の成分のみを考えればよく, その部分を抜き出した TDBdG 方程式は  $2 \times 2$  行列形式となる.

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \tilde{u}_{\mathbf{p},\uparrow}^{\alpha}(t) \\ \tilde{v}_{\mathbf{p},\uparrow}^{\alpha}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\mathbf{p}} & \Delta_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}, t) \\ \Delta_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{p}, t) & -\varepsilon_{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_{\mathbf{p},\uparrow}^{\alpha}(t) \\ \tilde{v}_{\mathbf{p},\uparrow}^{\alpha}(t) \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

(3.41) 式を数値的に解く方法については付録 A にまとめる.

ここでは参考のため, 今回用いる  $p$  波相互作用に対する「熱平衡解」について触れておく. 計算の詳細は付録 B に示すが, 解くべき BdG 方程式は,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu_{\mathbf{p}} & \Gamma_{\mathbf{p},0}^* \Delta_{\mathbf{p}} \\ \Gamma_{\mathbf{p},0} \Delta_{\mathbf{p}} & -(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu_{\mathbf{p}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\mathbf{p},\uparrow} \\ v_{\mathbf{p},\uparrow} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} u_{\mathbf{p},\uparrow} \\ v_{\mathbf{p},\uparrow} \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

(擬スピン↓成分は通常自由粒子系になっている.) ここで  $p$  波超流動秩序パラメータ  $\Delta_{\mathbf{p}}$  は実数と仮定する. また,  $\mu_{\mathbf{p}}$  は熱平衡状態におけるフェルミ原子気体の化学ポテンシャルを表すが, 初期条件 ( $t < 0$  側) で導入した化学ポテンシャル  $\mu$  (スピン軌道相互作用を有する  $s$  波フェルミ原子気体超流動熱平衡状態のもの) と区別するため, 添え字「 $p$ 」を付けている. (3.42) 式の固有エネルギーは

$$E = \pm E_{\mathbf{p}} \equiv \pm \sqrt{\xi_{\mathbf{p}}^2 + |\Gamma_{\mathbf{p},0}^* \Delta_{\mathbf{p}}|^2} \quad (\xi_{\mathbf{p}} \equiv \varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu_{\mathbf{p}}) \quad (3.43)$$



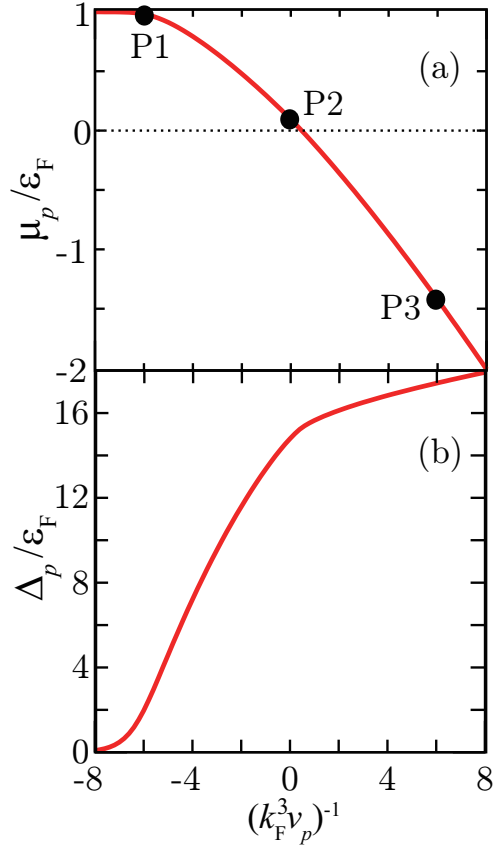


図 3.3:  $T = 0$  の熱平衡  $p$  波超流動基底状態における (a) フェルミ原子の化学ポテンシャル  $\mu_p$ , および, (b) 超流動秩序パラメータ  $\Delta_p$  [12,37].  $v_p$  は散乱体積で  $g_p$  と (3.9) 式で関係付けられる. P1, P2, P3 はそれぞれ  $(k_F^3 v_p)^{-1} = -6$  (BCS),  $(k_F^3 v_p)^{-1} = 0$  (ユニタリー極限),  $(k_F^3 v_p)^{-1} = 6$  (BEC).

であり, 対応する固有状態は,  $E = E_p$  に対して,

$$\begin{cases} u_{p,\uparrow} = \frac{E_p + \xi_p}{\sqrt{2E_p(E_p + \xi_p)}}, \\ v_{p,\uparrow} = -\frac{\Gamma_{p,0}^* \Delta_p}{\sqrt{2E_p(E_p + \xi_p)}}. \end{cases} \quad (3.44)$$

これらから,  $T = 0$  の熱平衡  $p$  波超流動基底状態における, 超流動秩序パラメータ  $\Delta_p$ , および, 化学ポテンシャル  $\mu_p$  を求める方程式が次のようになる.

$$\Delta_p = -4\pi g_p \sum_p \Gamma_{p,0} u_{p,\uparrow} v_{p,\uparrow}^* \quad (3.45)$$

$$N_\uparrow = \sum_p |v_{p,\uparrow}|^2 \equiv \sum_p \tilde{n}_{p,\uparrow}. \quad (3.46)$$

図 3.3 は  $\Delta_p$  および  $\mu_p$  の  $p$  波原子間相互作用依存性である. 次節では  $t \geq 0$  の相互作用と

して図 3.3 の P1, P2, P3 を考える.

最後に, 本章で用いた解析手法 (TDBdG 理論) の適応範囲について述べる. 一般に, TDBdG 理論は, 緩和の効果が考慮されていないため, ある操作に対する応答としての時間発展を解析する際, その操作をした直後の早い時間スケールの振る舞いを見るのに適している. その意味で, 本論文の提案するアイデアの第 2 段階である, 「急激に原子間相互作用を ( $s$  波から  $p$  波に) 変更」した直後の時間発展の振る舞いを解析するのに適した方法である. このような, 物理パラメータの急激な変更を行った後の系の時間発展は, クエンチダイナミクスと呼ばれ, 当該分野あるいは超伝導分野で, 近年盛んに研究されている [119–146]. これらの研究で特に注目されているのは, Higgs モード [147, 148] と呼ばれる, 超流動秩序パラメータの振動に関する現象であるが, 近年, テラヘルツ光を用いた技術で超伝導体における Higgs モードの観測が行われた [149, 150]. この実験では, まず薄い膜状の ( $s$  波) 超伝導体にテラヘルツ光をパルス的に照射し, 超伝導基底状態を瞬時に励起する. そして, 膜の電磁場応答を観測し, 超伝導秩序パラメータの時間変化と対応させるというものである. このとき, 文献 [149, 150] では, 実験で得られた超流動秩序パラメータの振動データと TDBdG 理論の計算とを比較しているが, TDBdG 理論の計算が, 超伝導基底状態の励起に用いたテラヘルツ光の照射直後から比較的早い時間スケールの振動をよく記述しており, 上述したような時間発展の初期段階の記述に TDBdG が適していることに符合している.

### 3.3 1 方向にはたらくスピン軌道相互作用により誘起された $p$ 波対振幅を初期値とする $p$ 波超流動秩序パラメータの時間発展

図 3.4~図 3.6 は, 引力相互作用を  $s$  波から  $p$  波に変えた後 ( $t \geq 0$ ) の  $p$  波超流動秩序パラメータ  $\Delta_p(t)$  の時間発展である. (スピン軌道相互作用もゼロにしてある.) この 3 つの図では初期状態として図 3.2 の S1~S3 (弱結合, 中間結合, 強結合),  $t \geq 0$  の相互作用強度としては図 3.3 の P1~P3 (弱結合, 中間結合, 強結合) を考え, その全ての組み合わせに対し,  $\Delta_p(t)$  がどの程度作り出せるか調べている. 横軸は, フェルミエネルギーで無次元化した時間  $t\varepsilon_F$  であり, フェルミ原子気体のフェルミエネルギーの典型的な値  $\varepsilon_F = 1\mu\text{K}$  に対し,  $t\varepsilon_F = 1$  は  $10^{-2}$  ms に相当する. この値を用いると, 図の横軸において, 本研究で無視した  $p$  波 Cooper 対の寿命によって決まる緩和時間  $5\sim 20$  ms は,  $500 \lesssim t\varepsilon_F \lesssim 2000$  であるため, 仮に緩和の効果を考えた場合,  $t\varepsilon_F \simeq 500$  程度から支配的になると考えられる. そのため本章の解析が妥当と判断される,  $t\varepsilon_F \ll 500$  に対し, 全ての結果を図示している. 図 3.4~図 3.6 の結果において, 図 3.4(a), 図 3.4(b) の S2→P1 および S3→P1, 図 3.4(c) の

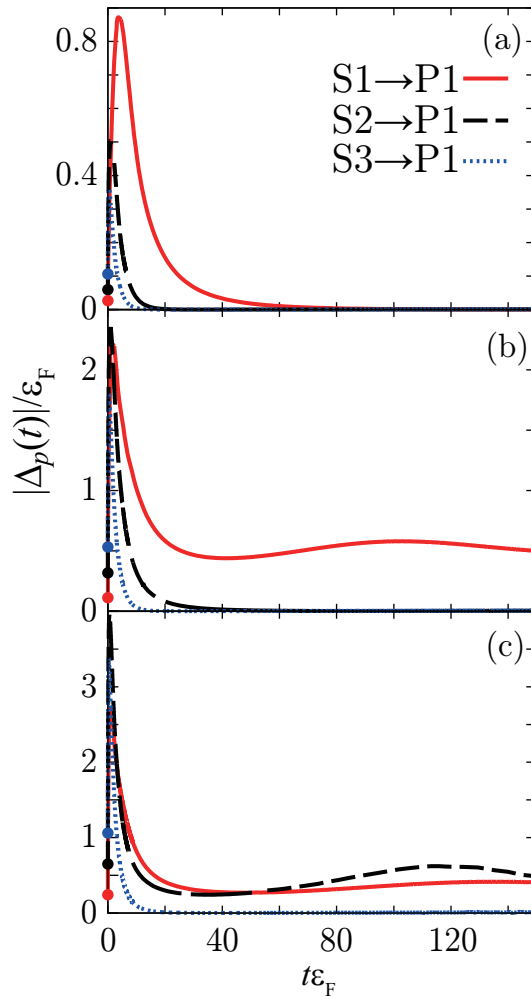


図 3.4: 相互作用を  $s$  波から  $p$  波にかえた ( $t = 0$ ) 後の  $p$  波超流動秩序パラメータの時間発展. 全てにおいて,  $p$  波原子間相互作用は  $p$  波原子間相互作用を弱結合 BCS 側に操作している (図 3.3 における P1). 初期状態としては, 図 3.2(a) にある S1, S2, S3 の  $s$  波相互作用で実現する熱平衡  $s$  波超流動を用意し, スピン軌道相互作用, (a)  $\lambda/v_F = 0.1$ , (b)  $\lambda/v_F = 0.5$ , (c)  $\lambda/v_F = 1$  である. 図中の丸は  $t = 0$  の値.

S3→P1 以外は,  $p$  波超流動秩序パラメータ  $\Delta_p(t)$  は  $t\varepsilon_F = 0$  における有限の初期値から出発して,  $t\varepsilon_F \simeq 1$  程度までの時間に急速に成長・減衰し, その後  $t\varepsilon_F \gg 1$  でも有限に残ることが分かる. 前述したように, 従来の方法における  $p$  波フェルミ原子気体超流動実現の困難さは超流動状態とみなせる凝縮体に成長するまでに必要な時間 ( $= \mathcal{O}(100 \text{ ms})$ ) に対し, 系の寿命が  $5 \sim 20 \text{ ms}$  ( $t\varepsilon_F \simeq 10^3$ ) と短いため, 超流動秩序パラメータが生成されないことにあるが, 図 3.4 に見られるいくつかの場合を除き, 系の寿命内に十分な大きさの  $p$  波超流動秩序パラメータをこの方法は作り出すことができることを示している. ちなみに凝縮体の成長に必要な時間  $\sim 100 \text{ ms}$  は図 3.4~図 3.6 のスケールでは,  $t\varepsilon_F = \mathcal{O}(10^4)$  である.

これに対し, 図 3.4 に対し上で述べたいくつかの場合 (例えば図 3.4(a) の S2→P1) は  $p$  波相互作用印加直後は  $t = 0$  の値 (図中丸印) から急速に増大するが, その後急減し,  $t\varepsilon_F \simeq 20$

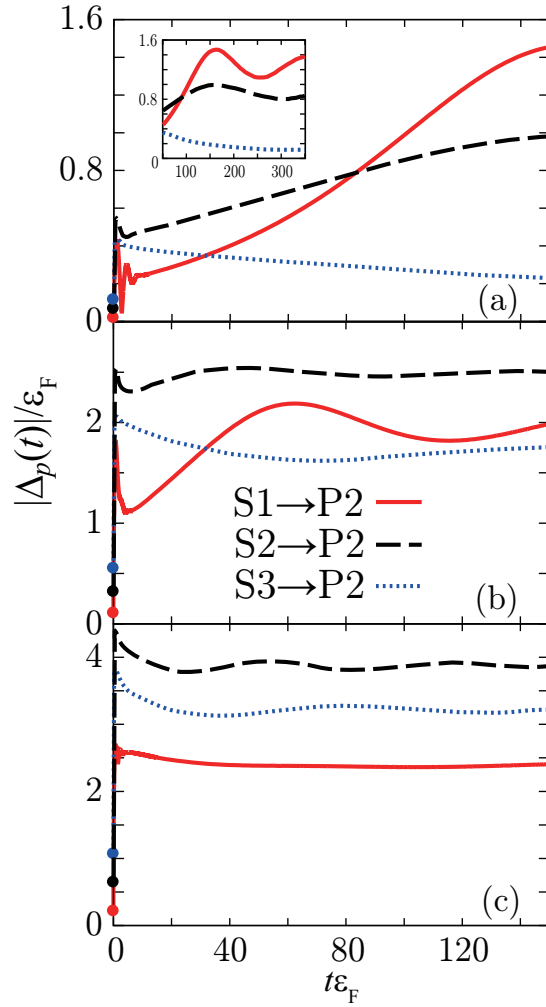


図 3.5: 図 3.4 と同じであるが,  $p$  波原子間相互作用は中間結合に操作した場合 (図 3.3 における P2). (a) の差し込み図は, ここに図示しなかった (a) のより長時間の振る舞い.

でほぼ  $|\Delta_p(t)| = 0$  となる. 従って,  $p$  波相互作用印加後  $t \lesssim 10^{-1}$  ms ( $t\epsilon_F \simeq 10$ ) 程度の時間内で測定しない限り, この場合  $p$  波超流動状態は検出できない.

図 3.4~図 3.6 の結果から本論文が提案する方法で  $p$  波超流動秩序パラメータ  $\Delta_p(t)$  で特徴付けられる  $p$  波超流動を作り出せることが分かったが, 同時にそれは常に可能ではないことも明らかとなった. そこでどのような場合に今回の提案で  $p$  波超流動が実現できるかを明らかにするために,  $50 \leq t\epsilon_F \leq 100$  の時間領域で  $p$  波超流動秩序パラメータの大きさ  $|\Delta_p(t)|$  を時間平均化した量  $\Delta_p^{\text{ave}}$  を考える.

$$\Delta_p^{\text{ave}} \equiv \frac{1}{50} \int_{50}^{100} dt |\Delta_p(\tilde{t})| \quad (\tilde{t} \equiv t\epsilon_F). \quad (3.47)$$

(3.47) 式の時間平均化の理由は, 図 3.4~図 3.6 の  $t\epsilon_F \gg 1$  における  $|\Delta_p(t)| \neq 0$  となる典型的な値を評価するためである. まず, 図 3.4 および図 3.5 の結果から,  $|\Delta_p(t\epsilon_F \gg 1)| \neq 0$

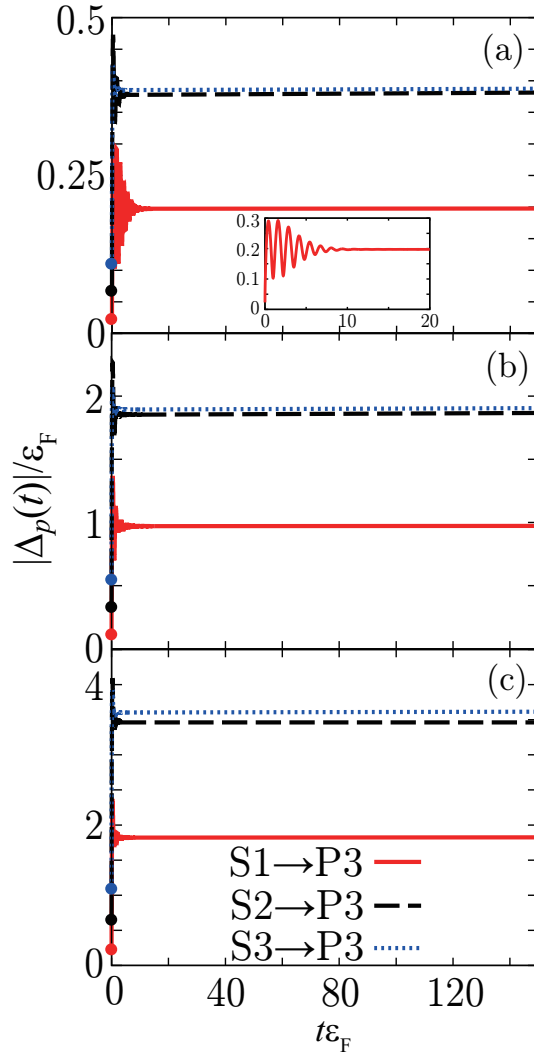


図 3.6: 図 3.4 と同じであるが,  $p$  波原子間相互作用を強結合 BEC 側に操作した場合 (図 3.3 における P3). (a) の差し込み図は,  $(k_F a_s)^{-1} = -1$  (S1, (a) の赤線) の場合の,  $|\Delta_p(t)|$  の  $t \sim 0$  近傍における振る舞いを拡大したもの.

異なる周期の振動を有するため, ある時刻での  $|\Delta_p(t)|$  の値を使うことはできない. 次に図 3.4 および図 3.5 の  $|\Delta_p(t \gg 1)| \neq 0$  の振動は, おおよそ  $t\epsilon_F = 50$  を始点とした余弦型のため, これを時間平均の下限とし, これより  $|\Delta_p(t\epsilon_F \gg 1)| \neq 0$  の振動の半周期程度を含みかつ先述した緩和の効果が支配的となりはじめる  $t\epsilon_F \simeq 500$  より充分短い時間上限として,  $t\epsilon_F = 100$  を選んだ.  $\Delta_p^{\text{ave}}$  は, 図 3.6 の場合にはほぼ  $|\Delta_p(t)|$  の  $t\epsilon_F = +\infty$  の値を与えるが, 図 3.4, 図 3.5 ではまだこの領域の  $|\Delta_p(t)|$  には振動が見られるため,  $\Delta_p^{\text{ave}} \neq \Delta_p(\infty)$  ではあるが,  $\Delta_p^{\text{ave}}$  が有限に残るか否かを見る上では, この量は有効な目安となる量である. (3.47) 式で表される  $\Delta_p^{\text{ave}}$  を, 相互作用変更後の様々な  $p$  波原子間相互作用強度に対して計算したものが, 図 3.7 である. この図において,  $\Delta_p^{\text{ave}}$  が有限の値であれば, 本論文の提案は少なくとも理論的には機能していると考えられる.

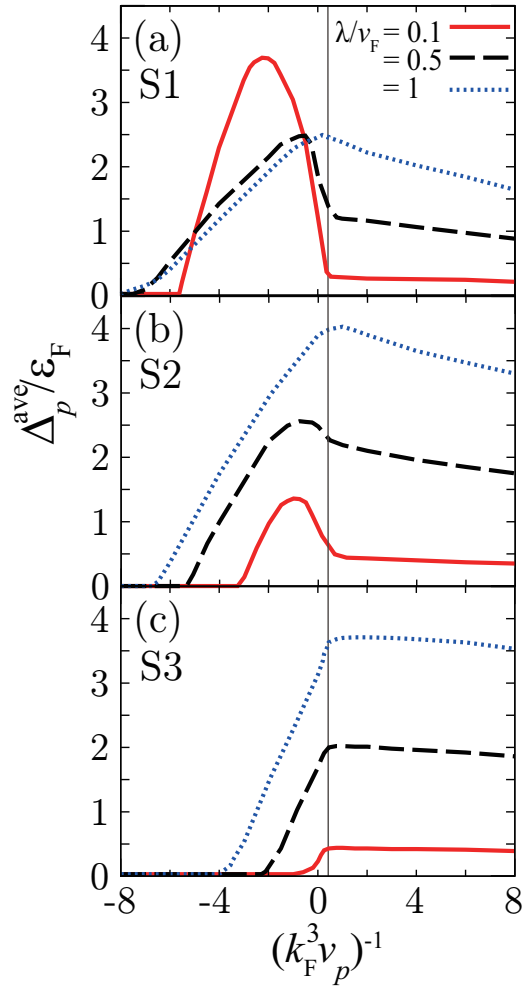


図 3.7:  $p$  波超流動秩序パラメータ  $\Delta_p(t)$  の  $50 \leq \tilde{t} \equiv t\varepsilon_F \leq 100$  での平均値  $\Delta_p^{\text{ave}}$ . 初期状態は, (a):  $(k_F a_s)^{-1} = -1$  (図 3.2(a) S1). (b):  $(k_F a_s)^{-1} = 0$  (図 3.2(a) S2). (c):  $(k_F a_s)^{-1} = 1$  (図 3.2(a) S3).  $(k_F^3 v_p)^{-1} \simeq 0.447$  の縦線は,  $T = 0$  の熱平衡  $p$  波超流動基底状態における量子相転移を起こす相互作用強度 [37] であり, この線の左側では  $\mu_p > 0$ , 右側では  $\mu_p < 0$  となる.

図 3.7 は (3.47) 式で与えられる  $\Delta_p^{\text{ave}}$  の  $p$  波相互作用依存性である. この結果から, どのような初期条件 (S1, S2, S3) から出発しても弱結合側  $(k_F^3 v_p)^{-1} \lesssim -7$  の領域では本論文の提案で  $p$  波超流動状態を作り出すのは難しいことが分かる. 他方強結合側は, 初期条件でのスピン軌道相互作用  $\lambda$  が強い程  $p$  波超流動秩序パラメータ  $\Delta_p^{\text{ave}}$  も大きい. また, 強結合側の  $\Delta_p^{\text{ave}}$  の  $p$  波相互作用依存性は, 初期条件の  $s$  波相互作用が強い程, なくなる傾向にある. 図 3.7(c) では図に示す相互作用の範囲のうち,  $0 \leq (k_F^3 v_p)^{-1} \leq 8$  では  $\Delta_p^{\text{ave}}$  の  $p$  波相互作用依存性は図 3.7(a), (b) に比べ弱い.

図 3.7(a) の弱結合  $(k_F^3 v_p)^{-1} \leq 0$  の領域では,  $\lambda/v_F = 0.1, 0.5$  の時,  $\Delta_p^{\text{ave}}$  は  $p$  波相互作用依存性に関しピーク構造を示し, その結果スピン軌道相互作用が小さい  $\lambda/v_F = 0.1$  の方が,  $\lambda/v_F = 1$  より大きな  $p$  波超流動秩序パラメータ  $\Delta_p^{\text{ave}}$  が得られる領域が現れる. また,

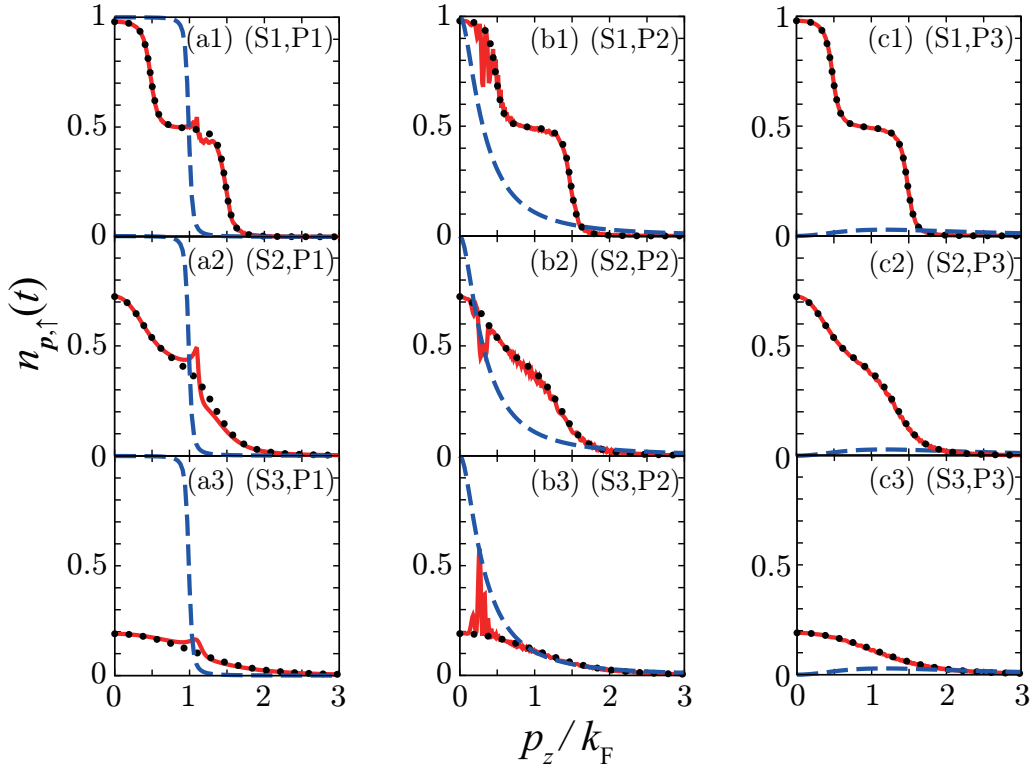


図 3.8:  $\lambda/v_F = 0.5$  における  $\mathbf{p} = (0, 0, p_z)$  に対する粒子数密度の運動量分布  $n_{p,\uparrow}(t)$ . 赤線:  $t_{\epsilon_F} = 100$ . 黒点線:  $t_{\epsilon_F} = 0$ . 青破線: 熱平衡状態にある  $p$  波超流動の結果. 図中 (S1,P1) 等は例えば初期状態として S1 の状態 (図 3.2) を選び  $t \geq 0$  に相互作用を P1 の値 (図 3.3) に変化させた場合を意味する.

$\lambda/v_F = 0.1$  の時の  $\Delta_p^{\text{ave}}$  は, 強結合側から  $p$  波相互作用を下げていくと熱平衡状態での化学ポテンシャル  $\mu_p$  が負から正に変わるところ ( $(k_F^3 v_p)^{-1} \simeq 0.447$ ) から急激に増大している. この  $\mu_p$  の符号が変わるところでは, 図 3.7(b), (c) でも  $\Delta_p^{\text{ave}}$  の相互作用依存性に変化が見られ, これらの結果は, 生成される  $\Delta_p^{\text{ave}}$  の大きさは単に  $t < 0$  で用意される  $p$  波対振幅の大きさだけでなく,  $t \geq 0$  側の  $p$  波超流動状態における粒子の分布関数にも依っていることを示唆している.

図 3.8 は  $t_{\epsilon_F} = 100$  における粒子数分布  $n_{p,\uparrow}(t)$  ( $\mathbf{p} = (0, 0, p_z)$ ) の運動量依存性である. この運動量方向は実現している  $p$  波超流動秩序パラメータ  $\Delta_p(\mathbf{p}, t) \propto p_z$  が有限な値をとる方向である. 図は初期条件  $\lambda/v_F = 0.5$  に対し, (S1, S2, S3) から (P1, P2, P3) に変化させる全ての組み合わせの結果を示しているが, いずれの場合も  $\Delta_p(t)$  があるにも関わらず細かい構造の変化はあるものの  $t = 0$  の粒子数分布から大きな変化はない. この  $t = 0$  の粒子数分布は  $s$  波超流動状態の熱平衡状態の粒子数分布であり (図 3.8 中黒点線),  $p$  波超流動熱平衡状態での粒子数分布 (図 3.8 中青破線) とは大きく異なる. このことは,  $t \geq 0$  では  $\Delta_p(t)$  が有限になることで, 系自体は  $p$  波超流動状態となっているものの, それは熱平衡状態 ( $T = 0$  では基底状態) からはかなり異なる励起状態であることを示している. 実

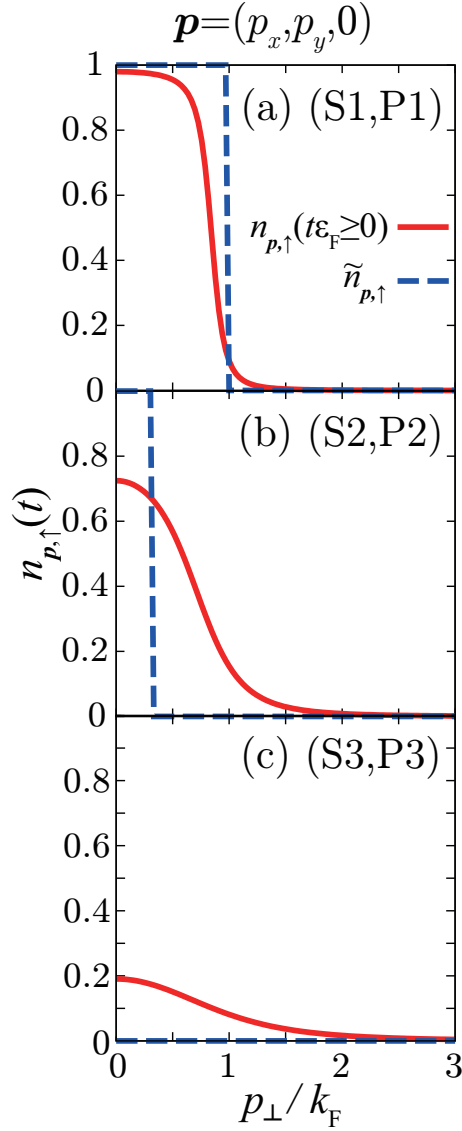


図 3.9:  $\lambda/v_F = 0.5$  における  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, 0)$  ( $p_{\perp} \equiv \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ ) 方向の粒子数密度  $n_{\mathbf{p},\uparrow}(t \in \mathbb{R}_{\geq 0})$  (赤線). 青破線は熱平衡  $p$  波超流動基底状態の粒子数分布  $\tilde{n}_{\mathbf{p},\uparrow}$ .

際, 図 3.4~図 3.6 に示す  $\Delta_p(t)$  の大きさは, 図 3.3(b) に示した基底状態での値より小さく, このことは励起状態であるために,  $p$  波超流動秩序パラメータが抑制されていることを示している. 現実には系は基底状態に緩和していくが, TDBdG はエネルギーが保存しており, その緩和プロセスが記述できないため, 系の励起状態のままになる. ただし, 冷却原子気体の凝縮体の成長時間から, この緩和は  $\mathcal{O}(100 \text{ ms})$  と評価され, 3 体衝突等による系の寿命が  $5 \sim 20 \text{ ms}$  であることから, 実験的に観測される時間内では, 今回の方法で実現する  $p$  波超流動は TDBdG で得られる  $p$  波超流動の励起状態になるであろうと予想される.

図 3.9 は実現している  $p$  波超流動秩序パラメータ  $\Delta_p(\mathbf{p}, t) \propto p_z$  がゼロとなる  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, 0)$  方向の粒子数分布 ( $t > 0$ ) である. この方向は  $\Delta_p(\mathbf{p}, t) = 0$  を反映し, TDBdG



表 3.1: 相互作用を  $s$  波から  $p$  波に変えた際の実現する  $\Delta_p^{\text{ave}}$  (図 3.7 を参照) と熱平衡状態での値  $\Delta_p$  (図 3.3(b) を参照) の比較 ( $\lambda/v_F = 0.5$ ).

$(k_F a_s)^{-1}$	$(k_F^3 v_p)^{-1}$	$\Delta_p/\varepsilon_F$	$\Delta_p^{\text{ave}}/\varepsilon_F$
-1	-6	1.99	0.48
0	0	14.8	2.50
1	6	17.4	1.89

方程式 (3.41) は

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \tilde{u}_{\mathbf{p},\uparrow}^\alpha(t) \\ \tilde{v}_{\mathbf{p},\uparrow}^\alpha(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & -\varepsilon_{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_{\mathbf{p},\uparrow}^\alpha(t) \\ \tilde{v}_{\mathbf{p},\uparrow}^\alpha(t) \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

となり, これは解析的に解けて, 自由粒子系と同じ結果

$$\begin{cases} \tilde{u}_{\mathbf{p},\uparrow}^\alpha(t) = u_{\mathbf{p},\uparrow}^\alpha e^{-i\varepsilon_{\mathbf{p}}t}, \\ \tilde{v}_{\mathbf{p},\uparrow}^\alpha(t) = v_{\mathbf{p},\uparrow}^\alpha e^{i\varepsilon_{\mathbf{p}}t}, \end{cases} \quad (3.49)$$

を得る. これを (3.29) 式に代入すると

$$n_{\mathbf{p},\uparrow}(t) \equiv \frac{1}{2} \sum_{\alpha=\pm} |\tilde{v}_{\mathbf{p},\uparrow}^\alpha(t)|^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=\pm} |v_{\mathbf{p},\uparrow}^\alpha|^2 \equiv n_{\mathbf{p},\uparrow}(0) \quad (3.50)$$

となり, 粒子数分布は時間依存性がなくなる. つまり  $t < 0$  で用意された熱平衡状態にある  $s$  波超流動の粒子数分布が  $t > 0$  でも TDBdG の範囲ではずっとそのまま残ることになる. 結果, 本来  $p$  波超流動の基底状態に期待される粒子数分布 (図 3.9 中青破線) とは異なる粒子数分布が, この方向でも実現することになる.

もし粒子数分布  $n_{\mathbf{p},\uparrow}(t)$  が与えられた  $p$  波相互作用の熱平衡状態のそれに一致するならば, 図 3.3 に示す  $\Delta_p$  が得られるはずである. しかし実際には, 表 3.1 に示すように今回の方法で得られる  $\Delta_p^{\text{ave}}$  はその値より小さく, また, 本章で図示した粒子数分布  $n_{\mathbf{p},\uparrow}(t\varepsilon_F = 100)$  が, ほとんど初期分布  $n_{\mathbf{p},\uparrow}(0)$  から時間変化していないことから, 先述した緩和の効果が支配的になり始める  $t\varepsilon_F \simeq 500$  までに,  $n_{\mathbf{p},\uparrow}(t)$  が  $p$  波超流動の熱平衡状態 (基底状態) の分布  $\tilde{n}_{\mathbf{p},\uparrow}$  へ時間発展と共に近づくことは期待できない. 従って, 今回の方法でできるだけ大きな  $p$  波超流動秩序パラメータを得るには, 初期条件で用意された  $s$  波超流動状態の粒子数分布  $n_{\mathbf{p},\uparrow}(0)$  の時点で, 相互作用を  $p$  波に変えた際, その相互作用で熱平衡状態に達した際期待される粒子数分布  $\tilde{n}_{\mathbf{p},\uparrow}$  に近くなるようにすれば良いことが考えられる. これを確認するために, 図 3.7(a) の  $\lambda/v_F = 0.1$  (赤線) の場合について, いくつかの相互作用において粒子数分布をプロットしたものが図 3.10 である.  $p$  波相互作用をパネル (a) における  $A \rightarrow B \rightarrow C$  の順に強くしていくと, 確かに  $\Delta_p^{\text{ave}}/\Delta_p$  が急増する  $A \rightarrow B$  において,  $t\varepsilon_F = 100$

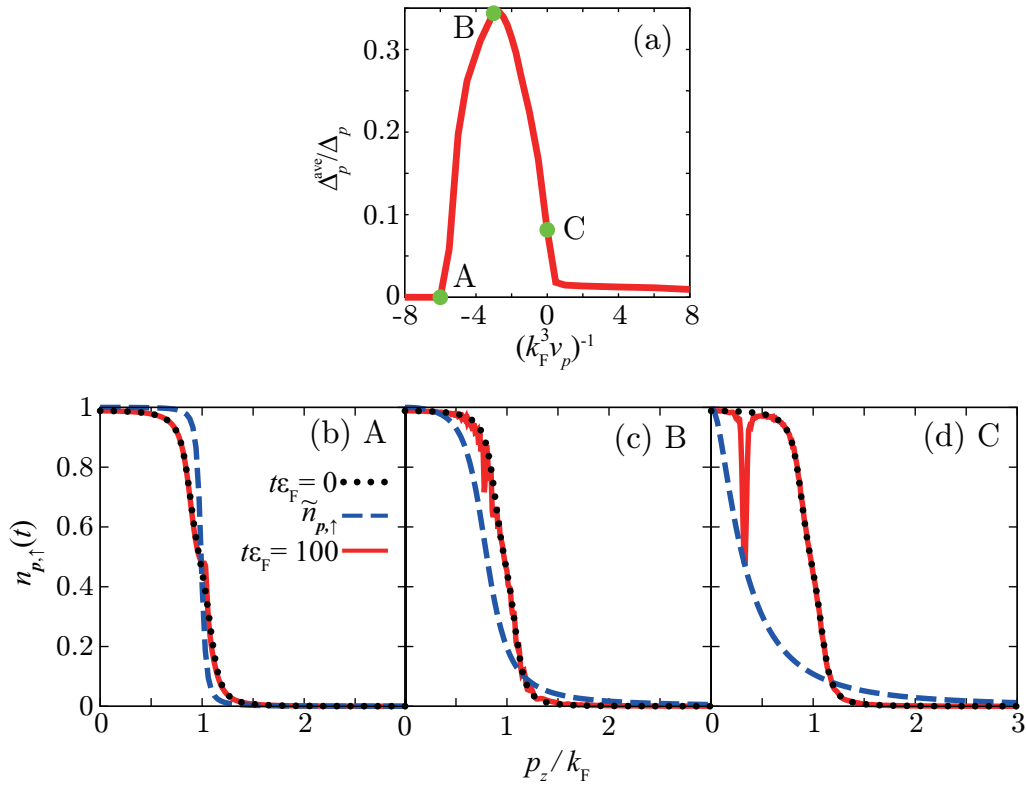


図 3.10: (a) (3.47) 式で与えられる  $\Delta_p^{\text{ave}}$  を熱平衡  $p$  波超流動秩序パラメータ  $\Delta_p$  (図 3.3(b) を参照) でスケールしたもの.  $\lambda/v_F = 0.1$ ,  $(k_F a_s)^{-1} = -1$ . (b)~(d):  $\lambda/v_F = 0.1$ ,  $(k_F a_s)^{-1} = -1$  の場合の  $\mathbf{p} = (0, 0, p_z)$  方向における粒子数密度  $n_{\mathbf{p},\uparrow}(t)$ .  $p$  波原子間相互作用強度は, (b)  $(k_F^3 v_p)^{-1} = -6$ , (c)  $(k_F^3 v_p)^{-1} = -3$ , (d)  $(k_F^3 v_p)^{-1} = 0$  である. (b)~(d) において,  $t\varepsilon_F = 100$  での  $n_{\mathbf{p},\uparrow}(t)$  が, 赤い実線.  $n_{\mathbf{p},\uparrow}(0)$  (初期分布) が黒の点線. 熱平衡  $p$  波超流動基底状態の分布  $\tilde{n}_{\mathbf{p},\uparrow}$  ((3.46) 式を参照) が青破線.

での粒子数分布  $n_{\mathbf{p},\uparrow}(t)$  は熱平衡状態になった際の分布 (青破線) をよぎることが (b)→(c) から分かる. 同時に  $t\varepsilon_F = 100$  での  $n_{\mathbf{p},\uparrow}(t)$  は図 3.8 でも見たとおり  $t\varepsilon_F = 0$  の「初期分布」にほぼ等しく,  $n_{\mathbf{p},\uparrow}(t\varepsilon_F = 100)$  と  $\tilde{n}_{\mathbf{p},\uparrow}$  の類似性はこの初期分布でほぼ決まってしまう.  $p$  波相互作用を更に強くして B→C に移動すると, (c)→(d) に示すように, 粒子数分布  $n_{\mathbf{p},\uparrow}(t\varepsilon_F = 100)$  は  $\tilde{n}_{\mathbf{p},\uparrow}$  と大きくずれ, (a) に示すように  $\Delta_p^{\text{ave}}/\Delta_p$  も小さくなる.

前述したように図 3.7 から  $p$  波の強結合側では  $\Delta_p^{\text{ave}}$  はスピン軌道相互作用が大きい程大きく, また,  $p$  波相互作用の強度依存性も特に図 3.7(c) では小さい. この領域では,  $\mu_p < 0$  であるため (この図の  $(k_F^3 v_p)^{-1} \simeq 0.447$  にひかれた垂直線が  $\mu_p = 0$  の位置である), 粒子数分布は熱平衡状態では運動量空間に広がったものになっており, 弱結合側 ( $\mu_p > 0$ ) のような階段関数的振る舞いは示さない. 一方初期分布を与える  $s$  波超流動状態の粒子数分布も特に図 3.7(c) の場合は強結合 BEC 側 ( $\mu < 0$ ) であるため, やはり運動量空間で広がっており, ある意味両者の粒子数分布は似た構造となる. この類似性により, この領域では大きなスピン軌道相互作用で初期に用意された  $p$  波対振幅が大きければ, 大きな  $\Delta_p^{\text{ave}}$  が

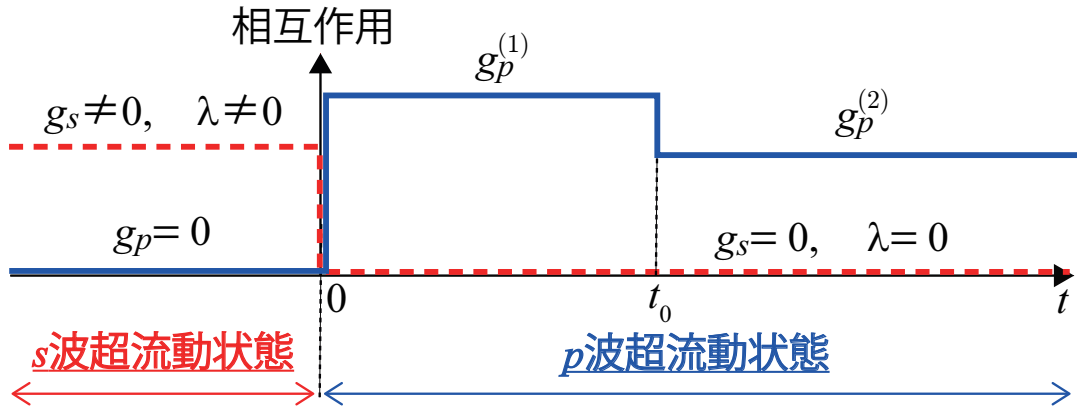


図 3.11: 相互作用の変更を2回行う過程. 先ず  $t = 0$  で今までと同様に  $s$  波相互作用を  $p$  波相互作用に変更, 生じた  $p$  波超流動秩序パラメータの時間発展がほとんどなくなった状態で再度時刻  $t_0$  で  $p$  波相互作用を弱結合側の値に変更 ( $g_p^{(1)} \rightarrow g_p^{(2)}$ ) し, 弱結合領域でも  $p$  波超流動が作れるか検証する.

得られると考えられる. 一方で,  $p$  波相互作用依存性は弱結合側に比べ顕著ではないが, このことは強結合側では相互作用の値により上述の粒子数分布の類似性が  $\Delta_p^{\text{ave}}$  の大きさにとって重要であることを示唆している.

図 3.4~図 3.7 で見たように, 弱結合領域  $(k_F^3 v_p)^{-1} \lesssim -7$  では  $p$  波超流動秩序パラメータは相互作用を  $s$  波から  $p$  波に変えた直後以外は消滅してしまう. これに関し,  $p$  波超流動において  $p$  波の相互作用を変化させた際のダイナミクスの研究が行われており [134], それによると,  $p$  波強結合領域から  $p$  波弱結合領域にクエンチした際有限な  $p$  波超流動秩序パラメータが残ることが報告されている. 実際にこの状況を計算すると付録 B に示すように弱結合側に相互作用を変化させた後も有限な  $p$  波超流動秩序パラメータが得られることが確認できる. このことから, 1つのアイデアとして, まず  $s$  波相互作用を  $p$  波の強結合領域の相互作用に変更, 充分大きな値の  $p$  波超流動秩序パラメータが生成された後, 更に  $p$  波相互作用を弱結合側に変化させれば, 図 3.7 で  $p$  波超流動秩序パラメータがほとんどゼロとなっている領域でも有限な  $p$  波超流動秩序パラメータが得られるかもしれない.

ここではその可能性を検証するため, 図 3.11 のような相互作用の時間調整を行い,  $\Delta_p(t)$  の時間発展を計算してみる.  $p$  波相互作用はこの場合,

$$U_p(\mathbf{p}, \mathbf{p}', t) \equiv -4\pi G_p(t) \Gamma_{\mathbf{p},0}^* \Gamma_{\mathbf{p}',0}, \quad (3.51)$$

$$G_p(t) \equiv \begin{cases} g_p^{(1)} & (0 \leq t \leq t_0), \\ g_p^{(2)} & (t \geq t_0), \end{cases} \quad (3.52)$$

のようにとる.  $t_0$  は  $t_{0\varepsilon_F} = 20$  とし,  $0 \leq t_{\varepsilon_F} \leq 20$  での  $p$  波相互作用は強結合領域の

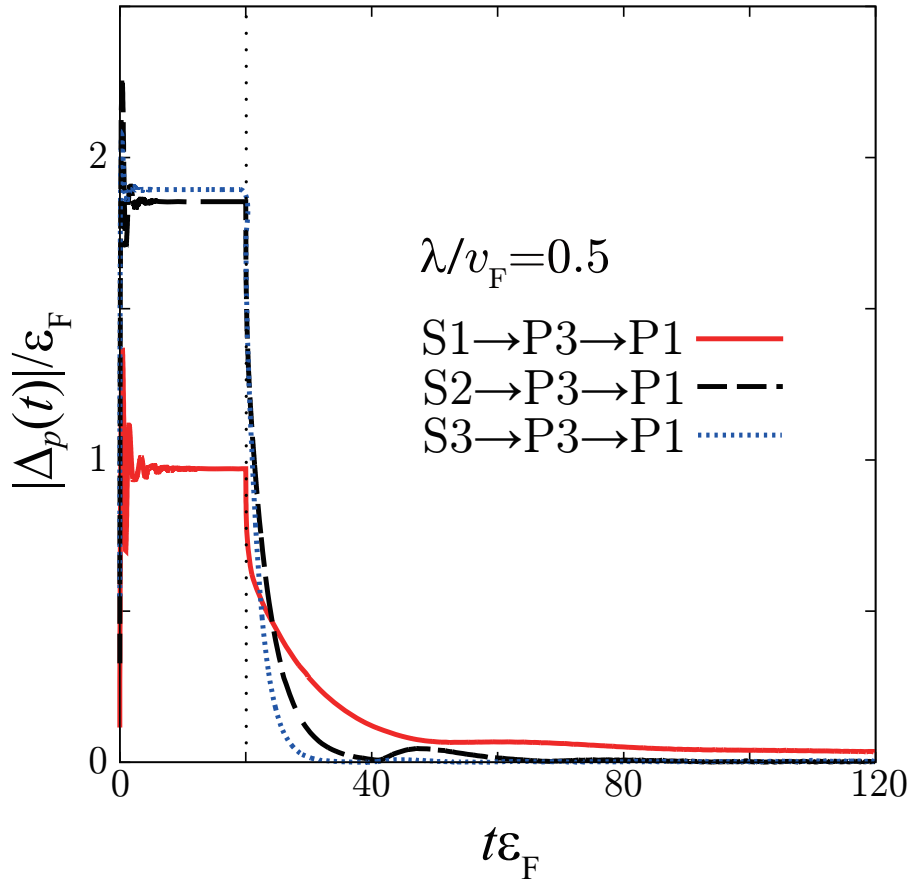


図 3.12: 図 3.11 の手順で相互作用を変化させた場合の  $p$  波超流動秩序パラメータ  $\Delta_p(t)$  の時間依存性 ( $\lambda/v_F = 0.5$ ).  $t_0\varepsilon_F = 20$  (縦方向の点線) において相互作用を 2 回目に変更する.

$(k_F^3 v_p)^{-1} = 6$  (図 3.3(b) の P3) とする. そして  $t\varepsilon_F \geq 20$  に対しては  $(k_F^3 v_p)^{-1} = -6$  (図 3.3(b) の P1) の値を用いる.

図 3.12 に計算結果を示す. 予想に反し, 強結合  $p$  波 (P3) から弱結合  $p$  波 (P1) へのクエンチを行うと,  $0 \leq t\varepsilon_F \leq 20$  で安定的に存在していた  $\Delta_p(t)$  は急減し, 付録 B に示す強結合  $p$  波から弱結合  $p$  波へのクエンチの結果から期待されるように大きな  $p$  波超流動秩序パラメータを得ることはできなかった. その理由は, 図 3.13 に示すように,  $t\varepsilon_F = 100$  における粒子数分布  $n_{p,\uparrow}(t)$  は 2 回目の相互作用の変更を行った  $t\varepsilon_F = 20$  でのそれとほとんど同じで, 熱平衡状態にあるとした場合の  $p$  波超流動での粒子数分布とはかけ離れたままであることに因る.

TDBdG の解析が基底状態への緩和を記述できないため図 3.12 のような結果となったが, 初期状態として用意した熱平衡  $s$  波超流動状態が,  $t > 0$  において  $p$  波超流動状態へと「緩和」していく過程が理論に取り込めたとすると, ある程度の時間経過後, 粒子数密度や  $p$  波超流動秩序パラメータは, 熱平衡  $p$  波超流動状態のそれらへと近づくはずである. そのうえで, 再度  $p$  波相互作用を変化させれば今回の計算結果より, 大きな値になると期待

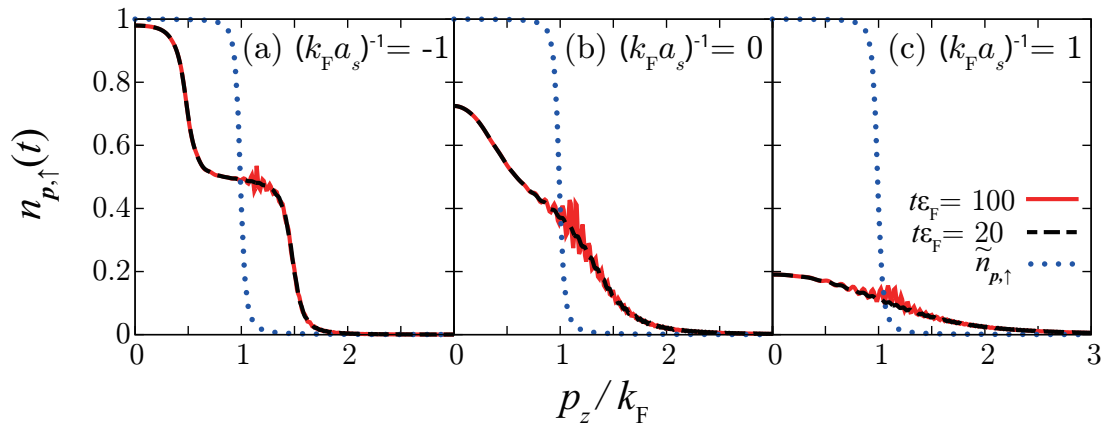


図 3.13: 図 3.12 で時間発展を行った際の粒子数密度  $n_{\mathbf{p},\uparrow}(t)$  と熱平衡  $p$  波超流動基底状態との比較. 初期状態として  $\lambda/v_F = 0.5$  を用意する.  $t\varepsilon_F = 20$  での  $n_{\mathbf{p},\uparrow}(t)$  は黒破線.  $t\varepsilon_F = 100$  での  $n_{\mathbf{p},\uparrow}(t)$  は赤線. 青点線は  $p$  波超流動が熱平衡になった場合の粒子数分布  $\tilde{n}_{\mathbf{p},\uparrow}$  (3.46) 式.

される. 3 体衝突による粒子の損失も併せ, 系の基底状態への緩和過程を取り込んだ時間発展を考えることは本研究にとって今後の大きな課題である.



## 第4章 まとめ

本論文では、極低温フェルミ原子気体において未だ実現されていない  $p$  波超流動状態を実現する新しい方法を理論的に提案し、それが現在の実験技術の範囲内で実現可能であることを理論的に示した。通常、 $p$  波フェルミ原子気体超流動の実現を目指す研究では、 $p$  波相互作用を有するフェルミ原子気体を冷却、超流動転移温度以下の状態にしようとするが、実際には  $p$  波引力相互作用がもたらす 3 体衝突などにより  $p$  波対凝縮体が充分成長する前に系自体が崩壊してしまうという困難が立ちほだかり、現在に至るまでこれを克服する方法が見つかっていない。本研究はこの問題を 2 段階の手順を踏むことで回避する方法を提案した。まず第 1 段階で、 $p$  波相互作用を用いずに、 $s$  波フェルミ原子気体超流動状態において、空間反転対称性を破るスピン軌道相互作用を用いて  $p$  波対振幅だけを誘起させる。この時、 $p$  波相互作用はないので、それに伴う 3 体の粒子ロスが起こらない。また、秩序パラメータ自体は  $s$  波のままなので系は  $s$  波超流動である。この状態に対し、第 2 段階として、原子間相互作用を  $s$  波対称性のものから  $p$  波対称性のものへと急激に変更し、印加された  $p$  波相互作用と第 1 段階で用意しておいた  $p$  波対振幅との積が有限な  $p$  波超流動秩序パラメータを与え、結果として系はこの秩序パラメータで特徴付けられた  $p$  波超流動状態になる。このアイデアにおける「空間反転対称性を破るスピン軌道相互作用」は近年冷却原子気体研究の分野で可能となった人工ゲージ場の技術を使ってすでに実現しており、また、「相互作用を  $s$  波から  $p$  波に変換」することも Feshbach 共鳴の技術を用い共鳴磁場を  $s$  波のそれから  $p$  波の共鳴磁場近くに変えることで実験的に可能である。もちろん  $p$  波相互作用印加後、系は従来と同様 3 体ロスなどにより崩壊するが、本論文で提案された方法は、相互作用を  $p$  波に変更した直後から  $p$  波超流動になるので、少なくともこの操作を行った直後は  $p$  波超流動であると云える。

本論文の前半では、上述のアイデアの第 1 段階部分の理論的検証を行った。スピン軌道相互作用を有する  $s$  波フェルミ原子気体超流動状態において、 $p$  波対振幅がどの程度誘起されるかを  $T = 0$  で BCS-Leggett 理論の枠組みで研究、 $s$  波相互作用強度およびスピン軌道相互作用強度に対して、大きな  $p$  波対振幅が誘起される領域を特定した。また、この領域における  $s$  波超流動相への超流動転移温度を Nozières と Schmitt-Rink による BCS-BEC クロスオーバー理論 (NSR 理論) をスピン軌道相互作用がある場合に拡張し調べ、現在の実験技術でも充分到達可能であることを示した。

本論文の後半では、アイデアの後半部分、すなわち原子間相互作用を  $s$  波対称性のもの

から  $p$  波対称性のものへと急峻に変更した後に, 本当に  $p$  波超流動が生成され, かつ安定に存在できるのかを時間依存 Bogoliubov de-Gennes 理論 (TDBdG) を用い  $T = 0$  で研究した. 結果,  $p$  波超流動秩序パラメータが, 時間発展とともに消えずに残る場合があることを明らかにし, 更に, 大きな  $p$  波超流動秩序パラメータが得られる条件も理論的に明らかにした. 以上より, 前半部分の研究結果と併せ, 本論文で提案された方法により, 実際に  $p$  波フェルミ原子気体超流動が作り出せることを理論的に明らかにした.

本研究では, フェルミ原子気体の実験では必須のトラップポテンシャルの効果を無視した. また, BCS-Leggett 理論を用いた解析では, そもそも超流動揺らぎによる影響が扱えない. こうした効果を取り入れることは今後の課題である. ただし, 空間反転対称性の破れたスピン軌道相互作用によるパリティ混成効果はこうした効果を加味しても存在することから,  $p$  波対振幅が誘起されるという結果は定性的には変更されないと考えられる. また,  $p$  波相互作用印加後の系の時間発展の研究に用いた TDBdG はエネルギーの緩和が無視されており, この点を改良することで, 今後どう  $p$  波基底状態 (熱平衡状態) に緩和していくか, あるいは, その過程で 3 体ロス等の効果がどう影響するか, といった相互作用を  $p$  波に変更した後のより長時間側の非平衡現象が議論できるようになるはずである. これも本研究の今後の課題の 1 つである.

本研究のアイデアはフェルミ超流動 (フェルミ凝縮) を特徴付ける秩序パラメータが引力相互作用と対振幅との積であることに着目, それらを別に用意して最後に 1 つにまとめることで, 超流動状態を実現させようとする画期的なものである. これまでのフェルミ原子気体超流動の実現方法とは, 全く異なる方法であり, 本研究の成果は冷却フェルミ原子気体超流動のみならず, 金属超伝導を含むフェルミ超流動 (フェルミ凝縮) 研究の発展に大いに貢献するものである.



## 謝辞

本論文は、著者が慶應義塾大学大学院理工学研究科後期博士課程在学中に、大橋洋士教授の御指導の下、行った研究に関してまとめたものです。本論文を完成させるにあたりお世話になった多くの方々に、この紙面をお借りして感謝の意を述べさせていただきたいと思えます。

まず、学部4年次より本論文完成までの6年間、最後まで懇切丁寧に御指導下さり、恵まれた研究環境を提供して下さった指導教員の大橋洋士教授に厚く感謝申し上げます。また、後期博士課程在学中の共同研究者である猪谷太輔助教に対し、心より御礼を申し上げます。

本論文の副査をお引き受け下さった能崎幸雄教授、的場正憲教授、山本直希専任講師には、本論文をよりよくするための多くのご意見をいただき、感謝申し上げます。

大橋グループの先輩方(柏村孝氏、渡邊亮太氏)やPD研究員の方々(花井亮氏、遠藤有希氏)や後輩方(松本君、Pieter君、Digvijay君、Soumitaさん、鏡原君、武藤君)には、日頃のゼミなどでの議論を通じ、数多くの貴重なアドバイスをいただきました。また、同グループ同窓の田島君とは、お互い切磋琢磨しながら研究を遂行できました。さらに、同大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻物理学専修理論研究室所属の先生方や大学院生の皆様には、コロキウムを通じて有益な議論をしていただきました。皆様から長年に渡り数々のご支援を頂戴し、感謝の念に堪えません。

最後に、私事ではありますが、後期博士課程進学に対する理解を示してくれ、いかなるときも私生活を支え続けてくれた家族に大変感謝します。



## 付録 A TDBdG 方程式の数値解法

ここでは, 本論文で用いた TDBdG 方程式の数値解法を説明する. (3.41) 式を

$$\Psi(t) \equiv \begin{bmatrix} \tilde{u}_{\mathbf{p},\uparrow}^{\alpha}(t) \\ \tilde{v}_{\mathbf{p},\uparrow}^{\alpha}(t) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

$$\tilde{H}(\Psi(t), t) \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{\mathbf{p}} & \Delta_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}, t) \\ \Delta_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{p}, t) & -\varepsilon_{\mathbf{p}} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

を用いて書き直すと,

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t) = \tilde{H}(\Psi(t), t) \Psi(t). \quad (\text{A.3})$$

この方程式を解く際に重要となるのは,  $\Psi(t)$  のノルム  $|\Psi(t)|^2$  の保存である. そのため, 離散化された時間  $dt$  (本論文では  $dt = 10^{-5} \varepsilon_{\text{F}}^{-1}$  として計算した.) に対し, 次のような時間発展ユニタリー演算子を定義する.

$$\mathcal{U}(\Psi(t), t, dt) \equiv e^{-i\tilde{H}(\Psi(t), t)dt}. \quad (\text{A.4})$$

(A.3) 式において,  $dt$  に対して  $\Psi(t + dt)$  を Taylor 展開する.

$$\begin{aligned} \Psi(t + dt) &= \Psi(t) + dt \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} + \frac{(dt)^2}{2!} \frac{\partial^2 \Psi(t)}{\partial t^2} + \mathcal{O}((dt)^3) \\ &\sim \Psi(t) - i\tilde{H}(\Psi(t), t) \Psi(t) dt \\ &\quad - \left( i \frac{\partial \tilde{H}(\Psi(t), t)}{\partial t} + \tilde{H}^2(\Psi(t), t) \right) \Psi(t) \frac{(dt)^2}{2!} + \mathcal{O}((dt)^3). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

本論文では, (A.5) 式の  $\mathcal{O}(dt^2)$  項まで一致するように数値計算を行った. そのようにするには,  $\Psi(t)$  から  $\Psi(t + dt)$  への時間発展を記述するために, (A.4) 式を次のように拡張して扱う必要がある.

$$\Psi(t + dt) \equiv \mathcal{U}(\Psi(t + b_1 dt), t + b_1 dt, a_2 dt) \mathcal{U}(\Psi(t), t, a_1 dt) \Psi(t). \quad (\text{A.6})$$

ここで,  $a_1, a_2, b_1$  は実係数であり, これらは (A.6) 式を  $\mathcal{O}(dt^2)$  項まで Taylor 展開した表式

$$\begin{aligned} \Psi(t+dt) &\sim \Psi(t) - i(a_1 + a_2)\tilde{H}(\Psi(t), t)\Psi(t)dt \\ &\quad - \left( i(2a_2b_1)\frac{\partial\tilde{H}(\Psi(t), t)}{\partial t} + (a_1 + a_2)^2\tilde{H}^2(\Psi(t), t) \right)\Psi(t)\frac{(dt)^2}{2!} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

と (A.5) 式とを比較することで次の条件を満たす必要があることが分かる.

$$a_1 + a_2 = (a_1 + a_2)^2 = 2a_2b_1 = 1. \quad (\text{A.8})$$

本論文では, (A.8) 式の解の 1 つとして

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{2}, b_1 = 1 \quad (\text{A.9})$$

を採用した.

今 (A.2) 式で導入した  $\tilde{H}(\Psi(t), t)$  に対し,

$$\tilde{H}^2(\Psi(t), t) = E_{\mathbf{p}}^2(t)\sigma_0 \quad (\text{A.10})$$

となることに注意すると ( $\sigma_0$  は  $2 \times 2$  の単位行列.), 実数  $c$  に対して,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\Psi(t), t, cdt) &\equiv e^{-i\tilde{H}(\Psi(t), t)cdt} \\ &= \cos(E_{\mathbf{p}}(t)cdt)\sigma_0 - i \sin(E_{\mathbf{p}}(t)cdt)\frac{\tilde{H}(\Psi(t), t)}{E_{\mathbf{p}}(t)} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

が成立する. ただし,  $E_{\mathbf{p}}(t) \equiv \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{p}}^2 + |\Delta_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}, t)|^2}$  である. 本論文では, この時間発展の表式を (A.6) 式における各  $dt$  のステップ<sup>o</sup>に対し,  $\Psi(t)$  に作用させ時間発展を計算した.

## 付録B 熱平衡 $p$ 波超流動と時間発展

ここでは、第3章で議論した、絶対零度における熱平衡  $p$  波超流動状態の BdG 理論の枠組みにおける定式化と、これを初期条件にしたときの  $p$  波原子間相互作用強度の変更による、 $p$  波超流動状態のダイナミクスについて説明する。ハミルトニアンは次式の通りである。

$$\hat{H}(t) = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p},\uparrow}^{\dagger}(t) c_{\mathbf{p},\uparrow}(t) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} U_p(\mathbf{p}, \mathbf{p}', t) c_{\mathbf{p},\uparrow}^{\dagger}(t) c_{-\mathbf{p},\uparrow}^{\dagger}(t) c_{-\mathbf{p}',\uparrow}(t) c_{\mathbf{p}',\uparrow}(t). \quad (\text{B.1})$$

同種擬スピン間の  $p$  波原子間相互作用として、次の形を考える (図 B.1 を参照)。

$$U_p(\mathbf{p}, \mathbf{p}', t) \equiv -4\pi G_p(t) \Gamma_{\mathbf{p},0}^* \Gamma_{\mathbf{p}',0}, \quad (\text{B.2})$$

$$G_p(t) \equiv g_p^i + (g_p^f - g_p^i) \theta(t). \quad (\text{B.3})$$

ここで、 $\Gamma_{\mathbf{p},0}$  は、(3.7) 式で与えられ、 $p$  波相互作用の結合定数  $g_p^{i,f}$  は、(3.9) 式で与えられるような、無次元化散乱体積  $(k_F^3 v_p)^{-1}$  を用いて扱う。時間依存する超流動秩序パラメータ

$$\begin{aligned} \Delta_p(\mathbf{p}, t) &= \Gamma_{\mathbf{p},0}^* \Delta_p(t) \\ &= \Gamma_{\mathbf{p},0}^* (-4\pi) G_p(t) \sum_{\mathbf{p}'} \Gamma_{\mathbf{p}',0} \langle c_{-\mathbf{p}',\uparrow}(t) c_{\mathbf{p}',\uparrow}(t) \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

を導入すると (B.1) 式に対し、TDBdG に用いる時間依存平均場ハミルトニアンが次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{MF}}(t) &= \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p},\uparrow}^{\dagger}(t) c_{\mathbf{p},\uparrow}(t) + \frac{1}{2} \frac{|\Delta_p(t)|^2}{4\pi G_p(t)} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} \left[ \Delta_p(\mathbf{p}, t) c_{\mathbf{p},\uparrow}^{\dagger}(t) c_{-\mathbf{p},\uparrow}^{\dagger}(t) + \Delta_p^*(\mathbf{p}, t) c_{-\mathbf{p},\uparrow}(t) c_{\mathbf{p},\uparrow}(t) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

ここで、Bogoliubov 準粒子の消滅演算子  $\gamma_{\eta}$  を、次式を満たすように導入する。

$$c_{\mathbf{p},\uparrow}(t) = \tilde{u}_{\mathbf{p},\uparrow}(t) \gamma_{\mathbf{p}} + \tilde{v}_{-\mathbf{p},\uparrow}^*(t) \gamma_{-\mathbf{p}}^{\dagger}, \quad (\text{B.6})$$

$$|\tilde{u}_{\mathbf{p},\uparrow}(t)|^2 + |\tilde{v}_{\mathbf{p},\uparrow}(t)|^2 = 1. \quad (\text{B.7})$$

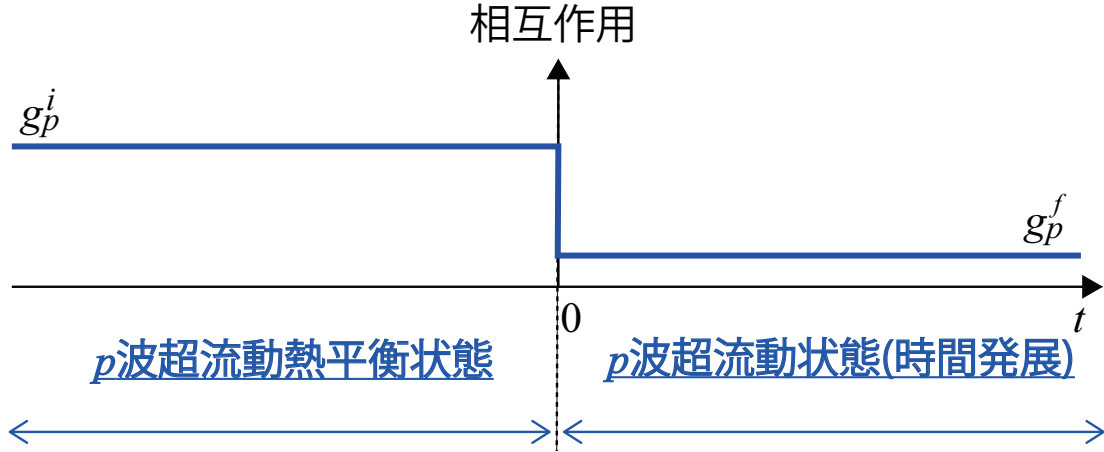


図 B.1:  $p$  波相互作用の時間依存性.  $g_p^i$  は  $t < 0$  に初期状態として用意した相互作用強度.  $t < 0$  では系は熱平衡状態であるとする.  $g_p^f$  は  $t \geq 0$  における  $p$  波相互作用強度.

加えて,  $\gamma_\eta$  に関する期待値を次のように定義する.

$$\langle \gamma_\eta^\dagger \gamma_{\eta'} \rangle = \delta_{\eta, \eta'} \langle \gamma_\eta^\dagger \gamma_\eta \rangle, \quad (\text{B.8})$$

$$\langle \gamma_\eta \gamma_{\eta'} \rangle = \langle \gamma_\eta^\dagger \gamma_{\eta'}^\dagger \rangle = 0, \quad (\text{B.9})$$

$$\langle \gamma_\eta^\dagger \gamma_\eta \rangle = 1 - \langle \gamma_\eta \gamma_\eta^\dagger \rangle = f(E_\eta) = 0. \quad (\text{B.10})$$

$f(x)$  はフェルミ分布関数を表し, 絶対零度を考えているため,  $f(x) = 0$  である. さらに,  $E_\eta$  は Bogoliubov 準粒子の固有エネルギーで, 以降で導出する熱平衡  $p$  波フェルミ原子気体超流動状態の準粒子分散に対応する. このとき, 時間依存  $p$  波超流動秩序パラメータは次のように書き直せる.

$$\Delta_p(\mathbf{p}, t) \equiv \Gamma_{\mathbf{p},0}^* \Delta_p(t) \equiv \Gamma_{\mathbf{p},0}^* (-4\pi) G_p(t) \sum_{\mathbf{p}'} \Gamma_{\mathbf{p}',0} \tilde{u}_{\mathbf{p}',\uparrow}(t) \tilde{v}_{\mathbf{p}',\uparrow}^*(t). \quad (\text{B.11})$$

また, 粒子数は

$$N(t) \equiv \sum_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p},\uparrow}(t) = \sum_{\mathbf{p}} \langle c_{\mathbf{p},\uparrow}^\dagger(t) c_{\mathbf{p},\uparrow}(t) \rangle = \sum_{\mathbf{p}} |\tilde{v}_{\mathbf{p},\uparrow}(t)|^2. \quad (\text{B.12})$$

TDBdG 方程式 (3.24) および (3.25) 式を導出した手順を今の場合に適用すると,

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \tilde{u}_{\mathbf{p},\uparrow}(t) \\ \tilde{v}_{\mathbf{p},\uparrow}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\mathbf{p}} & \Delta_p(\mathbf{p}, t) \\ \Delta_p^*(\mathbf{p}, t) & -\varepsilon_{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_{\mathbf{p},\uparrow}(t) \\ \tilde{v}_{\mathbf{p},\uparrow}(t) \end{bmatrix}, \quad (\text{B.13})$$

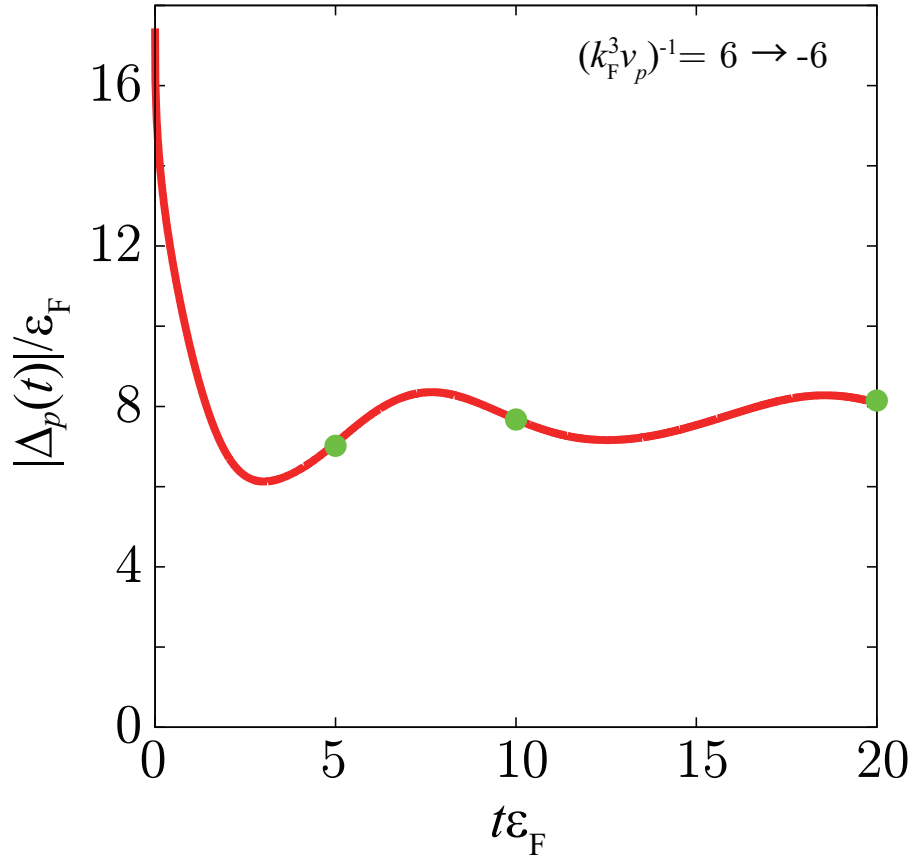


図 B.2:  $p$  波超流動秩序パラメータ  $\Delta_p(t)$  の時間発展. 初期状態は熱平衡状態における  $p$  波超流動. 緑丸の時刻での粒子数分布  $n_{\mathbf{p},\uparrow}(t)$  は図 B.3 にプロットしてある.

が得られる. まず,  $t < 0$  において, 熱平衡  $p$  波超流動状態 (相互作用強度  $g_p^i$ ) を仮定し, その化学ポテンシャル  $\mu_p$  を

$$\tilde{u}_{\mathbf{p},\uparrow}(t) = u_{\mathbf{p},\uparrow} e^{-i(E+\mu_p)t}, \tilde{v}_{\mathbf{p},\uparrow}(t) = v_{\mathbf{p},\uparrow} e^{-i(E-\mu_p)t}, \quad (\text{B.14})$$

として導入する. また, 熱平衡  $p$  波超流動秩序パラメータ  $\Delta_p$  を実に取り,

$$\Delta_p(\mathbf{p}, t) = \Gamma_{\mathbf{p},0}^* \Delta_p e^{-2i\mu_p t}, \quad (\text{B.15})$$

$$\Delta_p = -4\pi g_p^i \sum_{\mathbf{p}'} \Gamma_{\mathbf{p}',0} u_{\mathbf{p}',\uparrow}(t) v_{\mathbf{p}',\uparrow}^*(t). \quad (\text{B.16})$$

また, 粒子数は

$$N = \sum_{\mathbf{p}} \tilde{n}_{\mathbf{p},\uparrow} = \sum_{\mathbf{p}} |v_{\mathbf{p},\uparrow}|^2. \quad (\text{B.17})$$

さらに,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu_p & \Gamma_{\mathbf{p},0}^* \Delta_p \\ \Gamma_{\mathbf{p},0} \Delta_p & -(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\mathbf{p},\uparrow} \\ v_{\mathbf{p},\uparrow} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} u_{\mathbf{p},\uparrow} \\ v_{\mathbf{p},\uparrow} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.18})$$

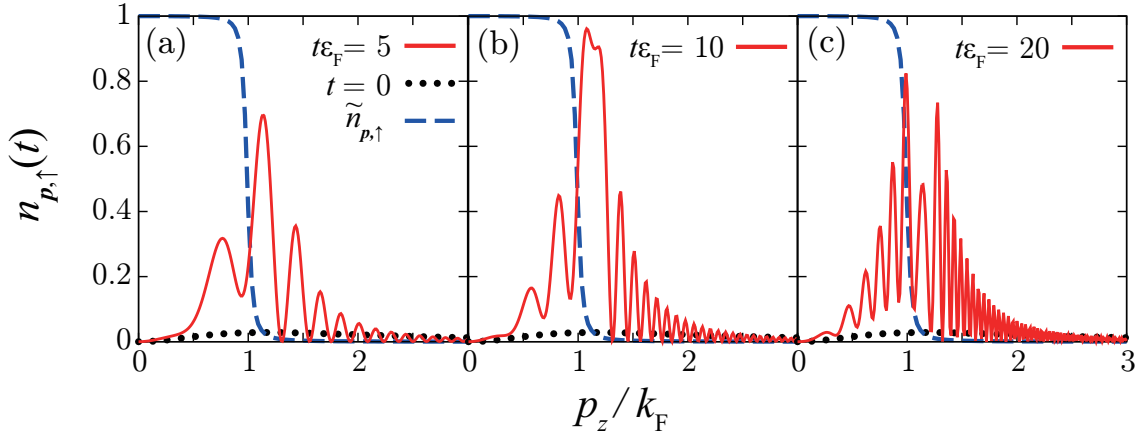


図 B.3: 時間依存する粒子数密度と熱平衡  $p$  波超流動基底状態との比較. 図 B.2 において緑の丸印をつけた各時間において粒子数密度をプロットしている.

これは  $g_p = g_p^i$  としたときの, (3.42) 式と同じである. この式の固有エネルギーは

$$E = \pm E_p \equiv \pm \sqrt{\xi_p^2 + |\Gamma_{p,0}^* \Delta_p|^2} \quad (\text{B.19})$$

(ただし,  $\xi_p \equiv \varepsilon_p - \mu_p$ ) であり, 固有状態は通常の BdG 方程式の解 (ただし今の場合,  $p$  波超流動) と同じ,  $E = E_p$  に対し,

$$u_{p,\uparrow} = \frac{E_p + \xi_p}{\sqrt{2E_p(E_p + \xi_p)}}, \quad (\text{B.20})$$

$$v_{p,\uparrow} = -\frac{\Gamma_{p,0}^* \Delta_p}{\sqrt{2E_p(E_p + \xi_p)}}, \quad (\text{B.21})$$

がとれるので, これらを (B.16) 式および (B.17) 式に代入すると,

$$1 = 4\pi g_p^i \sum_p \frac{|\Gamma_{p,0}|^2}{2E_p}, \quad (\text{B.22})$$

$$N = \sum_p \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\xi_p}{E_p} \right). \quad (\text{B.23})$$

これらは  $T = 0$  の  $p$  波熱平衡超流動状態に対し, BCS-Leggett 理論の枠組みで得られるギャップ方程式と粒子数方程式に一致する.

図 B.2 は, 初期状態として  $(k_F^3 v_p)^{-1} = 6$  (BEC) の熱平衡  $p$  波超流動状態を用意した後に,  $t = 0$  で, 原子間相互作用を  $(k_F^3 v_p)^{-1} = -6$  (BCS) へと急に変更したときの  $p$  波超流動秩序パラメータの時間変化をプロットしたものである. また, 図 B.3 では, このときの粒子数密度の時間変化を  $t = 0$  (初期分布),  $t\varepsilon_F = 5$ ,  $t\varepsilon_F = 10$ ,  $t\varepsilon_F = 20$  に対して図示した. 例えば  $t\varepsilon_F = 20$  において,  $|\Delta_p(t)| \sim 8\varepsilon_F$  と見積もれるが, これは熱平衡解  $\Delta_p \sim 1.99\varepsilon_F$  に



比べて非常に大きい. このときの粒子数分布を見てみると,  $t = 0$  (初期分布) に比べて劇的な変更を受けていることがわかる. このようなことは, 第3章での議論においてなかったが, 第3章とここでの問題との違いは, 初期状態のみである.



## 参考文献

- [1] ペシィック, スミス著, 町田一成訳, *ボーズ・アインシュタイン凝縮*, (吉岡書店, 2005).
- [2] 大橋洋士著, *フェルミ粒子系超流動の物理*, (物性研究 11 月号, 2005).
- [3] C. A. Regal, M. Greiner, and D. S. Jin, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 040403 (2004).
- [4] M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, A. J. Kerman, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 120403 (2004).
- [5] J. Kinast, S. L. Hemmer, M. E. Gehm, A. Turlapov, and J. E. Thomas, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 150402 (2004).
- [6] M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, C. Chin, J. H. Denschlag, and R. Grimm, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 203201 (2004).
- [7] E. Timmermans, K. Furuya, P. W. Milonni, and A. K. Kerman, *Phys. Lett. A* **285**, 228 (2001).
- [8] C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, and E. Tiesinga, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1225 (2010).
- [9] C. A. R. Sá de Melo, M. Randeria, and J. R. Engelbrecht, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3202 (1993).
- [10] D. M. Eagles, *Phys. Rev.* **186**, 456 (1969).
- [11] A. J. Leggett, *Modern Trends in the Theory of Condensed Matter* ed. by Pekalski and Przystawa (Springer, Berlin, 1980).
- [12] A. J. Leggett, *Quantum Liquids*, (Oxford University Press, New York, 2006).
- [13] P. Nozières and S. Schmitt-Rink, *J. Low Temp. Phys.* **59**, 195 (1985).
- [14] C. A. R. Sá de Melo, M. Randeria, and J. R. Engelbrecht, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3202 (1993).
- [15] Y. Ohashi and A. Griffin, *Phys. Rev. Lett* **89**, 130402 (2002).

- [16] A. Perali, P. Pieri, G.C. Strinati, and C. Castellani, *Phys. Rev. B* **66**, 024510 (2002).
- [17] Q. J. Chen, J. Stajic, S. Tan, and K. Levin, *Phys. Rep.* **412**, 1 (2005).
- [18] M. Randeria, W. Zwirger, and M. Zwierlein, *The BCS-BEC Crossover and the Unitary Fermi Gas*, edited by W. Zwirger (Springer-Verlag, Berlin, 2012).
- [19] S. Giorgini, L. Pitaevskii, and S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1215 (2008).
- [20] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwirger, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 885 (2008).
- [21] C. A. Regal, C. Ticknor, J. L. Bohn, and D. S. Jin, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 053201 (2003).
- [22] C. Ticknor, C. A. Regal, D. S. Jin, and J. L. Bohn, *Phys. Rev. A* **69**, 042712 (2004).
- [23] K. Günter, T. Stöferle, H. Moritz, M. Köhl, and T. Esslinger, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 230401 (2005).
- [24] J. P. Gaebler, J. T. Stewart, J. L. Bohn, and D. S. Jin, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 200403 (2007).
- [25] J. Zhang, E. G. M. van Kempen, T. Bourdel, L. Khaykovich, J. Cubizolles, F. Chevy, M. Teichmann, L. Tarruell, S. J. J. M. F. Kokkelmans, and C. Salomon, *Phys. Rev. A* **70**, 030702(R) (2004).
- [26] C. H. Schunck, M. W. Zwierlein, C. A. Stan, S. M. F. Raupach, W. Ketterle, A. Simoni, E. Tiesinga, C. J. Williams, and P. S. Julienne, *Phys. Rev. A* **71**, 045601 (2005).
- [27] T. Nakasuji, J. Yoshida, and T. Mukaiyama, *Phys. Rev. A* **88**, 012710 (2013).
- [28] M. Jona-Lasinio, L. Pricoupenko, and Y. Castin, *Phys. Rev. A* **77**, 043611 (2008).
- [29] J. Levinsen, N. R. Cooper, and V. Gurarie, *Phys. Rev. A* **78**, 063616 (2008).
- [30] F. Chevy, E. G. M. van Kempen, T. Bourdel, J. Zhang, L. Khaykovich, M. Teichmann, L. Tarruell, S. J. J. M. F. Kokkelmans, and C. Salomon, *Phys. Rev. A* **71**, 062710 (2005).
- [31] C. A. Regal, C. Ticknor, J. L. Bohn, and D. S. Jin, *Nature (London)* **424**, 47 (2003).

- [32] Y. Inada, M. Horikoshi, S. Nakajima, M. Kuwata-Gonokami, M. Ueda, and T. Mukaiyama, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 100401 (2008).
- [33] J. Fuchs, C. Ticknor, P. Dyke, G. Veeravalli, E. Kuhnle, W. Rowlands, P. Hanford, and C. J. Vale, *Phys. Rev. A* **77**, 053616 (2008).
- [34] E. Timmermans, K. Furuya, P.W. Milonni, and A.K. Kerman, *Phys. Lett. A* **285**, 228 (2001).
- [35] C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, and E. Tiesinga, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1225 (2010).
- [36] T.-L. Ho and R. B. Diener, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 090402 (2005).
- [37] M. Iskin and C. A. R. Sá de Melo, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 040402 (2006).
- [38] M. Iskin and C. A. R. Sá de Melo, *Phys. Rev. A* **74**, 013608 (2006).
- [39] V. Gurarie, L. Radzihovsky, and A. V. Andreev, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 230403 (2005).
- [40] V. Gurarie and L. Radzihovsky, *Ann. Phys.* **322**, 2 (2007).
- [41] Y. Ohashi, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 050403 (2005).
- [42] D. Inotani, R. Watanabe, M. Sigrist, and Y. Ohashi, *Phys. Rev. A* **85**, 053628 (2012).
- [43] R. Liao, F. Popescu, and K. Quader, *Phys. Rev. B* **88**, 134507 (2013).
- [44] J. Levinsen, N. R. Cooper, and V. Gurarie, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 210402 (2007).
- [45] S. S. Botelho and C. A. R. Sá de Melo, *J. Low Temp. Phys.* **140**, 409 (2005).
- [46] M. Iskin and C. A. R. Sá de Melo, *Phys. Rev. B* **72**, 224513 (2005).
- [47] M. Iskin and C. J. Williams, *Phys. Rev. A* **77**, 041607(R) (2008).
- [48] E. Grosfeld, N. R. Cooper, A. Stern, and R. Ilan, *Phys. Rev. B* **76**, 104516 (2007).
- [49] T. Mizushima, M. Ichioka, and K. Machida, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 150409 (2008).
- [50] Y.-J. Han, Y.-H. Chan, W. Yi, A. J. Daley, S. Diehl, P. Zoller, and L.-M. Duan, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 070404 (2009).
- [51] C.-H. Cheng and S.-K. Yip, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 070404 (2005).

- [52] R. A. W. Maier, C. Marzok, C. Zimmermann, and Ph. W. Courteille, Phys. Rev. A **81**, 064701 (2010).
- [53] H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, M. R. Andrews, D. S. Durfee, S. Inouye, and W. Ketterle, Science **279**, 1005 (1998).
- [54] M. Z. Hasan and C. L. Kane, Rev. Mod. Phys. **82**, 3045 (2010).
- [55] N. Goldman, I. Satija, P. Nikolic, A. Bermudez, M. A. Martin-Delgado, M. Lewenstein, and I. B. Spielman, Phys Rev. Lett. **105**, 255302 (2010).
- [56] N. Goldman, J. Beugnon, and F. Gerbier, Phys. Rev. Lett. **108**, 255303 (2012).
- [57] M. C. Beeler, R. A. Williams, K. Jiménez-García, L. J. LeBlanc, A. R. Perry, and I. B. Spielman, Nature **498**, 201 (2013).
- [58] M. Sato, Y. Takahashi, and S. Fujimoto, Phys. Rev. Lett. **103**, 020401 (2009); Phys. Rev. B **82**, 134521 (2010).
- [59] 山田一雄, 大見哲巨著, *超流動*, (培風館, 1995).
- [60] M. Ueda, *Fundamentals and New Frontiers of Bose-Einstein Condensation*, (World Scientific, 2010).
- [61] S. Fujimoto, J. Phys. Soc. Jpn. **76**, 051008 (2007).
- [62] V. P. Mineev and M. Sigrist, *Non-centrosymmetric Superconductors*, edited by E. Bauer and M. Sigrist (Springer-Verlag, Berlin, 2012).
- [63] J. Dalibard and F. Gerbier, Rev. Mod. Phys. **83**, 1523 (2011).
- [64] X.-J. Liu, M. F. Borunda, X. Liu, and J. Sinova, Phys. Rev. Lett. **102**, 046402 (2009).
- [65] J. D. Sau, R. Sensarma, S. Powell, I. B. Spielman, S. D. Sarma, Phys. Rev. B **83**, 140510(R) (2011).
- [66] B. M. Anderson, G. Juzeliūnas, V. M. Galitski, and I. B. Spielman, Phys. Rev. Lett. **108**, 235301 (2012).
- [67] Z. F. Xu and L. You, Phys. Rev. A **85**, 043605 (2012).
- [68] D. L. Campbell, G. Juzeliūnas, and I. B. Spielman, Phys. Rev. A **84**, 025602 (2011).

- [69] G. Juzeliūnas, J. Ruseckas, A. Jacob, L. Santos, and P. Öhberg, Phys. Rev. Lett. **100**, 200405 (2008).
- [70] X.-J. Liu, M. F. Borunda, X. Liu, and J. Sinova, Phys. Rev. Lett. **102**, 046402 (2009).
- [71] G. Juzeliūnas, J. Ruseckas, and J. Dalibard, Phys. Rev. A **81**, 053403 (2010).
- [72] L. Zhang, J.-Y. Zhang, S.-C. Ji, Z.-D. Du, H. Zhai, Y. Deng, and S. Chen, Phys. Rev. A **87**, 011601(R) (2013).
- [73] L. W. Cheuk, A. T. Sommer, Z. Hadzibabic, T. Yefsah, W. S. Bakr, and M. W. Zwierlein, Phys. Rev. Lett. **109**, 095302 (2012).
- [74] P. Wang, Z.-Q. Yu, Z. Fu, J. Miao, L. Huang, S. Chai, H. Zhai, and J. Zhang, Phys. Rev. Lett. **109**, 095301 (2012).
- [75] R. A. Williams, M. C. Beeler, L. J. LeBlanc, K. Jimenez-Garcia, and I. B. Spielman, Phys. Rev. Lett. **111**, 095301 (2013).
- [76] Z. Fu, L. Huang, Z. Meng, P. Wang, L. Zhang, S. Zhang, H. Zhai, P. Zhang, and J. Zhang, Nature Phys. **10**, 110 (2014).
- [77] L. Huang, P. Wang, P. Peng, Z. Meng, L. Chen, P. Zhang, and J. Zhang, Phys. Rev. A **91**, 041604(R) (2015).
- [78] L. Huang, Z. Meng, P. Wang, P. Peng, S.-L. Zhang, L. Chen, D. Li, Q. Zhou, and J. Zhang, Nature Phys. **12**, 540 (2016).
- [79] Y.-J. Lin, R. L. Compton, A. R. Perry, W. D. Phillips, J. V. Porto, and I. B. Spielman, Phys. Rev. Lett. **102**, 130401 (2009).
- [80] Y.-J. Lin, R. L. Compton, K. Jimenez-Garcia, J. V. Porto, and I. B. Spielman, Nature **462**, 628 (2009).
- [81] Y.-J. Lin, R. L. Compton, K. Jimenez-Garcia, W. D. Phillips, J. V. Porto, and I. B. Spielman, Nat. Phys. **7**, 531 (2011).
- [82] Y.-J. Lin, K. Jimenez-Garcia, and I. B. Spielman, Nature **471**, 83 (2011).
- [83] B. M. Anderson, I. B. Spielman, and G. Juzeliunas, Phys. Rev. Lett. **111**, 125301 (2013).

- [84] Z.-F. Xu, L. You, and M. Ueda, *Phys. Rev. A* **87**, 063634 (2013).
- [85] L. Jiang, X.-J. Liu, H. Hu, and H. Pu, *Phys. Rev. A* **84**, 063618 (2011).
- [86] H. Hu, L. Jiang, X.-J. Liu, and H. Pu, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 195304 (2011).
- [87] L. P. Gor'kov and E. I. Rashba, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 037004 (2001).
- [88] H. Q. Yuan, D. F. Agterberg, N. Hayashi, P. Badica, D. Vandervelde, K. Togano, M. Sigrist, and M. B. Salamon, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 017006 (2006).
- [89] P. G. de Gennes, *Rev. Mod. Phys.* **36**, 225 (1964).
- [90] Y. Ohashi, *J. Phys. Soc. Jpn.* **65**, 823 (1996).
- [91] J. W. Negele and H. Orland, *Quantum Many-Particle Systems*, (Addison-Wesley, New York, 1988).
- [92] K. Maki, in *Superconductivity*, edited by R. D. Parks (Marcel Dekker, New York, 1969) Vol. 2.
- [93] H. Shiba, *Prog. Theor. Phys.* **40**, 435 (1968).
- [94] C. N. Yang, *Rev. Mod. Phys.* **34**, 694 (1962).
- [95] L. Salasnich, N. Manini, and A. Parola, *Phys. Rev. A* **72**, 023621 (2005).
- [96] G. E. Astrakharchik, J. Boronat, J. Casulleras, and S. Giorgini, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 230405 (2005).
- [97] N. Fukushima, Y. Ohashi, E. Taylor, and A. Griffin, *Phys. Rev. A* **75**, 033609 (2007).
- [98] J. P. Vyasankere, and V. B. Shenoy, *Phys. Rev. B* **83**, 094515 (2011).
- [99] J. P. Vyasankere, and V. B. Shenoy, *Phys. Rev. A* **86**, 053617 (2012).
- [100] J. P. Vyasankere, S. Zhang, and V. B. Shenoy, *Phys. Rev. B* **84**, 014512 (2011).
- [101] J. P. Vyasankere and V. B. Shenoy, *New Journal of Physics* **14**, 043041 (2012).
- [102] Z.-Q. Yu and H. Zhai, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 195305 (2011).
- [103] L. He and X.-G. Huang, *Phys. Rev. B* **86**, 014511 (2012).
- [104] J. P. Vyasankere and V. B. Shenoy, *Phys. Rev. B* **92**, 121111 (2015).



- [105] Y. Y.-Xiang, J. Ye, and W.-M. Liu, Phys. Rev. A **90**, 053603 (2014).
- [106] L. He, X.-G. Huang, H. Hu, and X.-J. Liu, Phys. Rev. A **87**, 053616 (2013).
- [107] Z. Zheng, H. Pu, X. Zou, and G. Guo, Phys. Rev. A **90**, 063623 (2014).
- [108] A. J. Leggett, Rev. Mod. Phys. **47**, 331 (1975).
- [109] D. Vollhardt and P. Wölfle, *The Superfluid Phases of Helium 3* (Taylor and Francis, New York, 2002).
- [110] V. P. Mineev and K. V. Samokhin, *Introduction to Unconventional Superconductivity*, (Gordon and Breach, New York, Amsterdam, 1999).
- [111] M. Sigrist and K. Ueda, Rev. Mod. Phys. **63**, 239 (1991).
- [112] G. R. Stewart, Rev. Mod. Phys. **56**, 755 (1984).
- [113] A. P. Mackenzie and Y. Maeno, Rev. Mod. Phys. **75**, 657 (2003).
- [114] K. B. W. Buckley, M. A. Metlitski, and A. R. Zhitnitsky, Phys. Rev. C **69**, 055803 (2004).
- [115] M. Sinha and A. Sedrakian, Phys. Rev. C **91**, 035805 (2015).
- [116] A. F. Andreev, Zh. Eksp. Ther. Fiz. **46**, 1823 (1964) [Sov. Phys. JETP **19**, 1228 (1964)].
- [117] R. Kuemmel, Z. Phys. **218**, 472 (1969).
- [118] D. A. Takahashi, Phys. Rev. B **93**, 024512 (2016).
- [119] R. A. Barankov, L. S. Levitov, and B. Z. Spivak, Phys. Rev. Lett **93**, 160401 (2004).
- [120] M. H. Szymańska, B. D. Simons, and K. Burnett, Phys. Rev. Lett **94**, 170402 (2005).
- [121] G. L. Warner and A. J. Leggett, Phys. Rev. B **71**, 134514 (2005).
- [122] E. A. Yuzbashyan, O. Tsypliyatyev, and B. L. Altshuler, Phys. Rev. Lett. **96**, 097005 (2006).
- [123] R. A. Barankov and L. S. Levitov, Phys. Rev. Lett **96**, 230403 (2006).
- [124] E. A. Yuzbashyan and M. Dzero, Phys. Rev. Lett **96**, 230404 (2006).

- [125] R. A. Barankov and L. S. Levitov, Phys. Rev. A **73**, 033614 (2006).
- [126] A. Tomadin, M. Polini, M. P. Tosi, and R. Fazio, Phys. Rev. A **77**, 033605 (2008).
- [127] E. A. Yuzbashyan, Phys. Rev. B **78**, 184507 (2008).
- [128] V. Gurarie, Phys. Rev. Lett. **103**, 075301 (2009).
- [129] C. K. Chung and C. K. Law, Phys. Rev. A **79**, 043611 (2009).
- [130] C.-C. Chien and B. Damski, Phys. Rev. A **82**, 063616 (2010).
- [131] M. S. Foster, V. Gurarie, M. Dzero, and E. A. Yuzbashyan, Phys. Rev. Lett. **113**, 076403 (2014).
- [132] M. S. Foster, M. Dzero, V. Gurarie, and E. A. Yuzbashyan, Phys. Rev. B **88**, 104511 (2013).
- [133] L. Austen, L. Cook, M. D. Lee, and J. Mur-Petit, Phys. Rev. A **87**, 023610 (2013).
- [134] S. Yoon and G. Watanabe, arXiv:1512.09058v1 [cond-mat.quant-gas].
- [135] F. Setiawan, K. Sengupta, I. B. Spielman, and J. D. Sau, Phys. Rev. Lett. **115**, 190401 (2015).
- [136] M. Dzero, A. A. Kirmani, and E. A. Yuzbashyan, Phys. Rev. A **92**, 053626 (2015).
- [137] Y. Dong, L. Dong, M. Gong, and H. Pu, Nature Commun. **6**, 6103 (2015).
- [138] M. Lu, H. Liu, P. Wang, and X. C. Xie, Phys. Rev. B **93**, 064516 (2016).
- [139] A. Roy, R. Dasgupta, S. Modak, A. Das, and K. Sengupta, J. Phys.: Condens. Matter **25**, 205703 (2013).
- [140] A. V. Andreev, V. Gurarie, and L. Radzihovsky, Phys. Rev. Lett. **93**, 130402 (2004).
- [141] E. A. Yuzbashyan, M. Dzero, V. Gurarie, and M. S. Foster, Phys. Rev. A **91**, 033628 (2015).
- [142] E. A. Yuzbashyan and O. Tsypliyatyev, Phys. Rev. B **79**, 132504 (2009).
- [143] G. Tonini, F. Werner, and Y. Castin, Eur. Phys. J. D **39**, 283 (2006).
- [144] K. J. Challis, R. J. Ballagh, and C. W. Gardiner, Phys. Rev. Lett. **98**, 093002 (2007).

- [145] R. G. Scott, F. Dalfovo, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Phys. Rev. A* **86**, 053604 (2012).
- [146] S. Hannibal, P. Kettmann, M. D. Croitoru, A. Vagov, V. M. Axt, and T. Kuhn, *Phys. Rev. A* **91**, 043630 (2015).
- [147] P. B. Littlewood and C. M. Varma, *Phys. Rev. B* **26**, 4883 (1982).
- [148] D. Pekker and C. M. Varma, *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **6**, 269 (2015).
- [149] R. Matsunaga, Y. I. Hamada, K. Makise, Y. Uzawa, H. Terai, Z. Wang, and R. Shimano, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 057002 (2013).
- [150] R. Matsunaga, N. Tsuji, H. Fujita, A. Sugioka, K. Makise, Y. Uzawa, H. Terai, Z. Wang, H. Aoki, and R. Shimano, *Science* **345**, 1145 (2014).