

# Game Theoretical Models on Networks and Discrete Structures

March 2016

Yosuke Sekiguchi

# 主 論 文 要 旨

報告番号	㊦ 乙 第	号	氏 名	関口 陽介
主論文題目： Game Theoretical Models on Networks and Discrete Structures (ネットワーク上のゲーム理論的モデルと離散構造)				
(内容の要旨)				
<p>本論文では、取引ネットワークモデルとマーキングゲームという2つのネットワーク(グラフ)上のモデルについて考察する。これらのモデルはゲーム理論的な側面をもっており、複数のプレイヤーの戦略を考える必要があるため、一般の最適化問題に比べて状況が複雑になりやすい。しかし、離散数学や組合せ最適化の分野の知見はモデルを解析するうえで非常に有用である。</p> <p>取引ネットワークモデルは経済学の分野でよく知られている安定マッチングモデルの拡張であり、流通網を模式化したモデルである。特に、本論文では Hatfield らが提唱したモデルを、同種の取引を同価格で複数行うという状況を考えることができるように拡張し、それを離散凸解析という手法を用いて解析する。</p> <p>Hatfield らは経済主体の選好が全代替性をみたすならば、競争均衡が存在することを示した。この結果は離散凸解析を使わずに証明がなされている。それに対し本論文では、全代替性が歪 M<sub>h</sub>凹性と等価であることを示し、離散凸解析を利用して全代替性のもとでの競争均衡の存在を証明する。さらに、競争均衡価格ベクトルが束構造をもつことを離散凸解析における共役定理を利用して示す。経済モデルと離散凸解析の相性が良いことは以前から知られているが、取引ネットワークモデルに離散凸解析の手法を適用しているという点は、今までにない新しいものである。</p> <p>また、取引ネットワークモデルにおける安定性についても考察を行う。全代替性をみたす状況下において、強グループ安定性、鎖安定性がともに一般の安定性と等価であることを証明する。また、安定性と競争均衡の間には明確なギャップが存在することも示す。</p> <p>マーキングゲームは2人のプレイヤーがグラフ上の頂点を交互にマークしていくゲームで、ゲーム染色数と呼ばれる指標の上界評価のために Zhu によって導入された。マーキングゲームにおいて先手必勝になるスコアの最小値をゲームカラーリング数と呼び、この値はゲーム染色数の上界を与えている。</p> <p>いくつかのクラスのグラフについてはゲームカラーリング数の値が確定しているが、平面グラフのゲームカラーリング数の値は 17 以下ということしかわかっていない。本論文では、グラフの内周を制限した平面グラフのゲームカラーリング数を評価する。グラフのもつ構造に着目すると、内周が 4 以上の平面グラフのゲームカラーリング数が 13 以下であることを証明できる。また、内周が 4 以上、5 以上の平面グラフのゲームカラーリング数がそれぞれ 7 以上、6 以上になることも示す。</p>				

# SUMMARY OF Ph.D. DISSERTATION

School Fundamental Science and Technology	Student Identification Number	SURNAME, First name SEKIGUCHI, Yosuke
<b>Title</b>  Game Theoretical Models on Networks and Discrete Structures		
<b>Abstract</b> <p>We consider two models on networks, the multi-unit trading network model and the marking game. These models have game theoretical aspects and it is necessary to consider strategies of multiple players who each have a goal. This fact often makes the models complicated. However, knowledge of combinatorial optimization and discrete mathematics is helpful in analyzing the models.</p> <p>The multi-unit trading network model is an extension of the stable matching model which is well known in economics. In particular, we study an extension of the model introduced by Hatfield et al. Unlike their model, our model can handle multiple units of contracts with the same unit price. We analyze the model by using discrete convex analysis (DCA).</p> <p>Hatfield et al. showed the existence of competitive equilibria under the full substitutes condition without using DCA while we analyze the model by using it. In fact, we show that the generalization of the full substitutes condition (GFS condition) and twisted <math>M^\natural</math>-concavity are equivalent and that there exists a competitive equilibrium under the GFS condition. Moreover, we prove that the set of competitive equilibrium price vectors forms a lattice by using the conjugacy theorem in DCA. Although the connection between economical models and DCA is familiar, applying DCA to the trading network model is a novel approach.</p> <p>We also study the relationship among stability, strong group stability, and chain stability. We prove that these concepts are equivalent under the GFS condition. Furthermore, we show that a gap exists between stable outcomes and competitive equilibria.</p> <p>The marking game, introduced by Zhu, is defined on a graph and played by two players, Alice and Bob. For a graph, the game coloring number is defined as the smallest number such that Alice has a winning strategy in the marking game. The game coloring number gives an upper bound for the game chromatic number.</p> <p>Although the exact values of the game coloring number for some classes of graphs are known, deciding that of planar graphs is an open problem. In this thesis, we prove that the game coloring number of planar graphs with girth 4 is at most 13 by using structures of the planar graphs. We also show that the game coloring number of planar graphs with girth 4 and 5 are at least 7 and at least 6, respectively.</p>		