

A Thesis for the Degree of Ph.D. in Science

Explicit Representations of Locally Risk-minimizing Hedging
Strategy for Lévy Markets by Malliavin Calculus

September 2015

Graduate School of Science and Technology
Keio University

Ryoichi Suzuki

主 論 文 要 旨

報告番号	㊦ 乙 第	号	氏 名	鈴木 良一
主論文題目： Explicit Representations of Locally Risk-minimizing Hedging Strategy for Lévy Markets by Malliavin Calculus (マリアヴァン解析によるレヴィ市場における局所的リスク最少化ヘッジ戦略の明示的な表現公式)				
(内容の要旨)				
<p>局所的リスク最少化ヘッジ戦略(以下 LRM と略す)は非完備な金融市場における条件付き請求権に対するよく知られた2次法のヘッジ手法である。LRMの理論面は高いレベルで完成している。LRMはフェルマー・シュヴァイツァー分解と呼ばれる確率積分と直交マルチンゲールから構成させる確率変数の一種の直交分解と密接な関係がある。</p> <p>一方、LRMの明示的な表現公式に対する研究の必要性が高まっているが、一般的にLRMの明示的な表現公式を求めるのは困難である。それゆえに、本論文ではレヴィ過程によって導出される確率微分方程式に危険資産の価格過程が従う場合の非完備市場におけるLRMの明示的な表現公式をマリアヴァン解析によって導出する。この市場は非完備市場の典型的なフレームワークである。特にその目的のために、カノニカルレヴィ過程に対するマリアヴァン解析の理論を発展させる。中でもカノニカルレヴィ過程に対する測度変換の下でのクラーク・オコーン型公式を導出する。</p> <p>本学位論文における主な貢献は次の6つである。レヴィ過程のマリアヴァン解析に関しては、まずルベグ積分とマリアヴァン微分の交換公式、マリアヴァン微分に対する連鎖率などの計算をするための道具を導出した。次にカノニカルレヴィ過程に対する測度変換の下でのクラーク・オコーン型公式の定式化を行った。最後にギルサノフ変換の下で測度変換された確率測度 \mathbf{P}^*の下でのレヴィ汎関数に関するポアンカレの不等式と \mathbf{P}^*および元々の確率測度 \mathbf{P}の下でのレヴィ汎関数に関する対数ソボレフ不等式のヴァージョンの導出を行った。一方LRMに関しては、まずマリアヴァン微分によるレヴィ市場におけるLRMの定式化を行った。次に滑らかではない確率変数の関数や確率過程の最大値に対するマリアヴァン微分の近似法を用いた計算法を例示した。最後にレヴィ市場におけるコールオプション、アジアオプション、ルックバックオプションに対するLRMの具体的な表現公式の導出を行った。</p>				

SUMMARY OF Ph.D. DISSERTATION

School Fundamental Science and Technology	Student Identification Number	SURNAME, First name Suzuki, Ryoichi
Title Explicit Representations of Locally Risk-minimizing Hedging Strategy for Lévy Markets by Malliavin Calculus		
Abstract <p>Locally risk-minimizing (LRM, for short) is a well-known hedging method for contingent claims in a quadratic way for incomplete financial markets. Theoretical aspects of LRM have been developed to high degree. LRM has an intimate relationship with Föllmer–Schweizer decomposition, which is a kind of orthogonal decomposition for a random variable into a stochastic integration and an orthogonal martingale.</p> <p>On the other hand, the necessity of research on its explicit representations has been increasing. However, it is generally very difficult to derive an explicit expression for the locally risk-minimizing hedge.</p> <p>Therefore, in this thesis, we obtain explicit representations of LRM for incomplete market models whose asset price process is described by a solution to a stochastic differential equation driven by a Lévy process, as a typical framework of incomplete market models by using Malliavin calculus. In particular, we develop Malliavin calculus for canonical Lévy processes to achieve our purpose. Especially, we derive a Clark-Ocone type formula under change of measure for canonical Lévy processes, which is an explicit stochastic integral representation of random variables in terms of Malliavin derivatives.</p> <p>Main contribution of this thesis is sixfold as follows: On Malliavin calculus for Lévy processes, we first derive some calculation tools such as commutation formula for the Lebesgue integral and the Malliavin derivative and a chain rule for Malliavin derivative. Next, we formulate a Clark-Ocone type formula under change of measure for canonical Lévy processes. Finally, we derive versions of the Poincaré inequality for Lévy functionals (with respect to \mathbf{P}^*) and the logarithmic Sobolev inequality (with respect to both \mathbf{P}^* and \mathbf{P}), where \mathbf{P} is the original probability measure and \mathbf{P}^* is a new probability measure under a Girsanov transformation. On the other hand, for LRM problem, we first formulate representations of LRM with Malliavin derivatives for Lévy markets. We next illustrate how to calculate Malliavin derivatives for non-smooth functions of a random variable, and the running maximum of processes by using approximation methods. Finally, we introduce concrete representations of LRM of call options, Asian options and lookback options for Lévy markets.</p>		