Canonical Decompositions
Describing Structures of Matchings in Graphs

March 2014

Nanao Kita

主　論　文　要　旨

報告番号	甲　乙　第　　　　　号	氏　名	喜多　奈々緒

主 論 文 題 目：

Canonical Decompositions Describing Structures of Matchings in Graphs

（グラフのマッチング構造を記述する標準分解）

（内容の要旨）

グラフとは道路網などネットワーク構造の数学的抽象化に相当する基本的な離散構造である．マッチングとはグラフの部分構造の一種であり，互いに素な枝の集合として定義される．マッチングは離散数学の最も代表的な研究対象の一つであり，長年に渡り関心を集めてきた．マッチングに関する研究の蓄積はマッチング理論と呼ばれるグラフ理論の一大分野を成している．本論文はマッチング理論の基盤に対し，標準分解・双対性に基づく構造解明・完全マッチングの数え上げ問題の三つの方向から貢献するものである．

従来マッチングの構造を把握する強力なツールとして，総称して標準分解と呼ばれるいくつかの分解型構造定理が重要な役割を果たしてきた．しかしこれらはそれぞれ特殊なクラスのグラフのみを実質的な適用対象としており，互いの相互関係やこれらをまとめ上げ統一して理解する方法は不明であった．これに対し本論文では任意のグラフを適用対象とし，かつ既存の標準分解をまとめ上げる新しい標準分解を提案する．これは既存の標準分解の洗練された記述も含んでおり，完全マッチングを持つ一般のグラフに対しても非自明な構造を明らかにするものである．

バリアもまたグラフの部分構造の一種であるが，これは最大マッチング問題の双対最適解の組合せ的解釈に相当しており，すなわちマッチングと対をなす概念である．双対性は組合せ最適化の理論体系の軸となる概念であり，事実バリアもマッチングの研究において重要な役割を果たす．しかしバリアについて知られていることは少なく，特に重要である極大バリアについてすらも解明は進んでいなかった．これに対し本論文では，一般のグラフに対し極大バリアの構造を明らかにする定理を与える．これは 1972 年に Lovász によって与えられた canonical partition の一般化に相当する．

グラフがもつ完全マッチングの総数を調べることは数え上げ組合せ論の代表的な問題の一つであり，様々な側面からの研究がなされている．カテドラル定理は飽和グラフの特徴づけを与えており，次数などグラフの構造に関するパラメタと完全マッチングの総数との関係を調べる際に有用である．カテドラル定理は 1972 年に Lovász によって与えられたのち，2001 年に Szigeti によって別証明が与えられている．本論文では，飽和グラフの性質を新しい標準分解を用いて精査することによってカテドラル定理のさらなる別証明を与える．この新しい証明では，カテドラル定理の背後にある構造を明らかにすることでより洗練された事実を副産物として与えつつ，非常に自然な形での別証明を与えている．

また，本論文で提案された新しい標準分解を計算する多項式時間アルゴリズムをいくつか提案する．これはカテドラル定理によって明らかにされる構造を計算するものにも対応する．

SUMMARY OF Ph.D. DISSERTATION

School Fundamental Science and Technology	Student Identification Number	SURNAME, First name KITA, Nanao

Title

Canonical Decompositions Describing Structures of Matchings in Graphs

Abstract

Graphs are fundamental discrete structures, which arise as a mathematical formulation of network structures such as road networks. A *matching* is a kind of substructures of a graph; a set of edges is called a matching if any two of them are disjoint. The notion of matchings is one of the central concerns in discrete mathematics and has attracted attention for years. Studies on matchings form one of the largest branches of graph theory called *matching theory*. This dissertation is devoted to refining the foundation of matching theory, from three directions: canonical decompositions, structures of barriers, and the enumeration problem of perfect matchings.

A kind of decomposition of graphs called *canonical decompositions* in general has been a fundamental and powerful tool to see matchings. Several canonical decompositions have been known, however each of them can be substantially applicable to a special class of graphs, respectively; also, we have not had any way to know relationships between them or to integrate and unify them. In this dissertation, we give theorems that introduce a new canonical decomposition; this new decomposition can be applicable to any graph, describing much more detailed structures even for the general graphs with perfect matchings, and enables us to understand the other known canonical decompositions in a unified way.

A *barrier* is also a kind of substructures of graphs, which corresponds to a combinatorial interpretation of the dual optimal solutions of the maximum matching problem; that is to say, a barrier is a notion acting as a counterpart of matchings. Duality is a concept that supports the theory of combinatorial optimization, and indeed barriers play important roles when we investigate matchings. However, not so much has been known about barriers, even for those maximal, which are considered to be especially important. In this dissertation we give a theorem which describes structures of maximal barriers of general graphs. This structure theorem corresponds to a generalization of the canonical partition formulated by Lovász in 1972.

Enumerating all the perfect matchings of a given graph is one of the most fundamental problems in enumerative combinatorics and has been studied by various approaches. *The cathedral theorem* is a characterization of the *saturated graphs* and has been useful in investigating relations between the number of perfect matchings and some graph parameters such as degrees. The cathedral theorem was first given by Lovász in 1972, and later Szigeti gave another proof in 2001. Here in this dissertation we give yet another proof by considering the saturated graphs with the new canonical decomposition. In this new proof, we reveal the intrinsic structure exists behind the cathedral theorem and show it in quite a natural way providing more refined properties as by-products.

Moreover, we propose several polynomial time algorithms to compute the new canonical decompositions, which also correspond to algorithmic results of the cathedral theorem.