

A Study on  
Even Embeddings of Graphs

March 2014

Kenta Noguchi

# 主 論 文 要 旨

報告番号	㊦ 乙 第	号	氏 名	野口 健太
主論文題目： A Study on Even Embeddings of Graphs (偶角形分割グラフの研究)				
(内容の要旨)				
<p>グラフの頂点彩色に関する研究はグラフ理論の中心的話題である。グラフの各頂点に、隣接した頂点対には異なる色を割り当てるという規則のもと色を割り当てるとき、必要な色数の最小数をグラフの染色数という。長い間未解決であったことで有名な「四色問題」は、任意の平面グラフの染色数は4以下であるかという問題である。四色問題は1976年に肯定的に解決されたが、多くの問題と研究の流れを生み出した。その主なものに「種数の高い閉曲面上のグラフの染色数」や、「染色数を抑えるためのグラフへの制限」、「特殊な条件を付加した彩色問題」などがある。本論文では偶角形分割となるグラフに焦点をあて、これらの問題を考える。</p> <p>グラフを辺の交差なく閉曲面に描くことを、グラフの閉曲面への埋め込みという。閉曲面上のグラフの染色数の上限を決定するには、計算上求まる上界の値だけ色数を必要とするグラフがその閉曲面に埋め込めるかどうか重要である。それには完全グラフの三角形分割や四角形分割埋め込みといった特徴的な埋め込みが存在することを示すことが鍵となっている。それらのグラフの埋め込みを構成する手法の一つに、<b>current graph</b> を用いるものがある。これはグラフの埋め込みと一対一に対応する <b>rotation system</b> を別のグラフから与える方法である。</p> <p>本論文での主題である偶角形分割埋め込みとは、全ての面が偶角形となるようなグラフの閉曲面への埋め込みのことである。平面上の偶角形分割埋め込みは2部グラフの平面埋め込みと同値であるが、一般閉曲面上のグラフには非可縮なサイクルが存在するため、偶角形分割埋め込みに対して <b>cycle parity</b> という代数的不変量が定義される。本論文では、どのような <b>current graph</b> が偶角形分割グラフに対応し、また <b>current graph</b> のどのような性質が対応する偶角形分割の埋め込みに反映されるのかについて明らかにする。その結果として偶角形分割における帝国問題の染色数の上限を達成する例と、完全グラフの四角形分割埋め込みについて <b>cycle parity</b> のタイプ別の存在を示す。ここで帝国問題とは、飛び地を含む地図に対応するグラフの頂点彩色問題である。特に <b>current graph</b> から非可縮なサイクルの長さをコントロールするという手法は既存の定理にはない新しい手法である。</p> <p>代表的な偶角形分割である四角形分割に関しては、上述の研究のほかに、多色彩色問題や、特別な彩色的性質をもつ三角形分割への拡張についても議論する。特に、一般閉曲面におけるそれらの彩色問題においては <b>cycle parity</b> やそれに類似する代数的不変量との関係を明らかにする。</p>				

## SUMMARY OF Ph.D. DISSERTATION

School Fundamental Science and Technology	Student Identification Number	SURNAME, First name  NOGUCHI, Kenta
Title  <p style="text-align: center;">A Study on Even Embeddings of Graphs</p>		
Abstract  <p>The study of vertex colorings of graphs is one of the main topics in graph theory. The chromatic number of a graph is the number of colors to color vertices so that adjacent vertices receive different colors. Four Color Problem is the one asking whether the chromatic number of a plane graph is at most 4 or more. This problem was solved in 1976, and it produced a lot of problems and good streams of studies. The followings are examples: “Chromatic numbers in the case of the surfaces with higher genus,” “restrictions of graphs for reducing the chromatic number” and “coloring problems with special conditions.” In this thesis, we consider these problems while focusing on even embeddings of graphs.</p> <p>To draw a graph on a surface without edge crossings is called an embedding of the graph on the surface. To determine the upper bound of chromatic numbers of graphs embedded on a surface, we need to show the existence of special embeddings, such as, a triangulation or a quadrangulation of the complete graph. One of the methods to construct such an embedding is to use a current graph, which gives a rotation system corresponding to the embedding.</p> <p>An even embedding of a graph, which is the main theme of this thesis, is one in which each face has even length. On the sphere, an even embedding of a graph is equivalent to an embedding of a bipartite graph. But on general surfaces, there are essential cycles in graphs, and then an algebraic invariant which is called cycle parity is defined as the parities of the lengths of them. We study relations between current graphs and even embeddings of graphs. We construct even embeddings of empire graphs which achieve the upper bounds of the chromatic number. Here an empire graph is one which corresponds to a map having detached territories. We also construct quadrangulations of the complete graphs which have several types of cycle parities by using current graphs. Especially, we propose an entirely new method to control cycle parities by using current graphs.</p> <p>About quadrangulations which are typical even embeddings, we also deal with polychromatic coloring problems and extension problems to a triangulation which has a special coloring. In these problems on general surfaces, we show relationships between algebraic invariants including cycle parities and these problems.</p>		