

A Thesis for the Degree of Ph.D. in Science

Extensions of Binomial and Negative Binomial  
Distributions

February 2014

Graduate School of Science and Technology  
Keio University

Tomoaki Imoto

# 主 論 文 要 旨

報告番号	㊦ 乙 第	号	氏 名	井本 智明
主 論 文 題 目： <b>Extensions of Binomial and Negative Binomial Distributions</b> (二項分布と負の二項分布の拡張)				
(内容の要旨) 本論文では二項分布と負の二項分布を含む分布について考える。古くから個数データ等の解析に用いられてきた二項分布や負の二項分布は、その応用性を広げるために様々な一般化が考えられてきた。例えば、非心ガンマ分布による混合ポアソン分布として定義される非心負の二項分布がある。この分布は負の二項分布よりも大きな散布度をとることができ、そのため、大きな観測値を取るようなデータにも適応できるものとなっている。また二項分布の一般化として、二項分布とポアソン分布の畳み込みから作られるシャリエ級数分布も考えられてきた。しかし、二項分布とシャリエ級数分布は過小分散のものにしか適応できず、また負の二項分布と非心負の二項分布は過大分散のものにしか適応できないことが知られている。ここで考える分布の一つはラグランジュ分布族に含まれる分布であり、シャリエ級数分布と非心負の二項分布を拡張したものとなっている。この分布は先行研究でなされてきたラグランジュ分布族に含まれる重要な分布をいくつか含むため、それらをサブモデルとして許容する一般的なモデルとして使うことができるという利点を有している。その次に、二項分布と負の二項分布の畳み込みから作られる分布についても考える。そこから生成される分布は過小分散型と過大分散型との間を連続的に行き来することができ、極限としてシャリエ級数分布や非心負の二項分布となることができる。また、様々な確率過程からも生じることができ、本論文では3次元ランダムウォークからの生成、移民を含んだ出生死滅過程からの生成、間引き過程からの生成について述べる。最後に主張する分布もまた過小分散型と過大分散型との間を連続的に行き来できる分布である。また、ゼロでの値の頻度に対しても柔軟に対応できる分布となっており、そのためゼロ拡張操作を必要とせず、観測値ゼロの多いデータに対しても直接使用することができるという利点を有している。				

## SUMMARY OF Ph.D. DISSERTATION

School Fundamental Science and Technology	Student Identification Number	SURNAME, First name IMOTO, Tomoaki
Title Extensions of Binomial and Negative Binomial Distributions		
Abstract This thesis proposes three distributions which include the binomial and negative binomial distributions. The classical binomial and negative binomial distributions are utilized for analyzing count data and a lot of their generalizations are considered to extend the applicability to real data sets. The non-central negative binomial distribution, which is generated as the mixed Poisson distribution with non-central gamma distribution, is one of the generalizations of the negative binomial distribution and it becomes higher dispersed than the negative binomial distribution. The Charlier series distribution, which is generated from a convolution of binomial and Poisson distributions, is one of the generalizations of binomial distribution. However, the binomial and Charlier series distributions are always under-dispersed, while the negative binomial and non-central negative binomial distributions are always over-dispersed. The first distribution proposed in this thesis is generated as a Lagrangian distribution and extends the Charlier series and non-central negative binomial distributions. The distribution includes some other important distributions which were generated as Lagrangian distributions and thus may be viewed as a full model which allows sub-models. Second, the distribution which is generated from a convolution of binomial and negative binomial distributions is considered. The derived distribution plays the role of a continuous bridge between under- and over-dispersion. Moreover, this can become the Charlier series and non-central negative binomial distributions as limiting distributions. Various types of stochastic processes lead to the distribution and, in this thesis, three stochastic processes are considered, i.e., a three-dimensional random walk, a birth, death and immigration process and a thinned stochastic process. The third proposed distribution also plays the role of a continuous bridge between under- and over-dispersion. Moreover, the distribution can allow for frequent zero-valued observations and therefore has a merit that we can use the model for the count data with excess zeros without utilizing the operation like mixture.		