

# Extensions of Probability Distributions on Torus, Cylinder and Disc

August 2013

Minzhen Wang

# 主 論 文 要 旨

報告番号	㊦ 乙 第	号	氏 名	王 敏 真
主 論 文 題 目： <b>Extensions of Probability Distributions on Torus, Cylinder and Disc</b> (トーラス、シリンダー及びディスク上の確率分布の拡張)				
(内容の要旨)				
<p>角度観測値を含むデータの統計学は方向統計学として知られている。二つの時点において観測される風向のような二変量角度データのモデル化の際には二変量角度分布すなわちトーラス上の分布を考えることになる。本論文では、方向統計学の枠組みの中でトーラス上の分布と共にシリンダー及びディスク上の分布の拡張を提案している。</p> <p>円周上の分布に関する予備的な結果として、円周上のハート型分布に従う確率変数を <b>Möbius</b> 変換して得られる分布の分布関数、三角モーメント、単峰性と対称性の条件について調べた。トーラス上の分布については、<b>Möbius</b> 変換によって潜在構造が定められるモデル、言い換えれば三変量から二変量の分布を生成する変量減少法の一つから導かれるトーラス上の二変量ハート型分布を提案し、結合確率密度関数、結合三角モーメント及び角度変数間相関係数の具体的な式を与えた。また、二変量ハート型分布を利用して、朝 6 時と正午に継続的に観測された風向データの解析例を示した。</p> <p>次に、シリンダー上の分布を、<b>von Mises</b> 分布と変換された <b>Kumaraswamy</b> 分布の組み合わせから生成し、周辺分布と条件付き分布を与えた。この提案分布は <b>Johnson</b> と <b>Wehrly</b> による分布の拡張である。また、正弦関数によって歪められた巻き込み <b>Cauchy</b> 分布と <b>Weibull</b> 分布の組み合わせから生成した分布も提案した。その他、周辺分布が指定されているときにシリンダー上の分布を生成する方法を用いることによって、ハート型分布と変換された <b>Kumaraswamy</b> 分布を周辺に持ち、<b>von Mises</b> 分布をリンクとする分布の提案を行っている。</p> <p>最後に、長さを保つ修正メビウス変換を用いてディスク上の <b>Möbius</b> 分布の拡張としての非対称分布を生成し、周辺分布などの諸性質を調べた。</p>				

## SUMMARY OF Ph.D. DISSERTATION

School	Student Identification Number	SURNAME, First name
Fundamental Science and Technology	81047518	WANG, Minzhen
Title		
Extensions of Probability Distributions on Torus, Cylinder and Disc		
Abstract		
<p>Statistics for data which include angular observations is known as directional statistics. Bivariate circular data such as wind directions measured at two points in time are modeled by using bivariate circular distributions or distributions on the torus. In this thesis, we propose some extensions of distributions on the torus and also the cylinder and the disc in the framework of directional statistics.</p> <p>For the univariate circular case as a preliminary result, the distribution function, trigonometric moments, and conditions for unimodality and symmetry are studied when the Möbius transformation is applied to a univariate cardioid random variable. For the bivariate circular case, we propose a bivariate cardioid distribution which is generated from a circular-circular structural model linked with Möbius transformation or a method of trivariate reduction. The joint probability density function, trigonometric moments and circular-circular correlation coefficient are explicitly expressed. An illustration is given for wind direction data at 6 a.m. and noon as an application of the bivariate cardioid distribution.</p> <p>Next, we propose new distributions on the cylinder. A distribution generated from a combination of von Mises and transformed Kumaraswamy distributions is an extension of the Johnson and Wehrly model. The marginal and conditional distributions of the proposed distribution are given. Another model is a combination of sine-skewed wrapped Cauchy and Weibull distributions. A distribution using the method of generating a cylindrical distribution with specified cardioid and transformed Kumaraswamy marginals and von Mises link is also proposed.</p> <p>Finally, we generate skew or asymmetric distributions on the disc by using a modified Möbius transformation as extensions of the Möbius distribution. Some properties such as the marginal density functions of the proposed distributions are obtained.</p>		