

Title	Die Berechnung der Durchsatzverteilung im Rohrleitungsnetzwerk mit Rücksicht auf die Zweigverluste
Sub Title	
Author	笠原, 英司(Kasahara, Eiji) 前田, 昌信(Maeda, Masanobu)
Publisher	慶應義塾大学藤原記念工学部
Publication year	1967
Jtitle	Proceedings of the Fujihara Memorial Faculty of Engineering Keio University (慶應義塾大学藤原記念工学部研究報告). Vol.20, No.77 (1967.) ,p.1(1)- 10(10)
JaLC DOI	
Abstract	The calculation of flow rates in the piping-network is ordinarily made by Hardy-Cross' method or by the analog computer which is set specially for these purposes. Such a treatment is uncomfortable when the losses at branches can not be neglected any more. The analog computer must have a plenty of function generators which characterize the pipe branches and we must also recognize that the analog computer has the lower accuracy compared with the digital-computer. In the calculation with the Hardy-Cross' method we must assume the direction of current in the mesh of the network. For the case where the branch-losses are included the character of branches can not be determined. But the treatment which is made here analogous to the knodeanalysis in the electronics fits for such a case where the branch-losses are included in the network. The setting of the equations and the calculations are done very simply and systematically and by using the digital computer we can save the time and labor even if we must have a complication by the iteration method.
Notes	
Genre	Departmental Bulletin Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KO50001004-00200077-0001

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the Keio Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

Die Berechnung der Durchsatzverteilung im Rohrleitungsnetzwerk mit Rücksicht auf die Zweigverluste*

(Received March 13, 1967)

Eiji KASAHARA**

Masanobu MAEDA***

Abstract

The calculation of flow rates in the piping-network is ordinarily made by Hardy-Cross' method or by the analog computer which is set specially for these purposes. Such a treatment is uncomfortable when the losses at branches can not be neglected any more. The analog computer must have a plenty of function generators which characterize the pipe branches and we must also recognize that the analog computer has the lower accuracy compared with the digital-computer. In the calculation with the Hardy-Cross' method we must assume the direction of current in the mesh of the network. For the case where the branch-losses are included the character of branches can not be determined. But the treatment which is made here analogous to the knodeanalysis in the electronics fits for such a case where the branch-losses are included in the network. The setting of the equations and the calculations are done very simply and systematically and by using the digital computer we can save the time and labor even if we must have a complication by the iteration method.

I. Einleitung

Bei der Berechnung des Durchsatzes im Rohrleitungsnetzwerk wird die Hardy-Cryssche Methode oder ein für diesen Sonderzweck angeordneter Analogrechner angewendet. Solche Behandlungen sind aber ungünstig, wenn die Verluste an den Abzweigungen nicht vernachlässigbar sind. Der Analogrechner muss dabei die zahlreichen Funktionserzeuger an sich enthalten, man muss jedoch in Kauf nehmen, dass er gegenüber dem Digitalrechner eine wesentlich geringere Genauigkeit hat. Bei der Hardy-Crossschen Rechnungsmethode muss man die Stromrichtung der Masche vorher annehmen. Für die ist er, da man die Zweigverluste berücksichtigen

* Dieser Bericht wurde 1962 am 40. Kongress des Maschinenbaus an der Kanazawa Uni. geredet.

** 笠原 英司 Professor, Faculty of Engineering, Keio University.

***前田 昌信 Instructor, Faculty of Engineering, Keio University.

muss, ein Nachteil, denn der Charakter der Abzweigung bei der Anwendung dieser Methode nicht bestimmt werden. Dagegen kann die hier besprochene Behandlung, d. h. die sogenannte Knotenanalyse, analog der elektrischen Netzwerkanalyse ganz systematisch die Zweigverluste in die Rechnung aufnehmen. Der Widerstandsbeiwert wird als die Funktion der Reynoldsschen Zahl betrachtet. Dadurch wird die Berechnung zwar umständlicher, aber diese Systematisierung kann auch zugleich die Berechnung mit Hilfe des Digitalrechners im Grossen und Ganzen vereinfachen. Es genügt daher dabei nur eine Reihe der Gleichungen der Rohrleitungsnetzwerkes zu einem Programm zusammenzustellen.

II. Bezeichnung

- e_i : Elektrisches Potential
- I_{ij} : Elektrischer Strom zwischen den Punkten i und j
- Y_{ij} : Elektrische Admittanz zwischen den Punkten i und j
- h_i : Druck
- h_{ij} : Druckdifferenz zwischen den Punkten i und j
- Q_{ij} : Durchflussmenge zwischen den Punkten i und j
- B_{ij} : Admittanz bei dem Rohrleitungsnetzwerk zwischen den Punkten i und j
- E_k : Elektrische Spannung
- H_k : Druckverlust wegen der Abzweigung
- d_{ij} : Durchmesser des Rohres
- l_{ij} : Länge bzw. entsprechende Länge des Rohres
- λ_{ij} : Rohrreibungsbeiwert
- g : Schwerbeschleunigung
- R_e : Reynoldssche Zahl
- ε : Rauigkeit der Rohrleitung
- ν : Kinematische Viskosität der Flüssigkeit
- ζ : Zweigverlustsbeiwert
- x : Verhältnis der Strömungen gegen den grössten Strom $x = Q_u/Q, Q_b/Q$
- ξ : Widerstandsbeiwert ausser von der Abzweigung und von der Rohrreibung, z. B. von der Durchmesseränderung des Rohres.

III. Knotenanalyse beim liniaren elektrischen Kreis

Wendet man die Kirchhofschen Regeln an einem der Knotenpunkte des Netzwerkes, z. B. an dem Punkt 1 wie in der Abbildung 1, an, so ergibt sich die Gleichung

$$(e_1 - e_2) Y_{12} + (e_1 - e_3) Y_{13} + (e_1 - e_4) Y_{14} = I_1, \quad (1)$$

die man auch folgendermassen schreiben kann

$$(Y_{12} + Y_{13} + Y_{14}) e_1 - Y_{12} e_2 - Y_{13} e_3 - Y_{14} e_4 = I_1. \quad (2)$$

Mit dem weiteren gleichen Verfahren werden die Gleichungen für alle Knotenpunkte des Systems gegeben. Man kann also dadurch alle Potentiale berechnen, wenn die Admittanz vorher gegeben ist. Die symmetrischen Glieder enthalten alle Admittanzen zwischen den einzelnen Punkten und der Erde und die unsymmetrischen Glieder sind die Admittanzen zwischen den jeweils benachbarten Punkten. Durch diese Verallgemeinerung kann man die Gleichung für das Netzwerk bekommen.

$$-Y_{12}e_1 + (Y_{12} + Y_{23} + Y_{24})e_2 - Y_{23}e_3 - Y_{24}e_4 = I_2 \quad (3)$$

$$-Y_{13}e_1 - Y_{23}e_2 + (Y_{13} + Y_{23} + Y_{35})e_3 = I_3 \quad (4)$$

$$-Y_{14}e_1 - Y_{24}e_2 + (Y_{14} + Y_{24} + Y_{45})e_4 = I_4 \quad (5)$$

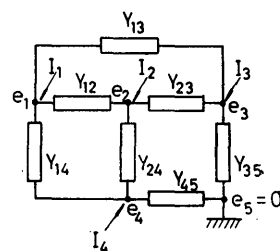


Abb. 1. Ein Beispiel des elektrischen Netzwerkes mit Admittanzen.

IV. Grundgleichungen

Wenn man eine Rohrleitung, in der die Strömung mit dem Durchsatz Q strömt, betrachtet, so erfolgt der Druckverlust h ,

$$h = k \cdot Q^2, \quad (6)$$

wobei $k = \lambda \cdot \frac{l}{d^5} \cdot \frac{1}{2g} \cdot \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 = 0,0827 \lambda \cdot \frac{l}{d^5}$ ist. Den Widerstandsbeiwert kann man aus der Moody-Abbildung entnehmen, aber man speist ihn besser empirisch in den Rechner ein. Im laminären Bereich nimmt man

$$\lambda = 64 / Re \quad (7)$$

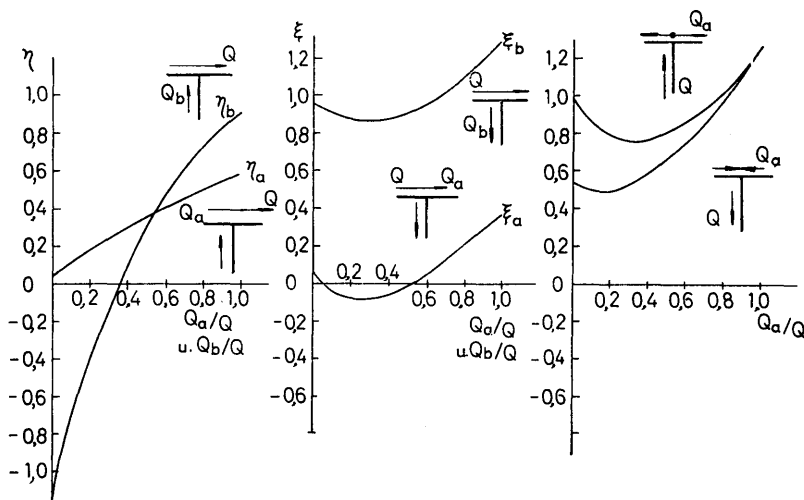


Abb. 2. Verlauf des Beiwertes des Zweigverlustes an der rechtwinkligen Abzweigung.

nach Karmann-Nikradse und im turbulenten Bereich nach Colebrook,

$$\lambda = 1.74 - 2 \log \left(\frac{2\varepsilon}{d} + \frac{1.87}{Re \sqrt{\lambda}} \right). \quad (8)$$

Der Druckverlust an der Abzweigung wird mit

$$h = 2\zeta Q^2 / g \pi d^2 \quad (9)$$

ermittelt, wobei der Widerstandsbeiwert ζ von der Strömungsart abhängig ist. Die entsprechende Kennlinie der T-Abzweigung ist in der Abbildung 2 dargestellt. Die sonstigen Verluste z. B. der durch die Veränderung des Rohrquerschnittes sind in ihrem Widerstandsbeiwert addierbar, so kann man einen totalen Widerstandsbeiwert oder eine dementsprechende Rohrlänge nehmen.

V. Einführung der Knotenanalyse in die Berechnung des Rohrleitungsnetzwerkes

Die Gleichung (6) kann auch einfach in der Form ausgedrückt.

$$h_{ij} = k \cdot Q_{ij} \cdot Q_{ij} \quad (10)$$

Wenn man die Admittanz

$$B_{ij} = 1/K_{ij} \cdot Q_{ij} \dots\dots\dots Y_{ij} \quad (11)$$

die Spannung

$$h_{ij} = |h_i - h_j| \dots\dots\dots |e_i - e_j| \quad (12)$$

und den Strom

$$Q_{ij} \dots\dots\dots I_{ij}$$

analogiert, so ergibt sich die Ohmsche Regel

$$I_{ij} = Y_{ij} |e_i - e_j|. \quad (13)$$

$$Q_{ij} = B_{ij} |h_i - h_j|. \quad (14)$$

Freilich muss Q'_{ij} , das in die Gleichung $B_{ij} = 1/k_{ij} Q'_{ij}$ eingesetzt wird, gleich Q_{ij} sein, aber man kann den Wert nicht vorher angeben, da man den endlich durch Annäherung erhält. Man setzt also einen beliebigen Anfangswert in Q_{ij} in die Gleichung (11) ein. Aus den linariisierten Gleichung des Systems bekommt man den zunächst abweichende Werte von Q_{ij} und Q'_{ij} , die wir mit Q_{ijn} und Q'_{ijn} bezeichnen. Für den nächsten Wert nimmt man $Q_{ijn+1} = \frac{Q_{ijn} + Q'_{ijn}}{2}$ und wenn die beiden Werten Q_{ijn} und Q_{ijn+1} mit der gewünschten Genauigkeit übereinstimmen, bekommt man jede richtige gewünschte Druchflussmenge Q_{ij} . Da der Widerstandsbeiwert auch am Anfang angenommen worden ist, so muss er durch die Reynoldssche Zahl korrigiert werden. Wenn Q_{ij} im laminären Bereich liegt, so muss der Widerstandsbeiwert nach der Reynoldsschen Zahl wieder nachgebessert werden. Der Zweigverlust entsteht beim Ablenken- und Zusammenströmen der beiden Strömungen.

Analog zum elektrischen Netzwerk könnte man ihn als eine vom anderen Strom abhängige Spannung ansehen. Alle gegebenen Zweigverluste sind mit H_k bezeichnet. Hier kann die Knotenanalyse an dem die Zweigverluste enthaltenden Stromnetzwerk angewendet werden.

Man kann auch die Gleichung systematisch analog zum elektrischen Kreis aufbauen, der zwischen den Admittanzen eine Spannungsquelle hat. Die linken Glieder der Gleichung sind ganz gleich wie bei dem Fall, dass der Stromkreis keine Abzweigungsverluste enthält. Die rechten sind die von aussen eingeströmte Strommenge und die zusätzlich an den Abzweigungen entstehende, scheinbare Strommenge $H_k B_{ij}$. Unter Berücksichtigung der Abzweigungsverluste ergibt sich die folgende Gleichung. Der Abbildung 2 gemäss,

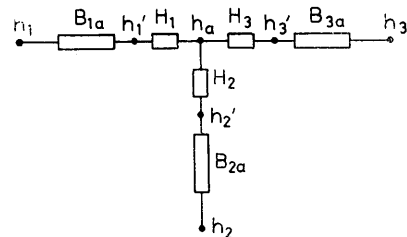


Abb. 3. Äquivalentes Netzwerk der Rohrabzweigung.

$$(B_1 + B_2 + B_3)h_a - B_1h_1 - B_2h_2 - B_3h_3 = B_1H_1 + B_2H_2 + B_3H_3. \quad (15)$$

Wenn man als Anfangswert an jedem H_k Null gibt, so entspricht die Gleichung dem zweigverlustlosen Fall. Die Auflösung ergibt der einzelnen Knotenpunkte die Potentiale und daraus können die Stromrichtung und die Strommenge jeder Rohrleitung ermittelt werden. Danach wird der Charakter der Abzweigung und der Anfangswert aus den gegebenen Strommenge bestimmt, d. h. es muss erst festgestellt werden, ob es sich um eine Strömung handelt, die sich verzweigt oder um zwei Strömungen, die sich vereinigen. Danach wird die Kennlinie des Zweigverlustes ausgewählt. Da man aber in manchen Fällen vorher die Stromrichtung schätzen kann, so würde die Rechnung praktisch noch einfacher verlaufen. Im allgemeinen von dem Beispiel Abb. 2:

a) Es sei die grösste Strommenge gesucht.

1. Wenn Q_1 , $H_1 = 0$
2. Wenn Q_2 , $H_2 = 0$
3. Wenn Q_3 , $H_3 = 0$.

b) Es sei die Richtung der grössten Strommenge gesucht.

1. Wenn $h_a - h_1 < 0$ sich verzweigt
 $h_a - h_1 > 0$ sich vereinigen
2. Wenn $h_a - h_2 < 0$ sich verzweigt
 $h_a - h_2 > 0$ sich vereinigen
3. Wenn $h_a - h_3 < 0$ sich verzweigt
 $h_a - h_3 > 0$ sich vereinigen

Zuerst rechnet man unter der Annahme, dass keine Zweigverluste auftreten. Daraus scheidet man die grösste Strommenge an der betrachteten Abzweigung. Es sei die grösste Durchflussmenge Q_1 gesucht, man prüft dann die Stromrichtung

d. h. $(h_a - h_1)$. Wenn sich für die benachbarten zwei Punkte $h_a - h_1 < 0$ ergibt, so verzweigt sich der Strom und wenn sich $h_a - h_1 > 0$ ergibt, so vereinigen sich die beiden Ströme. (s. Abb. 4).

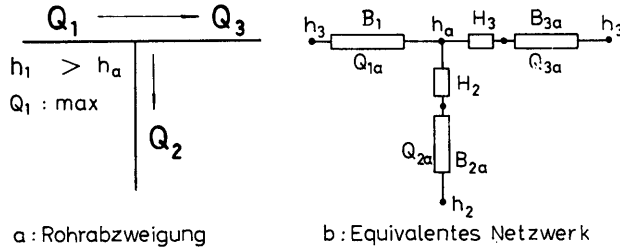


Abb. 4. Bei $h_1 - h_a > 0$ wird die Stromrichtung wie im Bild links bestimmt und durch das äquivalente Netzwerk wird die Berechnung weiter entwickelt.

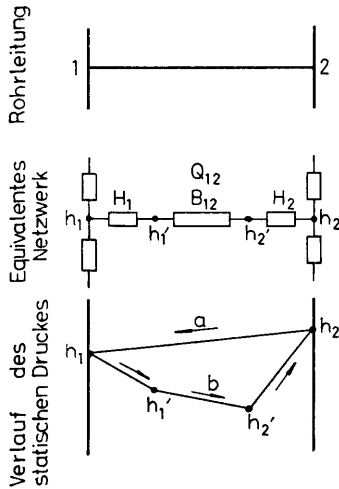


Abb. 5.

- a. Die Stromrichtung mit keiner Rücksicht auf die Zweigverluste.
- b. Die Stromrichtung mit Rücksicht auf die Zweigverluste.

Wenn sich für die benachbarten zwei Knotenpunkte fast gleiche Potentiale ergeben, können die zwei Möglichkeiten der Stromrichtung betrachtet werden, so muss man beachten, ob der Typ der Zweigung wie in Abb. 5 ist und die Bedingung $h_1 - h_2 + H_1 + H_2 < 0$ erfüllt ist. Die Erscheinung, dass der Strom in anderer Richtung als man dachte fließt, entsteht nur bei der sehr kleinen Strommenge, könnte man also für den Anfangswert Q_{12} in Abb. 5 Null annehmen und diesen für iterationsrechnung verwenden. Wenn sich dafür keine Lösung ergibt die Stromrichtung umgekehrt als erwartet, d. h. der strömt wie vorher ohne Zweigverluste errechnet wurde.

VI. Beispiele des Netzwerkes und seine Gleichungen

Es gäbe ein Rohrleitungsnetzwerk wie in Abb. 6. Man setzt die Gleichungen an den Knotenpunkten von 1 bis 3, am Knotenpunkt 4 wird das Potential aber null eingesetzt, so bekommt man die folgenden drei Gleichungen mit drei Unbekannten;
für den Knotenpunkt 1

$$(B_{12} + B_{13})h_1 - B_{12}h_2 - B_{13}h_3 = Q + B_{12}(H_2 + H_4) + B_{13}(H_3 + H_8), \quad (16)$$

für den Knotenpunkt 2

$$-B_{12}h_1 + (B_{12} + B_{23} + B_{25})h_2 - B_{23}h_3 = B_{12}(H_2 + H_4) + B_{23}(H_6 + H_7) + B_{24}(H_5 + H_{10}), \quad (17)$$

für den Knotenpunkt 3

$$-B_{13}h_1 - B_{23}h_2 + (B_{13} + B_{23} + B_{34})h_3 = B_{13}(H_3 + H_8) + B_{23}(H_6 + H_7) + B_{34}(H_9 + H_{11}). \quad (18)$$

Daraus erhält man h_1 , h_2 und h_3 . Die Strommenge und die Richtung erfolgen;

$$B_{ij}|h_i - h_j| = Q_{ij} \quad \text{u.} \quad (h_i - h_j).$$

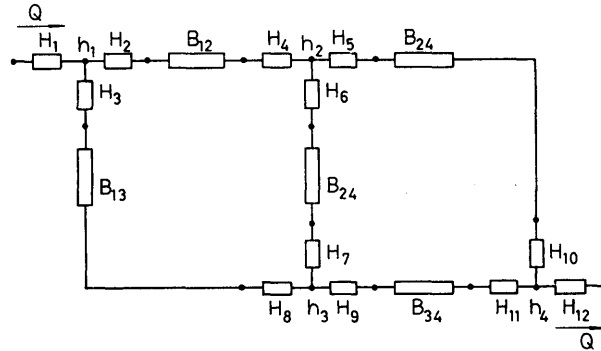


Abb. 6. Equivalentes Netzwerk mit vier Knotenpunkten.

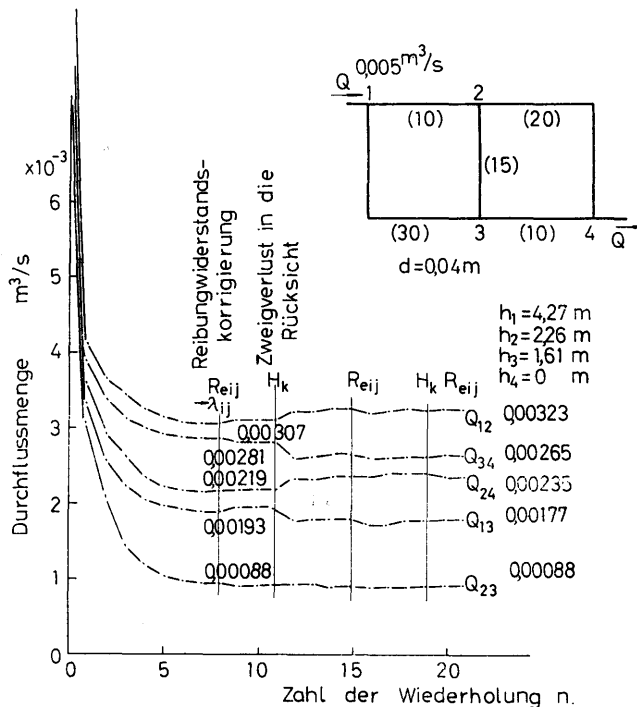


Abb. 7. Annäherungsverlauf der Iterationsberechnung für das oben gezeigte Beispiel. Die im Klammern gesetzte Zahl ist die entsprechende Rohrlänge des Kanals.

In diesem Beispiel werden die Rohrlängen, wie sie in der Abbildung 7 im Klammer gezeigt werden, angenommen und für Wasser berechnet. Die Verläufe der Iteration

wird auch in der Abbildung 7 aufgetragen. Wenn die Gleichungen keine Zweigverluste enthalten, konvergieren die Werte in der verhältnismässig wenigen Wiederholung. Dem Hilft aber der Digitalrechner. Die letzten Ergebnisse erfüllen alle benötigten Bedingungen. Von diesen Ergebnissen wird der Unterschied zwischen den beiden Fällen, dass die Zweigverluste in Rücksicht genommen wird und nicht genommen wird, bemerken.

Der extreme Fall, dass die Zweigverluste das Netzwerk beeinflussen, zeigt die Möglichkeit, dass der Strom rückwärts gegenüber dem Potential strömt. Der Druckabfall zwischen den Knotenpunkten 1 und 2 in den drei in Abb. 8 dargestellten Beispielen sind egal, wenn keine Zweigverluste in Rücksicht genommen werden. Wenn aber die Zweigverluste da sind, werden die Druckdifferenz zwischen den Punkten 1 und 2 je nach der Abzweigungsart verschieden sein. Nimmt man ein Netzwerk wie im Beispiel (c), dafür kann man von der Rechnung die zwei Möglichkeiten der Stromrichtung zeigen. Ein Beispiel, dass der Strom rückwärts strömt, wird von Oki und Kawaguchi⁽¹⁾ berichtet. Der Strom kann im mit B_2 bezeichneten Rohr von 2 zu 1 und zugleich unter dergleichen Bedingungen auch von 1 zu 2 strömen. Die Ursache der Zauberei stammt nämlich aus der Existenz der Abzweigungen. Der Gleichung ergibt sich

$$h_2(B_1 + B_2) = Q + B_1(H_3 + H_4) + B_2(H_2 + H_5). \quad (19)$$

Wenn der Strom im Rohr 2 von dem Punkt 2 zu 1 strömt, hat H_5 den Charakter der Abzweigsströmung, H_2 denjenigen der Zusammenströmung und H_3 und H_4 werden null. Wenn der Strom von 1 zu 2 strömt, werden H_4 u. H_5 den Charakter der Zusammenströmung haben und H_3 u. H_2 denjenigen der Abzweigungsströmung.

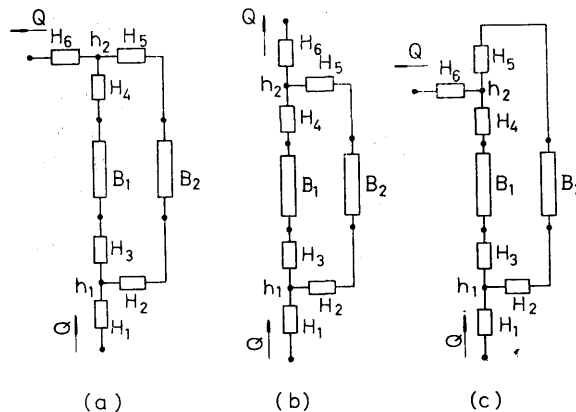


Abb. 8. Drei Beispiele des einmaschigen Netzwerks.

Ein Beispiel (a), wo der Wasserstrom im Rohr 2 vom Punkt 2 zu 1 strömt und ein Beispiel (b), wo der Wasserstrom im Rohr 2 vom Punkt 1 zu 2 strömt sind in Abb. 9 dargestellt. Im Rohr 1 strömt der grösste Durchsatz, so werden H_3 und

H_4 null. Es ist merkwürdig, dass H_3 einen grossen minus Wert nimmt. Im Beispiel (b) ist der Strom am Ein- und Ausgang der grösste, so sind H_1 und H_6 ausgefallen. Daraus weiss man, dass es unter der gleichen Bedingung die Beiden Strommöglichkeiten gibt. Im Beispiel (a) enthält die Druckdifferenz h_{12} H_1 und H_6 nicht. Der wirklich am Ende der Rohres erscheinende Druckabfall wird also der Wert 0,289, dem H_1 und H_6 addiert sind. Hier wird kein instationärer Fall diskutiert, so kann man nicht feststellen, wie der Zustand gegeneinander übergeht.

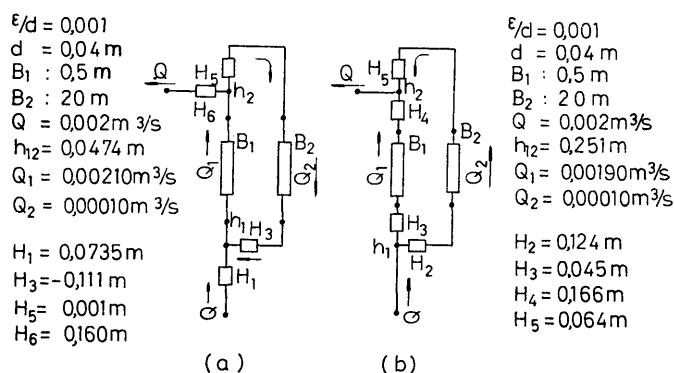


Abb. 9. Zwei Möglichkeiten der Stromrichtung und der Strommenge in einem Rohrleitung.

VII. Diskussionen

Hier wird die den im Kreis existierenden Widerständen entsprechende Rohrleitungslänge für die Berechnung gebraucht. Diese Ausdrücke kann die Widerstände sowie des Knierohrs, des Drossels, des Ventils und der alle anderen Möglichen enthalten. Da der Widerstand $\xi v^2/2g$ und mit der in demselben Rohr fließenden Geschwindigkeit ausgedrückt wird, darf die Widerstandsbeiwerte einfach nur addiert werden. Die alle Widerstandsbeiwerte gegenüber der Strommenge müssen dabei vorher in den Rechner gespeist werden. Ist irgendein unbekanntes Element da, durch die Beobachtung von aussen d. h. durch die Reaktion gegenüber dem Durchsatz kann die gesamte Kennlinie festgestellt werden. Je mehr die Maschen sind, um so mehr nehmen die Zahl der Gleichung zu. Aber diese besprochene Methode hat ein Vorteil, das ganze System zugleich mit einer Reihe der Gleichung lösen zu können. Da die Gleichungen symmetrisch mit den diagonale Gliedern sind, wird die Einsetzung der Gleichungen praktisch leichter. Man hätte vielleicht etwas Angst davor, ob die Rechnung sich verstopft, wenn der Strom Q_{ij} im Glied B_{ij} null wird. Wenn die Potentiale der benachbarten Punkten gleich werden, erscheint dieser Zustand. Im Bereich der sehr wenigen Strommenge wird jedoch die Admittanz B_{ij} konstant d. h. $B_{ij} = d_{ij}^4 / 12,405 \pi \nu l$, so hat man dann keine Angst davor, ob die Admittanz unendlich wird.

Schrifttum

1. Kawaguchi und Oki: Berechnung des Durchsatzes in einem einfachen "Netzwerk." Kantanna Kanromonai no Ryuryokeisan. Trans. of JSME Vol. 17 No. 56.
2. Kawaguchi und Oki: Betrachtung über die Zweigverluste an den Abzweigungen." Bunki oyobi Goryukan no Suitsosonshitsu nitaishuru Kosatsu." Trans. of JSME Vol. 17 No. 56.
3. Eiji Kasahara: Hydraulik "Suirikigaku." Sangyo Tosho Verlag.
4. Yoshio Hiramatsu: Neue Lösemethode des Lufttunnels des Bergwerks "Atarashii Tsukimo no Kaiho." Nihon Kogyo Kaishi Vol. 69 No. 775.
5. Susumu Terada: Pumpentechnik "Oyo Pompkogaku." Iwanami Verlag.