

Title	Ein Kleiner Beitrag für die Berechnung der Durchflussmenge und des Widerstandsbeiwertes in einer Doppelt Eingestellten Rohrleitung
Sub Title	
Author	笠原, 英司(Kasahara, Eiji) 前田, 昌信(Maeda, Masanobu)
Publisher	慶應義塾大学藤原記念工学部
Publication year	1966
Jtitle	Proceedings of the Fujihara Memorial Faculty of Engineering Keio University (慶應義塾大学藤原記念工学部研究報告). Vol.19, No.73 (1966.) ,p.104(54)- 109(59)
JaLC DOI	
Abstract	The exact solutions about the discharge and the resistance through the double pipes are given by E. Kasahara and M. Shimizu when the outside and inside pipes of the double pipe are detouching each other. Here the case when the both are touching each other is solved and with the case of coaxial double pipes by Muller is numerically calculated and the values are given in the comfortable table for engineering use.
Notes	
Genre	Departmental Bulletin Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KO50001004-00190073-0054

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the Keio Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

Ein Kleiner Beitrag für die Berechnung der Durchflussmenge und des Widerstandsbeiwertes in einer Doppelt Eingestellten Rohrleitung*

(Received May 16, 1966)

Eiji KASAHARA**

Masanobu MAEDA***

I) The exact solutions about the discharge and the resistance through the double pipes are given by E. Kasahara and M. Shimizu²⁾ when the outside and inside pipes of the double pipe are detouching each other. Here the case when the both are touching each other is solved and with the case of coaxial double pipes by Müller¹⁾ is numerically calculated and the values are given in the comfortable table for engineering use.

Die genaue Lösung der Durchflussmenge bzw. des Widerstandsbeiwertes über das Doppelrohr, wie das ein Rohr in das Andere eingestellt ist, werden bei der stationären Strömung und bei dem koaxialen Fall von Müller¹⁾ und bei dem exzentrischen Fall aber die beiden Rohre aneinander nicht berührendes Rohr von E. Kasahara und M. Shimizu²⁾ durchgeführt. Hier wird der Fall, dass die beiden Rohre aneinander berühren, auch behandelt. Um die Schwierigkeiten des praktischen Gebrauchs der Gleichungen zu vermeiden, wird die günstige Tafel für die Berechnungen der Durchflussmenge und des Widerstandsbeiwertes dargestellt.

II) Bezeichnungen

- w : Geschwindigkeit der Flüssigkeit entlang des Rohres
- p : Druckdifferenz
- P : Druckgradient entlang des Rohres
- μ : Viskosität der Flüssigkeit
- Q : Durchflussmenge pro Einheitsstunde
- Re : Reynoldssche Zahl = $d_m v / \nu$
- r_1 : Halbmesser des Aussenrohres
- r_2 : Halbmesser des Innenrohres

* Dieser Bericht wurde am 11.11.1961 im Kongress des Maschinenbaus an der Nagoya Universität/Japan geredet.

** 笠原英司, Professor, Faculty of Engineering, Keio University.

*** 前田昌信, Instructor, Faculty of Engineering, Keio University.

- v : Durchschnittsgeschwindigkeit über den Querschnitt
 ν : Kinematische Viskosität
 g : Schwerebeschleunigung
 d_m : Hydraulischer Durchmesser $4m=2(r_1-r_2)$
 λ : Widerstandsbeiwert
 l : Länge des Rohres
 b : Halbmesserverhältnis r_2/r_1
 c : Exzentrizitätsverhältnis d/r_1
 d : Exzentrizität des Doppelrohres
 A_n, B_n : Fouriersche Konstante
 ψ : Funktion der Strömung
 γ : Spezifisches Gewicht der Flüssigkeit

III) Grundgleichungen

Unter der Bedingungen, dass die Strömung laminar und stationär ist, wird die Gleichung der Bewegung

$$\mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{dp}{dz} = -P, \quad (1)$$

wobei wird z in der Richtung entlang des Rohres genommen. Man setzt die Geschwindigkeit im nächsten Form an:

$$w = \psi - \frac{P}{4\mu}(x^2 + y^2), \quad \nabla^2 \psi = 0. \quad (2)$$

Aus der Randbedingung an der Wand $w=0$, dann

$$\psi = \frac{P}{4\mu}(x^2 + y^2). \quad (3)$$

IV) Der Fall, dass die beiden Rohre exzentrisch gestellt und aneinander berühren.

Die Funktion der konformen Abbildung zwischen der $x-y$ Ebene und der $\xi-\eta$ Ebene ist

$$x + iy = \frac{1}{\xi + i\eta}, \quad (4)$$

d.h

$$x = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2},$$

$$y = \frac{-\eta}{\xi^2 + \eta^2},$$

$$x + \left(y + \frac{1}{2\eta} \right)^2 = \frac{1}{4\eta^2}. \quad (5)$$

Die Gleichung (5) bedeutet, dass die Kurve auf der $x-y$ Ebene den Werten $\eta = \alpha$

und $\eta = \beta$ auf der $\xi - \eta$ Ebene entsprechend die im Nullpunkt aneinander berührenden zwei Kreise dargestellt.

Hier werde die Funktion ψ_n folgendermassen angesetzt

$$\psi_n = \left\{ A_n \frac{\sinh n(\eta - \alpha)}{\sinh n(\beta - \alpha)} - B_n \frac{\sinh n(\beta - \eta)}{\sinh n(\beta - \alpha)} \right\} \cos n\xi, \quad (6)$$

$$\psi = \int_0^\infty \psi_n dn.$$

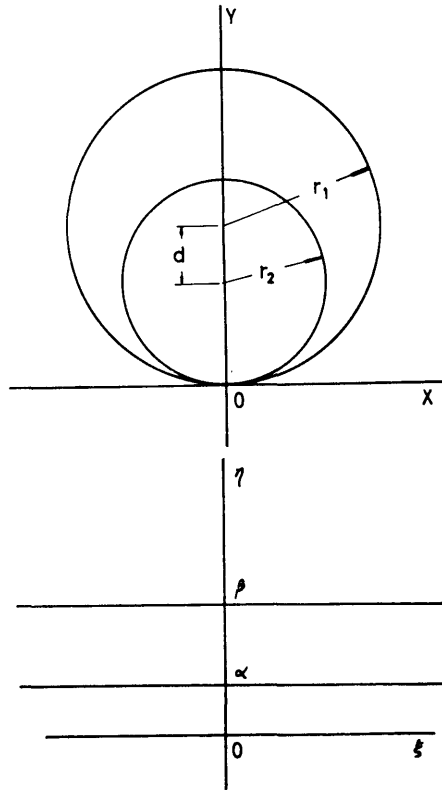


Abb. 1. Die konforme Abbildung von der $\xi - \eta$ Ebene zu der $x - y$ Ebene. Die Linien, $\eta = \alpha$ und $\eta = \beta$ von $-\infty$ zu $+\infty$ entsprechen dem Aussenkreis und dem Innenkreis, die im Nullpunkt aneinander berühren.

Mit den Randbedingungen

$$\eta = \alpha: \quad \psi = \frac{P}{4\mu(\xi^2 + \alpha^2)}$$

$$\eta = \beta: \quad \psi = \frac{P}{4\mu(\xi^2 + \beta^2)}$$

ergibt sich die Gleichung für die Geschwindigkeit,

$$w = \frac{P}{4\mu} \left[-\frac{1}{\xi^2 + \eta^2} + \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-n\beta} \sinh n(\eta - \alpha)}{\beta \sinh n(\beta - \alpha)} + \frac{e^{-n\alpha} \sinh n(\beta - \eta)}{\alpha \sinh n(\beta - \alpha)} \right\} \cos n\xi dn \right]. \quad (8)$$

Und die Durchflussmenge

$$\begin{aligned} Q &= \iint_s w(x, y) dx dy = \int_\alpha^\infty \int_{-\infty}^\infty w(\xi, \eta) d\xi d\eta / (\xi^2 + \eta^2) \\ &= \frac{\pi P}{16\mu} \left[\frac{3}{8} \left(\frac{1}{\beta^4} - \frac{1}{\alpha^4} \right) + \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\beta^3} \right) + \frac{\beta - \alpha}{2\alpha\beta^2} \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\beta(\beta - \alpha)} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2} \right) - \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{(\beta - \alpha)^2} \ln \frac{\beta^2}{\alpha(2\beta - \alpha)} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2(\beta - \alpha)^2} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m^2} \left(\frac{1}{\alpha + m(\beta - \alpha)} - \frac{1}{\beta + m(\beta - \alpha)} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) \left[\sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m^2} \left\{ \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \frac{2}{m(\beta - \alpha)} \ln \frac{[\beta + m(\beta - \alpha)]\alpha}{[\alpha + m(\beta - \alpha)]\beta} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{m=1}^\infty \frac{(\beta - \alpha)^2}{[\alpha - m(\beta - \alpha)]^2} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) \right\} \right] - \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m} \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2} \right) \frac{1}{4\alpha[m(\beta - \alpha) + \beta]} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\beta(\beta - \alpha)} \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m} \left\{ \frac{1}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{2(m+1)} + \frac{m}{(\beta - \alpha)^2(m+1)^3} \ln \frac{[(\beta - \alpha)(m+1) + \beta]\alpha}{[(\beta - \alpha)(m+1) + \alpha]\beta} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) \frac{m}{(\beta - \alpha)(m+1)^2} \right\} - \frac{1}{\alpha(\beta - \alpha)} \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m^2} \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \frac{1}{m(\beta - \alpha)} \ln \frac{[m(\beta - \alpha) + \beta]\alpha}{[m(\beta - \alpha) + \alpha]\beta} + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) \frac{1}{m(\beta - \alpha)} \right\} \right]. \quad (9) \end{aligned}$$

wobei sind die Parameter α und β vom Grund der konformen Abbildung mit r_1 und r_2 verbunden: $\alpha = 1/2r_1$, und $\beta = 1/2r_2$.

V) Der Fall, dass die beiden Rohre exzentrisch gestellt und einander nicht berühren²⁾.

Die Funktion der konformen Abbildung ist

$$x + iy = a \cdot \tan \frac{\xi + i\eta}{2}. \quad (10)$$

Dadurch erfolgt die Gleichung für die Durchflussmenge

$$\begin{aligned} Q &= \iint_s w(x, y) dx dy = \int_\alpha^\beta \int_{-\pi}^{+\pi} w(\xi, \eta) \frac{a^2}{(\cosh \eta + \cos \xi)^2} d\xi d\eta \\ &= \frac{P\pi a^4}{2\mu} \left[\frac{\coth \alpha - 1}{\sinh^2 \alpha} - \frac{\coth \beta - 1}{\sinh^2 \beta} - \frac{(\coth \alpha - \coth \beta)^2}{\beta - \alpha} - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\sinh^4 \alpha} - \frac{1}{\sinh^4 \beta} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^\infty \left\{ \frac{-e^{-n(\alpha+\beta)} (\coth \alpha - \coth \beta)^2 (\coth \alpha + \coth \beta + 2n)}{\sinh n(\beta - \alpha)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{e^{-n(\beta - \alpha)} \coth \beta - e^{n(\beta - \alpha)} \coth \alpha}{\sinh n(\beta - \alpha)} \left(\frac{e^{-2n\beta}}{\sinh^2 \beta} - \frac{e^{-2n\alpha}}{\sinh^2 \alpha} \right) \right\} \right]. \quad (11) \end{aligned}$$

wobei sind $\cosh \alpha = \frac{r_1 + d - r_2}{2dr_1}$, $a = r_1 \sinh \alpha$ und $\beta = \sinh^{-1} a/r_2$.

VI) Der Fall, dass die beiden Rohre koaxial gestellt sind¹⁾.

Die Durchflussmenge wird

$$Q = \frac{P\pi}{8\mu} \left\{ (r_1^4 + r_2^4) - \frac{(r_1^2 - r_2^2)^2}{\log(r_1/r_2)} \right\}. \quad (12)$$

VII) Die Tafel für den technischen Gebrauch

Die oben gezeigten Gleichungen sind ziemlich kompliziert für den praktischen Gebrauch, so ist es sehr bedeutungsvoll, sie in einfacher Form auszudrücken. Die Gleichungen werden dann zahlenmässig ausgerechnet und die mit den Parametern $b = r_2/r_1$ und $c = d/r_1$ geordneten dimensionlosen Zahlen k werden in der Tafel 1 eingetragen.

$$Q = k \cdot r_1^4 \cdot P/\mu. \quad (13)$$

Und der Widerstandsbeiwert erfolgt

$$\lambda = \frac{4\pi(1+b)(1-b)^3}{k \cdot Re}, \quad (14)$$

wobei $Re = 4mv/\nu$, $4m = 2(r_1 - r_2)$, $P = p/l$ und der Widerstandsbeiwert ist definiert wie die Gleichung (15).

Tafel 1. k -Werte für die Berechnungen der Durchflussmenge und des Widerstandsbeiwertes.

c \ b	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
<i>T</i>	0,393	0,385	0,362	0,328	0,278	0,221	0,161	0,102	0,051	0,014
0,0	0,393	0,224	0,165	0,118	0,081	0,047	0,026	0,011	0,003	0,001
0,1		0,232	0,174	0,128	0,087	0,052	0,030	0,014	0,005	0,002
0,2		0,244	0,185	0,138	0,095	0,058	0,036	0,018	0,002	
0,3		0,259	0,200	0,150	0,105	0,068	0,043	0,024		
0,4		0,277	0,215	0,165	0,118	0,079	0,054			
0,5		0,295	0,235	0,183	0,134	0,094				
0,5		0,315	0,256	0,205	0,158					
0,7		0,336	0,281	0,230						
0,8		0,359	0,308							
0,9		0,382								

T: Die k -Werte des einfachen Rohres, das den gleichen Querschnitt mit dem des gegebenen Doppelrohres hat.

$$b = r_2/r_1 \quad c = d/r_1 \quad Q = k \cdot r_1^4 \cdot P/\mu.$$

$$\frac{P}{\gamma} = \frac{\lambda v^2}{2g\bar{d}_m} = \frac{\lambda v^2}{4g(r_1 - r_2)}. \quad (15)$$

VIII) Schrifttum

- 1) Handbuch des Maschinenbaus "Kikai-kogakubinran" 4.
- 2) Kasahara and Shimizu. On the steady motion of a viscous fluid through double pipes. Proceedings of the Fujihara memorial faculty of engineering Keio University, 1957 Vol. 10 No. 36-39.