慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	落下球法による粘性係数測定への一寄与
Sub Title	A contribution to the measurement of viscosity through the use of the falling spheres method
Author	笠原, 英司(Kasahara, Eiji)
Publisher	慶應義塾大学藤原記念工学部
Publication year	1948
Jtitle	慶應義塾大学藤原記念工学部研究報告 (Proceedings of Faculty of Engineering, Keiogijuku University). Vol.1, No.2 (1948. 7) ,p.51(9)- 54(12)
JaLC DOI	
Abstract	In this paper the author intends to treat with the motion of a falling body through viscous fluids by solving equations of motion of particle, in which the drag force plays a very important role. The first case, which corresponds to the Stokes' relationship, is that the resistance is proportional to the velocity. The second one is that the resistance involves the so-called inertia term and corresponds to the Oseen's formula which yields good results somewhat beyond that of Stokes. In the result of analysis, the author concluded and proposed two things. First, at the measurement of fluid viscosity through the use of the falling spheres method the necessary data for the calculation of the final velocity are only two, that is, the fall distance from the rest and the time taken by falling, because the time until reaching the finai velocity is practically negligible. The second is that the use of the Oseen's expression, in place of the Stokes' formula, can extend to some degree the region in which the falling spheres method has been applicable.
Notes	
Genre	Departmental Bulletin Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KO50001004-00010002-0009

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

いずれか一本の電線は完全に浮き上るであろう。

しかし，そのような極端な場合は除外し，極限電流の 2/3 以内のところ丈けを考えると，線間距離は吸引力の場合に 0.4 d 程度接近し，(即ち 0.6 d 位になり) 反撥力の場合には 0.3 d 位離されて，1.3 d 位になる。そして電線の張力は最大 5 割位の増減をするにすぎない。即ちこの程度の線間距離及び張力の變動を起して再び釣合を保つことが出來る。

實際には電線の運動を考えねばならない。電線の動搖のために極限電流以下の電流の場合でも或る瞬間に線と線とが極めて接近しないとは限らない。この問題は第 2 報に讓る。

又靜的問題について言つても，例えば高低差の影響などを調査せねばならない。經間が長いことは勿論頗る危險な要素となる。(殊に線間距離 d の小さいときに) 高低差があることは實効經間を增すことを意味するが，具體的に η_e に如何に影響を及ぼすかを計算によつて確かめる必要がある。事實上故障を起した地點は何れも可なりの高低差を有している。

以上にのべたのは本報告の摘要にすぎない。詳細については著者の作つた同一題名のプリントによつて見られたい。(希望者に配布する)

落下球法による粘性係數測定への一寄與

昭和 23 年 (1948) 5 月 10 日受理

笠　原　英　司*

Eiji Kasahara: A Contribution to the Measurement of Viscosity through the Use of the Falling Spheres Method. In this paper the author intends to treat with the motion of a falling body through viscous fluids by solving equations of motion of particle, in which the drag force plays a very important role. The first case, which corresponds to the Stokes' relationship, is that the resistance is proportional to the velocity. The second one is that the resistance involves the so-called inertia term and corresponds to the Oseen's formula which yields good results somewhat beyond that of Stokes.

In the result of analysis, the author concluded and proposed two things. First, at the measurement of fluid viscosity through the use of the falling spheres method the necessary data for the calculation of the final velocity are only two, that is, the fall distance from the rest and the time taken by falling, because the time until reaching the final velocity is practically negligible. The second is that the use of the Oseen's expression, in place of the Stokes' formula, can extend to some degree the region in which the falling spheres method has been applicable.

I. 緒　言　球が粘性流體中を運動する場合に流體から受ける抵抗は複雜な法則に從うものであるが一般に次元解析より

* 慶應義塾大學藤原記念工學部講師　Lecturer of Faculty of Eng., Keiogijuku University.

$$F=\Psi(Re)(\pi d^2/4)\cdot(\rho v_2/2)$$

と書ける。此處に Ψ は抵抗係數でレイノルズ數 $R=vd\rho/\mu$ の函數として表わされる。この Ψ に關しては Re の廣い範圍に亘つてその測定が行われ，又理論式も Stokes, Oseen, Goldstein によつて求められてはいるものの滿足な一致を見ないのである。Fig. 1. に示す様に $\Psi-Re$ 曲線は i) $R<0.3$; Stokes の範圍で $F=3\pi vd\mu$ が成立する。ii) $R=1000$

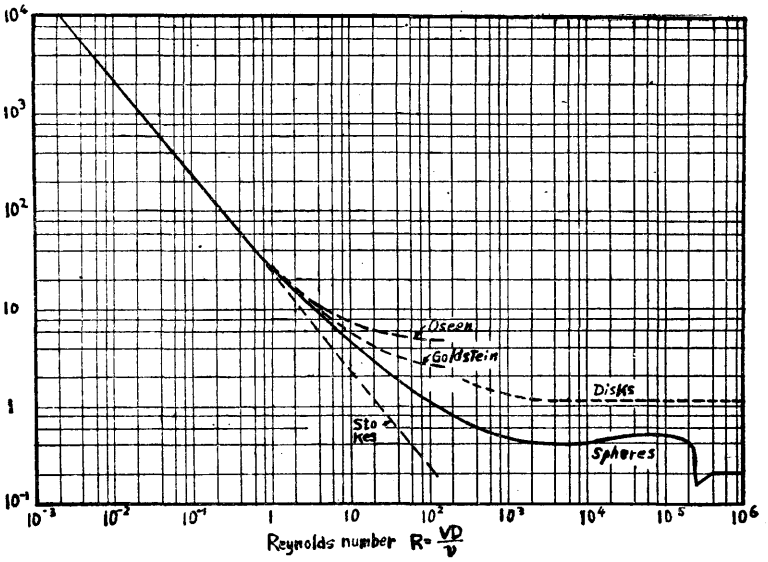

Fig. 1. Drag cofficients for spheres and dicks as functions of the Raynolds number.

～250000; Newton の範圍と呼ばれ抵抗は v^2 に比例し Ψ は殆一定値をとる。iii) $R=0.3$～1000 で上の二つの過渡範圍であつて，簡單な法則の存在しない領域。の三つに大別して考える事が出來る。

さて Re の低い Stokes の範圍内では，粘性流體中に小球を落下させ，その終末速度に達した時，$F=3\pi\mu dv=(\pi d^3/6)(\rho_s-\rho_f)g$ の平衡式を利用して，Ψ を算出し[2]，或は μ を決定し[3]，又豫じめ μ を知るときは v_∞，或は d を計算する事が出來る[4]。之が落下球法と呼ばれるものであつて，本報告に於ては抵抗を考慮した場合の落下の運動方程式を解き，粘性流體中を落下する小球の運動を論じたものである。

II. 理論解析　基礎となる運動方程式は

$$m\ddot{z}=mg-F \qquad \cdots(1)$$

ここに $m=(\pi d^3/6)(\rho_s-\rho_f)$ で小球の見掛けの質量，z は落下距離，F は抵抗である。

i)　抵抗が粘性項のみから成る場合。

この場合 Stokes の式が常に成立するとすれば，

$$m\ddot{z}+3\pi\mu d\dot{z}=mg \qquad \cdots(2)$$

と書ける。初期條件 $t=0$ で $v=0$, $z=0$ ならば

1) Goldstein: Modern Development in Fluid Dynamics. Vol. II, pp. 491-493.
2) Wien u. Harms: Handbuch der Exp. Physik Bd. IV, Teil 2 S. 337-389 (1932).
3) F. Kohlrausch: Praktische Physik. S. 127-128 (1935).
4) H. Chatley: Engg. Vol. 149, p. 6 (1940).

$$v=\frac{mg}{3\pi\mu d}\left(1+e^{-\frac{3\pi\mu d}{m}t}\right) \qquad \cdots(3)$$

$$z=\frac{mg}{3\pi\mu d}\left(t+\frac{m}{3\pi\mu d}e^{-\frac{3\pi\mu d}{m}t}-\frac{m}{3\pi\mu d}\right) \qquad \cdots(4)$$

と求められる。

Stokes の式は前述した様に $R_e<0.3$ の時でなければ成立しないのであるから，この範圍を超える場合には慣性項も考慮しなければならぬ。

ii) 抵抗が粘性項と慣性項より成る場合。

Oseen は慣性項を考慮して $F=3\pi\mu dv+(9/16)\pi\rho_f d^2v^2$ を得た。之を $F=av+bv^2$ として (1) に入れると

$$m\ddot{z}=mg-\{a(\dot{z})+b(\dot{z})^2\} \qquad \cdots(5)$$

即ち $m\dot{v}+av+bv^2-mg=0$ 初期條件 $t=0$, で $v=0$, $z=0$ を入れると

$$v=\frac{8d(\rho_s-\rho_f)}{27\rho_5}\left(\frac{e^{\beta t}}{\beta}-\frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\right)^{-1}(e^{\beta t}-e^{\alpha t}) \qquad \cdots(6)$$

$$z=\frac{8d(\rho_s-\rho_f)}{27\rho_f}\log\frac{-\beta e^{\alpha t}\left(1-\frac{\alpha}{\beta}e^{(\beta-\alpha)t}\right)}{\alpha-\beta} \qquad \cdots(7)$$

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{9}{d^2(\rho_s-\rho_f)}\left(-\mu+\sqrt{\mu^2+\dfrac{d^3\rho_f(\rho_s-\rho_f)}{24}g}\right.\\ \beta=\dfrac{9}{d^2(\rho_s-\rho_f)}\left(-\mu-\sqrt{\mu^2+\dfrac{d^3\rho_f(\rho_s-\rho_f)}{24}g}\right.\end{cases}$$

以上の所論を實驗に基いた具體的な數値を擧げて更に敷衍して見よう。

III. 數字例及び實驗 内徑 46 mm 高さ約 1.3 m の直立圓筒の中に水とグリセリンの混合液を滿し，電磁石を用いて鋼球を靜止狀態から落下せしめる様にした。この實驗の結果得た數値を使用する。

［例 1］ $d=0.159\,cm$, $\rho_s=7.81\,g/cm^3$, $\rho_f=1.21\,g/cm^3$, $z=50\,cm$, $t=21.4\,sec.$ この時の μ を求む。

(4) に於て概略の評價をすると $3\pi\mu d/m>100$ の程度であるから括弧内の後二項は t の大きな値に對し充分無視出來る。故に $z\fallingdotseq\frac{3\pi\mu d}{mg}t$ の關係から $\mu\fallingdotseq\frac{mg}{3\pi d}\cdot\frac{t}{z}\fallingdotseq 3.87\,g/cm-s$ 速度は終末速度と見做せるから $v_\infty=z/t=2.33cm/s$ この

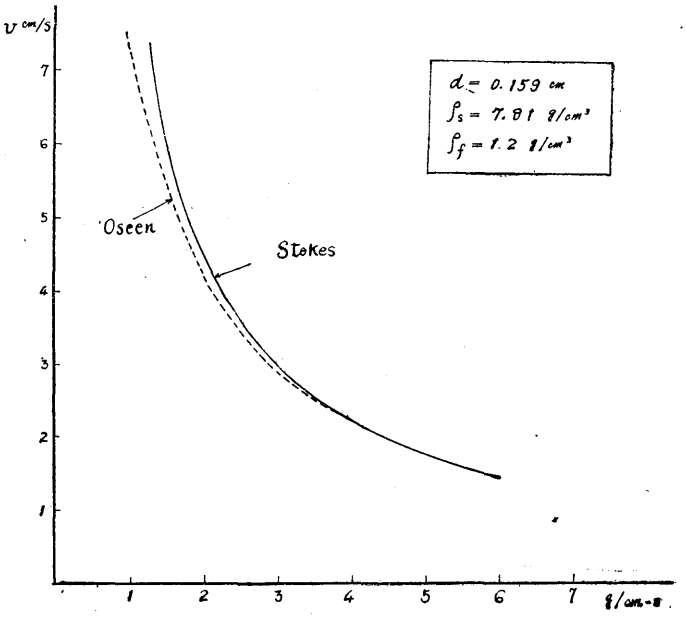

Fig. 2. Theoretical μ-v curve.

ときの $R_e=dv\rho/\mu\fallingdotseq 0.11$ となつて Stokes の範圍内にあり，この結果の正しい事が確認される。

［例 2］ 前と同じ鋼球で $\rho_f=1.19\,g/cm^3$, $z=56\,cm$, $t=10.3\,\mathrm{sec.}$ μ を求む。

Stokes の式によつて $\mu=\frac{3\pi d}{m}\frac{t}{z}=1.67\,g/cm-s$, $v_\infty=\frac{z}{t}=5.44\,cm/s$. この時の $R_e\fallingdotseq 0.56$ 之は Stokes の範圍を稍〻超えているので嚴密には正しくない。そこでこの範圍では稍〻良い近似を與える Oseen の式を用いる。

(7) に於て括弧内第二項の評價をすればこの位の t に對しては 1 に比べて無視出來る。故に (7) は $z=\frac{8d(\rho_s-\rho_f)}{27\rho_f}\left\{\alpha t+\log\left(\frac{-\beta}{\alpha-\beta}\right)\right\}$ と書け，更に此の第二項も簡單な計算の後 z に對し高々 0.1 程度の寄與があるだけで，之も誤差の範圍に入るので無視すれば

$$z\fallingdotseq\frac{8}{3\rho_f d}\left(-\mu+\sqrt{\mu^2+\frac{\rho_f d^3(\rho_s-\rho_f)}{24}g}\right)t \qquad \cdots(8)$$

(8) に $z=56\,cm$, $t=10.3\,\mathrm{sec.}$ を入れれば $\mu=1.49\,g/cm-s$ を得，之より求めた $R\fallingdotseq 0.68$ となる。Fig. 1. で了解される樣に Stokes に依れば過大に Oseen によれば過小に μ の値が求められる。眞の値はこの中間にあるのであつて，之を求めるには，上の二つの値と實驗曲線 $\Psi-R_e$ とから内挿法によつて眞の R_e を求め逆に μ を決定すればよい。

IV. 結　語　以上二，三の數値を以て說明して來たのであるが，之を要するに

i) 落下球法によつて粘性係數を測定する場合には，靜止から落下せしめるときは，t を大きくとれば z/t を以て終末速度と見做して差支えないという事が諒解され，從つて時間の計測は一回だけでよい事になる。

ii) Stokes の式の成立しない $R>0.3$ に對しては，落下球法を適用する事が出來なかつたのであるが，Oseen の式を利用することによつて，少しくこの範圍を擴張し $R=1$ 位迄は應用する事が出來よう。(尙實驗式として $F=3\pi\mu d\cdot v+(21/40)\rho_f\pi d^2\cdot v^2$ をとれば Oseen の式よりは更に良い近似を與える)

本報告に於ける解析は落下球法の基礎理論ともいふべきもので，粘性の測定のみならず，同方法を用いる際の豫備考察となるであろう。尙，圓筒容器の壁の影響は相當大きなものであるが，此處では一應考えないで置いてあり，$R_e>1$ の場合には論及していない。

終りに臨み，常に御指導を賜われる栖原教授，鬼頭教授，助言を寄せられた同僚諸兄，並びに實驗を行つてくれた山崎彌三郎君に厚く感謝の意を表するものである。

彈性係數の電氣的測定法

昭和 23 年 (1948) 2 月 29 日受理

宗　宮　知　行*

Tomoyuki Sōmiya: Electrical Measurement of Modulus of Elasticity. A sim-

* 慶應義塾大學教授，工博 Dr. Eng., Prof. of Keio University