Title	弾性係数及び熱膨脹係数が温度により変るときの変断面円盤の熱応力と遠心応力(第1報)
Sub Title	On the stresses in a circular disc of variable thickness, the coefficients of elasticity and of the thermal expansion of the material being taken as functions of temperature
Author	栖原, 豊太郎(Suhara, Toyotaro)
Publisher	慶應義塾大学藤原記念工学部
Publication year	1948
Jtitle	慶應義塾大学藤原記念工学部研究報告 (Proceedings of Faculty of Engineering, Keiogijuku University). Vol.1, No.2 (1948. 7) ,p.43(1)- 46(4)
JaLC DOI	
Abstract	
Notes	
Genre	Departmental Bulletin Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KO50001004-00010002-0001

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

弾性係数及び熱膨脹係数が温度により變るとき 變断面圓盤の熱應力と遠心應力 (第1報)

昭和23年(1948)5月20日受理

栖原豊太郎*

Toyotarō Suhara: On the Stresses in a Circular Disc of Variable Thickness, the Coefficients of Elasticity and of the Thermal Expansion of the Material being taken as Functions of Temperature. The stresses due to the rotation and the thermal expansion of a thin circular disc of variable thickness z , which is expressed by $z=z_0(1-ar^v)^k$, are analysed for given temperature distributions, $T=T_0(1+br^c)$. The coefficient of thermal expansion α and that of elasticity are taken as functions of temperature, or as functions of the distance r from the axis of rotation, such as $\alpha=\alpha_0(1+b'r^v)^h$ and $E=E_0(1-cr^v)^j$, where $Z_0, \alpha_0, E_0, T_0, a, b, b', c, v, h, j$ and k are constants.

1. 目的 蒸汽或は内燃タービンの圓盤形翼車に於ては、翼列を通る高温氣流で熱せられるため不均等な温度分布が生じ著しい熱應力が起るが、この應力は、翼車材料の弾性係数及び熱膨脹係数が温度によりて變ると云う性質のために大に影響される。

一般に圓盤形翼車の形は、高速回轉による應力を緩和するために、中心部で厚く外周で薄くしてあるが、この翼車の形と前記弾性係数も熱膨脹係数も温度の函数とした場合の遠心應力及び熱應力との關係を解析するのが本論の目的である。然し問題が複雑であり且つ高温度の部分や高應力の部分は塑性域に入るため、應力や變形を精密に求めるのは困難であるので、本論では種々の近似的假定を用い且つ弾性限度内の問題として計算を進めた。

2. 問題の取扱い方針 本問題の取扱い方針は先年機械學會誌*に發表した著者の一般論によつたものである。即ち先ず弾性係数及び熱膨脹係数を實驗的に温度の函数として表わす。而して弾性體に於ける温度差 T の分布を坐標の便宜の函数として表わすと、弾性係数及び熱膨脹係数は直ちにこの弾性體に就いて坐標の函数で表わされる。これ等の關係を熱弾性の方程式に導いて外力、體力及び熱膨脹等による應力及び變位を解析するのである。

3. 圓盤の一般弾性式 圓筒坐標 (r, θ, z) を使い、圓盤の形は Oz 軸と $z=0$ 平面に對稱であるとし、温度分布も、從つて弾性係数、熱膨脹係数の分布も、また應力や變位の分布も總て Oz 軸と $z=0$ 面に對稱であるとする。 u, w を變位成分; $\sigma_r, \rho_\theta, \sigma_z$ を應力成分; E, μ を弾性係数; $1/m=\sigma$ を Poisson 比として

$$\sigma_r = 2\mu \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{m-2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{m+1}{m-2} \alpha T \right\},$$

* 工博、慶應義塾大學教授, Dr. Eng., Prof. of Keio University.

** 機械學會誌, 21 (1918) Aug. 50.

$$\rho_{\theta} = 2\mu \left\{ \frac{u}{r} + \frac{1}{m-2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{m+1}{m-2} \alpha T \right\},$$

$$\sigma_z = 2\mu \left\{ \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{m-2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{m+1}{m-2} \alpha T \right\}.$$

圓盤の厚さがその直径に比して小さいとして $\sigma_z = 0$ とすると上式から

$$\sigma_r = E(1-\sigma^2)^{-1} \{u' + \sigma u/r - (1+\sigma)\alpha T\}, \quad \dots(1)$$

$$\sigma_{\theta} = E(1-\sigma^2)^{-1} \{\sigma u' + u/r - (1+\sigma)\alpha T\}. \quad \dots(2)$$

この圓盤が角速度 ω で回轉しているときの平均應力の平衡式は近似的に

$$(zr\sigma_r)' - z\sigma_{\theta} + (w\omega^2/g)zr^2 = 0. * \quad \dots(3)$$

但し z は圓盤の厚さ, w は材料の密度である。(1), (2) 及び (3) から u と σ_{θ} を消去すると

$$\begin{aligned} & (r\sigma_r)'' + \{1/r + (\lg z)' - (\lg E)'\}(r\sigma_r)' + [(\lg z)'' + \{(1+\sigma)/r \\ & \quad - (\lg E)'\}(\lg z)' + (\sigma/r)(\lg E)' - 1/r^2](r\sigma_r) \\ & = -(w\omega^2 r/g)\{3+\sigma - r(\lg E)'\} - E(\alpha T)'. \end{aligned} \quad \dots(4)$$

これが平均應力 σ_r の一般算式である。(1) 乃至 (4) 式中 ' は r に就ての微分を示す。

4. 圓盤の形状式と温度分布の式 (3) 式中にある圓盤の厚さ z を r の函数として

$$z = z_0(1-ar^{\nu})^k, \quad \dots(5)$$

とする。 z_0, a, ν, k は圓盤の形を定める常數である。次に圓盤に於ける T の分布を熱傳導論から定めると複雑になるから、實用上簡單に下の式で表わすことにする。

$$T = T_0(1+br^{\nu}). \quad \dots(6)$$

但し T_0, b, ν は常數である。また弾性係數 E も温度の函数, 従つて r の函数として

$$E = E_0(1-c_r T)^j = E_0(1-cr^{\nu})^j, \quad \dots(7)$$

但し $E_0 = E_0(1-c_r T_0)^j, \quad c = bc_r T_0/(1-c_r T_0)$.

同様に熱膨脹係數 α も半徑 r の函数として

$$\alpha = \alpha_0(1+b_r T)^h = \alpha_0(1+b'r^{\nu})^h. \quad \dots(8)$$

但し $\alpha_0 = \alpha_0(1+b_r T_0)^h, \quad b' = bb_r T_0/(1+b_r T_0)$.

(7), (8) 式にて $E_0, E_0, c, c, j; \alpha_0, \alpha_0, b, b', h$ は翼車の材料に就て決定される常數である。尙計算に於ては Poisson 比 σ は温度により變らないとした。これは E 及び μ は何れも温度により大に變化するがその比 E/μ はあまり變らないと云う見方からである。

5. 圓盤應力の方程式と解 (4) 式の z, T, E, α に (5), (6), (7), (8) を置換し, 且つ

$$x = ar^{\nu}, \quad \varepsilon = a/c, \quad n = 1/\nu, \quad \dots(9)$$

とすると本問題に對する近似的の一般基礎式として次の式を得る。

$$\begin{aligned} & (r\sigma_r)'' + \left(\frac{1}{x} + \frac{k}{x-1} - \frac{j}{x-\varepsilon} \right) (r\sigma_r)' \\ & - \left\{ \frac{x^2}{N^2} + \frac{k}{(x-1)^2} - \frac{\{k-jk+(j+k)\sigma N\}x - \varepsilon k - (j+\varepsilon k)\sigma N}{x(x-1)(x-\varepsilon)} \right\} (r\sigma_r) \\ & = \frac{w\omega^2 x^{3N-1}}{g\nu^2 \alpha^{3N}} \left(\frac{\nu j}{x-\varepsilon} - \frac{3+\sigma}{x} \right) \quad (\text{次頁に續く}) \end{aligned}$$

* この式は種々の書に出ている。例えば Prescott: Applied Elasticity.

$$\begin{aligned}
 & + \frac{bc\alpha_0 T_0 E_0}{\nu a^{N+2}} \cdot \frac{x-\varepsilon}{x^{1-N}} \cdot \left(1 + \frac{b'}{a}x\right)^{h-1} \left\{ \frac{b+b'h}{b} + \frac{b'(1+h)}{a}x \right\}. \\
 & \dots(10)
 \end{aligned}$$

この式に $(r\sigma_r) = x^l(x-1)^m(x-\varepsilon)^n Y$ と置き $l = \pm 1/\nu$; $m=1$, 或は $-k$; $n=0$, 或は $(j+1)$ とすると左邊は Heun 型の式となるからここでは (10) の Complementary function として次の組を採用する。 $Y_1(x), Y_2(x)$ を Heun の級数として

$$(r\sigma_r)_e = (x-1)^{-k} \{ C_1 x^N Y_1(x) + C_2 x^{-N} Y_2(x) \}, \quad \dots(11)$$

ここに $Y_1(x) = F(\varepsilon, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$; $x = ar^\nu$; 或は

$$Y_1(ar^\nu) = 1 - n(1-\sigma)(j+k) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n(q) \cdot (cr^\nu)^n}{n! \gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n-1)}, \quad \dots(12)$$

$$q = (j + \varepsilon k)/(j+k), \quad G_1(q) = q,$$

$$\begin{aligned}
 G_2 &= \alpha\beta q^2 + \{(\alpha + \beta - \delta + 1) + (\gamma + \delta)\varepsilon\}q - \varepsilon\gamma, \\
 &= (1+2N)(j + \varepsilon^2 k)/(j+k) - (1+N-N\sigma)(j + \varepsilon k)^2/(j+k)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{n+1}(q) &= [n\{(\alpha + \beta - \delta + n) + (\gamma + \delta + n - 1)\varepsilon\} + \alpha\beta q]G_n(q) \\
 &\quad - (\alpha + n - 1)(\beta + n - 1)(\gamma + n - 1)n\varepsilon G_{n-1}(q);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha, \beta &= N - \frac{1}{2}(j+k) \pm \{N^2 - N\sigma(j+k) + \frac{1}{4}(j+k)^2\}^{1/2}, \\
 \gamma &= 1 + 2N, \quad \delta = -k.
 \end{aligned}$$

また $Y_2(x) = F(\varepsilon, q; \alpha', \beta', \gamma', \delta; x)$, 或は

$$Y_2(ar^\nu) = 1 + N(1+\sigma)(j+k) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G'_n(q) \cdot (cr^\nu)^n}{n! \gamma'(\gamma'+1) \dots (\gamma'+n-1)}, \quad \dots(13)$$

$$q = (j + \varepsilon k)/(j+k), \quad G'_1(q) = q,$$

$$\begin{aligned}
 G'_2(q) &= \alpha'\beta'q^2 + \{(\alpha' + \beta' - \delta + 1) + (\gamma' + \delta)\varepsilon\}q - \varepsilon\gamma', \\
 &= (1-2N)(j + \varepsilon^2 k)/(j+k) - (1-N-N\sigma)(j + \varepsilon k)^2/(j+k),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G'_{n+1}(q) &= [n\{(\alpha' + \beta' - \delta + n) + (\gamma' + \delta + n - 1)\varepsilon\} + \alpha'\beta'q]G'_n(q) \\
 &\quad - (\alpha' + n - 1)(\beta' + n - 1)(\gamma' + n - 1)n\varepsilon G'_{n-1}(q);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha', \beta' &= -N - \frac{1}{2}(j+k) \pm \{N^2 - N\sigma(j+k) + \frac{1}{4}(j+k)^2\}^{1/2}, \\
 \gamma' &= 1 - 2N, \quad \delta = -k.
 \end{aligned}$$

次に (10) 式の昇冪特解の一つを次の如くとする。これを ζ とすると

$$\begin{aligned}
 \zeta &= (r\sigma_r)_p = x^N(x-1) \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+2N} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \right\}, \\
 &= -a^N r(1-ar^\nu) \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} a_m (ar^\nu)^{m+2N} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (ar^\nu)^n \right\}. \quad \dots(14)
 \end{aligned}$$

但し $a_1 = w\omega^2(3+\sigma)/(8ga^{3N})$,

$$a_1 = \frac{w\omega^2[(3+\sigma)\{8N^2 + Nk - N\sigma(j + \varepsilon k)/\varepsilon - k - 1\} + Nj(5-\sigma)/\varepsilon]}{8ga^{3N}(2N+1)(4N+1)},$$

$$a^{m+1} = \frac{\left\{ \begin{aligned} & [(2N+m)\{(1+\varepsilon)(2N+m-1) - L_2\} - M_1]a_m \\ & - [(2N+m-1)(2N+m-2+L_3) + M_2]a_{m-1} \end{aligned} \right\}}{\varepsilon(2N+m+1)(4N+m+1)},$$

$$b_1 = (b+b'h)\alpha_0 T_0 E_0 / \{(2+\nu)a^{N+1}\},$$

$$b_{n+1} = \frac{\left\{ P_{n+1} + \{(1+\varepsilon)(n-1)n - L_2 n - M_1\} b_n \right.}{\left. - \{(n-1)(n-2 + L_3) + M_2\} b_{n-1} \right\}}{\varepsilon(n+1)(N+n+1)}.$$

$$H_1 = (h-1)(b'/a), \quad H_2 = (1/2!)(h-1)(h-2)(b'/a)^2,$$

$$H_3 = (1/3!)(h-1)(h-2)(h-3)(b'/a)^3,$$

$$H_n = (h-1)!(b'/a)^n / \{(h-n-1)! n!\};$$

$$L_2 = -(1+2N) - \varepsilon(3+2N) + j - \varepsilon k, \quad L_3 = 3+2N - j + k;$$

$$M_1 = N \{2\varepsilon - j + \varepsilon k + \sigma(j + \varepsilon k)\} + \varepsilon(1+k),$$

$$M_2 = N \{2 - j + k + \sigma(j+k)\} + (1-j)(1+k);$$

$$N_1 = (b+b'h)\alpha_0 T_0 E_0 / (\nu a^N c),$$

$$N_2 = \{bb'(1+h)\alpha_0 T_0 E_0 - 2(b+b'h)c\} / (\nu a^{N+1} c),$$

$$N_3 = \{(b+b'h)c - 2bb'(1+h)\} \alpha_0 T_0 E_0 / (\nu a^{N+2}),$$

$$N_4 = bb'c(1+h)\alpha_0 T_0 E_0 / (\nu a^{N+3});$$

$$P_1 = N_1, \quad P_2 = N_1 H_1 + N_2, \quad P_3 = N_1 H_2 + N_2 H_1 + N_3,$$

$$P_4 = N_1 H_3 + N_2 H_2 + N_3 H_1 + N_4, \quad P_5 = N_1 H_4 + N_2 H_3 + N_3 H_2 + N_4 H_1,$$

$$P_n = N_1 H_{n-1} + N_2 H_{n-2} + N_3 H_{n-3} + N_4 H_{n-4}.$$

故に (10) 式の完全解としての σ_r , 従つて σ_θ 及び r 方向の變位 u はそれぞれ

$$\sigma_r = (1-ar^\nu)^{-k} \{ B_1 a^N Y_1(ar^\nu) + B_2 a^{-N} r^{-2} Y_2(ar^\nu) \}.$$

$$-a^N (1-ar^\nu) \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} a_m (ar^\nu)^{m+\frac{2}{\nu}} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (ar^\nu)^n \right\}, \quad \dots(15)$$

$$\sigma_\theta = (1-ar^\nu)^{-k} \{ B_1 a^N (r Y_1(ar^\nu))' + B_2 a^{-N} (r^{-1} Y_2(ar^\nu))' \}$$

$$+ \zeta' - k \nu a r^{\nu-1} \zeta / (1-ar^\nu) + (w\omega^2/g) r^2, \quad \dots(16)$$

$$u = B_0 r^{-\sigma} + r^{-\sigma} \int r^\sigma \{ (1-\sigma^2) \sigma_r / E + (1+\sigma) \alpha T \} dr. \quad \dots(17)$$

圓盤の内周及び外周に於ける條件を次のようにとると常數 B_1, B_2 は (19) できまる。

$$(\sigma_r)_{r=ri} = \sigma_{ri}, \quad (\sigma_r)_{r=ra} = \sigma_{ra}. \quad \dots(18)$$

$$\left. \begin{aligned} B_1 a^N &= \frac{(r_i \sigma_{ri} - \zeta_i) z_i r_i Y_{2a} - (r_a \sigma_{ra} - \zeta_a) z_a r_a Y_{2i}}{z_0 (r_i^2 Y_{1i} Y_{2a} - r_a^2 Y_{1a} Y_{2i})}, \\ B_2 a^{-N} &= \frac{r_i r_a \{ (r_a \sigma_{ra} - \zeta_a) z_a r_i Y_{1i} - (r_i \sigma_{ri} - \zeta_i) z_i r_a Y_{1a} \}}{z_0 (r_i^2 Y_{1i} Y_{2a} - r_a^2 Y_{1a} Y_{2i})} \end{aligned} \right\} \quad \dots(19)$$

無孔圓盤の場合は $(\sigma_r)_{r=ra} = \sigma_{ra}$ として

$$\sigma_r = (z_a Y_{1i} / z Y_{1a}) \cdot (\sigma_{ra} - \zeta_a / r_a) + \zeta / r, \quad \dots(20)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{z_a}{z Y_{1a}} \left(\sigma_{ra} - \frac{1}{r_a} \zeta_a \right) \left[\frac{d}{dr} (r Y_{1i}) \right]_{r=ra} \\ &+ \frac{d\zeta}{dr} - \frac{\nu k a z_0}{z} r^{\nu-1} \zeta + \frac{w\omega^2}{g} r^2. \end{aligned} \quad \dots(21)$$

また u は (17) と同様にして計算される。但し上式には

$z = z_0 (1-ar^\nu)^k$, $z_i = z_0 (1-ar_i^\nu)^k$; $Y_{2a} = Y_1(ar^\nu)$, $Y_{1i} = Y_1(ar_i^\nu)$, $Y_{2a} = Y_2(ar_a^\nu)$ 等と略記した。

上の (11) 乃至 (21) 式で本論の目的とした應力の解析が常數の一般の値に就て出来たわけである。特殊の例に就ての数値計算を第二報に譲つて茲に本稿を終ることとする。