彈性係數及び熱膨脹係數が溫度により變るときの變斷面圓盤の熱應力と遠心應力（第1報）

昭和23年(1948) 5月20日受理

栖　原　豐　太　郎*

Toyotarō Suhara : On the Stresses in a Circular Disc of Variable Thickness, the Coefficients of Elasticity and of the Thermal Expansion of the Material being taken as Functions of Temperature. The stresses due to the rotation and the thermal expansion of a thin circular disc of variable thickness z, which is expressed by $z=z_0\ (1-ar^\nu)^k$, are analysed for given temperature distributions, $T=T_0(1+br^\nu)$. The coefficient of thermal expansion α and that of clasticity are taken as functions of temperature, or as functions of the distance r from the axis of rotation, such as $\alpha=\alpha_0\ (1+b'r^\nu)^h$ and $E=E_0\ (1-cr^\nu)^j$, where Z_0, α_0, E_0, T_0, a, b, b', c, ν, h, j and k are constants.

1. 目　　的　蒸汽或は內燃タービンの圓盤形翼車に於ては，翼列を通る高溫氣流で熱せられるため不均等な溫度分布が生じ著しい熱應力が起るが，この應力は，翼車材料の彈性係數及び熱膨脹係數が溫度によりて變ると云う性質のために大に影響される。

一般に圓盤形翼車の形は，高速回轉による應力を緩和するために，中心部で厚く外周で薄くしてあるが，この翼車の形と前記彈性係數も熱膨脹係數も溫度の函數とした場合の遠心應力及び熱應力との關係を解析するのが本論の目的である。然し問題が複雜であり且つ高溫度の部分や高應力の部分は塑性域に入るため，應力や變形を精密に求めるのは困難であるので，本論では種々の近似的假定を用い且つ彈性限度內の問題として計算を進めた。

2. 問題の取扱い方針　本問題の取扱い方針は先年機械學會誌**に發表した著者の一般論によつたものである。即ち先ず彈性係數及び熱膨脹係數を實驗的に溫度の函數として表わす。而して彈性體に於ける溫度差 T の分布を坐標の便宜の函數として表わすと，彈性係數及び熱膨脹係數は直ちにこの彈性體に就いて坐標の函數で表わされる。これ等の關係を熱彈性の方程式に導いて外力，體力及び熱膨脹等による應力及び變位を解析するのである。

3. 圓盤の一般彈性式　圓壔坐標 (r, θ, z) を使い，圓盤の形は $0z$ 軸と $z=0$ 平面に對稱であるとし，溫度分布も，從つて彈性係數，熱膨脹係數の分布も，また應力や變位の分布も總て $0z$ 軸と $z=0$ 面に對稱であるとする。u, w を變位成分；σ_r, ρ_θ, σ_z を應力成分；E, μ を彈性係數；$1/m=\sigma$ を Poisson 比として

$$\sigma_r=2\mu\left\{\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{m-2}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\frac{m+1}{m-2}\alpha T\right\},$$

---

* 工博，慶應義塾大學敎授，Dr. Eng., Prof. of Keio University.

** 機械學會誌，21 (1918) Aug. 50.

$$\rho_\theta=2\mu\left\{\frac{u}{r}+\frac{1}{m-2}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\frac{m+1}{m-2}\alpha T\right\},$$

$$\sigma_z=2\mu\left\{\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{1}{m-2}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\frac{m+1}{m-2}\alpha T\right\}.$$

圓盤の厚さがその直徑に比して小さいとして $\sigma_z=0$ とすると上式から

$$\sigma_r=E(1-\sigma^2)^{-1}\{u'+\sigma u/r-(1+\sigma)\alpha T\}, \qquad \cdots(1)$$

$$\sigma^\theta=E(1-\sigma^2)^{-1}\{\sigma u'+u/r-(1+\sigma)\alpha T\}. \qquad \cdots(2)$$

この圓盤が角速度 ω で回轉しているときの平均應力の平衡式は近似的に

$$(zr\sigma_r)'-z\sigma_\theta+(w\omega^2/g)zr^2=0.^* \qquad \cdots(3)$$

但し z は圓盤の厚さ，w は材料の密度である。(1), (2) 及び (3) から u と σ_θ を消去すると

$$\begin{aligned}&(r\sigma_r)''+\{1/r+(\lg z)'-(\lg E)'\}(r\sigma_r)'+[(\lg z)''+\{(1+\sigma)/r\\&\quad-(\lg E)'\}(\lg z)'+(\sigma/r)(\lg E)'-1/r^2](r\sigma_r)\\&\quad=-(w\omega^2r/g)\{3+\sigma-r(\lg E)'\}-E(\alpha T)'.\end{aligned} \qquad \cdots(4)$$

これが平均應力 σ_r の一般算式である。(1) 乃至 (4) 式中 $'$ は r に就ての微分を示す。

4. 圓盤の形狀式と溫度分布の式 (3) 式中にある圓盤の厚さ z を r の函數として

$$z=z_0(1-ar^\nu)^k, \qquad \cdots(5)$$

とする。z_0, a, ν, k は圓盤の形を定める常數である。次に圓盤に於ける T の分布を熱傳導論から定めると複雜になるから，實用上簡單に下の式で表わすことにする。

$$T=T_0(1+br^\nu). \qquad \cdots(6)$$

但し T_0, b, ν は常數である。また彈性係數 E も溫度の函數，從つて r の函數として

$$E=E_t(1-c_tT)^j=E_0(1-cr^\nu)^j, \qquad \cdots(7)$$

但し $E_0=E_t(1-c_tT_0)^j$, $c=bc_tT_0/(1-c_tT_0)$.

同樣に熱膨脹係數 α も半徑 r の函數として

$$\alpha=\alpha_t(1+b_tT)^h=\alpha_0(1+b'r^\nu)^h. \qquad \cdots(8)$$

但し $\alpha_0=\alpha_t(1+b_tT_0)^h$, $b'=bb_tT_0/(1+b_tT_0)$.

(7), (8) 式にて E_t, E_0, c_t, c, j; α_t, α_0, b_t, b', h は翼車の材料に就て決定される常數である。尙計算に於ては Poisson 比 σ は溫度により變らないとした。これは E 及び μ は何れも溫度により大に變化するがその比 E/μ はあまり變らないと云う見方からである。

5. 圓盤應力の方程式と解 (4) 式の z, T, E, α に (5), (6), (7), (8) を置換し，且つ

$$x=ar^\nu, \quad \varepsilon=a/c, \quad N=1/\nu, \qquad \cdots(9)$$

とすると本問題に對する近似的の一般基礎式として次の式を得る。

$$\begin{aligned}&(r\sigma_r)''+\left(\frac{1}{x}+\frac{k}{x-1}-\frac{j}{x-\varepsilon}\right)(r\sigma_r)'\\&-\left\{\frac{x^2}{N^2}+\frac{k}{(x-1)^2}-\frac{\{k-jk+(j+k)\sigma N\}x-\varepsilon k-(j+\varepsilon k)\sigma N}{x(x-1)(x-\varepsilon)}\right\}(r\sigma_r)\\&=\frac{w\omega^2x^{3N-1}}{g\nu^2a^{3N}}\left(\frac{\nu j}{x-\varepsilon}-\frac{3+\sigma}{x}\right)\end{aligned}$$

(次頁に續く)

* この式は種々の書に出ている。例えば Prescott: Applied Elasticity.

$$+\frac{bc\alpha_0T_0E_0}{\nu a^{N+2}}\cdot\frac{x-\varepsilon}{x^{1-N}}\cdot\left(1+\frac{b'}{a}x\right)^{h-1}\left\{\frac{b+b'h}{b}+\frac{b'(1+h)}{a}x\right\}. \qquad \cdots(10)$$

この式に $(r\sigma_r)=x^l(x-1)^m(x-\varepsilon)^nY$ と置き $l=\pm1/\nu$; $m=1$, 或は $-k$; $n=0$, 或は $(j+1)$ とすると左邊は Heun 型の式となるからここでは (10) の Complementary function として次一の組を採用する。$Y_1(x)$, $Y_2(x)$ を Heun の級數として

$$(r\sigma_r)_c=(x-1)^{-k}\{C_1x^NY_1(x)+C_2x^{-N}Y_2(x)\}, \qquad \cdots(11)$$

ここに $Y_1(x)=F(\varepsilon,q;\alpha,\beta,\gamma,\delta;x)$; $x=ar^\nu$; 或は

$$Y_1(ar^\nu)=1-N(1-\sigma)(j+k)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G_n(q)\cdot(cr^\nu)^n}{n!\,\gamma(\gamma+1,\cdots(\gamma+n-1)}, \qquad \cdots(12)$$

$q=(j+\varepsilon k)/(j+k),\qquad G_1(q)=q,$

$G_2=\alpha\beta q^2+\{(\alpha+\beta-\delta+1)+(\gamma+\delta)\varepsilon\}q-\varepsilon\gamma,$

$\quad=(1+2N)(j+\varepsilon^2k)/(j+k)-(1+N-N\sigma)(j+\varepsilon k)^2/(j+k)$

$G_{n+1}(q)=[n\{(\alpha+\beta-\delta+n)+(\gamma+\delta+n-1)\varepsilon\}+\alpha\beta q]G_n(q)$

$\qquad-(\alpha+n-1)(\beta+n-1)(\gamma+n-1)n\varepsilon G_{n-1}(q);$

$\alpha,\ \beta=N-\frac{1}{2}(j+k)\pm\{N^2-N\sigma(j+k)+\frac{1}{4}(j+k)^2\}^{1/2},$

$\gamma=1+2N,\qquad \delta=-k.$

また $Y_2(x)=F(\varepsilon,\ q;\ \alpha',\ \beta',\ \gamma',\ \delta;\ x)$, 或は

$$Y_2(ar^\nu)=1+N(1+\sigma)(j+k)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G'_n(q)\cdot(cr^\nu)^n}{n!\,\gamma'(\gamma'+1)\cdots(\gamma'+n-1)}, \qquad \cdots(13)$$

$q=(j+\varepsilon k)/(j+k),\qquad G'_1(q)=q,$

$G'_2(q)=\alpha'\beta'q^2+\{(\alpha'+\beta'-\delta+1)+(\gamma'+\delta)\varepsilon\}q-\varepsilon\gamma',$

$\quad=(1-2N)(j+\varepsilon^2k)/(j+k)-(1-N-N\sigma)(j+\varepsilon k)^2/(j+k),$

$G'_{n+1}(q)=[n\{(\alpha'+\beta'-\delta+n)+(\gamma'+\delta+n-1)\varepsilon\}+\alpha'\beta'q]G'_n(q)$

$\qquad-(\alpha'+n-1)(\beta'+n-1)(\gamma'+n-1)n\varepsilon G'_{n-1}(q);$

$\alpha',\ \beta'=-N-\frac{1}{2}(j+k)\pm\{N^2-N\sigma(j+k)+\frac{1}{4}(j+k)^2\}^{1/2},$

$\gamma'=1-2N,\qquad \delta=-k.$

次に (10) 式の昇冪特解の一つを次の如くとる。これを ζ とすると

$$\zeta=(r\sigma_r)_p=x^N(x-1)\left\{\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^{m+2N}+\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n\right\},$$

$$=-a^Nr(1-ar^\nu)\left\{\sum_{m=0}^{\infty}a_m(ar^\nu)^{m+2N}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n(ar^\nu)^n\right\}. \qquad \cdots(14)$$

但し $\quad a_1=w\omega^2(3+\sigma)/(8ga^{3N}),$

$$a_1=\frac{w\omega^2[(3+\sigma)\{8N^2+Nk-N\sigma(j+\varepsilon k)/\varepsilon-k-1\}+Nj(5-\sigma)/\varepsilon]}{8ga^{3N}(2N+1)(4N+1)},$$

$$a^{m+1}=\frac{\left\{\begin{array}{l}[(2N+m)\{(1+\varepsilon)(2N+m-1)-L_2\}-M_1]a_m\\-[(2N+m-1)(2N+m-2+L_3)+M_2]a_{m-1}\end{array}\right\}}{\varepsilon(2N+m+1)(4N+m+1)},$$

$b_1=(b+b'h)\alpha_0T_0E_0/\{(2+\nu)a^{N+1}\},$

$$b_{n+1}=\frac{\begin{Bmatrix}P_{n+1}+\{(1+\varepsilon)(n-1)n-L_2n-M_1\}b_n\\ -\{(n-1)(n-2+L_3)+M_2\}b_{n-1}\end{Bmatrix}}{\varepsilon(n+1)(N+n+1)}.$$

$$H_1=(h-1)(b'/a),\quad H_2=(1/2!)(h-1)(h-2)(b'/a)^2,$$
$$H_3=(1/3!)(h-1)(h-2)(h-3)(b'/a)^3,$$
$$H_\kappa=(h-1)!(b'/a)^\kappa/\{(h-\kappa-1)!\kappa!\};$$
$$L_2=-(1+2N)-\varepsilon(3+2N)+j-\varepsilon k,\quad L_3=3+2N-j+k;$$
$$M_1=N\{2\varepsilon-j+\varepsilon k+\sigma(j+\varepsilon k)\}+\varepsilon(1+k),$$
$$M_2=N\{2-j+k+\sigma(j+k)\}+(1-j)(1+k);$$
$$N_1=(b+b'h)\alpha_0T_0E_0/(\nu a^Nc),$$
$$N_2=\{bb'(1+h)\alpha_0T_0E_0-2(b+b'h)c\}/(\nu a^{N+1}c),$$
$$N_3=\{(b+b'h)c-2bb'(1+h)\}\alpha_0T_0E_0/(\nu a^{N+2}),$$
$$N_4=bb'c(1+h)\alpha_0T_0E_0/(\nu a^{N+3}):$$
$$P_1=N_1,\quad P_2=N_1H_1+N_2,\quad P_3=N_1H_2+N_2H_1+N_3,$$
$$P_4=N_1H_3+N_2H_2+N_3H_1+N_4,\quad P_5=N_1H_4+N_2H_3+N_3H_2+N_4H_1,$$
$$P_n=N_1H_{n-1}+N_2H_{n-2}+N_3H_{n-3}+N_4H_{n-4}.$$

故に (10) 式の完全解としての σ_r, 從つて σ_θ 及び r 方向の變位 u はそれぞれ

$$\sigma_r=(1-ar^\nu)^{-k}\{B_1a^NY_1(ar^\nu)+B_2a^{-N}r^{-2}Y_2(ar^\nu)\}$$
$$-a^N(1-ar^\nu)\Big\{\sum_{m=0}^{\infty}a_m(ar^\nu)^{m+\frac{2}{\nu}}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n(ar^\nu)^n,\qquad\cdots(15)$$

$$\sigma_\theta=(1-ar^\nu)^{-k}\{B_1a^N(rY_1(ar^\nu))'+B_2a^{-N}(r^{-1}Y_2(ar^\nu))'$$
$$+\zeta'-k\nu ar^{\nu-1}\zeta/(1-ar^\nu)+(w\omega^2/g)r^2,\qquad\cdots(16)$$

$$u=B_0r^{-\sigma}+r^{-\sigma}\int r^\sigma\{(1-\sigma^2)\sigma_r/E+(1+\sigma)\alpha T\}dr.\qquad\cdots(17)$$

圓盤の內周及び外周に於ける條件を次のようにとると常數 B_1, B_2 は (19) できまる。

$$(\sigma_r)_{r=ri}=\sigma_{ri},\quad(\sigma_r)_{r=ra}=\sigma_{ra}.\qquad\cdots(18)$$

$$\left.\begin{aligned}B_1a^N&=\frac{(r_i\sigma_{ri}-\zeta_i)z_ir_iY_{2a}-(r_a\sigma_{ra}-\zeta_a)z_ar_aY_{2i}}{z_0(r_i^2Y_{1i}Y_{2a}-r_a^2Y_{1a}Y_{2i})},\\ B_2a^{-N}&=\frac{r_ir_a\{(r_a\sigma_{ra}-\zeta_a)z_ar_iY_{1i}-(r_i\sigma_{ri}-\zeta_i)z_ir_aY_{1a}}{z_0(r_i^2Y_{1i}Y_{2a}-r_a^2Y_{1a}Y_{2i})}\end{aligned}\right\}\qquad\cdots(19)$$

無孔圓盤の場合は $(\sigma_r)_{r=ra}=\sigma_{ra}$ として

$$\sigma_r=(z_aY_1/zY_{1a})\cdot(\sigma_{ra}-\zeta_a/r_a)+\zeta/r,\qquad\cdots(20)$$

$$\sigma_\theta=\frac{z_a}{zY_{1a}}\Big(\sigma_{ra}-\frac{1}{r_a}\zeta_a\Big)\Big[\frac{d}{dr}(rY_1)\Big]_{r=ra}$$
$$+\frac{d\zeta}{dr}-\frac{\nu kaz_0}{z}r^{\nu-1}\zeta+\frac{w\omega^2}{g}r_2.\qquad\cdots(21)$$

また u は (17) と同樣にして計算される。但し上式には

$z=z_0(1-ar^\nu)^k$, $z_i=z_0(1-ar_i^\nu)^k$; $Y_1=Y_1(ar^\nu)$, $Y_{1i}=Y_1(ar_i^\nu)$, $Y_{2a}=Y_2(ar_a^\nu)$ 等と略記した。

上の (11) 乃至 (21) 式で本論の目的とした應力の解析が常數の一般の値に就て出來たわけである。特殊の例に就ての數値計算を第二報に讓つて玆に本稿を終ることとする。