

Title	細管部を有するU字管液柱の振動(マノメーター制振の研究)
Sub Title	Oscillation of fluid column in a U-tube manometer having a narrow passage in it
Author	鬼頭, 史城(Kito, Fumiki)
Publisher	慶應義塾大学工学部
Publication year	1948
Jtitle	慶應義塾大学工学部研究報告 (Proceedings of Faculty of Engineering, Keiogijuku University). Vol.1, No.1 (1948. 4) ,p.27(27)- 41(41)
JaLC DOI	
Abstract	When using U-tube Manometers in hydraulic experiments, it is usual practice to throttle the rubber tube that leads the pressure head to Manometer, and thus damp out the oscillation of manometer column. But this is done usually by the free choice of experimenters. We thought it better to determine the size of the throttled part on some reasoning, and the following calculations were made. Thus the most suitable dimensions of the throttled part could be determined theoretically.
Notes	
Genre	Departmental Bulletin Paper
URL	<a href="https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KO50001004-00010001-0027">https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KO50001004-00010001-0027</a>

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the Keio Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

を更にその點で閃絡させるためには全波試験値の 9% 位の電壓で充分と云うこととなる。亦巻回間絶縁に付てもこれが破壊すれば健全な場合の 2% 前後と見積れば、變壓器全波試験電壓値の 9.3% 程度に低下してゐることとなる。現在電力の授受に使用してゐる變壓器に實際に本検出法を適用して現在まで繼續して來た經驗に依ると、變壓器の全波試験電壓値の約 10% 内外の電壓で充分に絶縁損傷を検出し得たのである。故にこの検出法を使用すれば全波試験電壓値の一割内外で充分であるが、更に試験値の 4 割程度まであげても先ず心配ないものと考えられるから、この検出法での電壓調整範圍は廣く従つて實施に際して電壓の調整を誤つて失敗する恐れは先ず無いと考えられる。本研究は日本發送電會社の援助に依り研究室内の實驗及び現場試験に種々便宜をあたえられたことに對し深謝する。

## 細管部を有する U 字管液柱の振動 (マノメーター制振の研究)

昭和 23 年 (1948), 2 月 20 日受理

鬼 頭 史 城\*

**Fumiki Kito: Oscillation of Fluid Column in a U-tube Manometer having a Narrow Passage in It.** When using U-tube Manometers in hydraulic experiments, it is usual practice to throttle the rubber tube that leads the pressure head to Manometer, and thus damp out the oscillation of manometer column. But this is done usually by the free choice of experimenters. We thought it better to determine the size of the throttled part on some reasoning, and the following calculations were made. Thus the most suitable dimensions of the throttled part could be determined theoretically.

### I. 緒 言

第 1 圖又は第 4 圖に示す如きマノメーター管路があると、之を用いて水力實驗を行うに當り、マノメーター液柱の振動を出来るだけ除去して計測の便宜を計る一つの方法として、管路の中に細管部を設ける事は管路を絞る等の方法により古くから既に行われているのであるが細管部の直径、長さ等の必要にして且つ充分なる具體的の寸法を求めたものは見當らない様である。本報告に於ては此點を明瞭ならしむべく若干の計算を行つたものである。問題の性質上計算は概數を求める程度に於て行つてある。

著者は本報告の要旨を機械學會雜誌 (昭和 18 年, 1943, 9 月) に於ける「水流計測に關する二三の注意」と題する報文中にのべておいたが、餘りにも摘要にすぎた。然るにその後この種の解を詳しく報告することの必要さを認めたので、こゝに改めて詳細の報文を起草した次第である。

\* 應義塾大學教授, 工博; Dr. Eng. Prof. of Keiogijuku University.

## 第 1 章 層流の場合

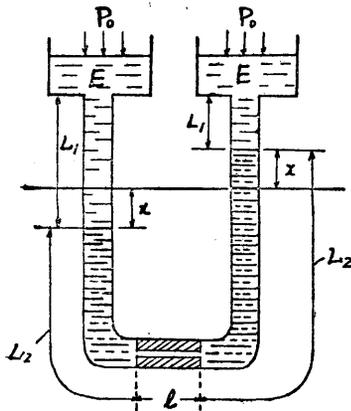


Fig. 1.

第 1 圖に示す如き U 字管内の水銀の振動を考える。いま管の内径の半径  $R$ 、水柱の部分の全長  $L_1$ 、水銀柱の部分（絞つた個所を除く）の全長  $L_2$ 、水の比重  $\gamma_1$ 、水の粘度  $\mu_1$ 、水銀の比重  $\gamma_2$ 、水銀の粘度  $\mu_2$  とし、水銀面の位置を或瞬間  $t$  に於て  $x$  であるとする。U 字管の途中適宜の處に絞りが設けられていると假定し、絞り部分の内側の半径  $r$ 、絞り部分の長さを  $l$ 、絞り部分に含まれる液體の比重  $\gamma_i$ 、粘度  $\mu_i$  とする。絞り個所が水銀中であれば  $i=2$  であり、水柱の中であれば  $i=1$  である。

$x$  の變化に伴つて生ずる水の平均速度は  $V = \frac{dx}{dt}$  であつて、水銀の部分も同じ速度で動く。絞

りの部分の平均速度は  $v = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{dx}{dt}$  である。レイノルズ数は

水柱部では  $\frac{Vd}{\nu} = \frac{2RV}{\nu_1}$ 、水銀柱の部分では  $\frac{2RV}{\nu_2}$ 、絞つた部分では

$$\frac{vd}{\nu_i} = \frac{\left(\frac{R}{r}\right)^2 V \times 2r}{\nu_i} = \frac{2VR}{\nu_i} \times \left(\frac{R}{r}\right)$$

となり、細い部分のレイノルズ数は太い部分の  $R/r$  倍となる。假りに執れもが限界値以下であるとして計算する。

摩擦損失は全體として

$$P_1 + P_2 + P = \frac{8}{R^2} \left[ \mu_1 L_1 + \mu_2 L_2 + \mu_i l \left(\frac{R}{r}\right)^4 \right] \frac{dx}{dt} \quad \dots(1)$$

入口  $E$  の損失は無視する。以上いずれも Poiseuille の公式に對する Hagenbach の修正は取入れてない。

外力  $F$  と重力とが作用するものとすれば合成力は

$$-2\pi R^2 \gamma_0 x + F \quad \dots(2)$$

但し  $\gamma_0 = \gamma_0 - \gamma_1$  (第 1 圖の場合)、 $\gamma_0 = \gamma_2$  (第 4 圖の場合)

全體の運動量は

$$\pi R^2 (L_1 \rho_1 + L_2 \rho_2 + l \rho_i) \frac{dx}{dt} \quad \dots(3)$$

依つて運動量の變化を力に等しと置けば

$$\pi R^2 (L_1 \rho_1 + L_2 \rho_2 + l \rho_i) \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{8}{R^2} \left[ \mu_1 L_1 + \mu_2 L_2 + \mu_i l \left(\frac{R}{r}\right)^4 \right] \times \frac{dx}{dt} \times \pi R^2 - 2\pi R^2 \gamma_0 x + F \quad \dots(4)$$

或は

$$\left. \begin{aligned} m &= \pi R^2 (L_1 \rho_1 + L_2 \rho_2 + l \rho_i) \\ f &= \frac{8}{R^2} \left[ \mu_1 L_1 + \mu_2 L_2 + \mu_i l \left(\frac{R}{r}\right)^4 \right] \times \pi R^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots(5)$$

$$k = \pi R^2 \sigma_0$$

と置けば (4) は下の如くなる。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + 2kx - F = 0 \quad \dots(6)$$

### 自由振動

自由振動に対しては  $F=0$  であるから (6) は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + 2kx = 0 \quad \dots(7)$$

となる。  $x = Ae^{\alpha t}$  と假定すれば

$$\alpha = \frac{-f \pm \sqrt{f^2 - 8mk}}{2m} \quad \dots(8)$$

$f^2 - 8mk < 0$  ならば衰減振動になる。

$f^2 - 8mk > 0$  ならば非振動になる。

故に非振動運動をなす爲の條件は

$$(\pi R^2)^2 \times \frac{64}{R^4} \left[ \mu_1 L_1 + \mu_2 L_2 + \mu_{il} \left( \frac{R}{r} \right)^4 \right]^2 > 8 \times \pi^2 R^4 \sigma_0 (L_1 \rho_1 + L_2 \rho_2 + l \rho_i) \quad \dots(9)$$

で與えられる。

條件式 (9) を書代えれば

$$8 \left[ \mu_1 L_1 + \mu_2 L_2 + \mu_{il} \left( \frac{R}{r} \right)^4 \right]^2 > R^4 \sigma_0 (L_1 \rho_1 + L_2 \rho_2 + l \rho_i)$$

である。

$l$  は  $L_1, L_2$  に比して小なる故

$$L_1 \rho_1 + L_2 \rho_2 + l \rho_i \doteq L_1 \rho_1 + L_2 \rho_2$$

$\frac{R}{r}$  は 10 位の程度の數であるから  $\left( \frac{R}{r} \right)^4$  は萬の程度の數となる。故に  $l$  が  $L_1$  又

は  $L_2$  の數十分の一であつても、 $l \left( \frac{R}{r} \right)^4$  は  $L_1$  又は  $L_2$  に比し頗る大なる數となる。

故に

$$\mu_1 L_1 + \mu_2 L_2 + \mu_{il} \left( \frac{R}{r} \right)^4 \doteq \mu_{il} \left( \frac{R}{r} \right)^4$$

依つて前の條件式より

$$r < \left[ \frac{8 \mu_i^2 l^2 R^4}{\sigma_0 (L_1 \rho_1 + L_2 \rho_2)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \dots(9')$$

となる。  $\mu_i = \gamma_i \frac{\gamma_i}{g}$ ,  $\rho_1 = \frac{\gamma_1}{g}$ ,  $\rho_2 = \frac{\gamma_2}{g}$

なる故上式を

$$r < \left[ \frac{8 \gamma_i^2 l^2 R^4 \gamma_i^2}{\gamma_0 (L_1 \gamma_1 + L_2 \gamma_2)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \dots(9'')$$

とも書ける。但し水銀柱だけの場合 (第 4 圖) 對しては  $\gamma_i = \gamma_0$ 。

水銀柱の上に水柱のある場合 (第 1 圖) 對しては  $\gamma_i = \gamma_2 - \gamma_1$  ととるべきである。

### 水銀柱の遅れ (Time lag)

非振動の場合には  $\alpha$  の値 ((8) 式) は孰れも負の實數となる。今之を  $-\alpha_1, -\alpha_2$  と名付けるとき

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{f - \sqrt{f^2 - 8mk}}{2m} \\ \alpha_2 &= \frac{f + \sqrt{f^2 - 8mk}}{2m} \end{aligned} \right\} \dots(10)$$

(7) の一般解は

$$x = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t}$$

であつて  $t=0$  に於て  $x=x_0, \frac{dx}{dt}=0$  とすれば

$$x = \frac{-x_0}{\alpha_1 - \alpha_2} [\alpha_2 e^{-\alpha_1 t} - \alpha_1 e^{-\alpha_2 t}] \dots(11)$$

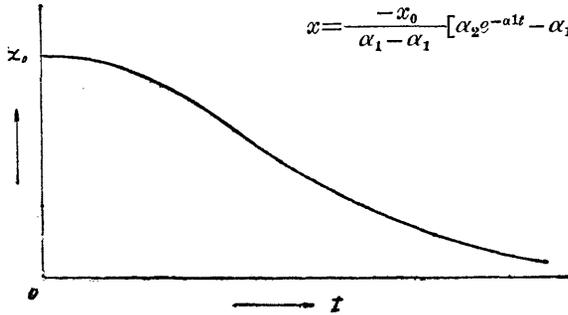


Fig. 2.

を得る。  $\alpha_1$  は  $\alpha_2$  よりも小であるから、  $x$  の減少遅速は  $\alpha_1$  の値如何に依つて左右される。

振動の場合に對しては

$f^2 - 8mk < 0$  であつて

$$\alpha = -\alpha_0 \pm i\beta_0$$

但し  $\alpha_0 = \frac{f}{2m}$

$$\beta_0 = \frac{\sqrt{8mk - f^2}}{2m}$$

なる故

$$x = Ae^{-\alpha_0 t} \cos(\beta_0 t + \delta_0 t + \delta_0)$$

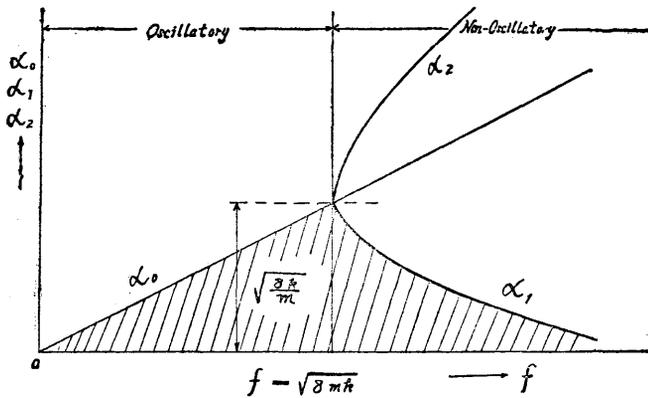


Fig. 3.

となる。振幅の減少率は  $\alpha_0$  に依つて決まる。今  $\alpha_0, \alpha_2$  が  $f$  の値に對し如何様に變るかを圖示すれば第 3 圖の如くなる。

$\alpha_0, \alpha_1$  の最大となるのは限界の場合  $f = \sqrt{8mk}$  である。故に限界値以上に  $r$  を細くする必要はない。

水銀柱だけの場合

(第 4 圖) 此の場合には  $L_1=0, \mu_1=\mu_2, \gamma_0=\gamma_2$

であるから (9) は

$$(\pi R^2) \times \frac{64\mu_2^2 L_2^2}{R^4} \left[ 1 + \left( \frac{R}{r} \right)^4 \frac{l}{L_2} \right]^2 > 8\pi\rho_2 R^2 (l+L_2) \gamma_2 \times \pi R^2$$

となる。若し  $\left( \frac{R}{r} \right)^4 \frac{l}{L_2}$  が 1 に比し大であるとすれば、此條件式より

$$r^2 < \frac{8\mu_2^2}{\pi^2} g \frac{l_2}{L_2+l} \times \frac{R^4}{\gamma_2^2} \times \pi^2 R^4$$

そして  $\mu_2 = \nu_2 \rho_2 = \nu_2 \frac{\gamma^2}{g}$  と置けば

$$r < \left[ \frac{8 \nu_2^2 l^2 R^4}{g(L_2 + l)} \right]^{1/2} \quad \dots(12)$$

例へば  $l = 0.01 \text{ m}$ ,  $l + L_2 = 1.0 \text{ m}$ ,  $R = 0.01 \text{ m}$ ,  
 $\nu_2 = 0.114 \times 10^{-6}$ ,  $g = 9.8 \text{ m/sec}^2$  とすれば

$$r < \left[ \frac{8 \times 0.013 \times 10^{-2} \times 10^{-4} \times 10^{-8}}{9.8 \times 1.0} \right]$$

即ち  $r < 0.56 \text{ mm}$  となつて毛細管部の直径が約 1 耗なるを要する。

**強制振動の場合**

第 1 圖の場合に於て液體に  $F = A \cos \omega t$  で表わされる外力が作用するときは (6) の代りに

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + 2kx = A \cos \omega t \quad \dots(6')$$

が運動方程式となる。此の方程式の解は方程式

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + 2kx = A e^{i\omega t} \quad \dots(6'')$$

の解の實數部で表わされる。

依つて (6) の特殊解は

$$x = \frac{A}{[(2k - m\omega^2)^2 + f^2\omega^2]^{1/2}} \cos(\omega t + \varphi) \quad \dots(13)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{f\omega}{m\omega^2 - 2k}$$

式中の係数を

$$\left[ \left( 1 - \frac{m}{2k} \omega^2 \right)^2 + \left( \frac{f\omega}{2k} \right)^2 \right]^{1/2} = H$$

と名付ける。  $\omega = 0$  即ち極く緩かに外力が働く場合の振巾變動量は  $A/2k$  であつて任意の周期  $\omega$  の外力が働く場合の振巾變動量は  $A/2kH$  である。

以下に  $H$  の値を吟味する。

$$m = \pi R^2 (L_1 \rho_1 + L_2 \rho_2), \quad f = 8\pi \mu l \left( \frac{R}{r} \right)^4, \quad k = \pi R^2 \gamma$$

なる故

$$\frac{m}{2k} = \frac{L_1 \rho_1 + L_2 \rho_2}{2\gamma_0} = \frac{\varepsilon L_1 + L_2}{2g}$$

(但し  $\gamma_0 = \gamma_2$  の場合且つ  $\varepsilon = \rho_1 / \rho_2$  とす)

従つて

$$H^2 = \left( 1 - \frac{\varepsilon L_1 + L_2}{2g} \omega^2 \right)^2 + \frac{64 \mu^2 l^2}{R^4 \gamma_2^2} \omega^2 \left( \frac{R}{r} \right)^8 *$$

\*[註] 例へば  $\varepsilon L_1 + L_2 = 10 \text{ m}$ ,  $2g = 19.8 \text{ m}$ ,  $\omega = 20 \text{ rad/sec}$ , (3.2 Hz) とすれば

$$\left( 1 - \frac{\varepsilon L_1 + L_2}{2g} \omega^2 \right) = \left( 1 - \frac{400}{19.8} \right) = 1 - 20.2$$

であり,  $\omega = 100 \text{ rad/sec}$  (16 Hz) とすれば

$$\left( 1 - \frac{\varepsilon L_1 + L_2}{2g} \omega^2 \right) = \left( 1 - \frac{10000}{19.8} \right) = 1 - 505$$

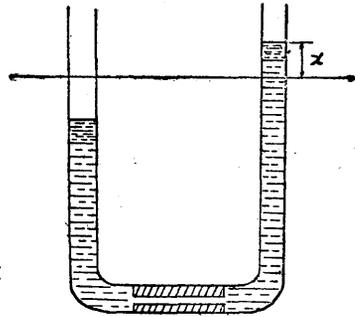


Fig. 4.

上式より  $\left(\frac{R}{r}\right)$  を  $H, \omega$  等の函数として表わせば

$$\left(\frac{r}{R}\right)^4 = \frac{8\mu l \omega}{R^2 \gamma_2} \times \frac{1}{\sqrt{H^2 - \left(1 - \frac{\varepsilon L_1 + L_2}{2g} \omega^2\right)^2}}$$

故に振巾變動率が  $1/H$  以下である爲には

$$\left(\frac{r}{R}\right)^4 < \frac{8\mu l \omega}{R^2 \gamma_2} \times \frac{1}{\sqrt{H^2 - \left(1 - \frac{\varepsilon L_1 + L_2}{2g} \omega^2\right)^2}}$$

なるを要する。

例えば  $H=100, \quad \omega^2 \frac{\varepsilon L_1 + L_2}{2g} = 400 \times \frac{1}{19.8} = 20$  ならば

$$\left(\frac{r}{R}\right)^4 < \frac{8\mu l \omega}{R^2 \gamma_2} \times \frac{1}{98}$$

なるを要する。振巾變動率が丁度  $1/H$  になるときは

$$\left(\frac{r}{R}\right)^4 = \frac{8\nu \frac{\gamma_2}{g} l \omega}{R^2 \gamma_2} \times \frac{1}{98} = \frac{8\nu l \omega}{R^2 g} \times \frac{1}{98}$$

とし、 $\nu_2 = 0.114 \times 10^{-6}, \quad g = 9.8 \text{ m/sec}^2, \quad l = 0.01 \text{ m}, \quad R = 0.01 \text{ m}$  と置けば

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{R}\right)^4 &= \frac{8 \times 0.114 \times 10^{-6} \times 0.01 \times 20}{(0.01)^2 \times 9.8} \times \frac{1}{98} \\ &= 9.52 \times 10^{-8} \times 20 \end{aligned}$$

$$\therefore r = 0.0175 \times 0.01 \times 2.1^m = 0.36 \text{ mm}$$

即ち 0.36 に  $r$  を取つて置けば  $\omega = 20$  (3 Hz) の振動壓力に對しマノメーターは  $1/100$  しか感じない事になる。以上に求めた二つの條件は

$$r < \nu_2^{\frac{1}{4}} l^{\frac{1}{4}} R^{\frac{3}{4}} \left\{ \frac{8}{g(L_2 + \varepsilon L_1)} \right\}^{\frac{1}{4}} \dots (\text{dead beat になるための條件})$$

$$r < \nu_2^{\frac{1}{4}} l^{\frac{1}{4}} R^{\frac{3}{4}} \left\{ \frac{8\omega}{g\sqrt{H^2 - \left(1 - \frac{\varepsilon L_1 + L_2}{2g} \omega^2\right)^2}} \right\}^{\frac{1}{4}} \dots (\text{振動數 } \frac{\omega}{2\pi} / \text{sec の振動數に對し } 1/H \text{ だけマノメーターがふれるための條件})$$

此の問題の條件の内どれが酷であるかは

$$\frac{8}{g(L_2 + \varepsilon L_1)} \quad \text{と} \quad \frac{\omega}{\sqrt{H^2 - \left(1 - \frac{\varepsilon L_1 + L_2}{2g} \omega^2\right)^2}}$$

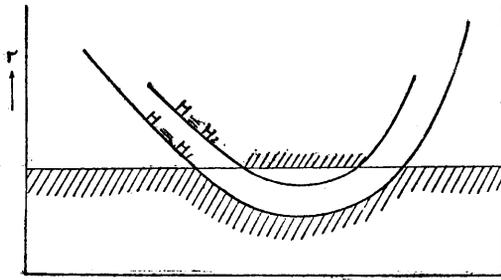


Fig. 5.

の内何れが小であるかに依つて定まる。従つて之は  $H, \omega$  に関する問題であつて管の内徑  $R$ , 粘性  $\nu_2$  等には關係が無い事柄である。(第 5 圖)

**紋りの個所が水中にある場合と水銀中にある場合との比較**

U 字管内の液柱の振動が非周期的になる爲の條件は (9) 即ち下の式で與えられる。

Table 1.

Material	$\nu$ in $m^2/sec$ at $20^\circ C$	$\rho$ in $kg/m^3$	$\mu$ v $\theta/g$
Mercury	$0.114 \times 10^{-6}$	$13.6 \times 10^{-3}$	$1.58 \times 10^{-4}$
Ether	$0.316 \times \nu$		
Alcohol	$1.51 \times \nu$		
Glycerin	$848 \times \nu$		
Water	$1.01 \times \nu$	$10^3$	$1.03 \times 10^{-4}$

$$R^2 \pi^2 r_0 (L_1 \rho_1 + L_2 \rho_2 - l \rho_i) < 8 \left[ \mu_1 L_1 + \mu_2 L_2 + \mu_i l \left( \frac{R}{r} \right)^4 \right]^2 \pi^2 R^4$$

第 1 表の如く  $\mu$  の値は水と水銀とで大差ない。  $L_1$ ,  $L_2$  は  $l$  に比すれば大なるは勿論であるが、  $l \left( \frac{R}{r} \right)^4$  は  $L_1$ ,  $L_2$  よりも遙かに大きいと推定される。斯様な場合には上式は

$$r^8 < \frac{8 \mu_i^2 l^2 R^4}{\gamma_0 (L_1 \rho_1 + L_2 \rho_2)}$$

假りに  $L_1$ ,  $L_2$  は一定に保つものとし、絞りの個所を水銀中に擇ぶ場合と、水中に置く場合との優劣を比較しよう。

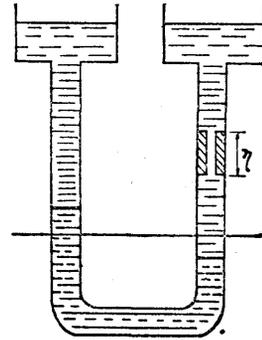


Fig. 5.

(1) 水中で絞る場合

$$\begin{aligned} \mu_i &= \mu_1 = 1.03 \times 10^{-4} & \gamma_0 &= \gamma_2 = \gamma_1 \\ r_{cr.1}^8 &= \frac{8}{\pi^2} \frac{1.03^2 \times 10^{-8} l^2}{(\gamma_2 - \gamma_1)(L_1 \rho_1 + L_2 \rho_2)} \end{aligned}$$

(3) 水銀中で絞る場合

$$\begin{aligned} \mu_i &= \mu_1 = 1.58 \times 10^{-4} & \gamma_0 &= \gamma_2 - \gamma_1 \\ r_{cr.2}^8 &= \frac{8}{\pi^2} \frac{1.58^2 \times 10^{-8} l^2}{(\gamma_2 - \gamma_1)(L_1 \rho_1 + L_2 \rho_2)} \end{aligned}$$

故に兩者の比を取れば下の如くなる。

$$\frac{r_{cr.1}}{r_{cr.2}} = 0.89$$

故に  $r$  の限界値は大差ない事を知る。水銀の方が稍々有利である。

次に半径  $r$  を一定に保つものとし、絞りを水中で行うか或は水銀中で行うに依つて減衰率にどれだけの差があるかを検べる。

減衰率は (振動の場合)  $f/2m$  で與えられる。

$$\begin{aligned} f/2m &= \frac{8/R^2 [\mu_1 L_1 + \mu_2 L_2 + \mu_i l (R/r)^4] \times \pi R^2}{2\pi R^2 [L_1 \rho_1 + L_2 \rho_2 + l \rho_i]} \\ &= \frac{4l}{r^4} \times \frac{\mu_i R^2}{L_1 \rho_1 + L_2 \rho_2} \end{aligned}$$

であるから  $f/2m$  は ( $L_1$ ,  $L_2$  が不変であれば)  $\mu_i$  に比例する。従つて絞りを水銀中に設けた方が水中に設けるよりも減衰率が約 50% 増じとなる。

## 第 2 章 亂流の場合

半徑  $R$  なる圓管内を  $V$  m/s なる流速を以て流れてゐる液體があるとする。そのレイノルズ數  $R_e$  は

$$R_e = \frac{VD}{\nu} = \frac{V \times 2R}{\nu}$$

で與えられる。茲に  $\nu$  はその液體の運動粘性係數である。例えば第 1 圖に示す如く水柱部、水銀柱部及び細管部より成る  $U$  字管があつて、或瞬間に於ける流速  $V = \frac{dx}{dt}$  であるとする。假に  $2R = 7mm = 7 \times 10^{-3}$ ,  $2r = 2m = 2 \times 10^{-3}m$  とすれば

$$\text{水柱部} \quad R_e = \frac{2RV}{\nu_1} = 6930V$$

$$\text{水銀柱部} \quad R_e = \frac{2RV}{\nu_2} = 61400V$$

$$\text{細管部} \quad R_e = \frac{2RV}{\nu_2} \times \left(\frac{R}{r}\right) = 215000V$$

となる。 $R_e$  が 2000 となるときの  $V$  値を求めて見ると、水柱部に對し  $V = 0.289$  m/s, 水銀柱部に對し  $V = 0.0326$  m/s, 細管部に對し  $V = 0.0093$  m/s 故に水銀柱だけあつて細管部のないときでも  $V$ , 即ち  $\frac{dx}{dt}$  が 3 cm/s を超える場合は層流とはならない。若し細管部があれば  $\frac{dx}{dt}$  が 9 mm/s 以上あれば混亂流が起つてゐるものと考えて然る可きである。故に細管部がある場合には混亂流の場合の抵抗損失を考えねばならぬ。然し細管部が無ければ混亂流, 層流何れの場合も有り得る。

**x の限界値** 抵抗のない場合に細管部無きものとすれば、液柱の振動の方程式

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + 2kx = 0$$

$$\text{但し } m = \pi R^2 \rho_2 L_2, \quad k = \pi R^2 \rho_2 \times g$$

$$\text{であつて } x = A \cos (nt + \theta_0) \quad \text{但し}$$

$$n = \sqrt{\frac{2k}{m}} = \sqrt{\frac{2g}{L_2}}$$

液柱を  $x_0$  だけ持上げてから  $t=0$  に於て之を放したとすると

$$(x)_{t=0} = A \cos \theta_0 = x_0, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = -nA \sin \theta_0 = 0$$

なる故に  $\theta_0 = 0$ ,  $A = x_0$  従つて液柱の振動中に生ずる最大流速は

$$V_{\max} = nx_0 = \sqrt{\frac{2g}{L_2}} x_0$$

となる。之が限界値即ち  $R_e = 2000$  に對するものであるとすれば

$$61400V = 200$$

即ち

$$x_0 = \frac{2000}{61400} \sqrt{\frac{L_2}{2g}} = 0.0073 \sqrt{L_2}$$

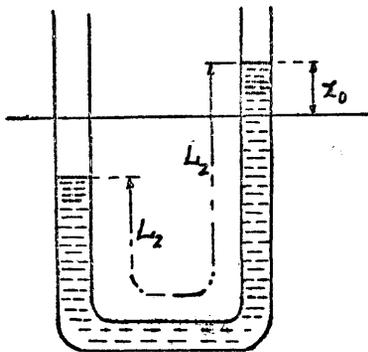


Fig. 7.

となる。例えば  $L_2=1.0m$  ならば  $x_0=0.0073m=7mm$  である。

**抵抗が速度の自乗に比例する場合の振動方程の解\***

抵抗が速度の 2 乗に比例するときには、振動の方程式は次の如くなる。(下向きの力を

正)

$$m \frac{d^2x}{dt^2} \pm b \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + cx = 0$$

但し  $m$ : 質量,  $b$ : 抵抗係数,  $c$ : 単位長さに働く重力

水準  $x$  が降下しつゝある時、力の方向は第 9 圖の如くである。

水準  $x$  が上昇しつゝある時は第 10 圖の如くなる。

故に降下時には抵抗は  $-b \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$

上昇時には  $+b \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$

である。先ず下降の場合だけを考えよう。

上の振動方程式に於て

$$b/m = \delta/2, \quad c/m = \lambda^2$$

と置く時は

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{\delta}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \lambda^2 x = 0 \dots (a)$$

これより

$$\frac{dx}{dt} = - \frac{\sqrt{2} \lambda}{\delta}$$

$$\dots \sqrt{1 + \delta x + c e^{\delta x}} \dots (b)$$

負號を取つたのは下降の際は

$\frac{dx}{dt}$  は常に (-) だからで

ある。

初期条件  $t=0$  に於て

$$x = x_0, \quad \frac{dx}{dt} = 0 \text{ とすれば}$$

(b) に依り

$$0 = - \frac{\sqrt{2} \lambda}{\delta} \sqrt{1 + \delta x_0 - c e^{\delta x_0}}$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = - \frac{\sqrt{2} \lambda}{\delta} \sqrt{1 + \delta x_0}$$

$$\sqrt{\frac{1 + \delta x}{1 + \delta x_0} - e^{-\delta(x_0 - x)}} \dots (c)$$

扱て下降の最終に到つて  $x = -x_1$

に於て  $\frac{dx}{dt} = 0$  となるものとすれば

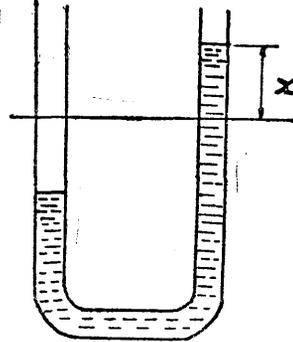


Fig. 8.

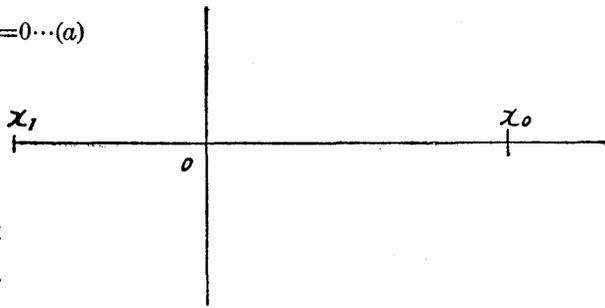


Fig. 9.

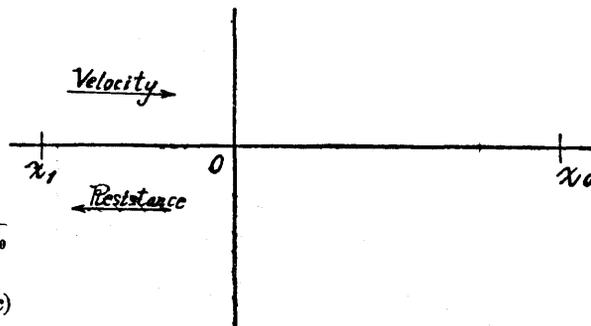


Fig. 10.

\* Hort: Technische Schwingungslehre, S, 44, 2 Aufl. Forchheimer: Hydraulik (Schwingungen) 参照

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\sqrt{2\lambda}}{\sigma} \sqrt{1+\delta x_0} \sqrt{\frac{1-\delta x}{1+\delta x_0} - e^{-\delta(x_0+x_1)}} = 0$$

$$\delta x_1 + \log_e(1-\delta x_1) = -\sigma x_0 + \log_e(1+\delta x_0) \quad \dots(d)$$

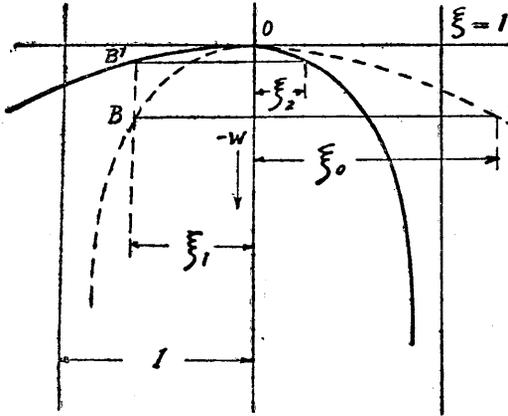


Fig. 11.

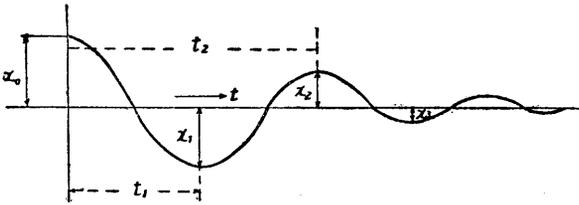


Fig. 12.

なるを要する。故に今

$$W = -\xi + \log_e(1+\xi), \quad \xi = \delta x$$

とすれば  $W-\xi$  曲線は第 11 圖の點線の如くなる。

液柱上昇の場合も全く同様にして求めることが出来る。即ち此場合には下降の場合に於ける計算に於て  $\delta$  の代りに  $-\delta$  を代入すればよいのである。依つて第 11 圖の實線を得る。今  $-x_1$  から  $+x_2$  迄上昇せるものとすれば第 11 圖の B から C 點を求めることに依り

$$\xi_2 = \delta x_2, \quad x_2 = \frac{1}{\delta} \xi_2$$

算することが出来る。以上の圖式解法を繰返せば  $+x_0, -x_1, +x_2, -x_3, \dots$  を求められる。

(第 12 圖)

斯様な方法により振動の減衰

狀況を知る事が出来る。但し  $t_1, t_2, \dots$  を求めることは出来ない。

**$\delta$  の値が頗る大なる場合**

若し抵抗係數  $b$  が大であれば  $\delta$  が大となる。斯様な場合には  $\xi_0$  は 1 に比し大である。然るに  $\xi_1$  は圖により明らかな如く 1 を超えることはないから  $x_1 = \xi_1/\delta$  は  $1/\delta$  よりも少なる値を取る。故に  $1/\delta$  が頗る小 (例えば  $1/1000m$ ) ならば之を dead beat と考えてよい。このような場合に對しては略近的解法に依り  $x$  を  $t$  の函數として求めることが出来る。先ず微分方程式 (c) の根號内の各項を考えて見ると、第 13 圖の如くなる。

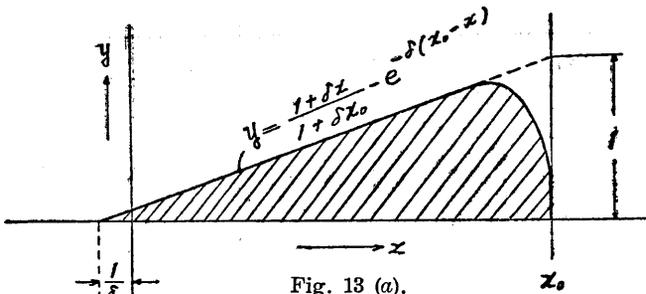


Fig. 13 (a).

之に依つて見るに  $\delta$  が頗る大であれば

$$\frac{1+\delta x}{1+\delta x_0} - e^{-\delta(x_0-x)}$$

の代りに  $\frac{1+\delta x}{1+\delta x_0}$

を代用してもその爲に誤差を來す部分は極小範圍にすぎないことが判る。

依つて微分方程式 (c) の代りに

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\sqrt{2\lambda}}{\delta} \sqrt{1+\delta x_0} \sqrt{\frac{1+\delta x}{1+\delta x_0}}$$

即ち

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\sqrt{2}\lambda}{\delta} \sqrt{1+\delta x} \quad \dots(e)$$

と置き、之を積分すれば

$$2\sqrt{1+\delta x} = K - \sqrt{2}\lambda t$$

但し  $K$  は積分常数

初期条件は  $t=0$  に於て  $x=x_0$

であるから

$$1+\delta x = \left[ \sqrt{1+\delta x_0} - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} t \right]^2 \quad \dots(f)$$

$x=0$  となるのは

$$2 = 2\sqrt{1+\delta x_0} - \sqrt{2}\lambda t$$

即ち 
$$T = \left\{ \frac{\sqrt{1+\delta x_0} - 1}{\lambda} \right\} \sqrt{2}$$

なる時間に於てである。(f) に依り  $x$  と  $t$  との関係は投物線である。

**各部分の摩擦損失の比較**

一例として (第 1 圖の記號を用いて)  $L_2=0.50$ ,  $2R=D=0.007$ ,  $l=20$ ,  $2r=d=2$ , なる場合に

$$V = \frac{dx}{dt} = 0.03 \text{ m/s} \text{ なる運動をなせる瞬間を考えれば,}$$

水銀柱部に於ける摩擦損失は

( $R_e=1842$  となり層流と見做す)

$$H_f = 32\nu_2 V \frac{L_0}{D_0} = 32 \times 0.114 \times 10^{-6} \times 0.03 \times \frac{0.50}{49 \times 10^{-6}} = 0.00113m \text{ (水銀柱)}$$

細管部に於ける摩擦損失は

$$R_e = 2.15 \times 10^5 \times \frac{3}{100} = 6.45 \times 10^3 R_e^{\frac{1}{4}} = 8.96$$

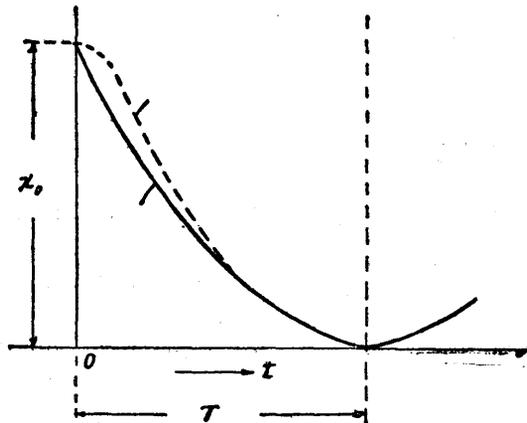
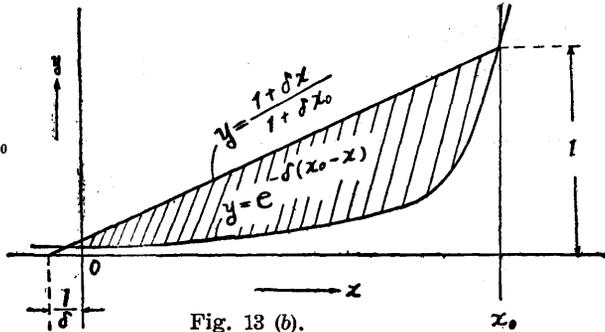
假りに Blasius の公式に従うものとし

$$\begin{aligned} H_f &= 0.316 R_e^{\frac{1}{4}} \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g} \\ &= 0.316 \times \frac{1}{8.96} \times \frac{20}{2} \times \frac{\left[ 0.03 \times \left( \frac{7}{2} \right)^2 \right]^2}{20} \\ &= 0.00238m \text{ (水銀柱)} \end{aligned}$$

である。尚細管部の出入口に於ては流速の急變するからそのために損失が起る。

$$H_{12} = \frac{V^2}{2g} = \frac{\left[ 0.03 \times \left( \frac{7}{2} \right)^2 \right]^2}{20} = 0.00674m \text{ (水銀柱)}$$

細管部に於ける全損失は



$$H_f(\text{tal}) = \left[ 1 + 0.316 \frac{l}{d} R_e^{-1} \right] \frac{V^2}{2g} = 0.00912$$

理論と實驗との比較

第 2 表及び第 15 圖に示す如き各種の硝子管及び毛細管を用い水銀柱の振動に關する

Table 2.

	$D_1$	$D_2$	Mean Value	$d_1$	$d_2$	Mean Value	$l$	$L_2$	Mea- sured Weight gr.	$L_1$	Mea- sured Weight gr.
No. 2	$7 \frac{7}{20}$	$7 \frac{7}{20}$	7.35	—	—	—	—	554	333.2	208 66	9.18 2.92
2	7	$7 \frac{3}{20}$	7.07	2.52	2.52	2.52	20	554	312.8	183	7.63
'										100	4.15
'										200	8.3
3	$6 \frac{11}{20}$	$6 \frac{11}{20}$	6.55	1.605	1.610	1.608	20	553	272	200	7.24
4	$6 \frac{14}{20}$	$6 \frac{12}{30}$	6.55	1.025	1.050	1.038	19	544	251.6	200	6.68
5	$6 \frac{19}{20}$	$6 \frac{14}{20}$	6.83	0.825	0.840	0.833	20	554.5	272.7	200	7.23
6	$6 \frac{9}{20}$	$6 \frac{9}{20}$	6.45	0.710	0.730	0.745	21	555.5	268	200	7.11
7	$6 \frac{15}{20}$	$6 \frac{17}{20}$	6.80	0.700	0.648	0.664	22	532	266.6	200	7.37
8	$6 \frac{5}{20}$	$6 \frac{5}{20}$	6.25	0.555	0.600	0.578	22	555	244.8	200	6.98

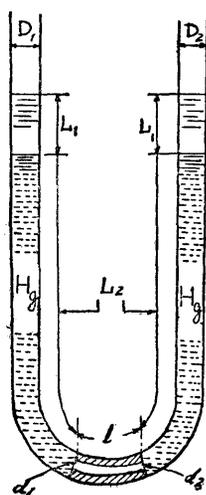


Fig. 15.

實驗が行われた。此實驗に於ては水銀柱に  $x_0$  なる初期値 (第 14 圖) を與へ突然之を放つた時、その後に於けるマンメーターの振動を印畫紙を巻付けた回轉筒を用いて記録せしめたものである。此の實驗値と上に述べた處の計算によつて得られる値との比較を以下において行つて見よう。この實驗は東京大學工學部で兼重教授の下に行われたものである。

計算の便を計る爲に曲線  $\omega = -\xi + \log_e(1 + \xi)$  を求め、之を第 16 圖に示してある。

[No. 1 U 字管]  $D = 7.35 \times 10^{-3} m$ ,  $L_2 = 0.554 m$ , 細管部なし  
亂流として

$$H_f = 0.316 \times (3000)^{-1} \times \frac{0.554}{7.35 \times 10^{-3}} \times \frac{1}{20} V^2$$

(但し  $R_e = 3000$  は推定による) 従つて

$$H_f = 0.161 V^2$$

$$\therefore b = 0.161 \times (\pi R^2) \times \gamma = 1.61 (\rho_2 \pi R^2)$$

$$m = (\pi R^2) \times L_2 \rho_2 = 0.554(\rho_2 \pi R^2)$$

$$c = 2 \times \pi R^2 \times \gamma = 20 \times (\rho_2 \pi R^2)$$

$$\therefore \frac{\delta}{2} = \frac{b}{m}, \quad \delta = \frac{2b}{m} = 5.82$$

$$\frac{c}{m} = \lambda^2 = 3.61$$

$$\lambda = 6.0$$

[No. 2 U 字管]

$$D = 70 \times 10^{-3} m, \quad L_2 = 0.554 m$$

$$d = 2.52 mm, \quad l = 20 mm$$

$$H'_{f'} = 0.316 \times (3000)^{-1} \times \frac{0.554}{7.0 \times 10^{-3}}$$

$$\times \frac{1}{20} V^2 = 0.169 V^2$$

但し  $R_c = 8000$  と推定した。従つて

$$H_f'' = \left[ 1 + 0.316 \times 7.94 \times \frac{1}{9.45} \right] \times \frac{V^2}{20} \times \left( \frac{70}{2.52} \right)^4 = 3.80 V^2$$

故に

$$H_f = [0.169 + 3.80] V^2 = 3.97 V^2,$$

$$\therefore b = 3.970(\rho_2 \pi R^2), \quad m = 0.554(\rho_2 \pi R^2)$$

$$c = 20(\rho_2 \pi R^2)$$

$$\therefore \sigma = \frac{2b}{m} = 1.43, \quad \lambda^2 = \frac{c}{m} = 36.1, \quad \lambda = 6.0$$

[No. 3~8 U 細管]

細管部の抵抗損失だけを取り他を無視し

$$D = 6.5 \times 10^{-3}, \quad L_2 = 0.540$$

$l = 20$  とし  $d$  を変数にする。

$$H_f = \left[ 1 + 0.316 \times \frac{20}{1.0} \times 10000^{-1} \right] \times \frac{V^2}{2g}$$

$$H_f = 1.63 \times \frac{V^2}{20} \times \left( \frac{D}{d} \right)^4$$

$$\therefore b = 0.0815 V^2 \left( \frac{D}{d} \right)^4 \times (g \rho_2 \pi R^2)$$

$$m = 0.554(\rho_2 \pi R^2), \quad c = 20(\rho_2 \pi R^2)$$

$$\delta = \frac{2b}{m} = \frac{1.63}{0.554} \left( \frac{D}{d} \right)^4$$

$$\lambda = 6.0$$

計算の結果は第 4 表に示す如くである。計算によれば No. 1, No. 2 模型は減衰振動

Table 3. Values of  $\delta$

No. 3	No. 4	No. 5	No. 6	No. 7	No. 8
2.95 × 276 = 815	2.95 × 1680 = 4960	2.95 × 4540 = 13400	2.95 × 5620 = 16600	2.95 × 11000 = 32500	2.95 × 11600 = 34300

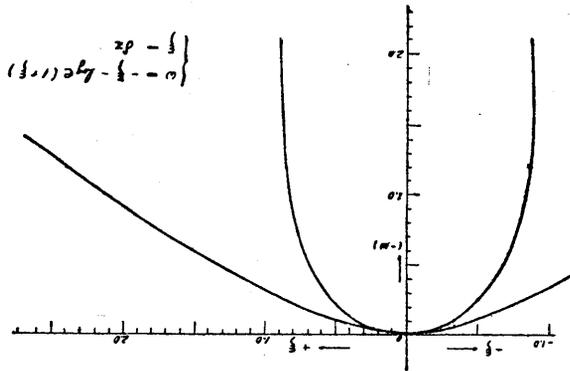


Fig. 16.

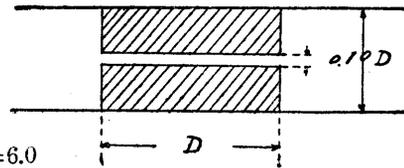


Fig. 17.

Table 4. Calculated values.

$T$ sec	Model No.	$\delta$	$x_0$	$\xi_0 = \delta x_0$	$\xi_1$	$x_1 = \xi_1 / \delta$	$\xi_2$	$x_2 = \xi_2 / \delta$	$\xi_3$	$x_3 = \xi_3 / \delta$	$T$
1.9 2.5 5.8 6.8	1	5.8	0.10 0.05	0.58 0.59	0.41 0.22	0.070 0.038	0.31 0.19	0.053 0.033	0.25 0.15	0.043 0.016	
	2	143	0.10 0.05	1 × 4.3 7.15	0.95 0.90	0.0066 0.0062	0.59 0.56	0.0041 0.0038	— —	— —	
	3	815	0.10	815	0.99	0.001	—				1.9
	4	4960	0.05	248	—						3.5
	5	13400	0.05	670	—						5.8
	6	16600	0.05	880	—						6.8
	7	32500									
	8	34300									

Table 5. Observed values.

Model No.	$x_0^m$	$x_1^m$	$x_2^m$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$T$ sec
1	0.10 0.05	-0.065 -0.035	+0.043 +0.024	-0.032 -0.018	+0.022 +0.012	-0.016 -0.085	
2	0.100 0.050	-0.007 -0.007	+0.0045 +0.0035	-0.0015 -0.0010	—	—	
3	0.100	-0.001	—	—	—	—	$12 \times 0.2$ $= 2.4$
4	0.05	—	—	—	—	—	$13.0 \times 0.3$ $= 3.9$
5	0.05	—	—	—	—	—	9.0
6	0.055	—	—	—	—	—	15.0
7							

No. 3, No. 4…… は非振動となる。實驗に依つて求めた振幅の値を第 5 表に示す。實驗値と計算値と比較するに大體に於て両者が一致している。之等の表の中で  $T$  は非振動的減衰の場合に於て  $x$  が 0 となる迄に要する時間を示す。之は計算上は判然出来るが、實驗値から之を求めるためには推定による外はないので、實驗値と理論値と充分によく一致せるものとは言い難いが、大體の様子は合つていゝと考えられる。

抵抗損失係数は嚴密にいへば速度と共に變化するのであるが、計算には一定としてある點及び  $dx/dt$  が大なる時は抵抗は速度の自乗に比例し  $dx/dt$  が小となれば一乗に比例するものと考えた方が至當かも知れないが、計算には常に自乗に比例するものと考えた點等を考えると實驗値と計算値と正確に一致しないのは止む得ないものと思われる。

#### 細管の擇み方

既述の如く  $1/\delta = \frac{1}{10000}$  米 = 0.1 耗に取つてあれば非振動減衰をなすものと見てよい。之がためには

$$\delta = \frac{2b}{m} = 10^4 \quad m = \pi R^2 \times L_2 \rho_2$$

$$b = \left[ 1 + 0.316 \times \frac{l}{d} \times R_e^{-\frac{1}{4}} \right] \times \frac{1}{2g} \times \left( \frac{D}{d} \right)^4 \times g \rho_2 \pi R$$

假りに  $l/d=10$  とし、且つ  $R_e=10^4$  として

$$b = [1.316] \times \frac{1}{2} (\rho_2 \pi R^2) \times \left( \frac{D}{d} \right)^4$$

$$\therefore \frac{2b}{m} = \frac{1.316(\rho_2 \pi R^2) \times \left( \frac{D}{d} \right)^4}{\pi R^2 \times L_2 \rho_2} = 10^4$$

$$\frac{1.316}{L_2} \left( \frac{D}{d} \right)^4 = 10^4 \quad \left( \frac{D}{d} \right) = \frac{L_2}{1.316} \times 10^4$$

$$\frac{d}{D} = \sqrt[4]{\frac{1.316}{L_2}} \times \frac{1}{10} \quad \text{or} \quad \frac{d}{D} = \frac{0.107}{\sqrt[4]{L_2}}$$

$L_2$  が  $1m$  ならば  $d/D=0.107$

$L_2$  が  $0.5m$  ならば  $d/D=0.127$

即ち概略の處  $d/D$  が  $0.1$  位であればよいということになる。

## 記 事

本學部に於ける研究近況は次の通りである。

### 機 械 工 學 教 室

鬼頭史城： 船用推進器翼の強度に関する實驗的研究 造船協會雜誌 昭和 22 年 (1947) 8 月

鬼頭史城： 圓環殼の強度について 第 5 回應用力學聯合懇話會 於本學 昭和 23 年 (1948) 1 月 31 日講演

鬼頭史城： 軸流流體機械の特殊性能について 同上にて講演

鬼頭史城： Gibson 氏量水法における水銀柱の振動とそれによつて生ずる誤差について 日本機械學會誌 昭和 23 年 (1948) 2 月

鬼頭史城： 水力發電所に於ける電力の動搖について 機械學會誌 昭和 23 年 (1948) 5 月

鬼頭史城： 軸流流體機械の特殊性能について (第 1 報, 第 2 報) 日本機械學會誌 昭和 23 年 (1948) 4 月

栖原豊太郎： 粘性流體中に於ける物體の衝突について 第 5 回應用力學聯合懇話會於本學 昭和 23 年 (1948) 1 月 31 日講演

栖原豊太郎： 彈性係數を座標の函數としたと

きの熱彈性論と一、二の應用 同上にて講演

栖原豊太郎： 等角寫像の漸變に就いて 同上にて講演

渡部一郎・佐藤素： 遠心送風機のデイクエザの流動に関する考察 日本機械學會誌 50 卷 344 號 昭和 22 年 (1947) 3 月

渡部一郎： 遠心送風機の翼車翼型に関する實驗的研究 (第 1 報, 第 2 報) 日本機械學會誌 50 卷 351 號 昭和 22 年 (1947) 12 月

渡部一郎： 遠心送風機の翼車翼型に関する研究 (翼數の問題) 日本機械學會誌 51 卷 352 號 昭和 23 年 (1948) 1 月

### 電 氣 工 學 教 室

森 太郎： アルミニウム交流母線の電流容量 第 19 回電氣三學會聯合講演大會 昭和 16 年 (1941) 9 月

森 太郎： マグネシウム母線の接續法 第 20 回電氣三學會聯合講演大會 昭和 17 年 (1942) 4 月

森 太郎： 鋼心アルミニウム撚線の補修スリーブに就いて 第 21 回電氣三學會聯合講演大會 昭和 17 年 (1943) 10 月