Title	注目の現代幾何学「トポロジー」の最前線：目には見えない「4次元多様体」を探求する
Sub Title	
Author	山田, 久美(Yamada, Kumi)
Publisher	慶應義塾大学理工学部
Publication year	2022
Jtitle	新版 窮理図解 No.35 (2022. 11) ,p.2- 3
JaLC DOI	
Abstract	
Notes	慶應理工の4次元トポロジー：特異点に着目して4次元空間を理解する 数理科学科 早野健太 (准教授) 研究紹介
Genre	Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KO50001002-00000035-0002

今回登場するのは、現代数学の一分野である「トポロジー（位相幾何学）」で、
「4次元多様体」と呼ばれる図形を研究している早野健太准教授です。

注目の現代幾何学「トポロジー」の最前線

目には見えない「4次元多様体」を探求する

地球が球体であることは今や周知の事実だ。しかし、地球の全体像を見ることができるようになったのは、ロケットが開発された20世紀のことだ。現在、私たちは宇宙の全体像を知らない。それは宇宙を外側から眺めることができないからだ。しかし、数学の理論を駆使すれば、その問題を解決できるかもしれない。そこで力を発揮するのが「トポロジー」である。

「トポロジー」で扱う「多様体」とは何か

「トポロジー」は、日本語で「位相幾何学」と訳されるように、幾何学の一種だ。高校までに習う幾何学は「ユークリッド幾何学」と呼ばれるものだが、大学に入って学ぶトポロジーは、それとは異なるやり方で図形を分類し、その特徴を考える。

トポロジーで扱う図形は「多様体」と呼ばれる。多様体とは「全体の一部は認識できるが、全体像ははっきりとはわからない図形や空間」である。地球の表面はトポロジーの世界では「2次元多様体」と呼ばれる。地球の表面のごく一部だけを見れば「平面」で、2次元空間ととらえることができるからだ。一方で、球面は3次元空間に描かれるため、「3次元なのでは？」と思われるかもしれないが、これはあくまでも「3次元空間の中に存在する」だけであり、球面を構成する各点は(x, y)など独立した2つのパラメーター（変数）で表されるので、2次元である。

想像できない「4次元多様体」を可視化する

トポロジーでは、さらに次元の高い「3次元」や「4次元」、「5次元」など「n次元多様体」を扱っている。4次元以下を「低次元多様体」、5次元以上を「高次元多様体」と呼ぶ。その中で早野さんが研究しているのは、「4次元多様体」だ。

4次元多様体は、構成する各点が独立した4つのパラメーターで表される多様体である。そして、2次元多様体も4次元多様体も無数にある。しかし、私たちは3次元空間までしか認識できないので、4次元多様体がどのようなものかを想像できないし、見ることもできない。

「そこで、これまでの研究では、4次元多様体の特徴を、図式を使って可視化する手法が編み出されてきました。その1つに『カービー図式』があります」と早野さん。

4次元多様体のカービー図式とは図1のようなものだ。1つの4次元多様体があったとき、その特徴を考える重要な要素の1つに、4次元多様体上の関数の「特

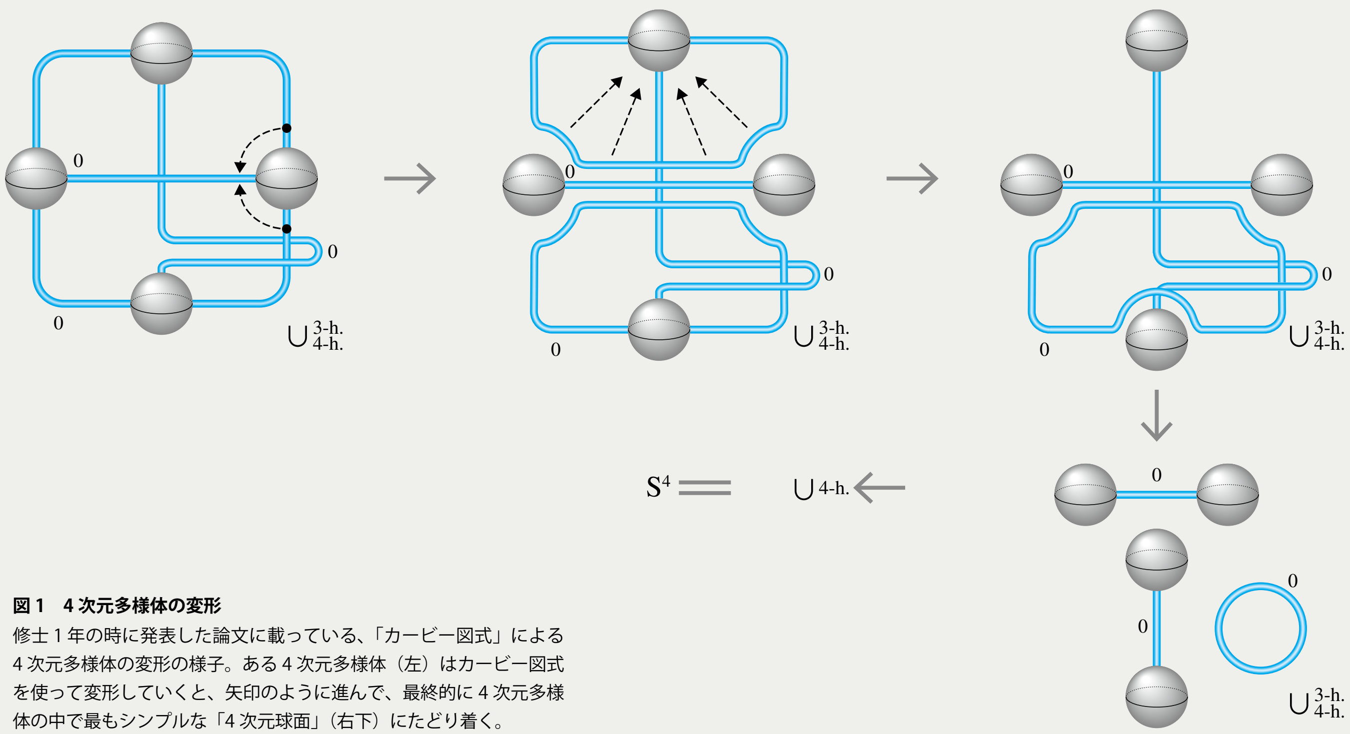

図1　4次元多様体の変形
修士1年の時に発表した論文に載っている、「カービー図式」による4次元多様体の変形の様子。ある4次元多様体（左）はカービー図式を使って変形していくと、矢印のように進んで、最終的に4次元多様体の中で最もシンプルな「4次元球面」（右下）にたどり着く。

図２ ４次元多様体の図式化

「トライセクション」と呼ばれる手法によって、１つの４次元多様体上の「関数の特異点」の位置を３つの図式で表している。

異点」（あるいは「臨界点」）がある。

「多様体の形は、関数の特異点などを調べるとわかります。特異点とは、その関数を微分すると０になる点のことを言います。関数の特異点の位置関係を、ある規則にしたがって描くことで、４次元多様体を表したものがカービー図式です」と早野さん。トポロジーの研究者は、カービー図式を見るだけで、一般の人には想像もつかない４次元多様体の形がわかるという。なお、４次元多様体の特徴を、図式を使って可視化する手法は他にもある。たとえば、図２は「トライセクション」と呼ばれる手法で、１つの４次元多様体上の関数の特異点の位置を３つの図式で表している。

早野さんはさまざまな４次元多様体について、「それらは、どのような特徴を持っているか」などを日々研究し、学生たちと議論しているという。

量子力学の「ゲージ理論」で大きな発展を遂げた４次元多様体の研究

「４次元多様体の場合、『位相構造』と『微分構造』とで大きな違いが現れることに強い興味を抱きました」と早野さん。

「位相構造とは、多様体を構成する各点の『つながり方』のみに着目して定義される構造をいいます。一方、多様体をさらに細かく分類するときに使うのが、形の“滑らかさ”による微分構造です。微分構造は位相構造の一種で、多様体の形に関して、より詳しい情報を持っています」と早野さん。

高校までで習うユークリッド幾何学では、辺の長さや角度によって図形を分類する。一方、トポロジーにおいても、「多様体に、微分構造のような付加的な構造を与えて、その構造も込めて分類したいというモチベーションがあります」と早野さん。

「トポロジーの世界では、２次元多様体において、『コーヒーカップとドーナツは同じものだ』と言われます。いずれも穴が１個で、変形していくと同じ形に行き着くからです。これは、多様体を構成する各点の“つながり方”に着目した位相構造による分類です。残念ながら、３次元以下の多様体では位相構造と微分構造との差が現れないので、私たちは実感することができませんが、４次元多様体は、位相構造と微分構造の違いが顕著なのです」と早野さん。

さらに、４次元多様体の「複素構造」にも興味があるという。「複素構造を持つ多様体は、位相構造も微分構造も持ちますが、逆は成立しません。位相構造を持つからといって微分構造を持つとは限らないし、微分構造を持つからといって複素構造を持つとは限らないのです。４次元多様体では、位相構造は同じでも微分構造が異なっていたり、同じ多様体の２つの微分構造で、一方は複素構造から得られるが他方はそうではないものが存在したりします。その辺りが４次元多様体の研究の非常に興味深いところですね」と早野さん。

位相構造を持つが微分構造を持たない４次元多様体の存在は、たとえば1952年に証明された「ロホリンの定理」より従う。また、1982年には、イギリスの数学者サイモン・ドナルドソン（1957〜）が、複数の異なる微分構造を持つ４次元多様体が存在することを量子力学の「ゲージ理論」を用いて証明した。それにより４次元多様体の理論が大きく発展した。

「宇宙の形」は解明されるのか

ではなぜn次元多様体を研究する必要があるのだろうか。

「２次元空間である平面上で、２本の直線が交差しているとき、交差を解くことはできません。しかし、３次元空間に広げると、２本の直線は上下に分かれているので、簡単に交差を解くことができます。さらに次元を高めると、多様体を動かす自由度が増えるので、交差を解くなどといった操作が簡単に行えるようになり、多様体が扱いやすくなります」と早野さん。

実際、最先端の物理学では、４次元を超える「高次元空間」が存在すると考えられており、「超ひも理論」では、宇宙は時間という次元を含めると10次元ではないかと言われている。そのため、高次元を扱うトポロジーは重要な研究手法の１つになっている。

近い将来、早野さんたちトポロジーの研究者が、宇宙の形の謎を解明してくれる日がくるかもしれない。

（取材・構成　山田久美）