慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	数学の予想問題に新たな進展をもたらす : 数学的論理体系と直感的思考を統合
Sub Title	
Author	渡辺, 馨(Watanabe, Kaoru)
Publisher	慶應義塾大学理工学部
Publication year	2013
Jtitle	新版 窮理図解 No.12 (2013. 1) ,p.2- 3
JaLC DOI	
Abstract	
Notes	研究紹介
Genre	Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KO50001002-00000012-0002

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

研究紹介

今回登場するのは、数学の一分野である整数論において、
数論幾何的手法を用いて未解決の予想問題に取り組む坂内健一准教授です。

数学の予想問題に新たな進展をもたらす

数学的論理体系と直感的思考を統合

人は論理と直感を組み合わせながらさまざまな課題に対応してきた。その直感、たとえば点や線などの幾何学的な図形を見たときに感じる直感を整数論の分野に活かす手法、それが数論幾何である。この数論幾何を用い、整数の性質を扱う整数論の問題に立ち向かう坂内（ばんない）准教授を訪ねた。

数論幾何に内在する理論と直感の絶妙なバランス

「数学の問題を解くときに問題を絵に描いたり、提示された図形に補助線を加えたりすることで直感が働き、問題が簡単に解けた、という経験があったりするかと思います。この図形に代表される幾何学の概念を使い、整数論の課題に取り組むのが数論幾何です」と、坂内さんは自らの研究分野について話す。

幾何学の概念とはどういうことだろう。$x^2+y^2=1$ という方程式の有理数解を全て求める問題を例に説明しよう。もちろん、式を一生懸命にいじってこの問題を解くこともできる。しかし、この方程式が平面上に描く半径 1 の単位円を考えると問題はずっと見通しが良くなる（図 1）。(x,y) = (−1, 0) はこの方程式の有理数解である。点（−1, 0）を通る直線を 1 つ考えると、この直線は点（−1, 0）以外に単位円ともう 1 点だけで交わる。この直線の傾きが特に有理数であれば、新たに与えられた交点は方程式の有理数解を与える。逆に方程式の有理数解を与えると、点（−1, 0）を通り傾きが有理数の直線が得られる。すなわち、方程式の有理数解は、傾きが有理数の直線と 1 対 1 に対応している。

このような幾何学的な考え方を取り入れた数論幾何は、数の性質を研究する整数論とともに発展してきた。整数論は数学の中でも長い歴史があり、整数の素朴な問題を考える上でも、背後には高度に積み重ねられた論理体系が存在する。応用も広く、最近では暗号や認証技術に活用されている。整数論の問題への 1 つのアプローチが数論幾何で、多くの問題解決への貢献が期待されている。実際、数論幾何の手法はフェルマーの最終定理やモーデル予想 (*1) の証明に使われてきた。

「私がテーマとして取り組んできたのが “ポリログ”という幾何学的な対象です。ポリログにはいくつもの整数論的に重要な量を統一的に捉える力があります。数学の予想問題には、一見すると関係なさそうな 2 つの量の関係を明らかにするという問題が多数存在します。そのような問題に対し、その双方を統一的に説明できる上位の概念を提示できれば、両者の関係の解明に一歩近づけます。ポリログはその架け橋的役割を担えるのです」。

問題の本質を捉えることで重要な量の関係を解き明かす

坂内准教授が取り組むポリログは、“幾何学的な対象”の一種である。その概念を説明するため、ここでは “幾何学的な対象”を “図形”と読み替えてみよう。一般に図形があれば、その図形から「面積」や「頂点の数」など、様々な量を導きだすことができる。したがって、比較したい整数論的に大事な量が複数あった

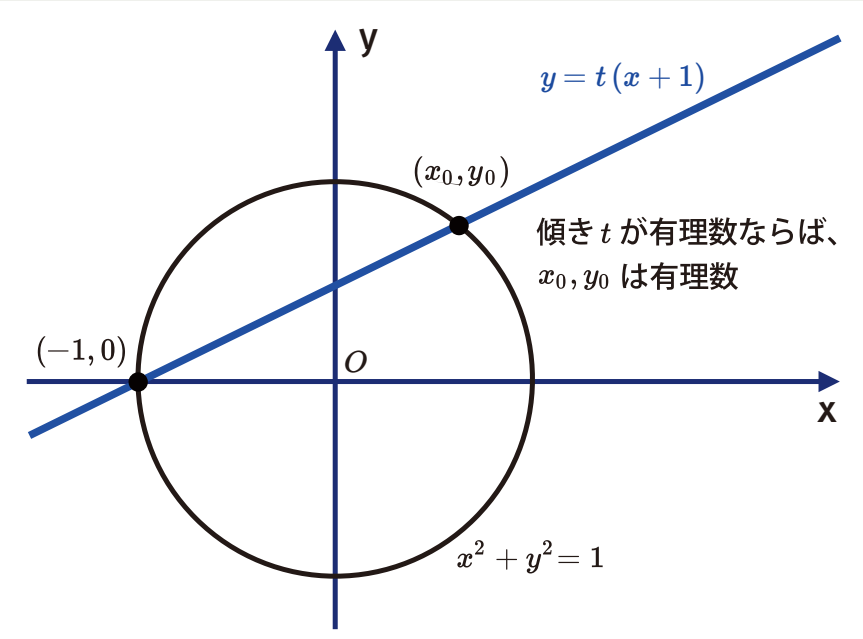

図 1　幾何を使って整数論の問題を解く

方程式 $x^2+y^2=1$ の有理数解は、点（−1, 0）を通り傾きが有理数の直線と 1 対 1 に対応している。このように、方程式を円と見て図形的に考えると、問題の見通しが良くなる。

場合、これらの量を内在する図形を見つけることができれば、もともとの量を同じ図形の構成要素として捉えることで、異なる量を関係づける数式などを見いだすことができる。ポリログは、整数論的に大事な量を内在的に持っている図形なのである。

「たとえば、A という性質や量をどんどん抽象化したら、シンプルな図形で表せたとします。次に A とは全く違って見える B という性質や量を同じ手法で抽象化します。それが A と同じシンプルな図形で表せた場合、A と B の見た目はバラバラですが、本質的な部分で両者は同じであり、A と B を統合するルールの存在を期待することができるのです」。このような抽象化によって得られる幾何学的な対象を、数論幾何の発展に大きく貢献したグロタンディーク(*2)は“モチーフ（Motive）”と呼ぶ。ポリログは、数論幾何の重要な概念であるこのモチーフの一例である（図 2）。

「グロタンディークが使うモチーフという言葉は、実は画家セザンヌ(*3)の絵画評から引用されています。セザンヌはうつろい行く光と影で描写する印象派から距離を置き、実際の絵画対象（モチーフ）を確実に捉えるという独自の絵画様式の確立に尽力したそうです。表面的な事象ではなく本質を捉えるのが、数論幾何のモチーフです」。

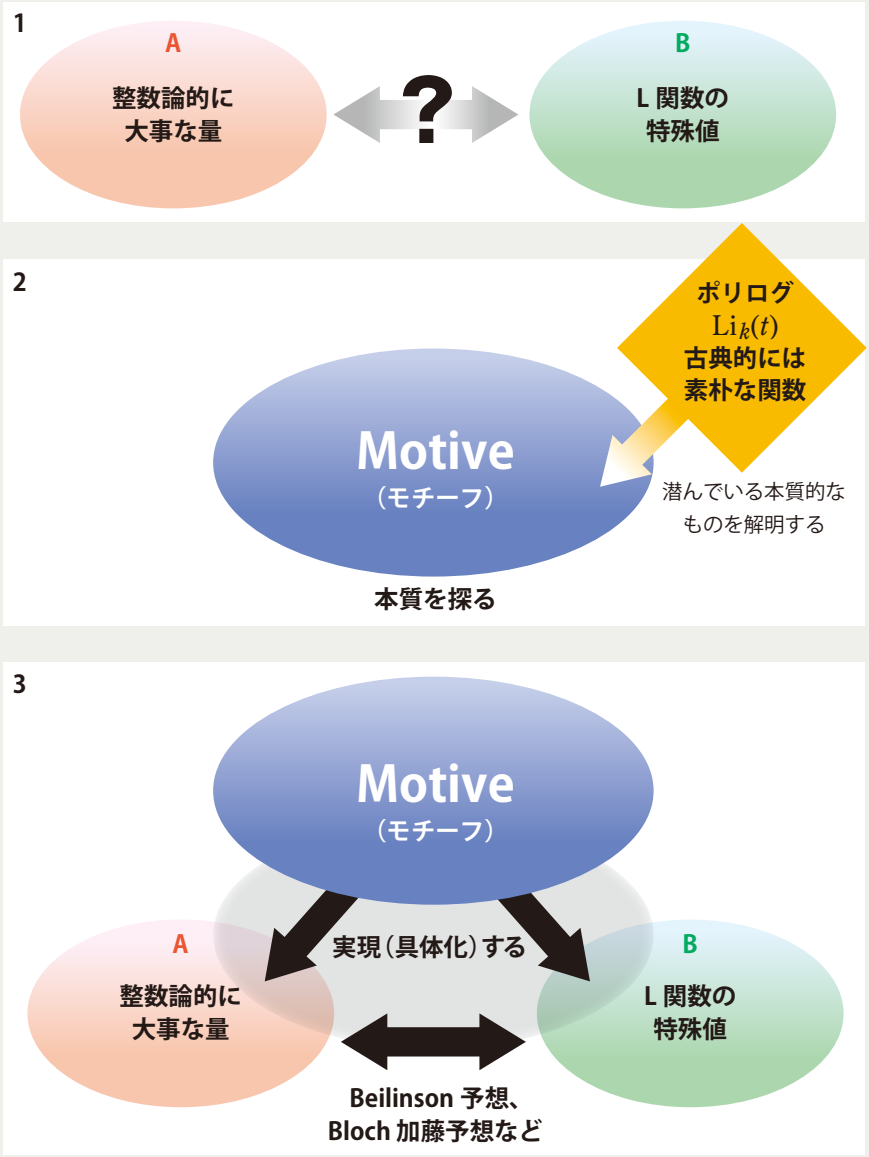

図 2　ポリログのはたらき

（1）「整数論的に大事な量」と「L 関数の特殊値」という一見まったく関係のない 2 つの事象がある。（2）ポリログ関数を抽象化して得られた、この 2 つの事象の上位にある Motive（モチーフ）を使って、その背景にある本質的な関係を探る。（3）Motive を経由することで、無関係と思われた 2 つの事象の関係性を示すことができる。その関わりを通して、Beilinson 予想や Bloch 加藤予想などの問題の解決が導かれる。

仲間との共同研究を通し数学の予想問題の解決に挑む

研究内容の奥深さに対して坂内さんがテーマとしてポリログを選んだ理由はシンプルでわかりやすい。

「一番の理由は、ポリログの素朴さにひかれたからです」と坂内さんは微笑む。一般に数学者といえば、研究に没頭する世捨て人的な印象が色濃い。つい孤高を愛する数学者をイメージしてしまうが、実際の状況は必ずしもそうではない。

「高校などで数学の問題を解くときの感覚から、数学の研究は 1 人で孤軍奮闘という印象があるかもしれません。しかし実際のところ数学は、世界中の数学者と様々な考えを議論することを通して研究を進めていく、非常に国際性の高い分野です。私の最近の一連の研究も、ドイツ・レーゲンスブルグ大学の G. Kings 教授と共同で行っています。今私の研究室でも、各人それぞれのテーマを持ちながらもお互い議論し合って勉強や研究を進めています。仲間がいるという状況を楽しみつつ、そのメリットを最大限活用しています」。

坂内さんは、ポリログの発展が問題の本質解明に役立つ重要な鍵になると考えている。なにより、様々な性質や量の抽象化を通して統一的なルールを見出すという発想に、未解決の予想問題に対する美しい解法を提供する可能性を見ているのである。

（取材・構成　渡辺 馨）

＊1 **フェルマーの最終定理やモーデル予想：**
どちらも長らく数学上の未解決問題であったが、モーデル予想は 1983 年にゲルト・ファルティングス（Gerd Faltings）が、フェルマーの最終定理は 1995 年にアンドリュー・ワイルズ（Andrew Wiles）が解決した。

＊2 **グロタンディーク：**
アレクサンドル・グロタンディーク（Alexander Grothendieck）。フランス高等科学研究所（IHÉS）の創始者メンバーである。代数幾何の基盤に可換環論をはじめとして多くの数学的手法を持ち込み豊かな視点を持たせることで、数学全般に革命的な進歩をもたらした。

＊3 **セザンヌ：**
ポール・セザンヌ（Paul Cézanne）。ポスト印象派の画家。当初は印象派の一員として活躍していたが、しだいに絵画対象（モチーフ）そのものを捉える重要性に目覚めた。20 世紀の美術に多大な影響を与えた。