

Title	経済理論におけるベルジュの最大値定理
Sub Title	
Author	小宮, 英敏(Komiya, Hidetoshi)
Publisher	慶應義塾大学商学部創立五十周年記念日吉論文集編集委員会
Publication year	2007
Jtitle	慶應義塾大学商学部創立五十周年記念日吉論文集 (2007.) ,p.529- 540
JaLC DOI	
Abstract	
Notes	
Genre	Book
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KO40001001-00000001-0529

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

経済理論におけるベルジュの最大値定理

小 宮 英 敏

1. 序論

クロード・ベルジュ (Claude Berge) が著した “Espaces topologiques: fonctions multivoques” [1] はそれが発刊されて以来現在に至るまで、英訳もなされ数学を使用した厳密な経済理論を展開しようとする経済学者が重宝している本である。ベルジュは5年程前にこの世を去った。本稿ではこの本に記されている多くの有用な定理の中でも彼の名を冠して呼ばれる最大値定理に焦点を絞り論じる。

非空な集合を値としてもつ関数は集合値関数、多価写像、対応などと呼ばれ、この型の関数の連続性の研究は数理経済学の理論展開に際し必要不可欠のものである。本稿では一貫してこれを対応と呼んでいく。位相空間の間の対応の連続性に関する基本的な定理が [1] に記されており、それをここに提示する。

定理 1 [ベルジュ] 関数 φ は位相空間 Y 上で定義された実数値関数であり、 Γ は位相空間 X から位相空間 Y への連続対応であり、すべての $x \in X$ に対し $\Gamma(x)$ は非空コンパクトであるとする。このとき、 X 上の実数値関数 M を

$$M(x) = \max\{\varphi(y) : y \in \Gamma(x)\}, x \in X$$

と定義すると、 M は X 上で連続である。さらに、 X 上の対応 Φ を

$$\Phi(x) = \{y \in Y : y \in \Gamma(x), \varphi(y) = M(x)\}, x \in X$$

と定義すると、 Φ は X 上で上半連続である。

この定理の中心は関数 M と対応 Φ に関する主張であるが、共に関数 φ の最大値に関連して定義されていることから、本定理は最大値定理、あるいはベルジュの本で初めて明確に取り上げられたため、ベルジュの最大値定理と呼ばれる。経済学では合理的な行為者はその特性を表している関数を最大化すると仮定される。例えば、消費者は自らの効用関数を、生産者は自らの利潤関数を最大化するとの仮定の下に理論が構築される。従って、行為者の行動は数学的には最適問題を解くことに還元され、行為者の行動の分析にベルジュの最大値定理が必要とされるのである。

通常の関数の連続性については一般によく知られた概念であるのでくり返しその定義を述べることはしないが、ベルジュの最大値定理に表われる対応の連続性については第2節で紹介する。その導入法は一般に知られたものと異なり、集合族に位相を導入しその位相について連続であることをもって対応の連続性を定義しているが、[1]などで解説されている通常の対応の連続性と同値である。しかし、本稿の導入法を取ることで、対応の連続性の理解が統一的となり議論の本質がつかみやすくなると判断している。また、[1]に表れる最大値定理は一般の位相空間を対象とした定理であるが、多くの経済理論が基盤とする空間は有限次元ユークリッド空間であるため、本稿ではこの空間で議論を行うことにする。しかしながら、数理経済学において無限次元の議論が必要ないということの意味している訳ではないことに留意されたい。ほんの一例であるが[3]とその参考文献にあるように無限次元の文脈でもベルジュの最大値定理は重要な役割を果たしている。

第3節ではベルジュの最大値定理を基礎として消費者の需要対応の導出とその連続性の議論を行なう。これは経済理論へのベルジュの最大値定理の応用として最もよく知られた典型的な話題である。

第4節ではベルジュの最大値定理の本質的な部分を抜き出し、ナッシュ交渉解の連続性を証明する。これはベルジュの最大値定理のふたつめの経済学、より正確にはゲーム理論への応用であり、本稿で初めて表れるものである。

第5節では最大値定理の逆に関する結果を紹介し、それを対応の不動点理論に応用する。この話題は本稿の著者による[4]で論じられたものである。

2. 最大値定理の周辺

ベルジュの最大値定理に表われるいくつかの連続性の概念の紹介から始める。 l 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^l$ の部分集合 X と X のすべての非空コンパクト部分集合の族 $\mathcal{K}(X)$ を考える。族 $\mathcal{K}(X)$ の任意の二つの元 A, B に対し、 $\rho(A, B)$, $\delta(A, B)$ と表記される二つの非負実数を以下のように定義する。

$$\rho(A, B) = \max\{d(x, B) : x \in A\};$$

$$\delta(A, B) = \max\{\rho(A, B), \rho(B, A)\}.$$

ここで、 $d(x, B)$ は $\min\{\|x - b\| : b \in B\}$ で定義される点 x と集合 B の間の距離を表しており、 $\|\cdot\|$ は $\mathbb{R}^l$ のユークリッドノルムである。非負実数 $\delta(A, B)$ は A と B の間のハウスドルフ距離と呼ばれている。次に我々は $\mathcal{K}(X)$ に三つの位相 ν, λ, τ を ρ と δ を使い定義する。任意の $A \in \mathcal{K}(X)$ と実数 $\varepsilon > 0$ に対し、 $\mathcal{K}(X)$ の部分集合 $U(A, \varepsilon)$ を

$$U(A, \varepsilon) = \{B \in \mathcal{K}(X) : \rho(B, A) < \varepsilon\}$$

と定義する。同様に $L(A, \varepsilon)$ を

$$L(A, \varepsilon) = \{B \in \mathcal{K}(X) : \rho(A, B) < \varepsilon\}$$

と定義する。このとき、族 $\{U(A, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ は A の基本近傍系を成すことは容易に確かめられるので、これらを使い $\mathcal{K}(X)$ 上の一つの位相を定義することができる。これを ν と表す。同様に族 $\{L(A, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ によって定義される $\mathcal{K}(X)$ 上の位相を λ と表す。これら二つの位相 ν と λ は共に第一可算公理を満たすので列でその位相を記述することができる。列 $\{A_n\}$ が位相 ν に関して A に収束することを簡単に $\{A_n\}$ は A に ν -収束するということにする。 λ -収束という言葉使いも同様である。また、ハウスドルフ距離 δ は実際 $\mathcal{K}(X)$ 上の距離となっており ([1] 参照)、 δ による位相を τ と表す。この位相 τ は上述の二つの位相 ν と λ より強い位相のうちで最弱なものであることは容易に確かめることができる。

以上の準備の下に対応の連続性を定義する。 X を $\mathbb{R}^l$ の部分集合、 Y を $\mathbb{R}^m$ の部分集合とする。対応 $\Gamma : Y \rightarrow \mathcal{K}(X)$ は $\mathcal{K}(X)$ の位相 ν に関し連続であるとき、上半連続であるという。そして位相 λ に関し連続であるとき下半連続であるという。さらに、上半連続でありかつ下半連続であるとき単に連続であるという。上記で定義した対応の連続性は $\mathcal{K}(X)$ 上の位相 τ に関する連続性と同値であることは容易に確認することができる。以上の半連続性を含めた対応の連続性の導入法は通常のもの（例えば [1]）とは異なるがコンパクト値の対応に対しては同値である。また、対応の値がすべて一点集合であるような特別な場合、即ち、通常の写像である場合には、それが上半連続であることと下半連続であることは同値でありさらに通常の連続性と一致することを見るのも容易である。

[1] に与えられた証明法を踏襲することにより、以下のようにベルジュの最大値定理を二変数関数を含むように一般化できることはよく知られている。([2])

定理 2 集合 X を $\mathbb{R}^l$ の部分集合、集合 Y を $\mathbb{R}^m$ の部分集合とする。関数 $\varphi : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ は連続であり、対応 $\Gamma : X \rightarrow \mathcal{K}(Y)$ は連続であるとする。このとき、

$$M(x) = \max\{\varphi(x, y) : y \in \Gamma(x)\}$$

で定義された X 上の実数値関数は連続であり,

$$\Phi(x) = \{y \in \Gamma(x) : \varphi(x, y) = M(x)\}$$

で定義された対応 $\Phi : X \rightarrow \mathcal{K}(Y)$ は上半連続である.

この最大値定理もまた経済理論で有用である. さらに, 集合 Y は凸集合であり, 対応 Γ は凸値であり, 関数 φ は第二変数に関し擬凹であるという仮定が満たされた状況で使われることが多々ある. この場合定理 2 の結論は当然のことながら強くなり, 対応 $\Phi : X \rightarrow \mathcal{K}(Y)$ は上半連続であるだけでなく凸値であることが演繹される.

3. 需要対応の導出と連続性

数理経済学ではよく知られた事実ではあるが, ベルジュの最大値定理を根拠に需要対応の導出とその連続性を議論する. 初めに本節で使われる $\mathbb{R}^l$ の元の間順序関係を確認しておく. $\mathbb{R}^l$ の任意の二つの元 $x = (x^1, \dots, x^l)$ と $y = (y^1, \dots, y^l)$ について, すべての $i = 1, \dots, l$ に対し, $x^i > y^i$ が成立するとき $x \gg y$ とかき, すべての $i = 1, \dots, l$ に対し, $x^i \geq y^i$ が成立するときに, $x \geq y$ とかく. さらに, $x \geq y$ かつ $x \neq y$ であるとき, $x > y$ とかく. そして, $\mathbb{R}^l$ の部分集合 $\{x \in \mathbb{R}^l : x \geq 0\}$ と $\{x \in \mathbb{R}^l : x \gg 0\}$ をそれぞれ $\mathbb{R}_+^l$ と $\mathbb{R}_{++}^l$ で表す.

消費者理論においてひとりの消費者が l 個の財を消費する状況がモデル化される. 第 i 財が x^i 単位消費された場合の消費者の効用が $u(x^1, \dots, x^l)$ で与えられ, 各財の消費量は非負であるとし効用関数の定義域は $\mathbb{R}_+^l$ と仮定される. 従って, 消費者の特性は効用関数 $u : \mathbb{R}_+^l \rightarrow \mathbb{R}$ で記述されることになる. 通常, $\mathbb{R}_+^l$ の二つの元, 即ち, 二つの消費量の組がユークリッドノルムの意味で近いとき消費量は近いと解釈し, そのときはそれぞれの消費ベクトルから得られる効用の違いは小さいことが期待されるため, 効用関数 u は連続であると仮定される. また消費者の収入 w は非負と仮定されるが, これは自然なことである. 各財 i の価格 p^i はすべて正であると仮定し, これらの価格に直面した消費者の行動は自らの収入の範囲で実行可能な財の組合せの中から効用を最大化するものを選択すると仮定される. 自らの収入の範囲は予算集合 $\Gamma(p, w)$ として表される. 具体的には

$$\Gamma(p, w) = \{x \in \mathbb{R}_+^l : p \cdot x \leq w\}$$

と表される. ここで $p \cdot x$ はベクトル p と x のユークリッド内積を表しているが, $p \cdot x$ が財の組合せ x を消費するために必要な額であることは明らかだろう. 予算の範囲内で自らの効用を最大化するという消費者の合理的行動は以下の最適化問題として定式化される.

制約 $x \in \Gamma(p, w)$ の下で $u(x)$ を最大化する.

この消費者の効用最大化問題にベルジュの最大値定理を素直に適用することができる. p が $\mathbb{R}_{++}^l$ の元であるとの仮定から $\Gamma(p, w)$ はコンパクトであることが容易に分るので予算制約の対応 Γ はコンパクト値である. また, Γ は対応として連続であることも確認でき, u と Γ に対してベルジュの最大値定理を適用することができる. そして, その結論に表われる関数と対応の連続性が保証されることになる. 定理 1 における関数 M は上記の消費者モデルにおいては

$$u^*(p, w) = \max\{u(x) : x \in \Gamma(p, w)\}$$

に相当するが, これは経済学では消費者の間接効用と呼ばれているものに他ならない. さらに上半連続性が保証される対応は,

$$\Phi(p, w) = \{x \in \Gamma(p, w) : u(x) = u^*(p, w)\}$$

であるが, これは消費者の需要対応と呼ばれているものである. 以上の記述をまとめ, さらに第 2 節の最後に記したことに注意すると次の定理を得る.

定理 3 間接効用 u^* は $\mathbb{R}_{++}^l \times \mathbb{R}_+$ 上の連続関数であり, 需要対応 Φ は $\mathbb{R}_{++}^l \times \mathbb{R}_+$ 上の上半連続コンパクト値対応である. さらに, もし効用関数 u が擬凹であれば需要対応 Φ は凸値である.

数理経済学者は経済理論に表われる様々な関数や対応の連続性の問題にしばしば出くわすのであり, 最大値定理はそれを解決する基本的な道具となっている.

4. ナッシュ交渉解の連続性

本節では交渉解が本来的に持つべきであるとされる連続性の問題をナッシュ交渉解を対象に論じる. ここでもベルジュの最大値定理に内在する考え方が重要な位置をしめるのだが, 残念ながら定理そのままの形を使って問題の解決に向かうことができない. そこで, ナッシュ交渉解の連続性を証明するためにベルジュの最大値定理を一般化した最大値定理を準備する.

定理 4 集合 X を $\mathbb{R}^l$ の部分集合, φ を X 上の連続実数値関数とする. このとき,

$$M(A) = \max\{\varphi(x) : x \in A\}, \quad A \in \mathcal{K}(X)$$

と定義される $\mathcal{K}(X)$ 上の実数値関数 M は $(\mathcal{K}(X), \tau)$ 上の連続関数であり,

$$\Phi(A) = \{x \in A : \varphi(x) = M(A)\}, \quad A \in \mathcal{K}(X)$$

と定義される対応 Φ は $(\mathcal{K}(X), \tau)$ から $(\mathcal{K}(X), \nu)$ への連続対応である。

証明 $\mathcal{K}(X)$ 内の任意の点 A をとり, A に τ -収束する $\mathcal{K}(X)$ 内の列 $\{A_n\}$ をとる。

まず, 列 $\{M(A_n)\}$ が $M(A)$ に収束することを示し, M の連続性を導く. 点 A を含む開集合 U を

$$U = \bigcup_{a \in A} \{x \in X : |\varphi(x) - \varphi(a)| < \varepsilon\}$$

と定義する. このとき, $n \geq n_0$ なるすべての n に対し $A_n \subset U$ であるような自然数 n_0 が存在する. 従って, A_n 内の任意の a_n に対し $\varphi(a_n) < \varphi(a) + \varepsilon$ であるような $a \in A$ が存在する. よって, すべての $a_n \in A_n$ に対し $\varphi(a_n) < M(A) + \varepsilon$ である. 即ち, $n \geq n_0$ なるすべての n に対し $M(A_n) \leq M(A) + \varepsilon$ となる. 一方, $\Phi(A)$ 内の任意の点 a と任意の $\varepsilon > 0$ をとり, a の近傍 V を

$$V = \{x \in X : |\varphi(x) - \varphi(a)| < \varepsilon\}$$

と定義する. このとき, $n \geq n_1$ なるすべての n に対し $A_n \cap V \neq \emptyset$ であるような自然数 n_1 が存在するので, 各 n ごとに $A_n \cap V$ の元 a_n をとる. この a_n を使うと次の不等式を導くことができる:

$$M(A) = \varphi(a) < \varepsilon + \varphi(a_n) \leq \varepsilon + M(A_n).$$

以上をまとめると, 十分大きい n に対し, $M(A) - \varepsilon \leq M(A_n) \leq M(A) + \varepsilon$ が成立するので M は連続である.

次に列 $\{\Phi(A_n)\}$ が $\Phi(A)$ に ν -収束することを示す. 仮に列 $\{\Phi(A_n)\}$ が $\Phi(A)$ に ν -収束していないと仮定すると, 任意の m に対し $\Phi(A_{n_m}) \not\subset U$ である $n_m \geq m$ が存在するような $\Phi(A)$ を含む開集合 U が存在するので, $a_{n_m} \notin U$ であるような $a_{n_m} \in \Phi(A_{n_m})$ をとることができる. 列 $\{A_{n_m}\}$ は A に ν -収束しているので, $\{a_{n_m}\}$ の部分列 $\{a_{n_{m_i}}\}$ と $\|a_{n_{m_i}} - a'_i\| < 1/i$ を満たす A 内の列 $\{a'_i\}$ が存在する. 集合 A はコンパクトなので, A 内に極限 a_0 をもつ $\{a'_i\}$ の部分列 $\{a'_{i_j}\}$ が存在する. 従って, 列 $\{a_{n_{m_{i_j}}}\}$ は a_0 に収束する. 関数 M は連続なので, 列 $\{M(A_{n_{m_{i_j}}})\}$ は $M(A)$ に収束する. 一方, $M(A_{n_{m_{i_j}}}) = \varphi(a_{n_{m_{i_j}}})$ なので, 列 $\{M(A_{n_{m_{i_j}}})\}$ は $\varphi(a_0)$ に収束するので, $M(A) = \varphi(a_0)$, 即ち $a_0 \in \Phi(A)$ が成立する. ところが, 集合 U は開集合なので $a_0 \notin U$ となるがこれは矛盾である. Q. E. D.

定理 4 がベルジュの最大値定理 (定理 1) の一般化になっていることは以下のように考えることにより明らかである. 定理 1 の関数 M は定理 4 の連続関数 M と定理 1 の連続多価関数 Γ との合成とみることができるので定理 1 の M の連続性を定理 4 から容易に導くことができる. また, 定理 1 の Φ の上半連続性についても同様に考えて導くことができる.

これから定理 4 をナッシュ交渉問題に応用し、その解の連続性を導くことにする。その準備としていくつかの記号を導入する。任意の $\mathbb{R}^l$ の二点 x, y に対し、 $x * y \in \mathbb{R}^l$ を $x * y = (x^1 y^1, \dots, x^l y^l)$ で定義する。 $\mathbb{R}^l$ の部分集合 X と $\mathbb{R}^l$ の点 x に対し、 $x * X$ と $X + x$ をそれぞれ $x * X = \{x * y : y \in X\}$, $X + x = \{y + x : y \in X\}$ と定義する。また、集合 $\{1, \dots, l\}$ のすべての順列からなる集合を Π で表す。 $\mathbb{R}^l$ の任意の点 x と Π 内の任意の順列 π に対し、 $\pi(x)$ を $\pi(x) = (x^{\pi(1)}, \dots, x^{\pi(l)})$ で定義する。

l 人交渉ゲームとは $\mathbb{R}^l$ のコンパクト凸集合 U と U 内の点 d の組 (U, d) で表される。このゲームのプレイヤーは $\{1, \dots, l\}$ であると想定され、集合 $U \subset \mathbb{R}^l$ はプレイヤーの実行可能利得の集合を表しており、 $d \in U$ は交渉が決裂した場合のプレイヤーの利得を表している。そして U 内の点 u で $u \gg d$ となるものが存在すると仮定する。これはすべてのプレイヤーには交渉に加わることで自らの利得を高める可能性があることを保証する条件である。 l 人交渉ゲーム (U, d) は、任意の $u \in U$ と任意の $\pi \in \Pi$ に対し、 $\pi(u) \in U$ が成立し、そして任意の $\pi \in \Pi$ に対し $\pi(d) = d$ が成立するとき、対称であるという。ここで $\pi(d) = d$ が任意の順列 π について成立するということは、 d の成分がすべて等しいことを意味していることに他ならない。

すべての l 人交渉ゲーム (U, d) の集合を $\mathcal{B}^l$ で表す。即ち、

$$\mathcal{B}^l = \{(U, d) \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^l) \times \mathbb{R}^l : U \text{ は凸}, d \in U, \text{ かつ } u \gg d \text{ なる } u \in U \text{ が存在する}\}$$

である。そして、 $\mathcal{B}^l$ を l 人交渉問題と呼ぶ。 l 人交渉問題 $\mathcal{B}^l$ の解とは、関数 $f: \mathcal{B}^l \rightarrow \mathbb{R}^l$ で、すべての $(U, d) \in \mathcal{B}^l$ に対し $f(U, d) \in U$ を満たすものをいう。解 f は各交渉ゲーム (U, d) に対し交渉の結果である合意点 $f(U, d)$ を与えるものと解釈される。ナッシュは [6] において解は次の四つの性質を満たすべきであると考えた。

1. $x > f(U, d)$ ならば $x \notin U$ である；
2. (U, d) が対称ならば、すべての π に対して $\pi(f(U, d)) = f(U, d)$ が成立する；
3. $U' = a * U + b$ と $d' = a * d + b$ がある $a \gg 0$ と b に対して成立しているような (U, d) , $(U', d') \in \mathcal{B}^l$ に対して、

$$f(U', d') = a * f(U, d) + b$$

が成立する；

4. $U \subset V$ と $f(V, d) \in U$ が成立するような任意の $(U, d), (V, d) \in \mathcal{B}^l$ に対して、

$$f(U, d) = f(V, d)$$

が成立する。

これら四つの性質の交渉問題における解釈については [8] に詳しいのでここでは省略する。

交渉ゲーム (U, d) について, 集合 $\{u \in U: u \geq d\}$ を U_d と表す. 次の定理はナッシュ [6] により証明された有名な結果である. そして, この定理でその存在が保証される解 f はナッシュ交渉解と呼ばれる.

定理 5 [ナッシュ] l 人交渉問題 B^l の上記四つの性質を満たす解 f は唯一つ存在し, それは

$$f(U, d) = \arg \max \left\{ \prod_{i=1}^l (u_i - d_i) : u \in U_d \right\}$$

を満たす. 上記の右辺は実際 1 点集合となり, 解 f は通常の写像である.

解の連続性は自然な要請であるが, 上で証明した定理 4 を使いその連続性を以下で証明する.

定理 6 l 人交渉問題 B^l を $(K(\mathbb{R}^l), \tau)$ と $\mathbb{R}^l$ の直積空間の部分空間とみなすと, ナッシュ交渉解 $f: B^l \rightarrow \mathbb{R}^l$ は連続である.

証明 以下に証明する補題 1 と補題 3 と定理 4 を組み合わせれば明らか. Q. E. D.

定理 6 の証明に必要な補題を証明する.

補題 1 $\{(U_n, d_n)\}$ を交渉ゲームの列とし, (U, d) を交渉ゲームとする. もし $\{U_n\}$ が U に ν -収束し, $\{d_n\}$ が d に収束するならば, $\{(U_n)_{d_n}\}$ は U_d に ν -収束する.

証明 $u \gg d$ かつ $t = \min_{1 \leq i \leq l} (u^i - d^i) < 1$ である $u \in U$ をとり, $T = \max \{\max_{x \in U} \|x - u\|, 1\}$ とおく.

$0 < \varepsilon < T$ を満たす任意の ε に対し, $0 < \varepsilon' < t\varepsilon/2 < \varepsilon$ なる ε' をとる. $\{U_n\}$ は U に ν -収束し $\{d_n\}$ は d に収束するので, 自然数 n_0 が存在し, 任意の $n \geq n_0$ と任意の $x_n \in (U_n)_{d_n}$ に対し, $\|x - x_n\| < \varepsilon'/T$ なる $x \in U$ が存在し, かつ $\|d_n - d\| < \varepsilon'/T$ となっている. $I = \{i: x^i < d^i\}$, $J = \{i: x^i \geq d^i\}$ とおく. このとき $i \in I$ に対し $d^i - x^i < 2\varepsilon'/T$ となっていることは容易に確認できる. $s = 2\varepsilon'/tT$ とおくと $0 < s < 1$ であることは明らかなので, $y = x + s(u - x)$ とおくと U の凸性より y は U に属する. $i \in I$ に対し,

$$y^i = x^i + s(u^i - x^i) > x^i + s(u^i - d^i) \geq x^i + \frac{2\varepsilon'}{tT}(u^i - d^i) \geq x^i + \frac{2\varepsilon'}{T} \geq d^i$$

が成立する. また, $i \in J$ に対し, $y^i = (1-s)x^i + su^i > d^i$ である. 従って, $y \gg d$ となり $y \in U_d$ が求まる. 一方,

$$\|y - x\| = s\|u - x\| \leq \frac{2\varepsilon'}{tT}\|u - x\| \leq \frac{2\varepsilon'}{t}$$

であるので,

$$\|y - x_n\| \leq \|y - x\| + \|x - x_n\| \leq \frac{2\varepsilon'}{t} + \frac{\varepsilon'}{T} < 2\varepsilon$$

となり, $n \geq n_0$ であるすべての n に対し, $\rho((U_n)_{d_n}, U_d) < 2\varepsilon$ となるので証明が終る. Q. E. D.

補題 2 $\{(U_n, d_n)\}$ を交渉ゲームの列とし, (U, d) を交渉ゲームとする. もし $\{U_n\}$ が U に λ -収束し, $\{d_n\}$ が d に収束するならば, 任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $x \in U_d$ に対し, 自然数 n_0 が存在し, $n \geq n_0$ なるすべての n に対し, $\|x_n - x\| < \varepsilon$ となる $x_n \in (U_n)_{d_n}$ が存在する.

証明 任意の $\varepsilon > 0$ と $x \in U_d$ と $u \gg d$ なる $u \in U$ をとり, それらを固定する. $I = \{i: x^i = d^i\}$, $J = \{i: x^i > d^i\}$ とおく. $i \in I$ に対し, $x^i = d^i < u^i$ であるので, $0 < s < 1$ であり, $i \in I$ に対しては $0 < s(u^i - x^i) < \varepsilon$ であり $i \in J$ に対しては $-\varepsilon < s(u^i - x^i) < \varepsilon$ であるような s を選ぶことができる. 列 $\{U_n\}$ は U に λ -収束するので, $x_n \in U_n$ と $u_n \in U_n$ が存在し $\{x_n\}$ は x に収束し $\{u_n\}$ は u に収束している. $u \gg d$ で $\{d_n\}$ が d に収束しているので, 十分大きな n について $u_n \gg d_n$ となっている.

$i \in I$ に対しては, $u_n^i - x_n^i$ が $u^i - x^i$ に収束しており, $x_n^i - d_n^i$ が $x^i - d^i = 0$ に収束しているので, 十分大きい n に対し, $0 < x_n^i - d_n^i + s(u_n^i - x_n^i)$ が成立する. よって, $d_n^i < x_n^i + s(u_n^i - x_n^i)$ をうる. 一方, $x_n^i - x^i$ が 0 に収束しているので, 十分大きい n に対し, $0 < x_n^i - x^i + s(u_n^i - x_n^i) < \varepsilon$ が成立する.

$i \in J$ については, $d_n^i < x_n^i$ と $d_n^i < u_n^i$ が成立しているので, 十分大きい n については, $d_n^i < x_n^i + s(u_n^i - x_n^i)$ が成立する. $x_n^i - x^i$ が 0 に収束し $|s(u^i - x^i)| < \varepsilon$ が成立するので, 十分大きい n に対し, $|x_n^i + s(u_n^i - x_n^i) - x^i| < \varepsilon$ が成立する.

従って, 十分大きい n に対して, $x_n + s(u_n - x_n) \geq d_n$ と $\|x_n + s(u_n - x_n) - x\| < \sqrt{l} \varepsilon$ が成立する. さらに, U_n の凸性より $x_n + s(u_n - x_n)$ は $(U_n)_{d_n}$ に属する. ここで $x_n + s(u_n - x_n)$ を本補題の x_n とみなせば証明が完了する. Q. E. D.

補題 3 $\{(U_n, d_n)\}$ は交渉ゲームの列とし, (U, d) は交渉ゲームとする. もし $\{U_n\}$ が U に λ -収束し $\{d_n\}$ が d に収束するならば, $\{(U_n)_{d_n}\}$ は U_d に λ -収束する.

証明 任意の $\varepsilon > 0$ をとる. U_d はコンパクトなので, U_d 内の有限個の点 $a_1, \dots, a_p$ が存在し $\bigcup_{i=1}^p B_\varepsilon(a_i) \supset U_d$ が成立している. ここで, $B_\varepsilon(a_i)$ は中心 a_i , 半径 ε の開球を表わす. 補題 2 より, 各 a_i に対して, 自然数 n_i が存在し任意の $n \geq n_i$ に対し, $\|x_{n,i} - a_i\| < \varepsilon$ なる $x_{n,i} \in (U_n)_{d_n}$ が存在する. $n_0 = \max\{n_1, \dots, n_p\}$ とおくと, 任意の $n \geq n_0$ と任意の a_i に対し, $\|x_{n,i} - a_i\| < \varepsilon$ と

なる $x_{n,i} \in (U_n)_{d_n}$ が存在する. 任意の $x \in U_d$ をとる. このとき, $\|a_i - x\| < \varepsilon$ を満たす a_i が存在する. 従って, もし $n \geq n_0$ であれば, $\|x_{n,i} - x\| \leq \|x_{n,i} - a_i\| + \|a_i - x\| < 2\varepsilon$, すなわち, $\rho(U_d, (U_n)_{d_n}) < 2\varepsilon$ が成立する. Q. E. D.

5. 最大値定理の逆

第2節の最後で指摘したように, 定理2において関数 φ は第二変数に関し擬凹であるならばその結論として対応 Φ は凸値であることが保証される. 本節では, この凸性の仮定の下での最大値定理の逆を考察する. 具体的には以下の問題を考察する.

集合 X は $\mathbb{R}^l$ の部分集合であり, 集合 Y は $\mathbb{R}^m$ の凸部分集合であるとする. $\Phi: X \rightarrow \mathcal{K}(Y)$ は凸値上半連続対応とし, $\Gamma: X \rightarrow \mathcal{K}(Y)$ は凸値連続対応で, すべての $x \in X$ に対して $\Phi(x) \subset \Gamma(x)$ が成立しているとする. このとき, 連続関数 $\varphi: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ で次の2つの性質を満たすものが存在するか?

- (i) $\Phi(x) = \{y \in \Gamma(x) : \varphi(x, y) = \max_{z \in \Gamma(x)} \varphi(x, z)\}, x \in X;$
- (ii) 各 $x \in X$ に対して, $\varphi(x, y)$ は y に関して擬凹である.

さらに, 上記の考察の結果を応用することにより, 角谷の不動点定理と極大元の存在定理の間の関係を調べる. 実際, 本節の結果を用いて極大元の存在定理より角谷の不動点定理を導く.

次の定理が上記の問題提起に対する答である. その証明は [4] にある. この定理より上の問題は肯定的な結果を得ることを見るのは容易い. さらに, 対応 Γ の連続性やコンパクト凸値という仮定は余分であり, $\Phi(x) \subset \Gamma(x)$ の仮定のみが必要であることが分る.

定理7 [小宮] 集合 X を $\mathbb{R}^l$ の部分集合とし, $\Phi: X \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^m)$ は凸値上半連続対応とする. このとき, 以下の性質を満足する連続関数 $\varphi: X \times \mathbb{R}^m \rightarrow [0, 1]$ が存在する.

- (i) $\Phi(x) = \{y \in \mathbb{R}^m : \varphi(x, y) = \max_{z \in \mathbb{R}^m} \varphi(x, z)\}, x \in X;$
- (ii) 各 $x \in X$ に対して, $\varphi(x, y)$ は y について擬凹である.

凸性を伴わない最大値定理の逆の問題についてはその結果を出すのは上記の場合に比較して容易である. 実際, Φ が凸値であるという仮定を落とし結論で φ の擬凹性を要求しないとすれば, $\varphi(x, y) = -d((x, y), \text{Gr}(\Phi))$ と φ を定義することにより問題は解決する. ここで $\text{Gr}(\Phi)$ は Φ のグラフを表しており, Φ の上半連続性より $\text{Gr}(\Phi)$ は閉である.

次に一般均衡理論において重要な役割を果す対応に関する二つの基本的な定理について考察する。ひとつは角谷の不動点定理であり、他のひとつは極大元の存在定理である。

定理 8 [角谷] 集合 X を $\mathbb{R}^l$ のコンパクト凸集合とする。 $F: X \rightarrow \mathcal{K}(X)$ を凸値上半連続対応とすると、 F は不動点を持つ。 即ち、 $x_0 \in F(x_0)$ なる $x_0 \in X$ が存在する。

定理 9 [極大元の存在] 集合 X を $\mathbb{R}^l$ のコンパクト凸集合とする。 $\Phi: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ を凸値対応で、すべての $x \in X$ に対し $x \notin \Phi(x)$ であり、すべての $y \in Y$ に対し $\Phi^{-1}(y) = \{x \in X: \Phi(x) \ni y\}$ は X 内で開集合であると仮定する。ここで、 $\mathcal{P}(X)$ は空集合も含め X のすべての部分集合の族を表わす。このとき、 $\Phi(x_0) = \emptyset$ となる $x_0 \in X$ が存在する。

定理 9 が極大元の存在を主張していることについては少し説明が必要だろう。集合 X 上に選好順序 $\succ$ が与えられている場合を考える。任意の x に対し x より選好される X の元の集合を $\Phi(x)$ で表す。即ち $\Phi(x) = \{y \in X: y \succ x\}$ と定義する。このとき、定理 9 の仮定 $x \notin \Phi(x)$ は x 自身は x より選好されることはないことからの、そして $\Phi^{-1}(y)$ が開集合であることは選好順序が連続であることからの自然な帰結である。そして、結論の $\Phi(x_0) = \emptyset$ は x_0 より選好される元を X はもたないことを意味している。即ち、 x_0 は X 内の極大元であることに他ならない。

角谷の不動点定理を前提として、極大元の存在を導出することは比較的容易である。実際、[5] の定理 9 の証明でブラウワーの不動点定理より極大元の存在を導いている実例がある。ブラウワーの不動点定理は角谷の不動点定理において対応を通常関数としたものであるから、これは角谷の不動点定理より極大元の存在を導いていることになる。

一方、逆に極大元の存在を前提として角谷の不動点定理を導く手法は知られていないが、前出の定理 7 を使うことにより容易に導くことができる。

極大元の存在定理より角谷の不動点定理の導出

F を角谷の不動点定理の仮定を満たす対応とする。定理 7 より、関数 $\varphi: X \times \mathbb{R}^l \rightarrow [0, 1]$ で $F(x) = \{y \in \mathbb{R}^l: \varphi(x, y) = \max_{z \in \mathbb{R}^l} \varphi(x, z)\}$ がすべての $x \in X$ に対し成立し、第二変数に関し擬凹であるようなものが存在する。仮定より $F(x) \subset X$ であるので、 $F(x) = \{y \in X: \varphi(x, y) = \max_{z \in X} \varphi(x, z)\}$ となる。ここで、対応 $\Phi: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ を

$$\Phi(x) = \{y \in X: \varphi(x, x) < \varphi(x, y)\}, \quad x \in X$$

と定義すると、 Φ は定理 9 の仮定をすべて満足することは容易に確認できる。よって定理 9 より $\Phi(x_0) = \emptyset$ となる $x_0 \in X$ が存在するが、これは

$$\varphi(x_0, x_0) = \max_{z \in X} \varphi(x_0, z)$$

を意味する. そして, これは $x_0 \in F(x_0)$ が成立することに他ならない. Q. E. D.

以上定理 7 の不動点理論への一つの応用を述べたが, 他方定理 7 の無限次元への拡張が [7] において試みられている. しかし, そこで得られた結果では Φ に上半連続性以外の仮定がなされており, 完全に満足できる結果とは言い難い. 定理 7 の仮定を保ちながら, $\mathbb{R}^l$ や $\mathbb{R}^m$ を無限次元空間に置き換え, 例えばバナッハ空間に置き換えて, 同様の結論が得られるかどうかはまだ解決されていない.

参考文献

- [1] C. Berge, *Espaces topologiques: fonctions multivoques*, Dunod, Paris 1959.
- [2] G. Debreu, *Theory of Value*, Yale University Press 1959.
- [3] A. Horsley, A. J. Wrobel, T. Van Zandt, Berge's Maximum Theorem with Two Topologies on the Action Set, *Economics Letters* 61 (1998), 285-291.
- [4] H. Komiya, An Inverse of the Berge Maximum Theorem, *Economic Theory* 9 (1997), 371-375.
- [5] S. Krasa and N. C. Yannelis, An Elementary Proof of the Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz-Shapley Theorem, *Economic Theory* 4 (1994), 467-471.
- [6] J. Nash, Bargaining Problem, *Econometrica* 18 (1950), 155-162.
- [7] S. Park and H. Komiya, Another Inverse of the Berge Maximum Theorem, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis* 2 (2001), 105-109.
- [8] A. E. Roth, *Axiomatic Models of Bargaining*, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* 170, Springer 1979.